13

प्रकीर्णन के माप
(Measure of Dispersion)

13.01 प्रस्तावना (Introduction) :

पिछली कक्षा में हमने केन्द्रीय प्रवृत्ति के मापों (माध्य,माध्यिका, बहुलक) का अध्ययन किया था। लेकिन सांख्यिकीय तथ्यों का विश्लेषण करके निष्कर्ष निकालने की प्रक्रिया में केन्द्रीय प्रवृति के माप परिपूर्ण नहीं हैं। केवल इन्हीं मापों के प्रयोग के आधार पर निष्कर्ष निकालने पर बहुधा त्रुटि रह जाती है तथा भ्रामक परिणाम प्राप्त होते हैं, केन्द्रीय प्रवृतियों से हमें श्रेणी के केन्द्रीय मान का पता चलता है जो श्रेणी का प्रतिनिधित्व करता है परन्तु हमें यह नहीं मालूम पड़ता कि श्रेणी के विभिन्न मान केन्द्रीय मान के कितने पास हैं या कितने दूर फैले हुए हैं। उदाहरणार्थ निम्न सारणी में दिए गए विद्यार्थियों के तीन समूहों के गणित विषय में प्राप्ताँक इस प्रकार हैं :

समूह A:	10	10	10	10	10	10
समूह B:	9	10	11	8	10	12
समूह C:	0	5	10	10	16	19

उपर्युक्त प्रत्येक समूह का माध्य 10 है परन्तु प्राप्ताँकों के इन समूहों के आकार में बहुत अन्तर है। प्रथम समूह A के सभी प्राप्ताँक समान हैं और उनका माध्य से कोई बिखराव नहीं है। अतः माध्य पूर्ण रूप से समूह का प्रतिनिधित्व कर रहा है द्वितीय समूह B में प्राप्ताँकों में भिन्नता है और माध्य से उनका विचलन -2 से $+2$ के मध्य है। अतः माध्य सभी पदों का यथोचित प्रतिनिधित्व नहीं कर रहा है। समूह C के प्राप्ताँकों के माध्य से विचलन -10 से $+9$ के मध्य है जो बहुत अधिक है अतः माध्य समूह C के प्राप्ताँकों का उचित प्रतिनिधित्व नहीं कर रहा है। अतः श्रेणी के बारे में पूर्ण ज्ञान प्राप्त करने के लिए केन्द्रीय मान ही पर्याप्त नहीं है बल्कि विभिन्न चर के मानों का केन्द्रीय मान (central value) से औसत अन्तर श्रेणी की रचना तथा स्वरूप आदि की जानकारी भी आवश्यक है। इसके लिए इस अध्याय में हम श्रेणी के विभिन्न मानों के बिखराव के माप का अध्ययन करेंगें।

13.02 प्रकीर्णन (Dispersion) :

किसी श्रेणी के पदों का माध्य से बिखराव प्रकीर्णन कहलाता है । किसी श्रेणी का प्रकीर्णन उसके विभिन्न पदों के विचरण (variation) या अन्तर का माप है ।

प्रकीर्णन के माप (Measures of dispersion) : प्रकीर्णन के माप दो प्रकार के होते हैं

(I) निरपेक्ष माप (Absolute measure)

(II) सापेक्ष माप (Relative measure)

प्रकीर्णन की सीमा या मात्रा बताने वाली संख्या निरपेक्ष होती है। प्रकीर्णन के वे माप जिनकी इकाई वही होती है जो चर के विभिन्न मानों की होती है वे निरपेक्ष माप कहलाते हैं। ये माप दो या दो से अधिक श्रेणियों के तुलनात्मक अध्ययन के लिए उपयुक्त नहीं होते हैं। प्रकीर्णन के सापेक्ष माप अनुपात या प्रतिशत में ज्ञात किए जाते हैं। अतः यह चर के विभिन्न मानों की इकाई पर निर्भर नहीं करते। प्रकीर्णन का सापेक्ष माप, निरपेक्ष माप व माध्य जिससे प्रकीर्णन ज्ञात किया गया है, का अनुपात होता है। इस प्रकार ज्ञात किए गए अनुपात को प्रतिशत के रूप में भी व्यक्त किया जा सकता है। सापेक्ष माप को प्रकीर्णन गुणांक भी कहा जाता है। दो या अधिक श्रेणियों के तुलनात्मक अध्ययन के लिए सापेक्ष माप अधिक उपयुक्त रहते हैं।

साधारणतया सांख्यिकी में प्रकीर्णन के निम्नलिखित माप काम में लिए जाते हैं :

1. परास या विस्तार (Range)
2. चतुर्थक विचलन (Quartile deviation)
3. माध्य विचलन (Mean deviation)
4. मानक विचलन एवं प्रसरण (Standard deviation and variance)

13.03 परास या विस्तार (Range) :

(क) चरम मानों पर आधारित परास : श्रेणी में चर के उच्चतम मान (H) और निम्नतम मान (L) के अन्तर को परास (R) या विस्तार कहते हैं। उदाहरणार्थः

यदि एक कक्षा के विद्यार्थियों में सबसे लम्बे विद्यार्थी की लम्बाई 72 इंच तथा सबसे छोटे विद्यार्थी की लम्बाई 58 इंच है, तो कक्षा में विद्यार्थियों की लम्बाई का परास 72–58 = 14 इंच होगा।

यदि चर संतत श्रेणी के रूप में दिये गये हों, तो सबसे बड़े वर्ग की उच्च सीमा तथा सबसे छोटे वर्ग की निम्न सीमा का अन्तर ही परास कहलाता है।

उदाहरण 1: यदि कोई श्रेणी 5 – 10, 10 – 15, 15 – 20, 20 – 25, 25 – 30, 30 – 35 के वर्गों में विभाजित है तो श्रेणी का परास 35 – 5 = 30 होगा।

परास वास्तव में प्रकीर्णन का एक निरपेक्ष (absolute) मान है, जो चर मूल्यों के केवल चरम मानों पर ही निर्भर करता है। अतः दो श्रेणियों के प्रकीर्णन की तुलना करने के लिए यह विधि विशेष उपयोगी नहीं है। जैसे एक श्रेणी बहुत बड़ी हो, दूसरी श्रेणी बहुत छोटी हो तो एक का परास अधिक होगा व दूसरी का कम। परन्तु यह भी हो सकता है कि जिसका परास कम है उसके चर मूल्यों में बिखराव असमान हो तथा जिसका परास अधिक है उसके चर मूल्यों में बिखराव में समानता हो।

उदाहरण 2: हम निम्न दो श्रेणियों का अवलोकन करते हैं :

श्रेणी 'क' – 2, 3, 5, 8, 11, 25, 27

श्रेणी 'ख' – 4, 8, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44, 48, 52, 56

श्रेणी 'क' में 7 पद हैं तथा 'ख' में 13 पद हैं। दोनों के परास क्रमशः 25 और 52 हैं। यहाँ हम देखते हैं कि श्रेणी 'क' के चर मूल्यों में बिखराव असमान होते हुए भी परास कम है जबकि श्रेणी 'ख' के बिखराव में समानता होते हुए भी परास अधिक है। अतः प्रकीर्णन के माप को और अधिक युक्ति संगत बनाने के लिए परास गुणाँक का प्रयोग करते है :

परास गुणांक (Coefficient of range) (C.R.) $= (H - L)/(H + L)$

ऊपर दिये गए उदाहरण 1 के लिए

परास गुणांक (C.R.) $= \dfrac{H-L}{H+L} = \dfrac{35-5}{35+5} = \dfrac{30}{40} = .75$ या 75%

उदाहरण 3: निम्न बारम्बारता बंटन का परास एवं परास गुणांक ज्ञात कीजिए :

वर्ग	10–20	20–30	30–40	40–50	50–60
बारम्बारता	6	13	10	5	3

हल : सबसे छोटा वर्ग 10–20 हैं तथा इसकी निम्न सीमा 10 है।

अतः न्यूनतम मूल्य (L) = 10

सबसे बड़े वर्ग 50–60 की उपरि सीमा 60 है। अतः अधिकतम मूल्य (H) = 60

$\therefore$ परास (R) = H–L = 60–10 =50

परास गुणाँक (C.R) $= \dfrac{H-L}{H+L} = \dfrac{60-10}{60+10} = 0.714$ या 71.4%

(ख) अन्तर चतुर्थक परास (Inter–Quartile Range) : चर श्रेणी के तृतीय और प्रथम चतुर्थकों के अन्तर को अन्तर–चतुर्थक परास कहते हैं। यह परास की अपेक्षा अधिक प्रतिनिधित्व करने वाला माप है। इसे बंटन के मध्यवर्ती 50% (Middle 50%) मूल्यों का परास भी कहते हैं। इसको निम्न सूत्र से ज्ञात करते हैं :

अन्तर चतुर्थक परास (I.Q.R.) $= Q_3 - Q_1$

अन्तर चतुर्थक परास गुणाँक $= \dfrac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}$

जहाँ Q_3 तथा Q_1 की गणना निम्न सूत्रों से करते हैं

$$Q_1 = \ell + \frac{(N/4) - F}{f} \times h, \quad Q_3 = \ell + \frac{3(N/4) - F}{f} \times h$$

यहाँ ℓ चतुर्थक वर्ग की निम्न सीमा, h वर्ग अन्तराल, F चतुर्थक वर्ग के पूर्व वर्ग की संचयी बारम्बारता, f चतुर्थक वर्ग की बारम्बारता तथा N पदों की कुल संख्या है।

(ग) दशमक एवं शतमक परास (Decile and percentile range) : चर श्रेणी की सम्पूर्ण बारम्बारताओं को दस समान भागों में विभाजित करने वाले विभाजन मूल्य को दशमक तथा सम्पूर्ण बारम्बारताओं को सौ बराबर भागों में विभाजित करने वाले विभाजन मूल्य को शतमक कहते हैं।

दशमक (Decile) की सहायता से परास निम्न सूत्र द्वारा ज्ञात किया जा सकता है :

दशमक परास = $D_9 - D_1$

जहाँ i वाँ दशमक $D_i = l + \frac{(i(N/10) - F)}{f} \times h, \quad i = 1, 2, 3, ..., 9$

शतमक परास चर श्रेणी के मध्यवर्ती 80% सामान्य पदों पर आधारित होता है। यह 90 वाँ और 10 वाँ शतमक अंतर होता है जिसे शतमक परास कहते है। इसकी निम्न सूत्र से गणना की जाती है :

शतमक परास $= P_{90} - P_{10}$

जहाँ i वाँ दशमक $P_i = l + \frac{(i(N/100) - F)}{f} \times h, \quad i = 1, 2, 3, \ldots, 99$

उदाहरण 4: निम्न बारम्बारता बंटन से अन्तर चतुर्थक परास एवं चतुर्थक परास गुणांक, दशमक परास एवं शतमक परास की गणना कीजिए :

वर्ग	0–10	10–20	20–30	30–40	40–50
बारम्बारता	1	8	12	6	3

हल : दिए गए आँकड़ों से निम्न तालिका तैयार करते हैं

वर्ग अन्तराल	बारम्बारता	संचयी बारम्बारता
0–10	1	1
10–20	8	9
20–30	12	21
30–40	6	27
40–50	3	30

चतुर्थक परास की गणना :

$$Q_3 = \ell + \frac{3(N/4) - F}{f} \times h = 30 + \frac{3 \times (30/4) - 21}{6} \times 10 = 30 + \frac{1 \cdot 5 \times 10}{6} = 30 + 2 \cdot 5 = 32 \cdot 5$$

$$Q_1 = \ell + \frac{(N/4) - F}{f} \times h = 10 + \frac{(30/4) - 1}{8} \times 10 = 10 + \frac{6 \cdot 5 \times 10}{8} = 10 + 8 \cdot 12 = 18 \cdot 12$$

अन्तर चतुर्थक परास $= Q_3 - Q_1 = 32 \cdot 5 - 18 \cdot 12 = 14 \cdot 38$

अन्तर चतुर्थक परास गुणाँक $= \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1} = \frac{32.5 - 18 \cdot 12}{32.5 + 18 \cdot 12} = \frac{14 \cdot 38}{50 \cdot 62} = 0 \cdot 284$

दशमक परास की गणना :

$$\frac{9N}{10}=\frac{9\times 30}{10}=27$$

27 के बराबर या इससे ठीक बड़ी संचयी बारम्बारता 27 है जिसके संगत वर्ग 30–40 है

$\therefore \quad l=30,\ f=6,\ F=21,\ h=10$

अतः $D_9=30+\frac{9\times(30/10)-21}{6}\times 10=30+\frac{6\times 10}{6}=30+10=40$

पुनः $\frac{1N}{10}=\frac{1\times 30}{10}=3$

3 से ठीक बड़ी संचयी बारम्बारता 9 है जिसके संगत वर्ग 10–20 है

$\therefore \quad l=10,\ f=8,\ F=1,\ h=10$

अतः $D_1=10+\frac{1\times(30/10)-1}{8}\times 10=10+\frac{2\times 10}{8}=10+2\cdot 5=12\cdot 5$

$\therefore$ दशमक परास $=D_9-D_1=40-12\cdot 5=27\cdot 5$

शतमक परास की गणना :

$$\frac{90N}{100}=\frac{90\times 30}{100}=27$$

27 के बराबर या इससे ठीक बड़ी संचयी बारम्बारता 27 है जिसके संगत वर्ग 30–40 है

$\therefore \quad l=30,\ f=6,\ F=21,\ h=10$

अतः $P_{90}=30+\frac{90\times(30/100)-21}{6}\times 10=30+\frac{6\times 10}{6}=30+10=40$

$\frac{10N}{100}=\frac{10\times 30}{100}=3$

3 से ठीक बड़ी संचयी बारम्बारता 9 है जिसके संगत वर्ग 10–20 है

$\therefore \quad l=10, f=8, F=1, h=10$

अतः $P_{10}=10+\frac{10\times(30/100)-1}{8}\times 10=10+\frac{2\times 10}{8}=10+2\cdot 5=12\cdot 5$

$\therefore$ शतमक परास $=P_{90}-P_{10}=40-12\cdot 5=27\cdot 5$

13.04 चतुर्थक विचलन (Quartile deviation) :

चतुर्थक विचलन तृतीय और प्रथम चतुर्थकों के अन्तर का आधा होता है। अन्तर चतुर्थक परास का आधा मूल्य चतुर्थक विचलन होता है। इसी कारण इसे अर्द्ध–अन्तर चतुर्थक परास (Semi–inter quartile range) भी कहते है
इसे निम्न सूत्र द्वारा किया जाता है :

चतुर्थक विचलन $(Q.D.)=\frac{Q_3-Q_1}{2}$

चतुर्थक विचलन गुणांक (Coefficient of quartile deviation): चतुर्थक विचलन प्रकीर्णन का निरपेक्ष माप है। दो या अधिक चर श्रेणियों के तुलनात्मक अध्ययन के लिए सापेक्ष माप ज्ञात करना पड़ता है। इसे चतुर्थक विचलन का गुणांक कहते हैं और इसकी निम्न सूत्र द्वारा गणना की जाती है:

चतुर्थक विचलन गुणाँक $=\frac{Q_3-Q_1}{Q_3+Q_1}$

उदाहरण 5: 31 छात्रों की लम्बाई इंचों में दी गई हैं : 55, 56, 57, 57, 58, 58, 59, 59, 60, 60, 60, 61, 62, 62, 62, 63, 63, 63, 64, 64, 65, 65, 65, 66, 66, 66, 67, 68, 68, 69, 70 इनका चतुर्थक विचलन ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ कुल पद 31 हैं

श्रेणी का प्रथम चतुर्थक $Q_1 = \frac{31+1}{4} = 8$, अतः 8 वें पद का मूल्य = 59

श्रेणी का तृतीय चतुर्थक $Q_3 = \frac{3(31+1)}{4} = 24$, अतः 24 वें पद का मूल्य = 66

इसलिए चतुर्थक विचलन = $\frac{Q_3 - Q_1}{2} = \frac{66-59}{2} = \frac{7}{2} = 3.5$

असंतत श्रेणी में चतुर्थक विचलन ज्ञात करने के लिए नीचे एक उदाहरण दिया गया है।

उदाहरण 6: निम्न बारम्बारता बंटन का चतुर्थक विचलन एवं चतुर्थक विचलन गुणाँक ज्ञात कीजिए।

वजन (किग्रा)	32	35	38	43	50	56	60
बारम्बारता	2	4	8	9	4	3	1

हल : दी गई तालिका से निम्न तालिका तैयार करते हैं :

वजन (किग्रा)	बारम्बारता	संचयी बारम्बारता
32	2	2
35	4	6
38	8	14
43	9	23
50	4	27
56	3	30
60	1	31

$Q_1 = \frac{(31+1)}{4} = 8$ अर्थात् 8 वें पद का मूल्य = 38 किग्रा

$Q_3 = \frac{3(31+1)}{4} = 24$ अर्थात् 24 वें पद का मूल्य = 50 किग्रा

चतुर्थक विचलन $= \frac{Q_3 - Q_1}{2} = \frac{50-38}{2} = \frac{12}{2} = 6$

चतुर्थक विचलन गुणांक $= \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1} = \frac{50-38}{50+38} = \frac{12}{88} = 0\cdot136$ या $13\cdot6\%$

संतत श्रेणी में चतुर्थक विचलन निकालने की विधि वही है जो सामान्य श्रेणी में होती है। इसमें Q_1 तथा Q_3 की गणना निम्न सूत्रों से करते हैं

$$Q_1 = \ell + \frac{(N/4) - F}{f} \times h \quad \text{तथा} \quad Q_3 = \ell + \frac{(3N/4) - F}{f} \times h$$

जहाँ ℓ = चतुर्थक वर्ग की निम्न सीमा, h = वर्ग अन्तराल, N = कुल बारम्बारता, f = चतुर्थक वर्ग की बारम्बारता, F = चतुर्थक वर्ग के पूर्व वाले वर्ग की संचयी बारम्बारता है।

उदाहरण 7: निम्न बारम्बारता बंटन का चतुर्थक विचलन एवं चतुर्थक विचलन गुणांक ज्ञात कीजिए :

मजदूरी (रु. में)	30–40	40–50	50–60	60–70	70–80	80–90	90–100
बारम्बारता	11	26	63	81	35	21	13

हल :

मजदूरी	बारम्बारता	संचयी बारम्बारता
30–40	11	11
40–50	26	37
50–60	63	100
60–70	81	181
70–80	35	216
80–90	21	237
90–100	13	250

$$\frac{N+1}{4}=\frac{(250+1)}{4}=\frac{251}{4}=62\cdot75 \text{ वें पद का मूल्य}$$

$$Q_1=50+\frac{62.75-37}{63}\times10=50+\frac{25\cdot75}{63}\times10=54\cdot09$$

$$\frac{3(N+1)}{4}=\frac{3(250+1)}{4}=\frac{753}{4}=188\cdot25 \text{ वें पद का मूल्य}$$

$$Q_3=70+\frac{188\cdot25-181}{35}\times10=70+\frac{7\cdot25}{35}\times10=72\cdot07$$

अतः चतुर्थक विचलन $=\frac{Q_3-Q_1}{2}=\frac{72\cdot07-54\cdot09}{2}=8\cdot99$

तथा चतुर्थक विचलन गुणांक $=\frac{Q_3-Q_1}{Q_3+Q_1}=\frac{72\cdot07-54\cdot09}{72\cdot07+54\cdot09}=\frac{17\cdot98}{126\cdot16}=\cdot14$

प्रश्नमाला 13.1

1. चतुर्थक विचलन गुणांक का सूत्र लिखिए।
2. किसी चर श्रेणी का $Q_1=61$ व $Q_3=121$ है, तो उसका चतुर्थक विचलन ज्ञात कीजिए।
3. निम्नलिखित आंकड़ों के चतुर्थक विचलन तथा चतुर्थक विचलन गुणांक ज्ञात कीजिए।
   3, 8, 11, 13, 17, 19, 20, 22, 23, 27, 31
4. निम्नलिखित सारणी में परास एवं परास गुणांक ज्ञात कीजिए।

x	4.5	5.5	6.5	7.5	8.5	9.5	10.5	11.5
f	4	5	6	3	2	1	3	5

5. निम्न श्रेणी के अन्तर चतुर्थक परास एवं उसके गुणांक की गणना कीजिए।

x	1	3	5	7
f	10	15	3	2

6. निम्न आंकड़ो से परास गुणांक ज्ञात कीजिए।

आकार	10 – 15	15 – 20	20 – 25	25 – 30
बारम्बारता	2	4	6	8

7. निम्न आंकड़ों के आधार पर दशमक परास एवं शतमक परास ज्ञात कीजिए।

x	$0-10$	$10-20$	$20-30$	$30-40$	$40-50$	$50-60$	$60-70$	$70-80$
f	3	9	8	5	7	5	7	6

8. निम्न बारम्बारता बंटन में दशमक परास एवं शतमक परास ज्ञात कीजिए।

प्राप्तांक x	$0-10$	$10-20$	$20-30$	$30-40$	$40-50$
बारम्बारता f	5	8	20	14	3

13.05 माध्य विचलन (Mean deviation) :

किसी भी श्रेणी में चर के विभिन्न मानों का, उसके सांख्यिकीय माध्य (समान्तर माध्य, माध्यिका एवं बहुलक) से लिए गए विचलनों के निरपेक्ष मानों का समान्तर माध्य उसका माध्य विचलन कहलाता है।

(i) **जब आँकड़े अवर्गीकृत हों** : यदि किसी चर के मान $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ हों तथा इनका सांख्यिकीय माध्य A हो तो

$$A \text{ से माध्य विचलन} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x_i - A|, \qquad (1)$$

यहाँ $|x_i - A|$, x_i का A से विचलन का निरपेक्ष मान है अर्थात् $|x_i - A|$ का अर्थ है कि $x_i - A$ का मान सदैव धनात्मक ही लेना है।

आगे हम $\sum_{i=1}^{n}$ को $\sum$ लिखेंगे ।

(ii) **अवर्गीकृत बारम्बारता बंटन के लिए** : यदि चर के विभिन्न मानों $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ की बारम्बारताएं क्रमशः $f_1, f_2, \ldots, f_n$ हों तथा A इसका सांख्यिकी माध्य हो, तो

$$A \text{ से माध्य विचलन} = \frac{1}{N}\sum f_i|x_i - A|, \qquad \text{जहाँ } N = \sum f_i. \qquad (2)$$

(iii) **वर्गीकृत बारम्बारता बंटन के लिए :** वर्गीकृत बारम्बारता बंटन के लिए उपरोक्त सूत्र (2) का ही उपयोग किया जाता है। यहां $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ प्रत्येक वर्ग के मध्यमान को प्रदर्शित करता है ।

(iv) **माध्य विचलन गुणांक (Coefficient of mean deviation):**

$$= \frac{\text{माध्य विचलन}}{A}$$

टिप्पणी :

(1) प्रकीर्णन का माप, परिकलन व समझना बहुत आसान हैं। यह श्रेणी के सभी मानों पर निर्भर करता है तथा चरम मानों का इस पर कोई प्रभाव नहीं पड़ता। इसकी सबसे बड़ी कमी यह है कि इसकी गणना में विचलनों को हमेशा धनात्मक चिह्नों के साथ लेते हैं । चाहे गणितीय दृष्टि से अशुद्ध एवं अवैज्ञानिक है।

(2) माध्यिका से लिया गया माध्य विचलन अन्य किसी मान से लिए गए माध्य विचलन से कम होता है।

(3) सुविधा के लिए समान्तर माध्य से लिए गए माध्य विचलन को हम केवल माध्य विचलन कहेंगे ।

(4) माध्य विचलन गुणांक, प्रकीर्णन का सापेक्ष माप है, यह चर के मानों की इकाई पर निर्भर नहीं करता है।

(क) माध्य से माध्य विचलन (Mean deviation from mean) :

(i) **जब आँकड़े अवर्गीकृत हों, परिकलन विधि** :

(i) माध्य $\bar{x}$ से चर के मानों के विचलनों का निरपेक्ष मान (चिह्न को छोड़कर) ज्ञात कीजिए । यहाँ माध्य $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$

(ii) इन विचलनों का योग ज्ञात कीजिए।

(iii) अब (ii) में प्राप्त योग को पदों की संख्या से भाग देकर विचलन ज्ञात कीजिए ।

माध्य विचलन $= \dfrac{\sum |x_i - \bar{x}|}{n}$

उदाहरण 8: एक कक्षा के 8 छात्रों का भार किग्रा में निम्नलिखित प्रकार से है भार किग्राः 42, 47, 52, 47, 37, 60, 55, 38 माध्य विचलन ज्ञात कीजिए।

हल : दिये गये आँकड़ों से निम्न तालिका तैयार करते हैं :

x_i	$\lvert x_i - \overline{x} \rvert$
42	5·25
47	0·25
52	4·75
47	0·25
37	10·25
60	12·75
55	7·75
38	9·25
$\Sigma x_i = 378$	$\Sigma \lvert x_i - \overline{x} \rvert = 50.50$

माध्य $\overline{x} = \dfrac{\Sigma x_i}{n} = \dfrac{378}{8} = 47 \cdot 25$

माध्य विचलन $= \dfrac{\Sigma \lvert x_i - \overline{x} \rvert}{n} = \dfrac{50 \cdot 50}{8} = 6 \cdot 31$

(II) **अवर्गीकृत बारम्बारता बंटन के लिए परिकलन विधि** :

(i) माध्य x से चर के मानों के विचलनों का निरपेक्ष मान (चिह्न को छोड़कर) ज्ञात कीजिए । यहाँ $\overline{x} = \dfrac{\Sigma f_i x_i}{N}, N = \Sigma f_i$

(ii) अब (i) में प्राप्त विचलनों को उनकी संगत बारम्बारता से गुणा कर उनका योग ज्ञात कीजिए ।

(iii) अब (ii) में प्राप्त योग को, बारम्बारताओं के कुल योग से भाग देकर माध्य विचलन ज्ञात कीजिए।

माध्य विचलन $= \dfrac{\Sigma f_i \lvert x_i - \overline{x} \rvert}{N}$, जहाँ $N = \Sigma f_i$

उदाहरण 9: निम्न आँकड़ों से माध्य विचलन ज्ञात कीजिए :

x	3	9	17	23	27
f	8	10	12	9	5

हल : दिये गये आँकड़ों से निम्न तालिका तैयार करते हैं :

x	f	fx	$\lvert x - 15 \rvert$	$f \lvert x - 15 \rvert$
3	8	24	12	96
9	10	90	6	60
17	12	204	2	24
23	9	207	8	72
27	5	135	12	60
	$N = \Sigma f_i = 44$	$\Sigma f_i x_i = 660$		$\Sigma f_i \lvert x_i - 15 \rvert = 312$

माध्य $\bar{x} = \frac{\Sigma f_i x_i}{N} = \frac{660}{44} = 15$

माध्य विचलन $= \frac{\Sigma f_i |x_i - \bar{x}|}{N} = \frac{312}{44} = 7 \cdot 09$

(III) **वर्गीकृत बारम्बारता बंटन के लिए परिकलन विधि** :

इस बंटन के लिए माध्य विचलन (II) की भांति ही करेंगे । यहां चर के मानों के स्थान पर प्रत्येक वर्ग के मध्यमान लिए जाएँगे।

उदाहरण 10: किसी कक्षा के छात्रों द्वारा प्राप्तांकों का निम्न बारम्बारता बंटन दिया गया है :

वर्ग	0–10	10–20	20–30	30–40	40–50
बारम्बारता	3	28	42	20	7

हल : दिये गये आँकड़ों से निम्न तालिका तैयार करते हैं :

वर्ग	बारम्बारता f	अन्तराल का मध्यमान x	fx	$\|x-25\|$	$f\|x-25\|$
0–10	3	5	15	20	60
10–20	28	15	420	10	280
20–30	42	25	1050	0	0
30–40	20	35	700	10	200
40–50	7	45	315	20	140
	$N = \Sigma f_i$ =100		$\Sigma f_i x_i$ = 2500		$\Sigma f_i \|x_i - 25\|$ =680

$\therefore$ $\bar{x} = \frac{\Sigma f_i x_i}{N} = \frac{2500}{100} = 25$

माध्य विचलन $\frac{\Sigma f_i |x_i - \bar{x}|}{N} = \frac{680}{100} = 6 \cdot 80$

उदाहरण 11: निम्नलिखित बारम्बारता बंटन के लिए मूल बिन्दु 20 से लिया गया माध्य विचलन ज्ञात कीजिए।

x	10	12	14	16	18	20	22	24
f	5	8	21	24	18	15	7	2

हल : दिए आँकड़ों से निम्न तालिका तैयार करते हैं

x	f	$\|x_i - 20\|$	$f_i\|x_i - 20\|$
10	5	10	50
12	8	8	64
14	21	6	126
16	24	4	96
18	18	2	36
20	15	0	0
22	7	2	14
24	2	4	8
	$\Sigma f_i = 100$		$\Sigma f_i\|x_i - 20\| = 394$

मूल बिन्दु 20 से लिया गया माध्य विचलन $= \frac{1}{N} \Sigma f_i |x_i - 20|$

$= \frac{394}{100} = 3 \cdot 94$

उदाहरण 12: मूल बिन्दु एवं स्केल परिवर्तन से निम्न आँकड़ों का माध्य विचलन एवं माध्य विचलन गुणांक ज्ञात कीजिए ।

वर्ग	0 – 3	3 – 6	6 – 9	9–12	12–15	15–18	18–21
बारंम्बारता	2	7	10	12	9	6	4

हल : दिए गए आँकड़ों से निम्न तालिका तैयार करते हैं :

माना $a = 10{\cdot}5$, $h = 3$, जहाँ 'a' वर्ग 9–12 का मध्य बिन्दु है

वर्ग	बारम्बारता f_i	मध्यमान x_i	$u_i = \frac{x_i - 10.5}{3}$	$f_i u_i$	$\lvert x_i - \bar{x} \rvert$	$f_i \lvert x_i - \bar{x} \rvert$
0–3	2	1·5	–3	–6	9·18	18·36
3–6	7	4·5	–2	–14	6·18	43·26
6–9	10	7·5	–1	–10	3·18	31·80
9–12	12	10·5	0	0	0·18	2·16
12–15	9	13·5	1	9	2·82	25·38
15–18	6	16·5	2	12	5·82	34·92
18–21	4	19·5	3	12	8·82	35·28
	$N = \Sigma f_i = 50$			$\Sigma f_i u_i = 3$		$\Sigma f_i \lvert x_i - \bar{x} \rvert = 191{\cdot}16$

$$\bar{x} = a + h\frac{\Sigma f_i u_i}{N} = 10\cdot5 + 3 \times \frac{3}{50} = 10\cdot68$$

$$\text{माध्य विचलन} = \frac{\Sigma f_i \lvert x_i - \bar{x} \rvert}{N} = \frac{191\cdot16}{50} = 3\cdot8232$$

$$\text{माध्य विचलन गुणांक} = \frac{\text{माध्य विचलन}}{\bar{x}} = \frac{3\cdot8232}{10\cdot68} = 0\cdot358$$

(ख) माध्यिका से माध्य विचलन (Mean deviation from median)

(I) **अवर्गीकृत आँकड़ों के लिए** :

परिकलन विधि : (i) पहले हम माध्यिका ज्ञात करेंगे इसके लिए विचर के सभी n मानों को आरोही या अवरोही क्रम में लिखेंगे। अब

(अ) माध्यिका $M = (n+1)/2$ वें पद का मान (जब n विषम हों)

(आ) माध्यिका $M = n/2$ वें तथा $(n/2)+1$ वें पदों के मानों का समान्तर माध्य (जब n सम संख्या हो)

(ii) माध्यिका M से चर के मानों के विचलनों का निरपेक्ष मान (चिह्न को छोड़कर) ज्ञात कीजिए ।

(iii) इन विचलनों का योग ज्ञात कीजिए ।

(iv) अब (iii) में प्राप्त योग को पदों की संख्या से भाग देकर माध्य विचलन ज्ञात कीजिए ।

माध्यिका से माध्य विचलन $(\delta_m) = \frac{\Sigma \lvert x_i - M \rvert}{n}$

उदाहरण 13: निम्न आँकड़ों का माध्यिका से माध्य विचलन ज्ञात कीजिए :

38, 70, 48, 34, 42, 55, 63, 46, 54, 44

हल : आँकड़ों को आरोही क्रम में रखने पर चर के मान होंगे :

34, 38, 42, 44, 46, 48, 54, 55, 63, 70 यहां $n = 10$

$\therefore$ माध्यिका = 5 वें तथा 6 ठें पदों के मानों का माध्य

$$M = \frac{46+48}{2} = 47$$

अब हम दिए गए आँकड़ों से निम्न तालिका तैयार करते हैं :

x	$\lvert x-M \rvert$
38	9
70	23
48	1
34	13
42	5
55	8
63	16
46	1
54	7
44	3
$n=10$	$\frac{\Sigma\lvert x_i-M\rvert}{n}=86$

माध्यिका से माध्यविचलन $(\delta_m)=\frac{\Sigma\lvert x_i-47\rvert}{10}=\frac{86}{10}=8\cdot6$

(II) **अवर्गीकृत बारम्बारता बंटन के लिए परिकलन विधि** :

(i) यदि किसी विचर के मान की बारम्बारता व्यक्त करने वाली श्रेणी दी जाय तो माध्यिका ज्ञात करने के लिए पहले पदों को विचर के मान के आरोही या अवरोही क्रम में लिखा जाता है और इसके पश्चात् बारम्बारताओं की संचयी बारम्बारता ज्ञात की जाती है। संचयी बारम्बारता से मध्य पद निकाला जाता है। इस मध्य पद से ठीक बड़ी संचयी बारम्बारता के संगत विचर का मान ही माध्यिका होती है।

(ii) माध्यिका M से चर के मानों के विचलनों का निरपेक्ष मान (चिह्न को छोड़कर) ज्ञात कीजिए।

(iii) इन विचलनों का योग ज्ञात कीजिए ।

(iv) अब (iii) में प्राप्त योग को पदों की संख्या से भाग देकर माध्य विचलन ज्ञात कीजिए ।

माध्यिका से माध्य विचलन $(\delta_m) = \frac{\Sigma f_i\lvert x_i-M\rvert}{N}$

उदाहरण 14: निम्न बंटन का माध्यिका से माध्य विचलन ज्ञात कीजिए:

चर x	**4**	**6**	**8**	**10**	**12**	**14**	**16**
बारम्बारता f	**2**	4	5	**3**	2	1	**4**

हल :

चर x	बारम्बारता f	संचयी बारम्बारता cf	$\lvert x-M\rvert$	$f\lvert x-M\rvert$
4	2	2	4	8
6	4	6	2	8
8	5	11	0	0
10	3	14	2	6
12	2	16	4	8
14	1	17	6	6
16	4	21	8	32
	$N=\Sigma f_i = 21$			$\Sigma f_i\lvert x_i-M\rvert = 68$

यहां $\frac{N}{2}=\frac{21}{2}=10.5$ जो संचयी बारम्बारता के मान 11 में है। अतः माध्यिका M=8 है ।

$\therefore$ माध्यिका से माध्य विचलन $(\delta_m)=\frac{1}{N}\Sigma f_i\lvert x_i-M\rvert=\frac{68}{21}=3\cdot238$

(III) वर्गीकृत बारम्बारता बंटन के लिए परिकलन विधि

(i) उपर्युक्त (II) की भाँति ही संचयी बारम्बारता के मध्य पद से ठीक बड़ी संचयी बारम्बारता के संगत वर्ग का पता लगाया जाता है जिसे माध्यिका वर्ग कहेंगे। अब माध्यिका निम्न सूत्र से ज्ञात की जा सकती है

$$\text{माध्यिका } (M) = \ell + \left[\frac{(N/2) - F}{f}\right] \times h$$

जहां ℓ = माध्यिका वर्ग की निम्न सीमा, N = बारम्बारता का योग, F = माध्यिका वर्ग से पूर्व वाले वर्ग की संचयी बारम्बारता, f = माध्यिका वर्ग की बारम्बारता, h = वर्ग अन्तराल

परिकलन विधि :

(ii) माध्यिका M से चर के मानों के विचलनों का निरपेक्ष मान (चिह्न को छोड़कर) ज्ञात कीजिए ।

(iii) इन विचलनों का योग ज्ञात कीजिए ।

(iv) अब (iii) में प्राप्त योग को पदों की संख्या से भाग देकर माध्य विचलन ज्ञात कीजिए ।

माध्यिका से माध्य विचलन $(\delta_m) = \dfrac{\Sigma f_i |x_i - M|}{N}$

उदाहरण 15: 100 विद्यार्थियों के निम्नलिखित प्राप्तांकों से माध्यिका ज्ञात कर उससे माध्य विचलन ज्ञात कीजिए।

प्राप्तांक	0–10	10–20	20–30	30–40	40–50
विद्यार्थियों की संख्या	8	30	40	12	10

हल : दिये गये आँकड़ों से निम्न तालिका तैयार करते हैं :

प्राप्तांक का वर्ग	मध्यमान x	विद्यार्थियों की संख्या f	संचयी बारम्बारता cf	$\|x-M\|$	$f\|x-M\|$
0–10	5	8	8	18	144
10–20	15	30	38	8	240
20–30	25	40	78	2	80
30–40	35	12	90	12	144
40–50	45	10	100	22	220
		$N = \Sigma f_i = 100$			$\Sigma f_i \|x_i - M\| = 828$

यहां $\dfrac{N}{2} = \dfrac{100}{2} = 50$ से ठीक बड़ी संचयी बारम्बारता 78 है जिसके संगत वर्ग अन्तराल 20–30 हैं।

$$\text{अतः माध्यिका } M = \ell + \frac{(N/2) - F}{f} \times h = 20 + \frac{50 - 38}{40} \times 10 = 20 + \frac{12}{4} = 23$$

$$\text{माध्यिका से माध्य विचलन } (\delta_m) = \frac{1}{N}\Sigma f_i |x_i - M| = \frac{828}{100} = 8 \cdot 28$$

(ग) बहुलक से माध्यविचलन (Mean deviation from mode) δ_z :

(I) अवर्गीकृत आँकड़ों के लिए परिकलन विधि :

(i) आँकड़ों में सबसे अधिकबार आने वाला मूल्य (चर) ज्ञात करते हैं, जो बहुलक (z) कहलाता हैं ।

(ii) आँकड़ों में से बहुलक को घटाकर निरपेक्षमान $|x - z|$ ज्ञात करते हैं।

(iii) निरपेक्ष मानों का योग $\Sigma|x - z|$ ज्ञात करते हैं ।

(iv) बहुलक से माध्य विचलन $(\delta_z) = \dfrac{1}{n}\Sigma|x - z|$ से प्राप्त कर लेते हैं।

उदाहरण 16: निम्नलिखित आँकड़ों द्वारा बहुलक व उससे माध्य विचलन ज्ञात कीजिए:

8, 10, 15, 10, 12, 15, 8, 10, 8, 10, 12, 13.

हल : दिये गये आँकड़ों में 10 सर्वाधिक 4 बार आया है। अतः बहुलक $Z = 10$

चर x	$\|x - Z\|$
8	2
10	0
15	5
10	0
12	2
15	5
8	2
10	0
8	2
10	0
12	2
13	3
	$\Sigma\|x_i - Z\| = 23$

बहुलक से माध्यविचलन $(\delta_z) = \frac{1}{n}\Sigma|x_i - Z| = \frac{23}{12} = 1.916$

(II) अवर्गीकृत बंटन के लिए परिकलन विधि :

अवर्गीकृत बंटन में जिस चर की बारम्बारता सबसे अधिक हों उस चर का मूल्य ही बहुलक (Z) होता है। अब बहुलक से माध्य ज्ञात करने की शेष प्रक्रिया उपर्युक्त स्थिति (I) की भांति ही होगी।

(III) वर्गीकृत बंटन के लिए परिकलन विधि :

(i) सबसे अधिक बारम्बारता वाले बहुलक वर्ग को ज्ञात करते हैं ।

(ii) सूत्र $z = l + \frac{f_0 - f_1}{2f_0 - f_1 - f_2} \times h$ से बहुलक ज्ञात करते हैं ।

जहाँ f_0 = बहुलक वर्ग की बारम्बारता, f_1 = बहुलक वर्ग से पूर्व के वर्ग की बारम्बारता, f_2 = बहुलक वर्ग से पश्चात् के वर्ग की बारम्बारता, l = बहुलक वर्ग की निम्न सीमा, h = वर्ग अन्तराल

(iii) वर्ग अन्तराल के मध्यमान से बहुलक को घटाकर निरपेक्ष मान ज्ञात करते हैं।

(iv) निरपेक्ष मानों को बारम्बारताओं से गुणा कर योगफल में बारम्बारताओं के योग का भाग देकर उससे माध्य विचलन ज्ञात करते हैं।

उदाहरण 17: निम्न बारम्बारता बंटन का बहुलक से माध्य विचलन ज्ञात कीजिए।

वर्ग	**140–150**	**150–160**	**160–170**	**170–180**	**180–190**	**190–200**
बारम्बारता	**4**	**6**	**10**	**12**	**9**	**3**

हल : यहाँ $Z = 174$ लेने पर

वर्ग	मध्यमान x	बारम्बारता f	$\|x - z\|$	$f\|x - z\|$
140–150	145	4	29	116
150–160	155	6	19	114
160–170	165	10	9	90
170–180	175	12	1	12
180–190	185	9	11	99
190–200	195	3	21	63
		$N = 44$		$\Sigma f_i\|x_i - z\| = 494$

यहां सबसे अधिक बारम्बारता 12 है जिसके संगत वर्ग अन्तराल 170–180 है।

अतः बहुलक $z = \ell + \frac{f_0 - f_1}{2f_0 - f_1 - f_2} \times h$

$$= 170 + \frac{12-10}{2\times12-10-9} \times 10 = 170 + \frac{2\times10}{5} = 174$$

बहुलक से माध्य विचलन $= \frac{1}{N}\Sigma f_i\left|x_i - z\right| = \frac{494}{44} = 11\cdot22$

प्रश्नमाला 13.2

प्रश्न 1 व 2 में दिए गए आँकड़ों के लिए माध्य के सापेक्ष माध्य विचलन ज्ञात कीजिए।

1. 4, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 17

2. 28, 60, 38, 30, 32, 45, 53, 36, 44, 34

प्रश्न 3 व 4 के आँकड़ों के लिए माध्यिका के सापेक्ष माध्य विचलन ज्ञात कीजिए।

3. 13, 10, 12, 13, 15, 18, 17, 11, 14, 16, 12

4. 26, 32, 35, 39, 41, 62, 36, 50, 43

प्रश्न 5 व 6 के आँकड़ों के लिए बहुलक के सापेक्ष माध्य विचलन ज्ञात कीजिए।

5. 2, 4, 6, 4, 8, 6, 4, 10, 4, 8

6. 2.2, 2.5, 2.1, 2.5, 2.9, 2.8, 2.5, 2.3

प्रश्न 7 व 8 के आँकड़ों के लिए माध्य के सापेक्ष माध्य विचलन ज्ञात कीजिए।

7.

x_i	5	10	15	20	25
f_i	7	4	6	3	5

8.

x_i	20	40	60	80	100
f_i	2	12	14	8	4

प्रश्न 9 व 10 के आँकडों के लिए माध्यिका के सापेक्ष माध्य विचलन ज्ञात कीजिए।

9.

x_i	5	7	9	10	12	15
f_i	8	6	2	2	2	6

10.

x_i	10	16	22	25	30
f_i	3	5	6	7	8

प्रश्न 11 व 12 के आँकडों के लिए बहुलक के सापेक्ष माध्य विचलन ज्ञात कीजिए।

11.

x_i	3	4	5	6	7	8
f_i	2	4	6	3	2	1

12.

x_i	10	20	30	40	50	60	70	80
f_i	2	8	16	26	20	16	7	5

प्रश्न 13 व 14 के आँकडों के लिए माध्य के सापेक्ष माध्य विचलन ज्ञात कीजिए।

13.

आय (प्रतिदिन)	0 – 10	10 – 20	20 – 30	30 – 40	40 – 50	50 – 60	60 – 70	70 – 80
संख्या	4	8	9	10	7	5	4	3

14.

ऊँचाई (सेमी में)	95 – 105	105 – 115	115 – 125	125 – 135	135 – 145	145 – 155
संख्या	9	13	26	30	12	10

प्रश्न 15 व 16 के आँकडों के लिए माध्यिका के सापेक्ष माध्य विचलन ज्ञात कीजिए।

15.

अंक	10 – 20	20 – 30	30 – 40	40 – 50	50 – 60	60 – 70
संख्या	3	4	7	8	2	1

16.

आयु	16 – 20	21 – 25	26 – 30	31 – 35	36 – 40	41 – 45	46 – 50	51 – 55
संख्या	5	6	12	14	26	12	16	9

प्रश्न 17 व 18 के बंटन के लिए बहुलक के सापेक्ष माध्य विचलन ज्ञात कीजिए।

17.

प्राप्तांक	20 – 30	30 – 40	40 – 50	50 – 60	60 – 70
संख्या	8	24	42	20	6

18.

ऊँचाई (इंच में)	52 – 55	55 – 58	58 – 61	61 – 64
छात्र संख्या	10	20	35	10

13.06 मानक विचलन (Standard deviation) :

माध्य विचलन धन (+) तथा ऋण (–) के चिह्नों का ध्यान न रखते हुए कुल विचलनों का औसत होता है। वास्तव में यह बीजगणित के सिद्धान्तों की अवहेलना है परन्तु हमें कुल विचलन लेने होते है उनकी दिशा को महत्व नहीं देना होता इसलिए हम सब विचलनों को, चिह्नों के ध्यान दिये बिना, जोड़ लेते है। इस गणितीय अशुद्धि अथवा अवहेलना को ठीक करने के लिए विचलन ज्ञात करने की एक और पद्धति काम में लाई जाती है। इस पद्धति के अन्तर्गत समान्तर माध्य निकालकर इससे सब चरों के मानों से विचलन निकाल लेते है और फिर सब विचलनों के वर्ग (squares) निकाल लेते है। अन्त में इन वर्ग संख्याओं को जोड़कर उनका औसत ले लेते हैं तथा प्राप्त अंकों का वर्गमूल निकाल लेते हैं। इस प्रकार जो अंक प्राप्त होता है वह **मानक विचलन (Standard deviation)** कहलाता है।

परिभाषाएँ :

मानक विचलन (Standard deviation) : श्रेणी के विभिन्न चर मूल्यों के समान्तर माध्य से प्राप्त विचलन के वर्गों के समान्तर माध्य के वर्गमूल को **मानक विचलन** कहते हैं।

मानक विचलन $(\sigma)=\sqrt{\dfrac{\Sigma(x_i-\bar{x})^2}{n}}$

मानक विचलन गुणांक (coefficient of standard deviation): मानक विचलन एक निरपेक्ष मान है। दो श्रेणियों का तुलनात्मक अध्ययन करने के लिए मानक विचलन का सापेक्ष माप का प्रयोग करते हैं, जो मानक विचलन गुणाँक (coefficient of standard deviation) कहलाता है। इसका सूत्र निम्न प्रकार है :

मानक विचलन गुणाँक $=\dfrac{\sigma}{\bar{x}}$ या $\dfrac{\text{मानक विचलन}}{\text{माध्य}}$

प्रसरण (Variance) : माध्य से लिए गए विचलनों के वर्गों के माध्य को प्रसरण कहते हैं, अर्थात्

प्रसरण $(\sigma^2)=\dfrac{\Sigma(x_i-\bar{x})^2}{n}$

विचरण गुणांक (coefficient of variation) : दो या दो से अधिक श्रेणियों के प्रकीर्णन की तुलना करने के लिए मानक विचलन गुणांक निकाला जाता है। जिसका मान सदैव एक से कम अर्थात् दशमलव भिन्न में ही आता है जिससे अनुमान लगाने में असुविधा होती है। इसी कारण विचरण गुणाँक का प्रयोग किया जाता है। मानक विचलन गुणाँक को 100 से गुणा करने पर जो प्रतिशत आता है उसे ही विचरण गुणाँक कहते हैं। वस्तुतः विचरण गुणाँक मानक विचलन गुणाँक का प्रतिशत रूप ही है। इसे निम्न सूत्र से ज्ञात किया जाता है :

विचरण गुणाँक (Coefficient of Variation) $=\dfrac{\sigma}{\bar{x}}\times 100$

अब हम विभिन्न प्रकार के आँकड़ों के लिए मानक विचलन की गणना करेंगे।

(I) **अवर्गीकृत आँकड़ों के लिए** : यदि आँकड़ों में n पद क्रमशः $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ हों तथा इनका समान्तर माध्य $\bar{x}$ हो तो

मानक विचलन $(\sigma) = \sqrt{\dfrac{\Sigma(x_i - \bar{x})^2}{n}}$

उपर्युक्त सूत्र का सरलीकृत रूप निम्न प्रकार से लिखा जा सकता है :

$$\sigma = \frac{1}{n}\sqrt{n\Sigma x_i^2 - (\Sigma x_i)^2}$$

उदाहरण 18: पांच छात्रों ने गणित विषय में क्रमशः 23, 46, 16, 25 और 20 अंक प्राप्त किए। उनके प्राप्ताँको का मानक विचलन ज्ञात कीजिए।

हल : चर मूल्यों का समान्तर माध्य $\bar{x} = \dfrac{23+46+16+25+20}{5} = \dfrac{130}{5} = 26$

x	$x-\bar{x}$	$(x-\bar{x})^2$
23	−3	9
46	20	400
16	−10	100
25	−1	1
20	−6	36
		$\Sigma(x_i-\bar{x})^2 = 546$

मानक विचलन $\sigma = \sqrt{\dfrac{\Sigma(x_i - \bar{x})^2}{n}} = \sqrt{\dfrac{546}{5}} = \sqrt{109\cdot2} = 10\cdot45$

(II) **अवर्गीकृत बारम्बारता बंटन के लिए** : यदि किसी चर के विभिन्न मानों $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ की बारम्बारताएँ क्रमशः $f_1, f_2, f_3, ..., f_n$ हों तथा इनका समान्तर माध्य $\bar{x}$ हो तो

मानक विचलन $\sigma = \sqrt{\dfrac{\Sigma f_i(x_i - \bar{x})^2}{N}}$, जहाँ $\bar{x} = \dfrac{\Sigma f_i x_i}{N}$, $N = \Sigma f_i$.

उदाहरण 19: निम्न आँकड़ों से मानक विचलन की गणना कीजिए :

x	10	12	14	16	18	20	22	24
f	5	8	21	24	18	15	7	2

हल :

x	f	fx	$(x-\bar{x})$	$(x-\bar{x})^2$	$f(x-\bar{x})^2$
10	5	50	−6·5	42·25	211·25
12	8	96	−4·5	20·25	162·00
14	21	294	−2·5	6·25	131·25
16	24	384	−0·5	0·25	6·00
18	18	324	1·5	2·25	40·50
20	15	300	3·5	12·25	183·75
22	7	154	5·5	30·25	211·75
24	2	48	7·5	56·25	112·50
	$N = 100$	$\Sigma f_i x_i = 1650$			$\Sigma f_i(x_i-\bar{x})^2 = 1059\cdot00$

$$\bar{x} = \frac{\Sigma f_i x_i}{N} = \frac{1650}{100} = 16 \cdot 50$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma f_i (x_i - \bar{x})^2}{N}} = \sqrt{\frac{1059}{100}} = 3 \cdot 25$$

मानक विचलन के परिकलन की लघु रीतियाँ

(Short–cut methods for calculation of standard deviation) :

(i) परिभाषा अनुसार

$$\sigma^2{}_x = \frac{1}{N} \Sigma f_i (x_i - \bar{x})^2$$

$$= \frac{1}{N} \Sigma f_i (x_i^2 + \bar{x}^2 - 2x_i \bar{x})$$

$$= \frac{1}{N} \left(\Sigma f_i x_i^2 + \bar{x}^2 \Sigma f_i - 2\bar{x} \Sigma f_i x_i \right)$$

$$= \frac{1}{N} \left(\Sigma f_i x_i^2 + N\,\bar{x}^2 - 2N\,\bar{x}^2 \right) \qquad \left[\because N = \Sigma f_i , \bar{x} = \frac{\Sigma f_i x_i}{N} \right]$$

$$= \frac{1}{N} \left(\Sigma f_i x_i^2 - N\,\bar{x}^2 \right)$$

$$= \frac{1}{N} \Sigma f_i x_i^2 - \left(\frac{1}{N} \Sigma f_i x_i \right)^2$$

अतः $\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{N} \Sigma f_i x_i^2 - \left(\frac{1}{N} \Sigma f_i x_i \right)^2}$

(ii) यदि कल्पित माध्य = a लें तथा $x_i - a = d_i$ मानें तो

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{N} \Sigma f_i (x_i - \bar{x})^2$$

$$= \frac{1}{N} \Sigma f_i (x_i - a + a - \bar{x})^2$$

$$= \frac{1}{N} \Sigma f_i (d_i - d)^2 , \qquad \text{जहाँ } d_i = x_i - a$$

$$= \frac{1}{N} \Sigma f_i d_i^2 - \left(\frac{1}{N} \Sigma f_i d_i \right)^2 = \sigma_d^2$$

अतः $\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{N} \Sigma f_i d_i^2 - \left(\frac{1}{N} \Sigma f_i d_i \right)^2} = \sigma_d$, (सरलीकृत रूप)

(iii) **पद विचलन विधि (Step deviation method) :**

यदि वर्गीकृत बारम्बारता श्रेणी में वर्ग अन्तराल समान हो तो कल्पित माध्य (a) से विचलन ज्ञात करते समय समान वर्ग अन्तराल के बराबर उभयनिष्ठ गुणाँक बाहर निकाल लिया जाता है। इससे गणना कार्य अत्यन्त सरल हो जाता है। शेष गणना प्रक्रिया पूर्व की भाँति रहती है। केवल सूत्र निम्न प्रकार से प्रयुक्त होता है

$$\sigma_x = h \times \sqrt{\frac{1}{N}\sum f_i u_i^2 - \left(\frac{1}{N}\sum f_i u_i\right)^2} = h\sigma_u,$$

जहाँ $u_i = \frac{x_i - a}{h} = \frac{d_i}{h}$ तथा $d_i = hu_i$

इस विधि में माध्य $\bar{x} = a + h\frac{\sum f_i u_i}{N}$

टिप्पणी : संकेताक्षरों की दृष्टि से मानक विचलन $\sigma = \sigma_x = \sigma_d = h\sigma_u$

उदाहरण 20: निम्न आँकड़ों से मानक विचलन, मानक विचलन गुणाँक तथा विचरण गुणाँक की गणना कीजिए :

वर्ग	0–2	2–4	4–6	6–8	8–10
बारम्बारता	2	5	15	7	1

हल :

वर्ग	मध्यमान x	बारम्बारता f	fx	fx^2
0–2	1	2	2	2
2–4	3	5	15	45
4–6	5	15	75	375
6–8	7	7	49	343
8–10	9	1	9	81
		$N = \Sigma f_i = 30$	$\Sigma f_i x_i = 150$	$\Sigma f_i x_i^2 = 846$

मानक विचलन $(\sigma) = \sqrt{\frac{\sum f_i x_i^2}{N} - \left(\frac{\sum f_i x_i}{N}\right)^2}$

$$= \sqrt{\frac{846}{30} - \left(\frac{150}{30}\right)^2}$$

$$= \sqrt{28.2 - 25} = 1 \cdot 79$$

मानक विचलन गुणांक (C.S.D.) $= \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{1 \cdot 79}{5} = 0 \cdot 36$

विचरण गुणाँक $= \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100 = 0 \cdot 36 \times 100 = 36$

उदाहरण 21: निम्नलिखित बंटन का मानक विचलन, मानक विचलन गुणाँक तथा विचरण गुणाँक ज्ञात कीजिए।

x	9	12	15	18	21	24	27	30
f	20	60	150	250	200	120	50	40

हल : माना कल्पित माध्य $a = 18$

x	f	$d=x-18$	d^2	fd	fd^2
9	20	−9	81	−180	1620
12	60	−6	36	−360	2160
15	150	−3	9	−450	1350
18	250	0	0	0	0
21	200	3	9	600	1800
24	120	6	36	720	4320
27	50	9	81	450	4050
30	40	12	144	480	5760
	$N =$ 890			$\Sigma f_i d_i$ =1260	$\Sigma f_i d_i^2$ =21060

मानक विचलन $\sigma = \sqrt{\frac{1}{N}\Sigma f_i d_i^2 - \left(\frac{1}{N}\Sigma f_i d_i\right)^2} = \sqrt{\frac{21060}{890} - \left(\frac{1260}{890}\right)^2} = \sqrt{23\cdot66 - 2\cdot004} = \sqrt{21\cdot656} = 4\cdot65$

माध्य $\qquad \bar{x} = a + \frac{1}{N}\Sigma f_i d_i = 18 + \frac{1260}{890} = 19\cdot41$

मानक विचलन गुणाँक $= \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{4\cdot65}{19\cdot14} = 0\cdot242$

विचरण गुणाँक $= \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100 \ = 0\cdot242 \times 100 = 24\cdot2$

(III) **वर्गीकृत बारम्बारता बंटन के लिए** : समान वर्ग अन्तराल वाले वर्गीकृत बारम्बारता बंटन के लिए लघुरीतियों के अन्तर्गत बताई पद विचलन विधि का प्रयोग कर मानक विचलन ज्ञात करते हैं।

उदाहरण 22: निम्नलिखित बंटन का माध्य एवं मानक विचलन ज्ञात कीजिए :

वर्ग	**0–10**	**10–20**	**20–30**	**30–40**	**40–50**
छात्रों की संख्या	**5**	**8**	**15**	**16**	**6**

हल : इस प्रश्न का हल हम पद विचलन विधि से निकालेंगे

माना कल्पित माध्य $a = 25$, जो वर्ग 20–30 का मध्यमान है।

वर्ग	मध्यमान x	छात्रों की संख्या f	$u_i = \frac{x-25}{10}$	u_i^2	$f_i u$ $f_i u_i$	$f_i u^2$ $f_i u_i^2$
0–10	5	5	−2	4	−10	20
10–20	15	8	−1	1	−8	8
20–30	25	15	0	0	0	0
30–40	35	16	1	1	16	16
40–50	45	6	2	4	12	24
		$N = 50$		10	$\Sigma f_i u_i$ = 10	$\Sigma f_i u_i^2$ = 68

माध्य $\bar{x} = a + h \times \frac{\sum f_i u_i}{N} = 25 + \frac{10 \times 10}{50} = 27$

मानक विचलन $\sigma = h \times \sqrt{\frac{1}{N}\sum f_i u_i^2 - \left(\frac{1}{N}\sum f_i u_i\right)^2}$

$$= 10 \times \sqrt{\frac{68}{50} - \left(\frac{10}{50}\right)^2} = 10 \times \sqrt{1 \cdot 32} = 10 \times 1 \cdot 1489 = 11 \cdot 489$$

प्रश्नमाला 13.3

प्रश्न 1 व 2 के आँकड़ों के लिए माध्य व प्रसरण ज्ञात कीजिए।

1.

x_i	6	10	14	18	24	28	30
f_i	2	4	7	12	8	4	3

2.

x_i	82	83	87	88	92	94	99
f_i	3	2	3	2	6	3	3

3. लघु विधि द्वारा माध्य व मानक विचलन ज्ञात कीजिए।

x_i	70	71	72	73	74	75	76	77	78
f_i	2	1	12	29	25	12	10	4	5

प्रश्न 4 व 5 में दिए गए बारंबारता बंटन के लिए माध्य व प्रसरण ज्ञात कीजिए।

4.

वर्ग	0 – 30	30 – 60	60 – 90	90 – 120	120 – 150	150 – 180	180 – 210
बारंबारता	2	3	5	10	3	5	2

5.

वर्ग	0 – 10	10 – 20	20 – 30	30 – 40	40 – 50
बारंबारता	5	8	15	16	6

6. लघु विधि द्वारा माध्य, प्रसरण व मानक विचलन ज्ञात कीजिए।

ऊँचाई (सेमी)	70 – 75	75 – 80	80 – 85	85 – 90	90 – 95	95 – 100	100 – 105	105 – 110	110 – 115
छात्रों की संख्या	3	4	7	7	15	9	6	6	3

7. नीचे दी गई तालिका में वृत्तों के व्यासों का मानक विचलन ज्ञात कीजिए

व्यास (मिमी में)	43 – 46	47 – 50	51 – 54	55 – 58	59 – 62
वृत्तों की संख्या	15	17	21	22	25

8. दिए गए आँकड़ों से मानक विचलन, मानक विचलन गुणाँक तथा विचरण गुणाँक की गणना कीजिए।

वर्ग	0 – 20	20 – 40	40 – 60	60 – 80	80 – 100
बारंबारता	2	5	15	7	1

9. निम्नलिखित बंटन का कल्पित माध्य 35 से मानक विचलन ज्ञात कीजिए

35, 25, 33, 50, 37, 35, 33, 37, 30

10. निम्न श्रेणी में माध्य, माध्यिका एवं बहुलक से माध्य विचलन एवं गुणाँक ज्ञात कीजिए

मासिक किराया (रुपयों में)	किरायेदारों की संख्या
10 से कम	3
20 से कम	8
30 से कम	16
40 से कम	26
50 से कम	37
60 से कम	50
70 से कम	56
80 से कम	60

विविध प्रश्नमाला–13

1. पांच छात्रों के गणित में प्राप्ताँक 20, 25, 15, 35 और 30 है तो इसका परास होगा–

(A) 15 (B) 20 (C) 25 (D) 30

2. अन्तर चतुर्थक परास का सूत्र है–

(A) $Q_3 + Q_1$ (B) $Q_3 - Q_1$ (C) $Q_3 - Q_2$ (D) $Q_3 - Q_4$

3. किसी वस्तु का अधिकतम मूल्य 500 रु तथा न्यूनतम मूल्य 75 रु होने पर परास गुणाँक होगा–

(A) 0.739 (B) 0.937 (C) 7.39 (D) 73.9

4. चर श्रेणी 10, 20, 30, 40, 50, 60 का परास गुणाँक है:

(A) 3 / 2 (B) 5 / 6 (C) 7 / 5 (D) 5 / 7

5. माध्य विचलन सबसे कम होता है:

(A) माध्य से (B) माध्यिका से (C) बहुलक से (D) मूल बिन्दु से

6. चार विद्यार्थियों के प्राप्ताँक 25, 35, 45 व 55 हैं, इनका माध्य विचलन है:

(A) 10 (B) 1 (C) 0 (D) 40

7. बंटन 2, 4, 5, 3, 8, 7, 8 का माध्यिका से लिया गया माध्य विचलन है:

(A) 13 / 7 (B) 1 / 2 (C) 11 / 7 (D) 2

8. किसी चर श्रेणी का माध्य $\bar{x} = 773$ तथा माध्य विचलन 64.4 है, तो उसका माध्य विचलन गुणाँक है:

(A) 0.065 (B) 12.003 (C) 0.083 (D) 0.073

9. आँकड़ों 6, 10, 4, 7, 4, 5 का मानक विचलन है:

(A) $\sqrt{13/3}$ (B) 13 / 3 (C) $\sqrt{26}$ (D) $\sqrt{26}/6$

10. एक कक्षा के छात्रों के प्राप्तांको का मानक विचलन 1.4 है तो बंटन का प्रसरण होगा–

(A) 1.2 (B) 0.38 (C) 1.96 (D) 1.4

11. यदि प्रसरण $\sigma = \sqrt{\frac{\sum fd^2}{k} - \left(\frac{\sum fd}{30}\right)^2}$ है तो k का मान है:

(A) 10 (B) 20 (C) 30 (D) 60

12. एक श्रेणी का विचरण गुणाँक 30% है तथा मानक विचलन 15 है, तो उसका माध्य है:

(A) 0.5 (B) 5 (C) 2 (D) 50

13. किसी श्रेणी में $\sum x^2 = 100$, $n = 5$ तथा $\sum x = 20$ हो, तो मानक विचलन है:

(A) 16 (B) 2 (C) 4 (D) 8

14. एक नगर में सात दिनों का तापक्रम 18, 12, 6, –7, –12, 5, –4 सेंटीग्रेड में दिया गया है तो परास मान सेन्टीग्रेड में होगा–

(A) 6 (B) 30 (C) 22 (D) 14

15. यदि $N=10, \sum x=120$ तथा $\sigma_x=60$ हो तो विचरण गुणांक है:

(A) 5 (B) 50 (C) 500 (D) 0.5

16. माध्य से लिए विचलनों का बीजगणितीय योग होता है:

(A) ऋणात्मक (B) धनात्मक (C) प्रत्येक में अलग–अलग (D) शून्य

17. यदि $\bar{x}=6, \sum x=60$ तथा $\sum x^2=1000$ हो, तो σ_x का मान है:

(A) 6 (B) 8 (C) 64 (D) 10

18. परास गुणांक परिभाषित किया जा सकता है:

(A) $\frac{H-L}{2}$ (B) $\frac{H+L}{2}$ (C) $\frac{H-L}{H+L}$ (D) $\frac{H+L}{H-L}$

19. यदि किसी श्रृंखला के सभी पदों का मूल्य एक समान हो, तो प्रकीर्णन का मान ज्ञात कीजिए।

20. व्यक्तिगत श्रृंखला में मानक विचलन ज्ञात करने का सूत्र लिखिए।

21. किसी बंटन का मानक विचलन 20.5 तथा समान्तर माध्य 60 हो, तो उसका मानक विचलन गुणाँक ज्ञात कीजिए।

22. निम्न बारंबारता बंटन से अन्तरचतुर्थक परास, अन्तरचतुर्थक परास गुणाँक, चतुर्थक विचलन एवं चतुर्थक विचलन गुणाँक ज्ञात कीजिए।

अंक से अधिक	0	15	30	45	60	75	90	105
छात्रों की संख्या	150	140	100	80	70	30	14	0

23. पद विचलन विधि से निम्न आवृत्ति बंटन का माध्य एवं मानक विचलन ज्ञात कीजिए।

वर्ग	1 – 5	6 – 10	11 – 15	16 – 20	21 – 25	26 – 30	31 – 35
बारंबारता	5	7	18	25	20	4	1

24. निम्न आंकड़ों के बहुलक से माध्य विचलन ज्ञात कीजिए तथा इसका गुणांक निकालिए।

केन्द्रीय आकार	6	7	8	9	10	11	12
आवृत्ति	3	6	9	13	8	5	4

25. निम्न आंकड़ों से प्रसरण ज्ञात कीजिए।

केन्द्रीय आकार	32 – 38	38 – 44	44 – 50	50 – 56	56 – 62	62 – 68
छात्रों की संख्या	3	6	9	13	8	5

महत्वपूर्ण बिन्दु

1. विक्षेपण : किसी श्रेणी के चरों के मानों का माध्य से बिखराव प्रकीर्णन कहलाता है।
2. परासः श्रेणी में चर के उच्चतम मान (H) और निम्नतम मान (L) के अन्तर को परास कहते हैं तथा परास गुणाँक $(C.R.)=\frac{H-L}{H+L}$
3. अन्तर चतुर्थक परास $(I.Q.R.)=Q_3-Q_1$
4. चतुर्थक विचलन $(Q.D.)=\frac{Q_3-Q_1}{2}$ = अर्द्ध अन्तर चतुर्थक परास
5. चतुर्थक विचलन गुणाँक $(C.Q.D.)=\frac{Q_3-Q_1}{Q_3+Q_1}$
6. माध्य विचलन : किसी भी श्रेणी में चर के विभिन्न मानों का उसके सांख्यिकीय माध्य (समान्तर माध्य, माध्यिका या बहुलक) से लिये गये विचलनों के निरपेक्ष मानों का समान्तर माध्य उसका माध्य विचलन कहलाता है।

(i) जब आँकड़े वर्गीकृत हों

A से माध्य विचलन $= \frac{\sum f_i |x_i - A|}{N}$, जहाँ A सांख्यिकीय माध्य है।

(ii) अवर्गीकृत बारम्बारता बंटन के लिए :

A से माध्य विचलन $= \frac{1}{N}\sum f_i |x_i - A|$, जहाँ $N = \sum f_i$

(iii) जब आँकड़े वर्गीकृत रूप में हों तो उपर्युक्त चरण (ii) के सूत्र को काम में लिया जाता है। यहाँ x_i संगत वर्ग का मध्यमान है।

7. माध्य विचलन गुणाँक $= \frac{\text{माध्य विचलन}}{A}$, जहाँ A वह माध्य है जिससे माध्य विचलन लिया गया है।

8. प्रसरण व मानक विचलनः श्रेणी के चर के मानों के समान्तर माध्य से विचलनों के वर्गों के माध्य को प्रसरण कहते हैं। प्रसरण का धनात्मक वर्गमूल मानक विचलन कहलाता है।

(i) जब आँकड़े अवर्गीकृत हों :

मानक विचलन $(\sigma) = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n} - \left(\frac{\sum x_i}{n}\right)^2}$

(ii) जब आँकड़े अवर्गीकृत या वर्गीकृत बारम्बारता बंटन के रूप में हो तब

मानक विचलन $\sigma = \sqrt{\frac{\sum f_i (x_i - \bar{x})^2}{N}} = \sqrt{\frac{\sum f_i x_i^2}{N} - \left(\frac{\sum f_i x_i}{N}\right)^2}$

9. मूल बिन्दु परिवर्तित करने पर : यदि कल्पित माध्य a हो, तो

(i) अवर्गीकृत आँकड़ों के लिए

$\sigma = \sqrt{\frac{\sum d_i^2}{n} - \left(\frac{\sum d_i}{n}\right)^2}$, जहाँ $d_i = x_i - a$

(ii) अवर्गीकृत तथा वर्गीकृत बारम्बारता बंटन के लिए

$\sigma = \sqrt{\frac{\sum f_i d_i^2}{N} - \left(\frac{\sum f_i d_i}{N}\right)^2}$

(iii) मूल बिन्दू तथा स्केल परिवर्तन (पद विचलन) के लिए : यदि कल्पित माध्य a तथा वर्गीकृत बारम्बारता के प्रत्येक वर्ग का वर्ग अंतराल h हो तो $u_i = \frac{x_i - a}{h}$ लेने पर,

मानक विचलन $\sigma = h\sqrt{\frac{\sum f_i u_i^2}{N} - \left(\frac{\sum f_i u_i}{N}\right)^2}$

मानक विचलन गुणाँक $= \frac{\sigma}{\bar{x}}$

विचरण गुणाँक $= \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100$

उत्तरमाला

प्रश्नमाला 13.1

1. $\frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 - Q_1}$ **2.** 30 **3.** 6, 0.352 **4.** 7, 0.44 **5.** 2, 0.5

6. 0.5 **7.** 59.44, 59.44 **8.** 34.375, 34.375

प्रश्नमाला 13.2

1. 3 **2.** 8.4 **3.** 2 **4.** 7 **5.** 1 **6.** 0.2 **7.** 6.32

8. 16 **9.** 3.33 **10.** 5.1 **11.** 1 **12.** 13.1 **13.** 15.792 **14.** 11.28

15. 10.34 **16.** 7.35 **17.** 7.38 **18.** 2.075

प्रश्नमाला 13.3

1. 19, 43.4 **2.** 90, 29.09 **3.** 74, 1.69 **4.** 107, 2276 **5.** 27, 132 **6.** 93, 105.52, 10.27

7. 5.55 **8.** 17.9, 0.358, 35.8 **9.** 6.376 **10.** 15.18, 15.36, 15.22, 0.348, 0.363, 0.351

विविध प्रश्नमाला 13

1. (B) **2.** (B) **3.** (A) **4.** (D) **5.** (B) **6.** (A) **7.** (D)

8. (C) **9.** (A) **10.** (C) **11.** (C) **12.** (D) **13.** (B) **14.** (B)

15. (C) **16.** (D) **17.** (B) **18.** (C) **19.** 0 **20.** $\sigma = \sqrt{\frac{\sum x^2}{n} - \left(\frac{\sum x}{n}\right)^2}$

21. 0.34 **22.** 46.875; 0.48; 23.4375; 0.48 **23.** $\bar{x} = 17,\ \sigma_x = 6.44$

24. $\delta_z = 1.265,\ \delta_z = 0.141$ **25.** 113.4