

Chapter – 10

வகை நுண்கணிதம் வகைமை மற்றும் வகையிடல் முறைகள்

Ex 10.1

Question 1.

முதல் கொள்கையினைப் பயன்படுத்திப் பின்வரும் சார்புகளின் வகைக்கெழுக்களைக் காண்க.

(i) $f(x) = 6$

(ii) $f(x) = -4x + 7$

(iii) $f(x) = -x^2 + 2$

தீர்வு :

(i) $f(x) = 6$ (1)

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$f(x) = 6$$

$$\Rightarrow f(x + \Delta x) = 6$$
 (2)

$$\therefore f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{6-6}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0}{\Delta x} = 0$$

(1), (2) லிருந்து

$$\therefore f'(x) = 0$$

(ii) $f(x) = -4x + 7$ (1)

$$\therefore f(x + \Delta x) = -4(x + \Delta x) + 7 = -4x - 4\Delta x + 7$$
(2)

$$\therefore \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{-4x - 4\Delta x + 7 - (-4x + 7)}{\Delta x}$$

(1), (2) லிருந்து

=

$$\frac{-\cancel{4x} - 4\Delta x + \cancel{7} + \cancel{4x} - \cancel{7}}{\Delta x} = \frac{-4\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}} = -4$$

$$f'(x) = -4$$

$$(iii) f(x) = -x^2 + 2 \dots\dots\dots(1)$$

$$\begin{aligned} f(x + \Delta x) &= -(x + \Delta x)^2 + 2 \\ &= -(x^2 + 2x \Delta x + (\Delta x)^2) + 2 \\ &= -x^2 - 2x \Delta x - (\Delta x)^2 + 2 \dots\dots\dots(2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) - (1) &\Rightarrow f(x + \Delta x) - f(x) \\ &= \cancel{-x^2} - 2x\Delta x - (\Delta x)^2 + \cancel{2} + \cancel{x^2} - \cancel{2} \end{aligned}$$

$$= -2x \Delta x - (\Delta x)^2$$

$$= \Delta x (-2x - \Delta x)$$

$$\therefore \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(-2x-\Delta x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} -2x - \Delta x$$

$$= -2x - (0) = -2x$$

$$\therefore f'(x) = -2x$$

Question 2.

கீழ்க்காணும் சார்புகளுக்கு $x = 1$ -ல் இடப்பக்க மற்றும் வலப்பக்க வகைக்கெழு (கிடைக்கப்பெறின்) காண்க. $x = 1$ -ல் சார்புகளுக்கு வகைமைத்தன்மை உள்ளதா என்பதனையும் காண்க

$$(i) f(x) = |x - 1|$$

$$(ii) f(x) = \sqrt{1 - x^2}$$

$$(iii) f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 1 \\ x^2, & x > 1 \end{cases}$$

தீர்வு :

$$(1) f(x) = |x - 1|$$

$$f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{|x-1|-0}{x-1} \\
&= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{|x-1|}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} -\frac{(x-1)}{x} = -1 \\
&\therefore f'(1^-) = -1 \\
&\therefore f'(1^+) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} \\
&= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|x-1|-0}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|x-1|}{x-1} \\
&= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{x-1} = 1 \\
&\therefore f'(1^+) = 1
\end{aligned}$$

ஒரு பக்க வகைக்கெழு, $f'(1^-) \neq f'(1^+)$. அதனால் $f'(1)$ கிடைக்கப்பெறாது.

$\therefore x = 1$ ல் வகைமை இல்லை.

$$\begin{aligned}
&\text{(ii) } f(x) = \sqrt{1-x^2} \\
&f(1) = \sqrt{1-1} = 0 \\
&\therefore f'(1^-) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{1-x^2}-0}{x-1} \quad [\because f(1) = 0] \\
&= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{1+x} \cdot \sqrt{1-x}}{-(1-x)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{1+x} \cdot \sqrt{1-x}}{-(\sqrt{1-x}) \cdot \sqrt{1-x}} \\
&= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}} = -\lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \\
&f'(1^-) = -\infty \dots\dots(1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\therefore f'(1^+) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \\
&= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{1-x^2} - 0}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x - 1} \\
&= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{1+x} \cdot \sqrt{1-x}}{-(1-x)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{1+x} \cdot \sqrt{1-x}}{-\sqrt{1-x} \cdot \sqrt{1-x}} \\
&= \lim_{x \rightarrow 1^+} -\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \dots\dots\dots(2)
\end{aligned}$$

$$(1), (2) \Rightarrow f'(1^-) \neq f'(1^+)$$

$\therefore f(x)$ க்கு $x = 1$ -ல் வகைமை இல்லை.

$$(iii) f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 1 \\ x^2, & x > 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\therefore f'(1^-) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \\
&= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} 1 = 1 \dots\dots\dots(1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\therefore f'(1^+) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \\
&= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 1}{x - 1} \\
&= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 1^+} x + 1 = 1 + 1 = 2
\end{aligned}$$

$\therefore f'(1^-) \neq f'(1^+)$, $f(x)$ -க்கு $x = 1$ -ல் வகைமை இல்லை.

Question 3.

கொடுக்கப்பட்டுள்ள புள்ளிகளில் கீழ்காணும் சார்புகள் வகைமையானதா என்பதைத் தீர்மானிக்கவும்.

- (i) $f(x) = x|x|$; $x = 0$
- (ii) $f(x) = |x^2 - 1|$; $x = 1$
- (iii) $f(x) = |x| + |x - 1|$; $x = 0, 1$

$$(iv) f(x) = \sin|x|; x = 0$$

தீர்வு :

$$(i) f(x) = x|x| = \begin{cases} x^2, & x \geq 0 \\ -x^2, & x < 0 \end{cases}$$

$$f'(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x^2 - 0}{x - 0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x^2}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x) = 0$$

$$\therefore f'(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - 0}{x - 0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0 \dots\dots\dots(2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow f'(0^-) = f'(0^+)$$

$f(x) = x|x|$ க்கு $x = 0$ -ல் வகைமை உள்ளது.

$$(ii) f(x) = |x^2 - 1|$$

$$f(x) = \begin{cases} -(x^2 - 1), & x < 1 \\ +(x^2 - 1), & x \geq 1 \end{cases}$$

$$\therefore f'(1^-) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-(x^2 - 1) - 0}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1 - x^2}{-(1 - x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(1+x)(\cancel{1-x})}{-(\cancel{1-x})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^-} -(1+x) = -2 \quad \dots (1)$$

$$\therefore f'(1^+) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 1 - 0}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x+1)(\cancel{x-1})}{(\cancel{x-1})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} x + 1 = 2 \quad \dots (2)$$

(1), (2) $\Rightarrow f'(1) \neq f'(1)$

$f(x)$ -க்கு $x = 1$ -ல் வகைமை இல்லை.

(iii) $f(x) = |x| + |x - 1|$

$$f(x) = \begin{cases} -x - (x - 1) & = -2x + 1 & x < 0 \\ x - (x - 1) & = 1 & 0 \leq x < 1 \\ x + x - 1 & = 2x - 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

$$\therefore f'(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(2x + 1) - (1)}{x - 0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-2\cancel{x}}{\cancel{x}} = -2$$

$$\therefore f'(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - 1}{x} = 0$$

$\therefore f(x)$ -க்கு $x = 0$ -ல் வகைமை இல்லை

$$f'(1^-) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 1} = \frac{1 - 1}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{0}{x - 1} = 0$$

$$f'(1^+) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(2x - 1) + 1}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x}{x - 1} = 2$$

$\therefore f(x)$ க்கு $x = 1$ -ல் வகைமை இல்லை.

$$(iv) f(x) = \sin |x| = \begin{cases} \sin x & x \geq 0 \\ -\sin x & x < 0 \end{cases}$$

$$\therefore f'(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-\sin x - \sin 0}{x - 0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-\sin x}{x} = -1 \quad [\because \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1]$$

$$f'(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x - \sin 0}{x - 0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$f'(0^-) \neq f'(0^+)$$

$\therefore f(x)$ க்கு $x = 0$ -ல் வகைமை இல்லை.

Question 4.

கீழ்க்காணும் சார்புகளுக்குக் குறிப்பிடப்பட்டுள்ள புள்ளிகளில் வகைமை இல்லை என்பதை நிறுவுக.

$$(i) f(x) = \begin{cases} -x + 2, & x \leq 2 \\ 2x - 4, & x > 2 \end{cases}; x = 2$$

$$(ii) f(x) = \begin{cases} 3x, & x < 0 \\ -4x, & x \geq 0 \end{cases}; x = 0 \text{ தீர்வு : } f(x) = \begin{cases} -x + 2, & x \leq 2 \\ 2x - 4, & x > 2 \end{cases}; x = 2$$

$$f'(2^-) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-x + 2 - (0)}{x - 2}$$

$$[\because f(x) = -x + 2]$$

$$\Rightarrow f(2) = -2 + 2 = 0]$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-x + 2}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x - 2)}{x - 2} = -1 \dots\dots\dots(1)$$

$$\therefore f'(2^+) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(2x - 4) - 0}{x - 2}$$

$$[\because f(x) = 2x - 4]$$

$$f(2) = 4 - 4 = 0]$$

=

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2(x-2)}{x-2}$$

$$= 2. \dots\dots\dots(2)$$

$$(1), (2) \Rightarrow f'(2^-) \neq f'(2^+)$$

$\therefore f(x)$ க்கு $x = 2$ -ல் வகைமை இல்லை.

$$(ii) f(x) = \begin{cases} 3x, & x < 0 \\ -4x, & x \geq 0 \end{cases}; x = 0$$

$$\begin{aligned} \therefore f'(0^-) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3x - 0}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3x}{x} = 3 [f(x) = 3x] \dots\dots\dots(1) \end{aligned}$$

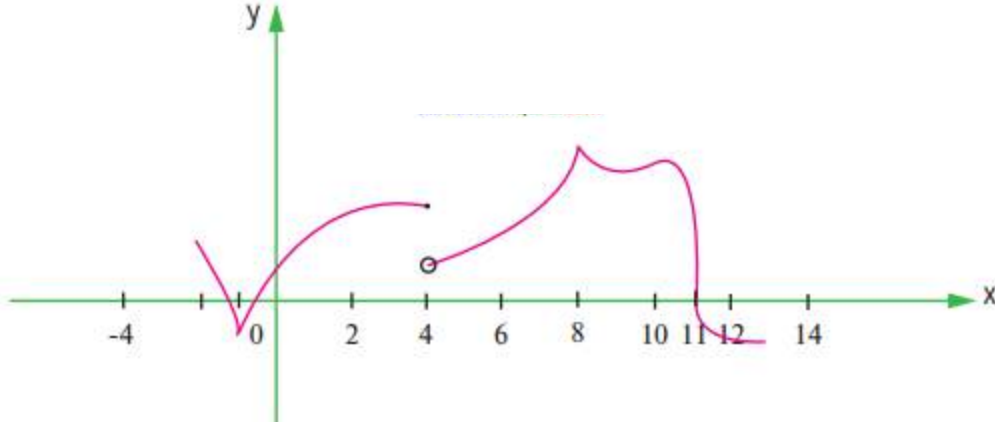
$$\begin{aligned} \therefore f'(0^+) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-4x - 0}{x} \\ [\because f(x) &= -4x - 0f(0) = 4(0) = 0] \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{4x}{x} = -4 \end{aligned}$$

$$(1), (2) \Rightarrow f'(0) \neq f'(0)$$

$\therefore f(x)$ க்கு $x = 0$ -ல் வகைமை இல்லை.

Question 5.

தரப்பட்டுள்ள ன் வரைபடத்தில் எந்தெந்தன் மதிப்புகளுக்கு (எண்களுக்கு) f வகைமை இல்லை என்பதனையும் அதற்கான காரணங்களையும் கூறுக.



தீர்வு :

(i) வரைபடத்திலிருந்து $x = -1$ -ல் வரைபடத்திற்கு கூர்முனை உள்ளது.

$x = -1$ -ல் வகைமை இல்லை .

(ii) $x = 4$ -ல் தொடர்ச்சியற்றது.

f க்கு $x = 4$ -ல் வகைமை இல்லை.

(iii) $x = 8$ -ல் வரைபடம் கூர்முனையில் சந்திக்கிறது.

ரிக்கு $x = 8$ -ல் வகைமை இல்லை.

(iv) $x = 11$ -ல் செங்குத்து தொடுகோடு அமைகிறது.

ரிக்கு $x = 11$ -ல் வகைமை இல்லை.

Question 6.

$f(x) = |x + 100| + x^2$ எனில், $f'(-100)$ கிடைக்கப்பெறுமா எனச் சோதித்துப் பார்க்கவும்.

தீர்வு :

$$f(x) = |x + 100| + x^2$$

$$\therefore f'(-100^-) = \lim_{x \rightarrow -100^-} \frac{f(x) - f(-100)}{x - (-100)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -100^-} \frac{|x+100| + x^2 - (-100)^2}{x+100}$$

$$[\because f(x) = |x + 100| + x^2]$$

$$f(-100) = |-100 + 100| + (-100)^2 = 100^2]$$

$$= \lim_{x \rightarrow -100^-} \frac{|x+100| + x^2 - 100^2}{x+100}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -100^-} \frac{-(x+100) + x^2 - 100^2}{x+100}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -100^-} \frac{-x-100 + x^2 - 100^2}{x+100}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -100^-} \frac{-(x+100) + (x+100)(x-100)}{x+100}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -100^-} \frac{\cancel{(x+100)}(-1+x-100)}{\cancel{x+100}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -100^-} (x - 101) = -201 \dots (1)$$

$$\therefore f'(-100^-) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -100^+} \frac{f(x) - f(-100)}{x - (-100)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -100^+} \frac{|x+100| + x^2 - (100)^2}{x+100}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -100^+} \frac{(x+100) + x^2 - 100^2}{x+100}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -100^+} \frac{(x+100) + (x-100)(x+100)}{x+100}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -100^+} \frac{\cancel{(x+100)}[1+x-100]}{\cancel{x+100}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -100^+} [1 + x - 100] = -199 \dots\dots\dots (2)$$

(1), (2) $\Rightarrow f(x)$ க்கு $x = -100$ -ல் வகைமை இல்லை.

$\Rightarrow f'(x)$ கிடைக்கப் பெறாது.

Question 7.

கீழ்க்காணும் சார்புகளின் வகைமைத் தன்மையைப் படங்கள் வரைந்து R -ல் பரிசோதிக்கவும்.

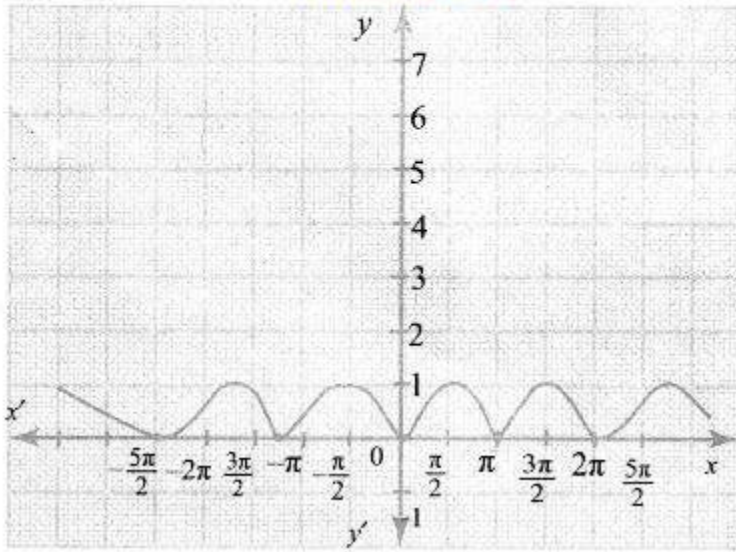
(i) $|\sin x|$

(ii) $|\cos x|$

தீர்வு :

(i) $f(x) = |\sin x|$

x	0	$\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$	π	$-\pi$	$\frac{3\pi}{2}$	$-\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{2}$	$-\frac{5\pi}{2}$	2π	-2π
$f(x)$	0	1	1	0	0	1	1	1	1	0	0

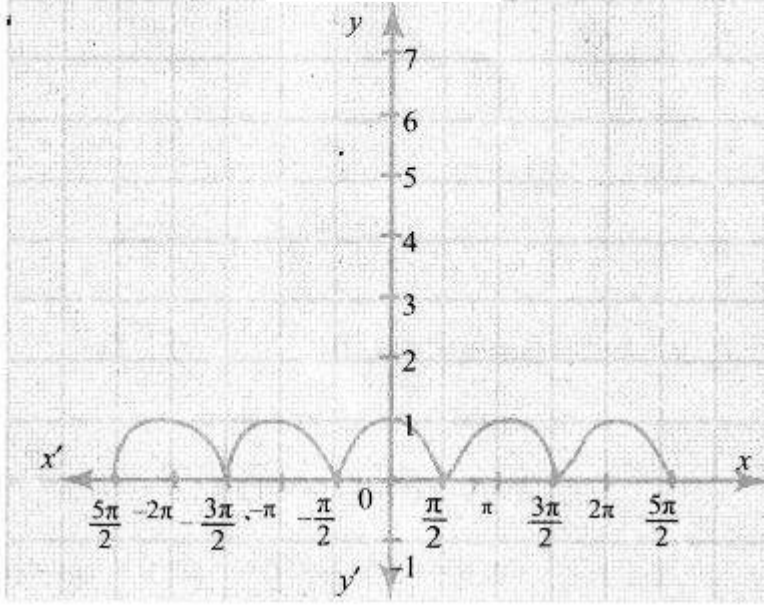


$f(x) = |\sin x|$ க்கு செங்குத்து தொடுகோடு $x = \pi, -\pi, 2\pi, -2\pi$ ஆகியவற்றில்.

$\therefore f(x) = |\sin x|$ க்கு $x = n\pi, n \in \mathbb{Z}$ -ல் வகைமை இல்லை.

(ii) $f(x) = |\cos x|$

x	0	$\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$	π	$-\pi$	$\frac{3\pi}{2}$	$-\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{2}$	$-\frac{5\pi}{2}$	2π
$f(x)$	1	0	0	1	1	0	0	0	0	1



$f(x) = |\cos x|$ க்கு, $x = \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, -\frac{5\pi}{2}$ ல் செங்குத்து தொடுகோடு உள்ளது.
 $\therefore f(x) = |\cos x|$ க்கு $x = (2n + 1)\frac{\pi}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$ -ல் வகைமை இல்லை.

Ex 10.2

பின்வரும் சார்புகளைத் தொடர்புடைய சாரா மாறிகளைப் பொறுத்து வகையிடுக.

Question 1.

$$f(x) = x - 3 \sin x$$

தீர்வு :

$$f(x) = x - 3 \sin x$$

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(x) - 3 \frac{d}{dx}(\sin x)$$

$$= 1 - 3 \cos x.$$

Question 2.

$$y = \sin x + \cos x$$

தீர்வு :

$$y = \sin x + \cos x$$

$$\frac{dy}{d\theta} = \frac{d}{dx} (\sin x) + \frac{d}{dx} (\cos x)$$

$$= \cos x - \sin x.$$

Question 3.

$$f(x) = x \sin x$$

தீர்வு :

$$f(x) = x \sin x$$

$$f'(x) = x \cdot \frac{d}{dx} (\sin x) + \sin x \cdot \frac{d}{dx} (x)$$

$$= x \cdot \cos x + \sin x (1)$$

$$= x \cdot \cos x + \sin x$$

Question 4.

$$y = \cos x - 2 \tan x$$

தீர்வு :

$$y = \cos x - 2 \tan x$$

$$\frac{dy}{d\theta} = \frac{d}{dx} (\cos x) - 2 \cdot \frac{d}{dx} (\tan x)$$

$$= -\sin x - 2 \sec^2 x.$$

Question 5.

$$g(t) = t^3 \cos t$$

தீர்வு :

$$g(t) = t^3 \cos t$$

$$g'(t) = t^3 \frac{d}{dt} (\cos t) + \cos t \frac{d}{dt} (t^3)$$

(பெருக்கல் விதிப்படி)

$$= t^3 (-\sin t) + \cos t (3t^2)$$

$$= 3t^2 \cos t - t^3 \sin t$$

Question 6.

$$g(t) = 4 \sec t + \tan t.$$

தீர்வு :

$$g(t) = 4 \sec t + \tan t$$

$$g'(t) = 4 \cdot \frac{d}{dt} (\sec t) + \frac{d}{dt} (\tan t)$$

$$= 4 \sec t \tan t + \sec^2 t$$

Question 7.

$$y = e^x \sin x$$

தீர்வு :

$$y = e^x \sin x$$

பெருக்கல் விதியைப் பயன்படுத்தி

$$\frac{dy}{dx} = e^x \cdot \frac{d}{dx} (\sin x) + \sin x \cdot \frac{d}{dx} (e^x)$$

$$= e^x \cdot \cos x + \sin x \cdot e^x = e^x (\cos x + \sin x)$$

Question 8.

$$y = \frac{\tan x}{x}$$

தீர்வு :

$$y = \frac{\tan x}{x}$$

வகுத்தல் விதியைப் பயன்படுத்தி

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x \cdot \frac{d}{dx} (\tan x) - \tan x \cdot \frac{d}{dx} (x)}{x^2}$$

$$= \frac{x \cdot \sec^2 x - \tan x (1)}{x^2}$$

$$= \frac{x \sec^2 x - \tan x}{x^2}$$

Question 9.

$$y = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$$

வகுத்தல் விதியைப் பயன்படுத்தி

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{(1 + \cos x) \cdot \frac{d}{dx}(\sin x) - \sin x \cdot \frac{d}{dx}(1 + \cos x)}{(1 + \cos x)^2} \\&= \frac{(1 + \cos x)(\cos x) - \sin x(0 - \sin x)}{(1 + \cos x)^2} \\&= \frac{\cos x + \cos^2 x + \sin^2 x}{(1 + \cos x)^2} \\&= \frac{\cos x + 1}{(1 + \cos x)^2} = \frac{1}{1 + \cos x}\end{aligned}$$

Question 10.

$$y = \frac{x}{\sin x + \cos x}$$

தீர்வு :

$$y = \frac{x}{\sin x + \cos x}$$

வகுத்தல் விதிப்படி

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{(\sin x + \cos x) \cdot \frac{d}{dx}(x) - x \cdot \frac{d}{dx}(\sin x + \cos x)}{(\sin x + \cos x)^2} \\&= \frac{(\sin x + \cos x)(1) - x(\cos x - \sin x)}{(\sin x + \cos x)^2} \\&= \frac{\sin x + \cos x - x \cos x + x \sin x}{(\sin x + \cos x)^2} \\&= \frac{(1 - x)\cos x + (1 + x)\sin x}{(\sin x + \cos x)^2}\end{aligned}$$

Question 11.

$$y = \frac{\tan x - 1}{\sec x}$$

தீர்வு :

$$\begin{aligned}\frac{dy}{d\theta} &= \frac{\sec x \cdot \frac{d}{dx}(\tan x - 1) - (\tan x - 1) \cdot \frac{d}{dx}(\sec x)}{\sec^2 x} \\&= \frac{\sec x(\sec^2 x - 0) - (\tan x - 1)(\sec x \tan x)}{\sec^2 x} \\&= \frac{\sec^3 x - \sec x \tan^2 x + \sec x \tan x}{\sec^2 x} \\&= \frac{\sec x(\sec^2 x - \tan^2 x) + \sec x \tan x}{\sec^2 x} \\&= \frac{\sec x(1) + \sec x \tan x}{\sec^2 x} \quad [\because \sec^2 x - \tan^2 x = 1] \\&= \frac{\sec x(1 + \tan x)}{\sec^2 x} = \frac{1 + \tan x}{\sec x} \\&= \frac{1}{\sec x} + \frac{\tan x}{\sec x} = \cos x + \frac{\sin x}{\cancel{\cos x} \times \frac{1}{\cancel{\cos x}}} \\ \frac{dy}{d\theta} &= \cos x + \sin x.\end{aligned}$$

Question 12.

$$y = \frac{\sin x}{x^2}$$

தீர்வு :

$$y = \frac{\sin x}{x^2}$$

வகுத்தல் விதிப்படி,

$$\frac{dy}{d\theta} = \frac{x^2 \cdot \frac{d}{dx}(\sin x) - \sin x \cdot \frac{d}{dx}(x^2)}{x^4}$$

$$= \frac{x^2 \cos x - \sin x (2x)}{x^4}$$

$$= \frac{x[x \cos x - 2 \sin x]}{x^4}$$

$$= \frac{x \cos x - 2 \sin x}{x^3}$$

Question 13.

$$y = \tan \theta (\sin \theta + \cos \theta)$$

தீர்வு :

$$y = \tan \theta (\sin \theta + \cos \theta)$$

$$\frac{dy}{d\theta} = \tan \theta \cdot \frac{d}{d\theta} (\sin \theta + \cos \theta) + (\sin \theta + \cos \theta) \cdot \frac{d}{d\theta} (\tan \theta).$$

$$= \tan (\cos \theta - \sin \theta) + (\sin \theta + \cos \theta) \sec^2 \theta$$

$$= \frac{\sin \theta}{\cos \theta} (\cos \theta - \sin \theta) + \frac{1}{\cos^2 \theta} (\sin \theta + \cos \theta)$$

$$= \sin \theta + \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta} + \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} + \frac{\cos \theta}{\cos^2 \theta}$$

$$= \sin \theta - \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta} + \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \cdot \frac{1}{\cos \theta} + \frac{1}{\cos \theta}$$

$$= \sin \theta + \frac{1 - \sin^2 \theta}{\cos \theta} + \tan \theta \cdot \sec \theta$$

$$= \sin \theta + \frac{\cos^2 \theta}{\cos \theta} + \tan \theta \cdot \sec \theta$$

$$\frac{dy}{d\theta} = \sin \theta + \cos \theta + \tan \theta \sec \theta.$$

Question 14.

$$y = \operatorname{cosec} x - \cot x$$

தீர்வு :

$$y = \operatorname{cosec} x \cdot \cot x$$

$$\frac{dy}{d\theta} = \operatorname{cosec} x \cdot \frac{d}{dx}(\cot x) + \cot x \cdot \frac{d}{dx}(\operatorname{cosec} x)$$

$$= \operatorname{cosec} x (-\operatorname{cosec}^2 x) + \cot x (-\operatorname{cosec} x \cot x)$$

$$= -\operatorname{cosec}^3 x - \cot^2 x \operatorname{cosec} x$$

$$= -\frac{1}{\sin^3 x} - \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} \cdot \frac{1}{\sin x}$$

$$= -\left[\frac{1}{\sin^3 x} + \frac{\cos^2 x}{\sin^3 x} \right]$$

$$\frac{dy}{d\theta} = -\left[\frac{1+\cos^2 x}{\sin^3 x} \right]$$

Question 15.

$$y = x \sin x \cos x$$

தீர்வு :

$$y = x \sin x \cos x \text{ in } = x \sin x \cdot (\cos x) + x \cdot (\sin x)$$

$$dy/d\theta = x \sin x \cdot \frac{d}{dx}(\cos x) + x \cdot \frac{d}{dx}(\sin x) \cdot \cos x + \frac{d}{dx}(x) \cdot \sin x \cdot \cos x$$

[வகுத்தல் விதிப்படி]

$$= x \sin x (-\sin x) + x \cos x \cdot \cos x + 1 \cdot \sin x \cos x$$

$$= -x \sin^2 x + x \cos^2 x + \sin x \cos x$$

$$= x (\cos^2 x - \sin^2 x) + \sin x \cos x$$

$$dy/d\theta = x \cos 2x + \sin x \cos x [\because \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x]$$

Question 16.

$$y = e^{-x} \log x$$

தீர்வு :

$$y = e^{-x} \log x$$

$$\frac{dy}{d\theta} = e^{-x} \cdot \frac{d}{dx}(\log x) + x \cdot \frac{d}{dx}(e^{-x})$$

$$\begin{aligned}
 &= e^{-x} \cdot \frac{1}{x} + \log x \cdot e^{-x}(-1) \\
 &= \frac{e^{-x}}{x} - e^{-x} \log x \\
 \frac{dy}{d\theta} &= \frac{dy}{dx} \left(\frac{1}{x} - \log x \right)
 \end{aligned}$$

Question 17.

$$y = (x^2 + 5) \cdot \ln(1 + x)e^{-3x}$$

தீர்வு :

$$\begin{aligned}
 y &= (x^2 + 5) \cdot \log(1 + x)e^{-3x} \\
 \frac{dy}{d\theta} &= (x^2 + 5) \cdot \log(1 + x) \cdot \frac{d}{dx}(e^{-3x}) + (x^2 + 5) \cdot \frac{d}{dx} \log(1 + x)e^{-3x} + \frac{d}{dx} (x^2 + 5) \cdot \log(1 + x) e^{-3x} \\
 &= (x^2 + 5) \cdot \log(1 + x)e^{-3x}(-3) + (x^2 + 5) \cdot \frac{1}{1+x} \cdot e^{-3x} + 2x \cdot \log(1 + x)e^{-3x} \\
 &= e^{-3x}[-3(x^2 + 5)\log(1 + x) + \frac{x^2+5}{1+x} + 2x \log(1 + x)]
 \end{aligned}$$

Question 18.

$$y = \sin x^0$$

தீர்வு :

$$\begin{aligned}
 y &= \sin x^0 \\
 x^0 &= x \times \frac{\pi}{180} \text{ ஆறையன் } = \frac{\pi x}{180} \\
 \therefore y &= \sin \frac{\pi}{180} x \\
 \frac{dy}{d\theta} &= \frac{\pi}{180} \cos \frac{\pi x}{180}
 \end{aligned}$$

Question 19.

$$y = \log_{10} x$$

தீர்வு :

$$\begin{aligned}
 y &= \log_{10} x \\
 \frac{dy}{d\theta} &= \frac{d}{dx} (\log_{10} x \times e \log x) \\
 &= \log_{10} e \cdot \frac{1}{x} = \frac{\log_{10} e}{x}
 \end{aligned}$$

Question 20.

$f(x) = 2x^2 - 5x + 3$ எனில் $f'(x)$ என்ற சார்பின் வரைபடம் வரைக.

தீர்வு :

$$f(x) = 2x^2 - 5x + 3$$

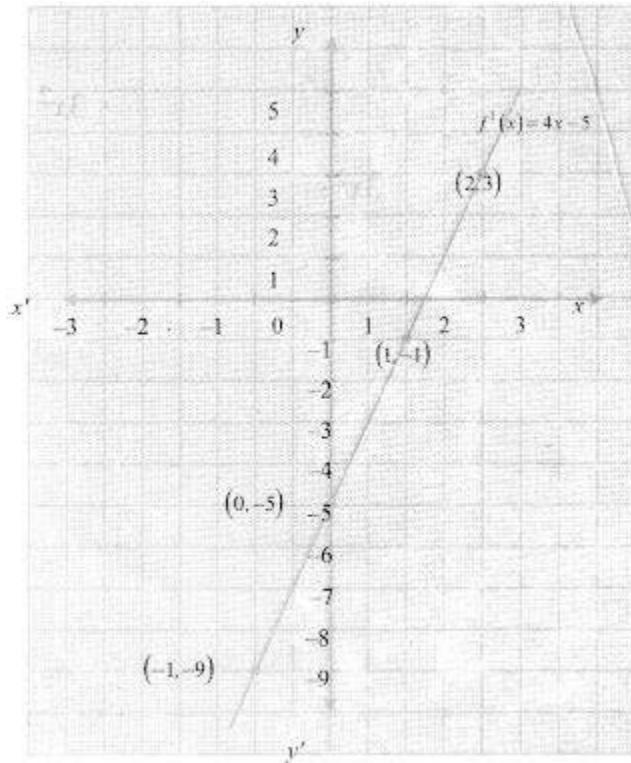
$$f(x) = 2x^2 - 5x + 3$$

$$f'(x) = 2 \cdot \frac{d}{dx}(x^2) - 5 \cdot \frac{d}{dx}(x) + \frac{d}{dx}(3)$$

$$= 2(2x) - 5(1) + 0$$

$$f'(x) = 4x - 5$$

x	0	1	2	-1
$f(x)$	-5	-1	3	-9



Ex 10.3

கீழ்க்காணும் சார்புகளுக்கு வகைக்கெழுக்களைக் காண்க.

Question 1.

$$y = (x^2 + 4x + 6)^5$$

தீர்வு :

$$y = (x^2 + 4x + 6)^5$$

$$u = x^2 + 4x + 6$$

$$\Rightarrow y = u^5 \text{ என்க.}$$

$$\Rightarrow y = u^5 \text{ என்க..}$$

$$\therefore \frac{du}{dx} = 2x + 4 \text{ மற்றும் } \frac{dy}{du} = 5u^4$$

$$\therefore \frac{dy}{du} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} = 5u^4 (2x + 4)$$

$$= 5 (2x + 4) (x^2 + 4x + 6)^4$$

$$[\because u = x^2 + 4x + 6]$$

Question 2.

$$y = \tan 3x$$

தீர்வு :

$$y = \tan 3x$$

$$u = 3x$$

$$\Rightarrow y = \tan u \text{ என்க}$$

$$\frac{dy}{du} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$

$$= \sec^2 x \times 3 = \sec^2 u = 3\sec^2(3x) [\because u = 3x]$$

Question 3.

$$y = \cos(\tan x)$$

தீர்வு :

$$y = \cos(\tan x)$$

$$u = \tan x \Rightarrow y = \cos u \text{ என்க}$$

$$\frac{du}{dx} = \sec^2 x \text{ மற்றும் } \frac{dy}{du} = -\sin u$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$

$$= -\sin u \times \sec^2 x$$

$$= -\sin(\tan x) \cdot \sec^2 x [\because u = \tan x]$$

Question 4.

$$y = \sqrt[3]{1+x^3}$$

தீர்வு :

$$y = \sqrt[3]{1+x^3} = (1+x^3)^{\frac{1}{3}}$$

$$u = 1+x^3 \Rightarrow y = u^{\frac{1}{3}} \text{ என்க}$$

$$\therefore \frac{du}{dx} = 3x^2 \text{ மற்றும் } \frac{dy}{du} = \frac{1}{3} u^{\frac{1}{3}-1}$$

$$= \frac{1}{3} u^{-\frac{2}{3}}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$

$$= \frac{1}{3} u^{-\frac{2}{3}} \cdot (3x^2)$$

$$= \frac{1}{3} (1+x^3)^{-\frac{2}{3}} \times 3x^2$$

$$= x^2(1+x^3)^{-\frac{2}{3}}$$

Question 5.

$$y = e^{\sqrt{x}}$$

தீர்வு :

$$y = e^{\sqrt{x}}$$

$$u = \sqrt{x} \Rightarrow y = e^u \text{ என்க}$$

$$\therefore \frac{du}{dx} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} - 1;$$

$$\frac{dy}{du} = e^u$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{du} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\therefore \frac{dy}{du} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$

$$= e^u \times \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$= \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} [\because u = \sqrt{x}]$$

Question 6.

$$y = \sin(e^x)$$

தீர்வு :

$$y = \sin(e^x)$$

$$u = e^x$$

$$\Rightarrow y = \sin u \text{ என்க}$$

$$\therefore \frac{du}{dx} = e^x \text{ மற்றும் } \frac{dy}{du} = \cos u$$

$$\frac{dy}{du} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$

$$= \cos u \times e^x = e^x \cos(e^x) [\because u = e^x]$$

Question 7.

$$F(x) = (x^3 + 4x)^7$$

தீர்வு :

$$F(x) = (x^3 + 4x)^7$$

$$u = x^3 + 4x$$

$$\Rightarrow F(x) = u^7 \text{ என்க}$$

$$\therefore \frac{du}{dx} = 3x^2 + 4 \text{ மற்றும் } F'(u) = 7u^6$$

$$\therefore F'(x) = F'(u) \cdot \frac{du}{dx} = 7 \cdot u^6(3x^2 + 4)$$

$$= 7 \cdot (x^3 + 4x)^6 (3x^2 + 4)$$

$$F'(x) = 7(3x^2 + 4) (x^3 + 4x)^6$$

Question 8.

$$h(t) = \left(t - \frac{1}{t}\right)^{\frac{3}{2}}$$

தீர்வு :

$$h(t) = \left(t - \frac{1}{t}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$u = t - \frac{1}{t}$$

$$\Rightarrow h(u) = u^{\frac{3}{2}} \text{ என்க}$$

$$\therefore \frac{du}{dt} = 1 + \frac{1}{t^2} \text{ மற்றும்}$$

$$h'(u) = \frac{3}{2} u^{\frac{3}{2}-1} = \frac{3}{2} u^{\frac{1}{2}}$$

$$h'(t) = h'(u) \cdot \frac{du}{dt}$$

$$= \frac{3}{2} u^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{1}{t^2}\right) \left[d\left(1 + \frac{1}{t}\right) = -\frac{1}{t^2}\right]$$

$$h'(t) = \frac{3}{2} \left(t - \frac{1}{t}\right)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{1}{t^2}\right) [\because u = t - \frac{1}{t}]$$

Question 9.

$$f(t) = \sqrt[3]{1 + \tan t}$$

தீர்வு :

$$f(t) = \sqrt[3]{1 + \tan t} = (1 + \tan t)^{\frac{1}{3}}$$

$$u = 1 + \tan t$$

$$\Rightarrow f(u) = u^{\frac{1}{3}} \text{ என்க}$$

$$\therefore \frac{du}{dt} = \sec^2 t \text{ மற்றும்}$$

$$f'(u) = \frac{1}{3} u^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3} u^{-\frac{2}{3}}$$

$$\therefore f'(t) = f'(u) \cdot \frac{du}{dt}$$

$$= \frac{1}{3} u^{-\frac{2}{3}} \sec^2 t$$

$$= \frac{1}{3} \sec^2 t (1 + \tan t)^{-\frac{2}{3}} [\because u = 1 + \tan t]$$

Question 10.

$$y = \cos(a^3 + x^3)$$

தீர்வு :

$$y = \cos(a^3 + x^3)$$

$$u = a^3 + x^3 \Rightarrow y = \cos u \text{ என்க}$$

$$\therefore \frac{du}{dx} = 0 + 3x^2 = 3x^2 \text{ மற்றும் } \frac{dy}{du} = -\sin u$$

$$\therefore \frac{dy}{du} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$

$$= -\sin u \times 3x^2$$

$$= -3x^2 \sin u$$

$$\therefore \frac{dy}{du} = -3x^2 \cdot \sin((a^3 + x^3))$$

Question 11.

$$y = e^{-mx}$$

தீர்வு :

$$y = e^{-mx}$$

$$u = -mx$$

$$\Rightarrow y = e^u \text{ என்க}$$

$$\therefore \frac{du}{dx} = -m \text{ மற்றும் } \frac{dy}{du} = e^u$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$

$$= e^u \times (-m) = -me^u$$

$$= -m e^{-mx} [\because u = -mx]$$

$$= -my [\because y = e^{-mx}]$$

Question 12.

$$y = 4 \sec 5x$$

தீர்வு :

$$y = 4 \sec 5x$$

$$u = 5x \Rightarrow y = 4 \sec u \text{ என்க}$$

$$\therefore \frac{du}{dx} = 5 \text{ மற்றும் } \frac{dy}{du} = 4 \sec u \tan u$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$

$$= 4 \sec u \tan u \times 5$$

$$= 20 \sec 5x \tan 5x [\because u = 5x]$$

Question 13.

$$y = (2x - 5)^4 (8x^2 - 5)^{-3}$$

தீர்வு :

$$y = (2x - 5)^4 (8x^2 - 5)^{-3}$$

$$u = 2x - 5, v = 8x^2 - 5 \text{ என்க.}$$

$$\Rightarrow \frac{du}{dx} = 2 \text{ மற்றும் } \frac{dv}{dx} = 16x$$

$$\Rightarrow y = u^4 v^{-3}$$

$$\therefore \frac{dy}{du} = u^4 \cdot \frac{d}{dx}(v^{-3}) + (v^{-3}) \cdot \frac{d}{dx}(u^4) \text{ (வகுத்தல் விதி)}$$

$$= u^4 \cdot (-3) v^{-3-1} \frac{dv}{dx} + v^{-3} \cdot 4u^3 \cdot \frac{du}{dx}$$

$$= -3u^4 v^{-4} \cdot \frac{dv}{dx} + 4u^3 \cdot v^{-3} \frac{du}{dx}$$

$$= 3u^4 v^{-4} \cdot \frac{dv}{dx} + 4u^3 v^{-3} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$= -3u^4 v^{-4}(16x) + 4u^3 v^{-3}(2)$$

$$= -48x u^4 v^{-4} + 8 u^3 v^{-3}$$

=

$$= -48x \frac{(2x-5)^4}{(8x^2-5)^4} + 8 \frac{(2x-5)^3}{(8x^2-5)^3}$$

$$= \frac{8(2x-5)^3}{(8x^2-5)^3} \left[\frac{-6x(2x-5)}{8x^2-5} + 1 \right]$$

$$= \frac{8(2x-5)^3}{(8x^2-5)^3} \left[\frac{-12x^2 + 30x + 8x^2 - 5}{8x^2-5} \right]$$

$$= \frac{8(2x-5)^3}{(8x^2-5)^4} [-4x^2 + 30x - 5]$$

Question 14.

$$y = (x^2 + 1)\sqrt[3]{x^2 + 2}$$

தீர்வு :

$$y = (x^2 + 1)\sqrt[3]{x^2 + 2}$$

$u = x^2 + 1$ மற்றும் $v = x^2 + 2$ என்க.

$$\Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x \text{ மற்றும் } \frac{dv}{dx} = 2x$$

$$\therefore y = u \cdot v^{\frac{1}{3}}$$

$$\therefore \frac{dy}{du} = u \cdot \frac{d}{dx}(v^{\frac{1}{3}}) + v^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{d}{dx}(u)$$

$$= u \cdot \frac{1}{3} (v^{\frac{1}{3} - 1}) \cdot \frac{dv}{dx} + v^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$= \frac{(x^2+1)}{3} \cdot (x^2 + 2)^{-\frac{2}{3}}(2x) + (x^2 + 2)^{\frac{1}{3}} \cdot 2x$$

$$= \frac{2x(x^2+1)}{3(x^2+2)^{\frac{2}{3}}} + (2x)(x^2 + 2)^{\frac{1}{3}}$$

$$= \frac{2x^3+2x+2x(x^2+2)^{\frac{1}{3}} \cdot 3(x^2+2)^{\frac{2}{3}}}{3(x^2+2)^{\frac{2}{3}}}$$

$$= \frac{2x^3+2x+6x(x^2+2)^1}{3(x^2+2)^{\frac{2}{3}}}$$

$$= \frac{2x^3+2x+6x^3+12x}{3(x^2+2)^{\frac{2}{3}}}$$

$$= \frac{8x^3+14x}{3(x^2+2)^{\frac{2}{3}}}$$

Question 15.

$$y = xe^{-x^2}$$

தீர்வு :

$$y = xe^{-x^2}$$

$u = x$ மற்றும் $v = -x^2$ என்க

$$\Rightarrow \frac{du}{dx} = 1 \text{ மற்றும் } \frac{dv}{dx} = -2x$$

$$\therefore y = u \cdot e^v$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = u \cdot e^v \frac{dv}{dx} + e^v \frac{du}{dx}$$

$$= x \cdot e^{-x^2}(-2x) + e^{-x^2}(1)$$

$$= -2x^2e^{-x^2} + e^{-x^2}$$

$$= e^{-x^2}(1 - 2x^2)$$

Question 16.

$$s(t) = \sqrt[4]{\frac{t^3+1}{t^3-1}}$$

தீர்வு :

$$s(t) = \sqrt[4]{\frac{t^3+1}{t^3-1}}$$

$$= (t^3 + 1)^{\frac{1}{4}} (t^3 - 1)^{-\frac{1}{4}}$$

$u = t^3 + 1$ மற்றும் $v = t^3 - 1$ என்க

$$\Rightarrow \frac{du}{dt} = 3t^2 \text{ மற்றும்}$$

$$\therefore s(t) = u^{\frac{1}{4}} \cdot v^{-\frac{1}{4}}$$

$$s'(t) = u^{\frac{1}{4}}(-\frac{1}{4})v^{-\frac{1}{4}-1} \cdot \frac{dv}{dt} + v^{-\frac{1}{4}} \cdot \frac{1}{4} u^{\frac{1}{4}-1} \cdot \frac{du}{dt}$$

=

$$\begin{aligned}
& \frac{-u^{\frac{1}{4}}v^{-\frac{5}{4}}}{4}(3t^2) + \frac{v^{-\frac{1}{4}}u^{-\frac{3}{4}}}{4}(3t^2) \\
= & \frac{-(t^3+1)^{\frac{1}{4}}(t^3-1)^{-\frac{5}{4}}}{4}(3t^2) + \frac{(t^3-1)^{-\frac{1}{4}}(t^3+1)^{-\frac{3}{4}}}{4}(3t^2) \\
= & \frac{-3t^2}{4} \frac{(t^3+1)^{\frac{1}{4}}}{(t^3-1)^{\frac{5}{4}}} + \frac{3t^2}{4} \frac{(t^3+1)^{-\frac{3}{4}}}{(t^3-1)^{\frac{1}{4}}} \\
= & -\frac{3t^2}{4} \left[\frac{1}{(t^3-1)^{\frac{5}{4}}(t^3+1)^{-\frac{1}{4}}} - \frac{1}{(t^3-1)^{\frac{1}{4}}(t^3+1)^{\frac{1}{4}}} \right] \\
= & -\frac{3t^2}{4} \left[\frac{(t^3+1) - (t^3-1)}{(t^3-1)^{\frac{5}{4}}(t^3+1)^{\frac{3}{4}}} \right] = -\frac{3t^2}{4} \left[\frac{\cancel{t^3}+1-\cancel{t^3}+1}{(t^3-1)^{\frac{5}{4}}(t^3+1)^{\frac{3}{4}}} \right] \\
= & \frac{3t^2}{4} \left[\frac{\cancel{2}}{(t^3-1)^{\frac{5}{4}}(t^3+1)^{\frac{3}{4}}} \right] = \frac{-3t^2}{2(t^3-1)^{\frac{5}{4}}(t^3+1)^{\frac{3}{4}}}
\end{aligned}$$

Question 17.

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{7-3x}}$$

જોઈએ :

$$y = \frac{x}{\sqrt{7-3x}}$$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{\sqrt{7-3x} \cdot \frac{d}{dx}(x) - x \cdot \frac{d}{dx}(\sqrt{7-3x})}{(\sqrt{7-3x})^2} \\
&= \frac{(\sqrt{7-3x})(1) - x \cdot \frac{1}{2}(7-3x)^{-\frac{1}{2}}(-3)}{7-3x}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sqrt{7-3x} + \frac{3x}{2\sqrt{7-3x}}}{7-3x} \\
&= \frac{2(7-3x) + 3x}{2(\sqrt{7-3x})(7-3x)} = \frac{14-6x+3x}{2\sqrt{7-3x}(7-3x)} \\
&= \frac{14-3x}{2\sqrt{7-3x}(7-3x)}
\end{aligned}$$

Question 18.

$$y = \tan(\cos x)$$

தீர்வு :

$$y = \tan(\cos x)$$

$$u = \cos x \Rightarrow y = \tan u \text{ என்க}$$

$$\therefore \frac{du}{dx} = -\sin x \text{ மற்றும் } \frac{du}{dx} = \sec^2 u$$

$$\therefore \frac{dy}{du} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$

$$= \sec^2 u (-\sin x)$$

$$= -\sin x \sec^2(\cos x) [\because u = \cos x]$$

Question 19.

$$y = \frac{\sin^2 x}{\cos x}$$

தீர்வு :

$$y = \frac{\sin^2 x}{\cos x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x \cdot \frac{d}{dx}(\sin^2 x) - \sin^2 x \cdot \frac{d}{dx}(\cos x)}{\cos^2 x}$$

[வகுத்தல் விதியின்படி]

$$= \frac{\cos x \cdot 2 \sin x \cos x - \sin^2 x (-\sin x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{2 \sin x \cos^2 x + \sin^3 x}{\cos^2 x}$$

$$= \sin x \left(\frac{2 \cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \right)$$

$$= \sin x \left(\frac{\cos^2 x + \cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \right)$$

$$= \sin x \left(\frac{1 + \cos^2 x}{\cos^2 x} \right)$$

$$= \sin x \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} \right)$$

$$= \sin x (\sec^2 x + 1)$$

Question 20.

$$y = 5^{-\frac{1}{x}}$$

தீர்வு :

$$y = 5^{-\frac{1}{x}}$$

$$u = -\frac{1}{x}, y = 5^u \text{ என்க}$$

$$\therefore \frac{du}{dx} = \frac{1}{x^2}, \frac{dy}{du} = 5^u \log 5$$

$$\therefore \frac{dy}{du} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$

$$= 5^u (\log 5) \frac{1}{x^2}$$

$$= \frac{5^{-\frac{1}{x}}}{x^2} \log 5$$

Question 21.

$$y = \sqrt{1 + 2 \tan x}$$

தீர்வு :

$$y = (1 + 2 \tan x)^{\frac{1}{2}}$$

$$u = 1 + 2 \tan x \text{ என்க } y = u^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{du}{dx} = 2 \sec^2 x \text{ மற்றும் } \frac{dy}{du} = \frac{1}{2} u^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{u}}$$

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{u}} \times 2 \sec^2 x = \frac{\sec^2 x}{\sqrt{1+2\tan u}} \end{aligned}$$

Question 22.

$$y = \sin^3 x + \cos^3 x$$

தீர்வு :

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx}(\sin^3 x) + \frac{d}{dx}(\cos^3 x) \\ &= 3 \sin^2 x \cdot \frac{d}{dx}(\sin x) + 3 \cos^2 x \cdot \frac{d}{dx}(\cos x) \\ &= 3 \sin^2 x \cos x + 3 \cos^2 x(-\sin x) \\ &= 3 \sin^2 x \cos x - 3 \sin x \cos^2 x \\ &= 3 \sin x \cos x(\sin x - \cos x) \end{aligned}$$

Question 23.

$$y = \sin^2(\cos kx)$$

தீர்வு :

$$y = \sin^2(\cos kx)$$

$$u = \cos kx \Rightarrow y = \sin^2 u$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -k \sin kx \text{ மற்றும் } \frac{dy}{du}$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \sin u \cdot \frac{d}{du} (\sin u) = 2 \sin u \cos u \\
\frac{dy}{du} &= \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} \\
&= 2 \sin u \cos u \times (-k \sin kx) \\
&= -k \sin 2u \sin kx [\because u = \cos kx] \\
&= -k \sin 2(\cos kx) \cdot \sin kx \\
&= -k \sin kx \cdot \sin 2(\cos kx)
\end{aligned}$$

Question 24.

$$y = (1 + \cos^2 x)^6$$

தீர்வு :

$$y = (1 + \cos^2 x)^6$$

$$u = 1 + \cos^2 x \Rightarrow y = u^6 \text{ என்க}$$

$$\therefore \frac{du}{dx} = 2 \cos x(-\sin x)$$

$$\frac{dy}{du} = 2 \cos x(-\sin x)$$

$$\frac{dy}{du} = 6u^5 = -2 \sin x \cos x = -\sin 2x$$

$$\frac{dy}{du} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$

$$= 6u^5 (-\sin 2x)$$

$$= -6(1 + \cos^2 x)^5 \sin 2x$$

$$= -6 \sin 2x(1 + \cos^2 x)^5$$

Question 25.

$$y = \frac{e^{3x}}{1+e^x}$$

தீர்வு :

$$y = \frac{e^{3x}}{1+e^x}$$

வகுத்தல் விதியைப் பயன்படுத்தி

$$\begin{aligned}
 \frac{dy}{du} &= \frac{(1+e^x) \cdot \frac{d}{dx}(e^{3x}) - e^{3x} \cdot \frac{d}{dx}(1+e^x)}{(1+e^x)^2} \\
 &= \frac{(1+e^x) \cdot e^{3x} \cdot 3 - e^{3x} (0+e^x)}{(1+e^x)^2} \\
 &= \frac{3e^{3x} + 3e^{4x} - e^{4x}}{(1+e^x)^2} = \frac{3e^{3x} + 2e^{4x}}{(1+e^x)^2}
 \end{aligned}$$

Question 26.

$$y = \sqrt{x} + \sqrt{x}$$

ସମାଧାନ :

$$y = \sqrt{x} + \sqrt{x}$$

$$y^2 = x + \sqrt{x}$$

$$\therefore 2y \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x) + \frac{d}{dx}(\sqrt{x})$$

$$\Rightarrow 2y \frac{dy}{du} = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$= \frac{2\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{du} = \frac{1}{2y} \left[\frac{2\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}} \right]$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}} \left[\frac{2\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}} \right]$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{du} = \frac{2\sqrt{x}+1}{4\sqrt{x} \cdot \sqrt{x+\sqrt{x}}}$$

Question 27.

$$y = e^{x \cos x}$$

தீர்வு :

$$y = e^{x \cos x}$$

$$u = x \cos x \Rightarrow y = e^u$$

$$\therefore \frac{dy}{du} = x(-\sin x) + \cos x$$

$$= -x \sin x + \cos x \text{ மற்றும் } \frac{dy}{du} = e^u$$

$$\therefore \frac{dy}{du} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$

$$= e^u(-x \sin x + \cos x)$$

$$= e^{x \cos x}(\cos x - x \sin x)$$

Question 28.

$$y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$$

தீர்வு :

$$y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$$

இருபுறமும் வர்க்கப்படுத்த,

$$y^2 = x + \sqrt{x + \sqrt{x}}$$

$$\therefore 2y \frac{dy}{du} = \frac{d}{dx} (x) + \frac{d}{dx} (\sqrt{x + \sqrt{x}})$$

[26-வது விடையை பின்பற்றி]

$$= \frac{4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}} + 2\sqrt{x} + 1}{4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{du} = \frac{1}{2y} \left[\frac{4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}} + 2\sqrt{x} + 1}{4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}} \right]$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{du} = \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}} \left[\frac{4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}+2\sqrt{x}+1}{4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}} \right]$$

$$= \frac{4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}+2\sqrt{x}+1}{8\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}\sqrt{x+\sqrt{x}}}$$

Question 29.

$$y = \sin(\tan(\sqrt{\sin x}))$$

தீர்வு :

$$y = \sin(\tan(\sqrt{\sin x}))$$

$$u = \sqrt{\sin x} \text{ மற்றும்}$$

$$v = \tan u \Rightarrow y = \sin v \text{ என்க}$$

$$\Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{2} (\sin x)^{-1/2} \cdot \cos x;$$

$$\frac{dv}{du} = \sec^2 u; \frac{dy}{dv} = \cos v = \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$$

$$\therefore \frac{dy}{du} = \frac{dy}{dv} \times \frac{dv}{du} \times \frac{du}{dx}$$

$$= (\cos v) (\sec^2 u) \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$$

$$= \cos(\tan u) \cdot \sec^2 (\sqrt{\sin x}) \cdot \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$$

$$= \cos(\tan(\sqrt{\sin x})) \cdot \sec^2 (\sqrt{\sin x}) \cdot \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$$

Question 30.

$$y = \sin^{-1} \left(\frac{1-x^2}{1+x^2} \right)$$

தீர்வு :

$$y = \sin^{-1} \left(\frac{1-x^2}{1+x^2} \right)$$

$$t = \frac{1-x^2}{1+x^2}$$

$$\Rightarrow \frac{dt}{dx} = \frac{(1+x^2)(-2x) - (1-x^2)}{(1+x^2)^2} (2x)$$

$$= \frac{-2x - 2x^3 - 2x + 2x^5}{(1+x^2)^2} = \frac{4x}{(1+x^2)^2} \dots\dots\dots "(1)$$

$$y = \sin^{-1} t$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dt} (\sin^{-1} t) \cdot \frac{dt}{dx}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \left(\frac{4x}{(1+x^2)^2} \right)$$

$$\sqrt{1-t^2} = \sqrt{1 - \frac{(1-x^2)^2}{(1+x^2)^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{(1+x^2)^2 - (1-x^2)^2}{(1+x^2)^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{1+x^4+2x^2 - (1+x^4-2x^2)}{(1+x^2)^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{4x^2}{(1+x^2)^2}} = \frac{2x}{1+x^2} \dots\dots\dots(2)$$

(2)ஐ (1)-ல் பிரதியிட,

$$\frac{dy}{du} = \frac{1+x^2}{2x} \left(\frac{-4x}{(1+x^2)^2} \right) = \frac{-2}{1+x^2}$$

Ex 10.4

கீழ்க்காண்பவற்றை வகையிடுக (1 – 18) :

Question 1.

$$y = x^{\cos x}$$

தீர்வு:

$$\log y = \log x^{\cos x}$$

$$\Rightarrow \log y = \cos x \cdot \log x$$

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = \cos x \cdot \frac{d}{dx} (\log x) + \log x \cdot \frac{d}{dx} (\cos x)$$

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = \cos x \times \frac{1}{x} + \log x (-\sin x)$$

$$= \frac{\cos x}{x} - \sin x \cdot \log x$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = y \left[\frac{\cos x}{x} - \sin x \cdot \log x \right]$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = x^{\cos x} \left[\frac{\cos x}{x} - \sin x \cdot \log x \right]$$

Question 2.

$$y = x^{\log x} + (\log x)^x$$

தீர்வு :

$$y = u + v$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} \dots\dots\dots(1)$$

$$u = x^{\log x} \text{ என்க.}$$

இரு புறமும் மடக்கை எடுக்க

$$\log u = \log x^{\log x} = \log x \cdot \log x = (\log x)^2$$

$$\frac{1}{u} \frac{du}{dx} = 2 \log x \times \frac{1}{x}$$
$$= \frac{2 \log x}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{du}{dx} = u \left(\frac{2 \log x}{x} \right)$$
$$= x^{\log x} \frac{2 \log x}{x} \dots\dots\dots(2)$$

$$\text{மற்றும் } v = (\log x)^x$$

இருபுறமும் மடக்கை எடுக்க

$$\log v = \log ((\log x)^x) = x \cdot \log (\log x)$$

$$\frac{1}{v} \frac{dv}{dx} = x \cdot \frac{d}{dx} (\log(\log x)) + \log(\log x) \times \frac{d}{dx} (1)$$

$$= x \cdot \frac{1}{\log x} \times \frac{1}{x} + \log(\log x)$$
$$= \frac{1}{\log x} + \log(\log x)$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dx} = v \left[\frac{1}{\log x} + \log(\log x) \right] + (\log x)^x \left(\frac{1}{\log x} + \log(\log x) \right) \dots\dots\dots(3)$$

(2), (3) ஐ (1) ல் பிரதியிட

$$\frac{dy}{dx} = x^{\log x} \left(\frac{2 \log x}{x} \right) + (\log x)^x \left[\frac{1}{\log x} + \log(\log x) \right]$$

Question 3.

$$\sqrt{xy} = e^{(x-y)}$$

தீர்வு :

$$\sqrt{xy} = e^{(x-y)}$$

$$\Rightarrow (xy)^{\frac{1}{2}} = e^{(x-y)}$$

இருபுறமும் மடக்கை எடுக்க.

$$\frac{1}{2} \log xy = (x - y) \log_e e$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} [\log x + \log y] = x - y [\because \log_e e = 1]$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \left[\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} \right] = 1 - \frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2x} + \frac{1}{2y} \frac{dy}{dx} = 1 - \frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2y} \frac{dy}{dx} + \frac{dy}{dx} = 1 - \frac{1}{2x}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} \left(\frac{1}{2y} + 1 \right) = 1 - \frac{1}{2x}$$

$$\frac{dy}{dx} \left(\frac{1+2y}{2y} \right) = \frac{2x-1}{2x}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2x-1}{2x} \times \frac{2y}{1+2y}$$
$$= \frac{y(2x-1)}{x(1+2y)}$$

Question 4.

$$x^y = y^x$$

தீர்வு :

இருபுறமும் மடக்கை எடுக்க,

$$y \log x = x \log y$$

$$\Rightarrow y \times \frac{1}{x} \times \frac{dy}{dx} = x \times \frac{1}{y} \frac{dy}{dx} + \log y(1)$$

$$\Rightarrow \frac{y}{x} + \log x \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{x}{y} \frac{dy}{dx} + \log y$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} (\log x - \frac{x}{y}) = \log y - \frac{y}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} (\frac{y \log x - x}{y}) = \frac{x \log y - y}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y(x \log y - y)}{x(y \log x - x)}$$

Question 5.

$$(\cos x)^{\log x}$$

தீர்வு :

$$y = (\cos x)^{\log x}$$

இருபுறமும் மடக்கை எடுக்க

$$\log y = \log x \cdot \log (\cos x)$$

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = \log x \cdot \frac{d}{dx} \log(\cos x) + \log(\cos x) \frac{d}{dx} (\log x)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = \log x \times \frac{1}{\cos x} (-\sin x) + \log(\cos x) \times \frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = -\log x \tan x + \frac{\log(\cos x)}{x}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = y \left[\frac{\log(\cos x)}{x} - \log x \cdot \tan x \right]$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = (\cos x)^{\log x} \left[\frac{\log(\cos x)}{x} - \log x \cdot \tan x \right]$$

Question 6.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

தீர்வு :

$$\frac{1}{a^2} (2x) + \frac{1}{b^2} (2y) \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{2x}{a^2} + \frac{2y}{b^2} \left(\frac{dy}{dx} \right) = 0 \Rightarrow \frac{2y}{b^2} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{-2x}{a^2}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-\cancel{2}x}{a^2} \times \frac{b^2}{\cancel{2}y} = \frac{-b^2x}{a^2y}$$

Question 7.

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right)$$

தீர்வு :

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} (x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{d}{dx} (x^2 + y^2) = \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \frac{d}{dx} \left(\frac{y}{x} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \left[2x + 2y \frac{dy}{dx} \right] = \frac{\cancel{x}}{x^2 + y^2} \left[\frac{x \cdot \frac{dy}{dx} - y}{\cancel{x}} \right]$$

$$\Rightarrow \frac{\cancel{2}(x^2 + y^2)}{\cancel{2}\sqrt{x^2 + y^2}} \left[x + y \frac{dy}{dx} \right] = x \cdot \frac{dy}{dx} - y$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \left[x + y \frac{dy}{dx} \right] = x \cdot \frac{dy}{dx} - y$$

$$\Rightarrow x \sqrt{x^2 + y^2} + y \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \frac{dy}{dx} = x \cdot \frac{dy}{dx} - y$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} \left[y \sqrt{x^2 + y^2} - x \right] = -x \sqrt{x^2 + y^2} - y$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-x \sqrt{x^2 + y^2} - y}{y \sqrt{x^2 + y^2} - x} = \frac{x \sqrt{x^2 + y^2} + y}{x - y \sqrt{x^2 + y^2}}$$

Question 8.

$$\tan(x + y) + \tan(x - y) = x$$

தீர்வு :

$$\sec^2(x + y) \frac{d}{dx}(x + y) + \sec^2(x - y) \cdot \frac{d}{dx}(x - y) = 1$$

$$\Rightarrow \sec^2(x + y) \left[1 + \frac{dy}{dx}\right] + \sec^2(x - y) \left[1 - \frac{dy}{dx}\right] = 1$$

$$\Rightarrow \sec^2(x + y) + \sec^2(x + y) \cdot \frac{dy}{dx} + \sec^2(x - y) - \sec^2(x - y) \frac{dy}{dx} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} [\sec^2(x + y) - \sec^2(x - y)] = 1 - \sec^2(x + y) - \sec^2(x - y)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1 - \sec^2(x + y) - \sec^2(x - y)}{\sec^2(x + y) - \sec^2(x - y)}$$

Question 9.

$$\cos(xy) = x \text{ எனில் } \frac{dy}{dx} = \frac{-(1 + y \sin(xy))}{x \sin(xy)} \text{ எனக்காட்டுக. } x \text{ தீர்வு :}$$

$$\cos(xy) = x$$

'x' ஐப் பொறுத்து உட்படு வகையிடல் காண

$$-\sin(xy) \cdot \frac{d}{dx}(xy) = 1$$

$$\Rightarrow -\sin(xy) \cdot \frac{d}{dx}(xy) = 1$$

$$\Rightarrow x \sin(xy) \frac{dy}{dx} - y \sin(xy) = 1$$

$$\Rightarrow x \sin(xy) \frac{dy}{dx} = 1 + y \sin(xy)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-(1 + y \sin(xy))}{x \sin(xy)}$$

எனவே நிரூபிக்கப்பட்டது.

Question 10.

$$\tan^{-1} \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$$

தீர்வு :

$$y = \tan^{-1} \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} \text{ என்க.}$$

$$[\because 2 \sin^2 \frac{x}{2} = 1 - \cos x \text{ மற்றும் } 2 \cos^2 \frac{x}{2} = 1 + \cos x]$$

$$\Rightarrow y = \tan^{-1} \sqrt{\frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{2 \cos^2 \frac{x}{2}}}$$

$$= \tan^{-1} \sqrt{\tan^2 \frac{x}{2}} = \tan^{-1} \left(\tan \frac{x}{2} \right)$$

$$\Rightarrow y = \frac{x}{2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2} (1) = \frac{1}{2}$$

Question 11.

$$\tan^{-1} \left(\frac{6x}{1-9x^2} \right)$$

தீர்வு :

$$y = \tan^{-1} \left(\frac{6x}{1-9x^2} \right) \text{ என்க.}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 + \left(\frac{6x}{1-9x^2} \right)^2} \cdot \frac{d}{dx} \left(\frac{6x}{1-9x^2} \right)$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{36x^2}{(1-9x^2)^2}} \left[\frac{(1-9x^2)(6) - 6x(-18x)}{(1-9x^2)^2} \right]$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\cancel{(1-9x^2)}^2}{(1-9x^2)^2 + 36x^2} \times \left(\frac{6-54x^2+108x^2}{\cancel{(1-9x^2)}^2} \right) \\
&= \frac{(6+54x^2)}{1+81x^4-18x^2+36x^2} \\
&= \frac{(6)(1+9x^2)}{1+81x^4+18x^2} = \frac{6\cancel{(1+9x^2)}}{(1+9x^2)^2} = \frac{6}{1+9x^2}
\end{aligned}$$

Question 12.

$$\cos\left(2 \tan^{-1} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)$$

தீர்வு :

$$y = \cos(2 \tan^{-1} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}) \text{ என்க.}$$

$$x = \cos \theta \text{ என்க.}$$

$$\Rightarrow y = \cos(2 \tan^{-1} \sqrt{\frac{1-\cos \theta}{1+\cos \theta}})$$

$$\Rightarrow y = \cos(2 \tan^{-1} \sqrt{\frac{2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}{2 \cos^2 \frac{\theta}{2}}})$$

$$\Rightarrow y = \cos(2 \tan^{-1} \sqrt{\tan^2 \frac{\theta}{2}})$$

$$\Rightarrow y = \cos(2 \tan^{-1} (\tan \frac{\theta}{2}))$$

$$\Rightarrow y = \cos(\theta)$$

$$\frac{d\theta}{dx}$$

)

$$\Rightarrow y = \cos \theta [x = \cos \theta]$$

$$\Rightarrow y = x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 1$$

Question 13.

$$x = a \cos^3 t; y = a \sin^3 t$$

ඉල්ලා :

$$\frac{dx}{dt} = a \cdot 3 \cos^2 t \frac{d}{dt} (\cos t)$$

$$= 3a \cos^2 t (-\sin t)$$

$$= -3a \sin t \cos^2 t$$

$$y = a \sin^3 t$$

$$\frac{dy}{dt} = 3a \sin^2 t \cdot \frac{d}{dt} (\sin t)$$

$$= 3a \sin^2 t \cos t$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \times \frac{dt}{dx}$$

$$= \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

$$= \frac{3a \sin^2 t \cos t}{-3a \sin t \cos^2 t}$$

$$= -\frac{\sin t}{\cos t} = -\tan t$$

Question 14.

$$x = a(\cos t + t \sin t); y = a(\sin t - t \cos t)$$

தீர்வு :

$$x = a(\cos t + t \sin t); y = a(\sin t - t \cos t)$$

$$\frac{dx}{dt} = a(-\sin t + t \cos t + \sin t) = a \cdot (t \cos t)$$

$$y = a(\sin t - t \cos t)$$

$$\frac{dy}{dt} = a(\cos t - t(-\sin t) - \cos t)$$

$$= a(\cos t + t \sin t - \cos t) = at \sin t$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{at \sin t}{at \cos t} = \tan t$$

Question 15.

$$x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, y = \frac{2t}{1+t^2}$$

தீர்வு :

$$\frac{dx}{dt} = \frac{(1+t^2)(-2t) - (1-t^2)(2t)}{(1+t^2)^2}$$

$$= \frac{-2t - 2t^3 - 2t + 2t^3}{(1+t^2)^2}$$

$$= \frac{-4t}{(1+t^2)^2}$$

$$y = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{(1+t^2)(2) - 2t(2t)}{(1+t^2)^2}$$

$$= \frac{2+2t^2-4t^2}{(1+t^2)^2}$$

$$= \frac{2-2t^2}{(1+t^2)^2}$$

$$= \frac{2(1-t^2)}{(1+t^2)^2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} =$$

$$\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{2(1-t^2)}{(1+t^2)^2}}{\frac{-4t}{(1+t^2)^2}} = \frac{2(1-t^2)}{(1+t^2)^2} \times \frac{(1+t^2)^2}{-4t} = \frac{1-t^2}{-2t} = \frac{t^2-1}{2t}$$

Question 16.

$$\cos^{-1} \left(\frac{1-x^2}{1+x^2} \right)$$

தீர்வு :

$$y = \cos^{-1} \left(\frac{1-x^2}{1+x^2} \right)$$

$$x = \tan \theta \text{ எனில்}$$

$$\Rightarrow \theta = \tan^{-1} x$$

$$\therefore y = \cos^{-1} \left(\frac{1-\tan^2 \theta}{1+\tan^2 \theta} \right)$$

$$= \cos^{-1} (\cos 2\theta) \left[\because \cos 2\theta = \frac{1-\tan^2 \theta}{1+\tan^2 \theta} \right]$$

$$y = 2\theta$$

$$\Rightarrow y = 2 \cdot \tan^{-1} x$$

$$\frac{dy}{dx} = 2 \times \frac{1}{1+x^2} = \frac{2}{1+x^2}$$

Question 17.

$$\sin^{-1}(3x - 4x^3)$$

தீர்வு :

$$y = \sin^{-1}(3x - 4x^3) \text{ என்க}$$

$$x = \sin \theta$$

$$\theta = \sin^{-1} x$$

$$\therefore y = \sin^{-1} (3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta)$$

$$= \sin^{-1}(\sin 3\theta)$$

$$[\because \sin 3\theta = 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta]$$

$$y = 3\theta = 3 \sin^{-1} x$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 3 \times \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \frac{3}{\sqrt{1-x^2}}$$

Question 18.

$$\tan^{-1} \left(\frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x} \right)$$

தீர்வு :

$$y = \tan^{-1} \left(\frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x} \right) \dots\dots\dots(1)$$

$$\tan y = \frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x}$$

தொகுதி, பகுதியை $\cos x$ - ஆல் வகுக்க

=

$$\frac{1 + \frac{\sin x}{\cos x}}{1 - \frac{\sin x}{\cos x}} = \frac{1 + \tan x}{1 - \tan x} = \frac{\tan \frac{\pi}{4} + \tan x}{1 - \tan \frac{\pi}{4} \cdot \tan x}$$

$$[\because \tan \frac{\pi}{4} = 1] \dots\dots\dots(2)$$

$$= \tan \left(\frac{\pi}{4} + x \right)$$

(2) ஐ(1) ல் பிரதியிட,

$$y = \tan^{-1} \left(\tan \left(\frac{\pi}{4} + x \right) \right)$$

$$y = \frac{\pi}{4} + x$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = 0 + 1 = 1$$

Question 19.

x^2 -ஐபொறுத்து $\sin x^2$ -ன் வகைக்கெழுவைக் காண்க.

தீர்வு :

$$u = \sin x^2 \text{ மற்றும் } v = x^2$$

$$\Rightarrow \frac{du}{dx} = \cos(x^2) \cdot \frac{d}{dx} (x^2) = 2x \cos x^2$$

$$\text{மற்றும் } \frac{dv}{dx} = 2x$$

$$\begin{aligned} \frac{du}{dv} &= \frac{du}{dx} / \frac{dv}{dx} \\ &= \frac{2x \cdot \cos x^2}{2x} \end{aligned}$$

$$\frac{du}{dv} = \cos x^2$$

Question 20.

$\tan^{-1} x$ -ஐ பொறுத்து $\sin^{-1} \left(\frac{2x}{1+x^2} \right)$ கெழுவைக் காண்க.

தீர்வு :

$$u = \sin^{-1} \left(\frac{2x}{1+x^2} \right)$$

$$v = \tan^{-1} x$$

$$u = \sin^{-1} \left(\frac{2x}{1+x^2} \right)$$

$$x = \tan \theta \text{ என்க}$$

$$\theta = \tan^{-1} x$$

$$\therefore u = \sin^{-1} \left(\frac{2 \tan \theta}{1 + \tan^2 \theta} \right)$$

$$= \sin^{-1}(\sin 2\theta) = 2\theta$$

$$= 2 \tan^{-1} x$$

$$\therefore \frac{du}{dx} = \frac{2}{1+x^2} \text{ மற்றும்}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\therefore \frac{du}{dv} = \frac{du}{dx} / \frac{dv}{dx} = \frac{\frac{2}{1+x^2}}{\frac{1}{1+x^2}}$$

$$\therefore \frac{du}{dv} = \frac{2}{1+x^2} \times \frac{1+x^2}{1} = 2$$

$$\therefore \frac{du}{dv} = 2$$

Question 21.

$u = \tan^{-1} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$, $v = \tan^{-1} x$ களில் $\frac{du}{dv}$ காண்க.

தீர்வு :

$u = \tan^{-1} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$ பொறுத்து $v = \tan^{-1} x$

$x = \tan \theta$ என்க

$$\Rightarrow \theta = \tan^{-1} x$$

$$\therefore u = \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{1+\tan^2 \theta} - 1}{\tan \theta} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{\sec \theta - 1}{\tan \theta} \right)$$

$$= \tan^{-1} \left(\frac{\frac{1}{\cos \theta} - 1}{\frac{\sin \theta}{\cos \theta}} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} \right)$$

$$= \tan^{-1} \left(\frac{2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}{2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}} \right) = \tan^{-1} \left(\tan \frac{\theta}{2} \right)$$

$$= \tan^{-1} \left(\tan \frac{\theta}{2} \right) = \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2} \tan^{-1} x$$

$$\therefore \frac{du}{dx} = \frac{1}{2(1+x^2)} \text{ மற்றும் } \frac{dv}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\therefore \frac{du}{dv} = \frac{\frac{du}{dx}}{\frac{dv}{dx}} = \frac{\frac{1}{2(1+x^2)}}{\frac{1}{1+x^2}}$$

$$= \frac{1}{2(1+x^2)} \times \frac{1+x^2}{1}$$

$$\therefore \frac{du}{dv} = \frac{1}{2}$$

Question 22.

$\tan^{-1} \left(\frac{\cos x}{1+\sin x} \right)$ x'-ஐப் பொறுத்து $\tan^{-1} \left(\frac{\sin x}{1+\cos x} \right)$ வகைக்கெழுவைக் காண்க.

தீர்வு :

$$u = \tan^{-1} \left(\frac{\cos x}{1+\sin x} \right)$$

$$v = \tan^{-1} \left(\frac{\sin x}{1+\cos x} \right) \text{ என்க}$$

$$u = \tan^{-1} \left(\frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} \right)$$

$$[\because \sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta, 1 + \cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta]$$

$$u = \tan^{-1} \left(\tan \frac{x}{2} \right)$$

$$\Rightarrow u = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \frac{du}{dx} = \frac{1}{2}$$

$$\text{மற்றும் } v = \tan^{-1} \left(\frac{\cos x}{1 + \sin x} \right)$$

$$v = \tan^{-1} \frac{\sin \left(\frac{\pi}{2} + x \right)}{1 - \cos \left(\frac{\pi}{2} + x \right)}$$

$$\left[\because \sin \left(\frac{\pi}{2} + x \right) = \cos x \text{ மற்றும் } \sin x = -\cos \left(\frac{\pi}{2} + x \right) \right]$$

$$= \tan^{-1} \left(\frac{2 \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right)}{2 \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right)} \right)$$

$$[\because \sin \theta = 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}]$$

$$= \tan^{-1} \left(\cot \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \right)$$

$$= \tan^{-1} \left\{ \tan \left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \right) \right\} = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}$$

$$\therefore \frac{dv}{dx} = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore \frac{du}{dv} = \frac{\frac{dx}{dv}}{\frac{dx}{dz}} = \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{z} \times \frac{-z}{1}$$

$$\therefore \frac{du}{dv} = -1$$

Question 23.

$y = \sin^{-1} x$ எனில், y'' காண்க.

தீர்வு :

$$y = \sin^{-1} x$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\therefore y'' = -\frac{1}{2} (1-x^2)^{-\frac{1}{2}-1} \frac{d}{dx} (1-x^2)$$

$$y'' = -\frac{1}{2} (1-x^2)^{-\frac{3}{2}} (-2x)$$

$$= x(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}$$

$$y'' = \frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Question 24.

$y = e^{\tan^{-1} x}$ எனில், $(1+x^2)y'' + (2x-1)y' = 0$ எனக்காட்டுக.

தீர்வு :

$$y = e^{\tan^{-1} x}$$

$$y' = e^{\tan^{-1} x} \cdot \frac{d}{dx} (\tan^{-1} x)$$

$$\Rightarrow y' = e^{\tan^{-1} x} \frac{1}{1+x^2}$$

$$\Rightarrow (1 + x^2) y' = y [\because y = e^{\tan^{-1} x}]$$

'x'-ஐப் பொறுத்து வகைப்படுத்த

$$(1 + x^2)y'' + y'(2x) = y'$$

$$\Rightarrow (1 + x^2)y'' + 2xy' - y' = 0$$

$$\Rightarrow (1 + x^2)y'' + (2x - 1)y' = 0$$

எனவே நிரூபிக்கப்பட்டது.

Question 25.

$y = \frac{\sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}}$ எனில், $(1 - x^2)y_2 - 3xy_1 - y = 0$ வகைப்படுத்த.

தீர்வு :

$$y = \frac{\sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\Rightarrow y\sqrt{1-x^2} = \sin^{-1} x$$

ஆல் இருபுறமும் வகுக்க'

$$y^2(1 - x^2) = (\sin^{-1} x)^2$$

x-ஐப் பொறுத்து மீண்டும் வகைப்படுத்த

$$y^2(-2x) + (1 - x^2) 2yy' = 2 \cdot \sin^{-1} x \cdot \frac{d}{dx} (\sin^{-1} x)$$

$$\Rightarrow -2xy^2 + (1 - x^2) 2yy' = 2 \cdot \sin^{-1} x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\Rightarrow -2xy^2 + (1 - x^2) 2yy' = 2y [\because y = \frac{\sin^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}}]$$

$2y$ ஆல் இருபுறமும் வகுக்க'

$$-xy + (1 - x^2)y' = 1$$

x-ஐப் பொறுத்து மீண்டும் வகைப்படுத்த

$$\Rightarrow -[xy' + y(1)] + (1 - x^2)y'' + y'(-2x) = 0$$

$$\Rightarrow -xy' - y + (1 - x^2)y'' - 2xy' = 0$$

$$\Rightarrow (1 - x^2)y'' - 3xy' - y = 0$$

$$(1 - x^2)y_2 - 3xy_1 - y = 0$$

எனவே நிரூபிக்கப்பட்டது.

Question 26.

$x = a(\theta + \sin \theta)$, $y = a(1 - \cos \theta)$ எனில், $\theta = \pi/2$ மேலும் போது $y'' = 1/a$ என நிரூபிக்க.

தீர்வு :

$$x = a(\theta + \sin \theta)$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{d\theta} = a(1 + \cos \theta)$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{d\theta} = a(2 \cos^2 \frac{\theta}{2}) [\because y = e^{\tan^{-1}}]$$

$$\text{மேலும் } y = a(1 - \cos \theta)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{d\theta} = a(\sin \theta) = 2a \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}$$

$$\begin{aligned} \therefore y' &= \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} \\ &= \frac{2a \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}}{2a \cos^2 \frac{\theta}{2}} \\ &= \tan \frac{\theta}{2} \end{aligned}$$

'x'-ஐப் பொறுத்து மீண்டும் வகைப்படுத்த,

$$y'' = \sec^2 \frac{\theta}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{d\theta}{dx}$$

$$= \sec^2 \frac{\theta}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{2a \cos^2 \frac{\theta}{2}}\right)$$

$$= \frac{1}{4a} \sec^4 \frac{\theta}{2}$$

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{2} \text{ -ல்}$$

$$y'' = \frac{1}{4a} \cdot \left[\sec\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]^4$$

$$= \frac{1}{4a} \cdot (\sqrt{2})^4$$

$$= \frac{4}{4a} = \frac{1}{a}$$

எனவே நிரூபிக்கப்பட்டது.

Question 27.

$\sin y = x \sin(a + y)$ எனில், $\frac{dy}{dx} = \frac{\sin^2(a+y)}{\sin a}$ என நிரூபிக்க. இங்கு $a \neq n\pi$.

தீர்வு :

$$\sin y = x \sin(a + y) \dots\dots\dots(1)$$

'x' ஐப் பொறுத்து வகைப்படுத்த

$$\cos y \frac{dy}{dx} = x \cos(a + y) \frac{dy}{dx} + \sin(a + y) \quad (1)$$

[பெருக்கல் விதிப்படி]

$$\Rightarrow \cos y \frac{dy}{dx} = x \cos(a + y) \frac{dy}{dx} + \sin(a + y)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} (\cos y - x \cos(a + y)) = \sin(a + y)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\sin(a+y)}{\cos y - x \cos(a+y)}$$

$$= \frac{\sin(a+y)}{\cos y - \frac{\sin y}{\sin(a+y)} \cdot \cos(a+y)} \quad [(1) \text{ லிருந்து}]$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\sin^2(a+y)}{\sin(a+y)\cos y - \sin y \cos(a+y)}$$

$$= \frac{\sin^2(a+y)}{\sin(a+y - y)}$$

$$[\because \sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B]$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin^2(a+y)}{\sin a}$$

எனவே நிரூபிக்கப்பட்டது.

Question 28.

$y = (\cos^{-1} x)^2$ எனில், $(1 - x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} - 2 = 0$ என நிரூபிக்க. மேலும் $x = 0$ -ன் போது y_2 மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு :

$$y = (\cos^{-1} x)^2$$

'x'-ஐப் பொறுத்து வகைப்படுத்த

$$y' = 2 \cdot \cos^{-1} x \cdot \frac{d}{dx} (\cos^{-1} x)$$

$$\Rightarrow y' = 2 \cdot \cos^{-1} x \cdot \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \dots\dots\dots(1)$$

$$(y')^2 \sqrt{1-x^2} = 4(\cos^{-1} x)^2$$

இருபுறமும் வர்க்கப்படுத்த

$$(y')^2 (1-x^2) = 4 (\cos^{-1} x)^2$$

'x'-ஐப் பொறுத்து மீண்டும் வகைப்படுத்த,

$$(y')^2 (-2x) + (1-x^2) 2 y' y'' = 4(2) \cos^{-1} x \cdot (\cos^{-1} x)$$

$$\Rightarrow -2x(y')^2 + 2(1-x^2)y' \cdot y'' = 8 \cos^{-1} x \cdot$$

$$= 8 \cos^{-1} x \cdot \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\Rightarrow -2x(y')^2 + 2(1-x^2)y' \cdot y'' = 4 \left(\frac{-2 \cos^{-1} x}{\sqrt{1-x^2}} \right)$$

$$\Rightarrow -2x(y')^2 + 2(1-x^2)y' \cdot y'' = 4 y' [(1) \text{ லிருந்து}]$$

2y ஆல் இருபுறமும் வகுக்க

$$\Rightarrow -xy' + (1 - x^2) y'' = 2$$

$$\Rightarrow (1 - x^2)y'' - xy' - 2 = 0$$

$$\Rightarrow \text{அதாவது } (1 - x^2) \frac{d^2y}{dx^2} - x \frac{dy}{dx} - 2 = 0$$

எனவே நிரூபிக்கப்பட்டது.

Ex 10.5

சரியான அல்லது மிகவும் ஏற்புடைய விடையினைக் கொடுக்கப்பட்ட நான்கு மாற்று விடைகளிலிருந்து தேர்ந்தெடுக்கவும்.

Question 1.

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{2}{\pi} \sin x^\circ \right)$$

(1) $\frac{\pi}{180} \cos x^\circ$

(2) $\frac{1}{90} \cos x^\circ$

(3) $\frac{\pi}{180} \cos x^\circ$

(4) $\frac{2}{\pi} \cos x^\circ$

குறிப்பு :

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{2}{\pi} \sin x^\circ \right) = \frac{2}{\pi} \cos x^\circ$$

$$= \frac{2}{180} \cos x^\circ$$

$$= \frac{1}{90} \cos x^\circ$$

விடை :

(2) $\frac{1}{90} \cos x^\circ$

Question 2.

$y = f(x^2 + 2)$ மற்றும் $f'(3) = 5$ எனில், $x = 1$ -ல் $\frac{dy}{dx}$ என்பது

(1) 5

(2) 25

(3) 15

(4) 10

குறிப்பு :

$$y = f(x^2 + 2)$$

$$y' = f'(x^2 + 2) (2x)$$

$$\Rightarrow f'(x^2 + 2) = \frac{y'}{2x} \dots\dots\dots(1)$$

$$f'(3) = 5 \text{ (1), (2)ஐ ஒப்பிட } \dots\dots\dots(2)$$

$$x^2 + 2 = 3$$

$$\Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = 1 \text{ மற்றும் } \frac{y'}{2x} = 5$$

$$\Rightarrow y' = 10x$$

$$\Rightarrow y = 10(1) = 10$$

விடை :

(4) 10

Question 3.

$y = \frac{1}{4} u^4$, $u = \frac{2}{3} x^3 + 5$ எனில், $\frac{dy}{dx}$ என்பது

(1) $\frac{1}{27} x^2 (2x^3 + 15)^3$

(2) $\frac{2}{27} x (2x^3 + 5)^3$

(3) $\frac{2}{27} x^2 (2x^3 + 15)^3$

(4) $-\frac{1}{27} x (2x^3 + 5)^3$

குறிப்பு :

$$y = \frac{1}{4} u^4 \text{ மற்றும் } u = \frac{2}{3} x^3 + 5 \dots\dots(1)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{du} = \frac{1}{90} \times 4 u^3$$

$$= u^3 \text{ மற்றும்}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{2}{3} \times 3x^2 = 2x^2$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = y' = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx}$$

$$= u^3 \times 2x^2 = \left(\frac{2}{3} \times x^3 + 5 \right) 2x^2$$

$$= \frac{(2x^3+15)^3}{3^3} \times 2x^2$$

$$= \frac{2}{27} x^2 (2x^3 + 15)^3$$

விடை :

$$(3) \frac{2}{27} x^2 (2x^3 + 15)^3$$

Question 4.

$f(x) = x^2 - 3x$ எனில் , $f(x) = f'(x)$ என அமையும் புள்ளிகள்

- (1) இரண்டும் மிகை முழு எண்களாகும்
- (2) இரண்டும் குறை முழு எண்களாகும்
- (3) இரண்டுமே விகிதமுறா எண்களாகும்
- (4) ஒன்று விகிதமுறு எண்ணாகவும் மற்றொன்று விகிதமுறா எண்ணாகவும் இருக்கும்.

குறிப்பு :

$$f(x) = x^2 - 3x$$

$$f'(x) = 2x - 3$$

$$f(x) = f'(x)$$

$$x^2 - 3x = 2 - 3x$$

$$x^2 - 5x + 3 = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 12}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{2}$$

விடை :

(3) இரண்டுமே விகிதமுறா எண்களாகும்

Question 5.

$y = \frac{1}{a-z}$ எனில், $\frac{dz}{dy}$ -ன் மதிப்பு

(1) $(a - z)^2$

(2) $-(z - a)^2$

(3) $(z + a)^2$

(4) $-(z + a)^2$

குறிப்பு:

$$y = \frac{1}{a-z}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dz} = \frac{1}{(a-z)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dy} = (a-z)^2$$

விடை :

(1) $(a - z)^2$

Question 6.

$y = \cos (\sin x^2)$ எனில், $x = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ -உ அ மதிப்பு

(1) -2

(2) 2

(3) $-2\sqrt{\frac{\pi}{2}}$

(4) 0

குறிப்பு :

$$y = \cos (\sin x^2)$$

$$2 = -\sin (\sin x^2) \cdot \frac{d}{dx} (\sin x^2)$$

$$= -\sin (\sin x^2) \cdot \cos x^2 \cdot \frac{d}{dx} (2x)$$

$$= -\sin (\sin x^2) \cdot \cos x^2 \cdot 2$$

$$= -2 \sin (\sin x^2) \cdot \cos x^2$$

$$x = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = -2 \sin \left(\sin \frac{\pi}{2} \right) \cos \frac{\pi}{2}$$

$$= -2 (\sin 1) \times 0 = 0$$

விடை :

(4) 0

Question 7.

$y = mx + c$ மற்றும் $f(0) = f'(0) = 1$ எனில், $f(2)$ என்பது

(1) 1

(2) 2

(3) 3

(4) -3

குறிப்பு :

$$y = mx + c$$

$$y' = m \Rightarrow f'(0) = m$$

$$f(0) = c$$

$$f(0) = f'(0) = 1 \text{ m} = c = 1$$

$$\therefore y = x + 1$$

$$\Rightarrow f(2) = (2) = 2 + 1 = 3$$

விடை :

(3) 3

Question 8.

$f(x) = x \tan^{-1}x$ எனில், $f'(1)$ என்பது

(1) $1 + \frac{\pi}{4}$

(2) $\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}$

(3) $\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}$

(4) 2

குறிப்பு :

$$f(x) = x \tan^{-1}x$$

$$f'(x) = x \cdot \frac{1}{1+x^2} + \tan^{-1}x$$

$$f'(1) = 1 \left(\frac{1}{1+1} \right) + \tan^{-1}(1)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}$$

விடை :

(2) $\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}$

Question 9.

$\frac{d}{dx} (e^x + 5 \log x)$ என்பது

(1) $e^x \cdot x^4 (x + 5)$

(2) $e^x \cdot x(x + 5)$

(3) $e^x + \frac{5}{x}$

(4) $e^x - \frac{5}{x}$

குறிப்பு:

$$\frac{d}{dx} (e^x + 5 \log x) = \frac{d}{dx} (e^x + \log x^5)$$

$$= \frac{d}{dx} (e^x \cdot e^{\log x^5})$$

$$= \frac{d}{dx} (e^x \cdot x^5)$$

$$= e^x \cdot 5x^4 + x^5 \cdot e^x \text{ [பெருக்கல் விதிப்படி]}$$

$$= e^x \cdot x^4(5 + x)$$

விடை :

$$(1) e^x \cdot x^4 (x + 5)$$

Question 10.

$x = 0$ -ல் $(ax - 5)e^{3x}$ -ன் வகைக்கெழு -13 எனில், 'a'-ன் மதிப்பு

(1) 8

(2) -2

(3) 5

(4) 2

குறிப்பு :

$$(d/dx(ax - 5) e^{3x}) = (ax - 5) e^{3x} (3) + e^{3x} (a)$$

$$x = 0\text{-ல் } -13 = -15 (e^0) + ae^0$$

$$= -15 + a$$

$$-15 + a = -13$$

$$\Rightarrow a = -13 + 15 = a = 2$$

விடை :

(4) 2

Question 11.

$$x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, y = \frac{2t}{1+t^2} \text{ எனில், } \frac{dy}{dx} \text{ என்பது}$$

$$(1) -\frac{y}{x}$$

$$(2) \frac{y}{x}$$

$$(3) -\frac{x}{y}$$

$$(4) \frac{x}{y}$$

சூறிப்பு :

$$x = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$y = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{(1+t^2)(-2t) - (1-t^2)(2t)}{(1+t^2)^2}$$

$$= \frac{-2t - 2t^3 - 2t + 2t^3}{(1+t^2)^2} = \frac{-4t}{(1+t^2)^2}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{(1+t^2)(2) - 2t(2t)}{(1+t^2)^2} = \frac{2 + 2t^2 - 4t^2}{(1+t^2)^2}$$

$$= \frac{2 - 2t^2}{(1+t^2)^2} = \frac{2(1-t^2)}{(1+t^2)^2}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{2(1-t^2)}{(1+t^2)^2}}{\frac{-4t}{(1+t^2)^2}} = \frac{1-t^2}{-2t} = -\frac{x}{y}$$

விடை :

$$(3) -\frac{x}{y}$$

Question 12.

$x = a \sin \theta$ மற்றும் $y = b \cos \theta$ எனில், $4 \frac{d^2 y}{dx^2}$ என்பது

(1) $\frac{a}{b^2} \sec^2 \theta$

(2) $-\frac{b}{a} \sec^2 \theta$

(3) $-\frac{b}{a^2} \sec^3 \theta$

(4) $-\frac{b^2}{a^2} \sec^3 \theta$

குறிப்பு :

$x = a \sin \theta$ மற்றும் $y = b \cos \theta$

$$\frac{dx}{d\theta} = a \cos \theta ; \frac{dy}{d\theta} = -b \sin \theta$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{-b \sin \theta}{a \cos \theta} = -\frac{b}{a} \tan \theta$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{d^2 y}{dx^2} &= \frac{-b}{a} \sec^2 \theta \cdot \frac{d\theta}{dx} \\ &= \frac{-b}{a} \sec^2 \theta \left(\frac{1}{a \cos \theta} \right) = -\frac{b}{a^2} \sec^3 \theta \end{aligned}$$

விடை :

(3) $-\frac{b}{a^2} \sec^3 \theta$

Question 13.

$\log_x 10$ -ஐ பொறுத்து $\log_{10} x$ -ன் வகைக்கெழு

(1) 1

(2) $-(\log_{10} x)^2$

(3) $(\log_x 10)^2$

(4) $\frac{x^2}{100}$

குறிப்பு :

$$u = \log_{10} x,$$

$$v = \log_x 10$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x \log_e 10} \quad \dots(1)$$

$$v = \frac{1}{\log_x 10}$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{-1}{(\log_{10} x)^2} \times \frac{1}{x \log_e 10} \quad \dots(2)$$

(1), (2) லிருந்து

$$\frac{du}{dv} = \frac{\frac{du}{dx}}{\frac{dv}{dx}} = \frac{\frac{1}{x \log_e 10}}{\frac{-1}{(\log_{10} x)^2} \times \frac{1}{x \log_e 10}} = -(\log_{10} x)^2$$

விடை :

$$(2) -(\log_{10} x)^2$$

Question 14.

$f(x) = x + 2$ எனில், $x = 4$. $f'(f(x))$ -ன் மதிப்பு

$$(1) 8$$

$$(2) 1$$

$$(3) 4$$

$$(4) 5$$

குறிப்பு :

$$f(x) = x + 2$$

$$f'(f(x)) = f'(x + 2) = 1$$

விடை :

$$(2) 1$$

Question 15.

$y = \frac{(1-x)^2}{x^2}$ எனில், $\frac{dy}{dx}$ -ன் மதிப்பு

(1) $\frac{2}{x^2} + \frac{2}{x^3}$

(2) $-\frac{2}{x^2} + \frac{2}{x^3}$

(3) $-\frac{2}{x^2} - \frac{2}{x^3}$

(4) $-\frac{2}{x^3} + \frac{2}{x^2}$

குறிப்பு :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 \cdot 2(1-x)(-1) - (1-x)^2 \cdot 2x}{x^4}$$

$$= \frac{-2x^2(1-x) - 2x(1-x)^2}{x^4}$$

$$= \frac{-2x[x(1-x) + (1-x)^2]}{x^4}$$

$$= \frac{-2}{x^3} \times [x - \cancel{x^2} + 1 + \cancel{x^2} - 2x]$$

$$= \frac{-2}{x^3} [1 - x] = \frac{-2}{x^3} + \frac{2x}{x^3} = \frac{-2}{x^3} + \frac{2}{x^2}$$

Question 16.

$p v = 81$ எனில், $v = 9$ -ல் $\frac{dp}{dv}$ -ன் மதிப்பு

(1) 1

(2) -1

(3) 2

(4) -2

குறிப்பு :

$$pv = 81$$

$$\Rightarrow p = \frac{81}{v}$$

$$\Rightarrow \frac{dp}{dv} = \frac{-81}{v^2}$$

$$v = 9\text{-ல்}$$

$$\frac{dp}{dv} = \frac{-81}{81} = -1$$

விடை :

(2) -1

Question 17.

$$f(x) = \begin{cases} x - 5 & , \quad x \leq 1 \\ 4x^2 - 9 & , \quad 1 < x < 2 \\ 3x + 4, & x \geq 2 \end{cases}$$

எனில், $x = 2$ -ல் $f(x)$ -ன் வலப்பக்க வகைக்கெழு

(1) 0

(2) 2

(3) 3

(4) 4

குறிப்பு :

$$f'(2^+) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(3x + 4) - (10)}{x - 2}$$

$$[\because f(x) = 3x + 4; f(2) = 6 + 4 = 10]$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3x - 6}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3(x - 2)}{x - 2} = 3$$

(விடை :

(3) 1

Question 18.

$f'(a)$ உள்ளது எனில், $\lim_{x \rightarrow a} \frac{xf(a) - af(x)}{x-a}$ ல்ள்படு

(1) $f(a) - af'(a)$

(2) $f'(a)$

(3) $-f'(a)$

(4) $f(a) + af'(a)$

சூறிப்பு :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{xf(a) - af(x)}{x-a}$$

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{af(x) - af(a)}{x-a}$$
$$\Rightarrow af'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{af(x) - af(a)}{x-a}$$

$$\therefore f(a) - f'(a) = f(a) - \lim_{x \rightarrow a} \frac{af(x) - af(a)}{x-a}$$

$$\therefore f(a) - f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(a) - \frac{af(x) - af(a)}{x-a}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{xf(a) - af(a) - af(x) + af(a)}{x-a}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a} \frac{xf(a) - af(x)}{x-a}$$

[விடை :

(1) $f(a) - af'(a)$

Question 19.

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & x < 2 \\ 2x - 1 & x \geq 2 \end{cases}, \text{ எனில் எனில், } f'(2) \text{ என்பது}$$

(1) 0

(2) 1

(3) 2

(4) கிடைக்கப்பெறாது

குறிப்பு :

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & x < 2 \\ 2x - 1 & x \geq 2 \end{cases}$$

குறிப்பு :

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(2x - 1) - (3)}{x - 2} \\ &\quad [\because f(x) = 2x - 1; f(2) = 3] \end{aligned}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2(x - 2)}{x - 2} = 2$$

$$\begin{aligned} \therefore f'(2^-) &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x + 1 - 3}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x - 2}{x - 1} = \end{aligned}$$

$$\therefore f'(2^+) \neq f'(2^-) \Rightarrow f'(2) \text{ கிடைக்கப்பெறாது}$$

விடை :

(4) கிடைக்கப்பெறாது

Question 20.

$g(x) = (x^2 + 2x + 3) f(x)$, $f(0) = 5$ மற்றும் $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)-5}{x} = 4$ எனில், $g'(0)$ என்பது

(1) 20

(2) 14

(3) 18

(4) 12

விடை :

(2) 14

Question 21.

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & -1 < x < 3 \\ 5 & x = 3 \\ 8-x & x > 3 \end{cases} \quad x=3 \text{ ல் } f'(x) \text{ என்பது } 18-x \quad x>3$$

(1) 1

(2) -1

(3) 0

(4) கிடைக்கப்பெறாது

குறிப்பு :

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & -1 < x < 3 \\ 5 & x = 3 \\ 8-x & x > 3 \end{cases}$$

$$[\because f(x) = 8-x; f(3) = 5]$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{3-x}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{-(x-3)}{x-3} = -1$$

$$\begin{aligned} f'(3^-) &= \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x+2-5}{x-3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x-3}{x-3} = 1 \end{aligned}$$

$$\therefore f'(3^+) \neq f'(3^-)$$

$\therefore f'(x)$ ஆனது $x = 3$ -ல் கிடைக்கப்பெறாது

விடை :

(4) கிடைக்கப்பெறாது

Question 22.

$x = -3$ -ல் $f(x) = x|x|$ - ன் வகையிடலின் மதிப்பு

(1) 6

(2) -6

(3) கிடைக்கப்பெறாது.

(4) 0

குறிப்பு :

$$f(x) = x|x| = x^2, x \geq 0 = -x^2, x < 0$$

$$f'(3^+) = \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{(x+3)(x-3)}{x-3}$$

$$= 3 + 3 = 6$$

(விடை :

(1) 6

Question 23.

$$f(x) = \begin{cases} 2a - x, & -a < x < a \\ 3x - 2a & x \geq a \end{cases} \text{ எனில் கீழ்க்காணும் கூற்றுகளில் எது மெய்யானது?}$$

(1) $x = a$ -ல் $f(x)$ வகைமை இல்லை

(2) $x = a$ -ல் $f(x)$ தொடர்ச்சியற்று உள்ளது

- (3) R-ல் உள்ள X-க்கும் $f(x)$ தொடர்ச்சியானது.
 (4) அனைத்து $x \geq a$ -க்கும் $f(x)$ வகைமையாகிறது

குறிப்பு :

$$f(x) = \begin{cases} 2a - x, & -a < x < a \\ 3x - 2a & x \geq a \end{cases}$$

$$f'(a^-) = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{(2a - x) - (a)}{x - a}$$

$[\because f(x) = 2a - x; f(a) = 2a - a = a]$

$$= \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{a - x}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{-(x - a)}{x - a} = -1$$

$$f'(a^+) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{(3x - 2a) - a}{x - a}$$

$$= \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{3x - 3a}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{3(x - a)}{x - a} = 3$$

$$\therefore f'(a^-) \neq f'(a^+)$$

விடை :

- (1) $x = a$ -ல் $f(x)$ வகைமை இல்லை

Question 24.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - b, & -1 < x < 1 \\ \frac{1}{|x|} & x = 1 \text{-ல் வகைமையாகிறது என்பதால்} \end{cases}$$

(1) $a = \frac{1}{2}, b = -\frac{3}{2}$

(2) $a = -\frac{1}{2}, b = \frac{1}{2}$

(3) $a = -\frac{1}{2}, b = -\frac{3}{2}$

(4) $a = \frac{1}{2}, b = \frac{3}{2}$

குறிப்பு :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - b, & -1 < x < 1 \\ \frac{1}{|x|} & \text{பிற} \end{cases}$$

$f(x)$ ஆனது $x = 1$ -ல் வகைமையாகிறது என்பதால்

$$f'(1^+) = f'(1^-)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{1}{|x|} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{ax^2 - b - 1}{x - 1}$$

$$\Rightarrow \frac{1-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{ax^2 - b - 1}{x - 1}$$

$$\Rightarrow a - b - 1 = 0$$

$$\Rightarrow a - b = 1$$

$$a = -\frac{1}{2}, b = -\frac{3}{2} \text{ ஆனது}$$

$a - b = 1$ ஐ பூர்த்தி செய்கிறது.

விடை :

$$(3) -\frac{1}{2}, b = -\frac{1}{2}$$

Question 25.

$f(x) = |x - 1| + |x - 3| + \sin x$ எனும் சார்பு R ல் வகைமையாகாத புள்ளிகளின் எண்ணிக்கை

(1) 3

(2) 2

(3) 1

(4) 4

குறிப்பு:

$f(x) = |x - 1| + |x - 3| + \sin x$ ஆனது

$x = 1$, $x = 3$ -ல் வகைமை ஆகாது. ஏனெனில்

$x = 1$, $x = 3$ -ல் $f(x)$ க்கு செங்குத்து தொடுகோடு உண்டு...

விடை :

(2) 21