अध्याय–4

बीजीय व्यंजकों का गुणा एवं भाग

MULTIPLICATION & DIVISION OF ALEGEBRAIC EXPRESSIONS

बीजीय व्यंजकों के योग एवं घटाने की क्रिया से आप परिचित हैं। योग एवं घटाने की क्रिया में पूर्णांक क्रमशः जुड़ते या घटते हैं तथा बीजांक वही रहता है। इसी प्रकार कक्षा सातवीं में आपने पढ़ा है – किन्हीं दो बीजीय व्यंजकों का गुणा करने पर उनके स्थिरांक का स्थिरांक से तथा चराकों का चराकों के साथ गुणा होता है।

क्रियाकलाप 1. (Activity 1)

नीचे दी गई तालिका में दो बीजीय व्यंजक एवं उनका गुणनफल दिया गया है। कुछ स्थान रिक्त हैं। रिक्त स्थानों में मान लिखिए।

सारणी 4.1 (Table 4.1)

क्र.सं.	प्रथम व्यंजक	द्वितीय व्यंजक	प्रथम व्यंजक × द्वितीय व्यंजक	द्वितीय व्यजंक × प्रथम व्यंजक	गुणनफल
1	-3	a	$-3 \cdot a$	$a \cdot (-3)$	$-3a$
2	x	5	$x \cdot 5$	$5 \cdot x$	$5x$
3	$2a$	$3a$	$2a \cdot 3a$	$3a \cdot 2a$	$6a^2$
4	$7x$	$-4y$	--------	--------	--------
5	$-5xy$	$2x$	--------	--------	--------
6	$4a^2$	--------	--------	--------	$-12a^3b$
7	$-7a^2b^2$	$8ab$	--------	--------	--------

उपरोक्त तालिका में पदों का स्थान आपस में बदलने से प्राप्त गुणनफल समान रहता है। इससे गुणा सम्बन्धी किस नियम की पुष्टि होती है?

आइए कुछ और उदाहरण देखें

(i) $3x \cdot 5x = (3 \cdot 5)\ x \cdot x = 15x^2$

(ii) $(-4x)\ 6y = (-4 \times 6)\ x \cdot y = -24xy$

(iii) $(-ab)\ 5b^2 = (-1 \times 5)\ ab \cdot b^2 = -5\ a \cdot b \cdot b^2 = -5ab^3$

इस प्रकार आप देखते हैं कि जहाँ आधार समान होता है वहाँ चरांकों के घात, घातांक नियम के अनुसार आपस में जुड़ जाते हैं।

बीजीय व्यंजकों को जोड़ते समय आपने देखा है कि गुणांक आपस में जुड़ जाते हैं।

जैसे, $x + x = (1 + 1)\, x = 2x$ (यहाँ x का गुणांक 1 है)

इस प्रकार, $2x$, x को दो बार आपस में जोड़ने से प्राप्त होता है।

इसी प्रकार, $x + x + x = 3x$

$$x + x + x + x = 4x$$

इस प्रकार, x को जितनी बार जोड़ते हैं, x का गुणांक उतना ही रहता है।

$2x$ में 2 गुणांक है एवं x चरांक है।

$2x$ का मान x के विभिन्न मानों के लिए भिन्न–भिन्न होगा।

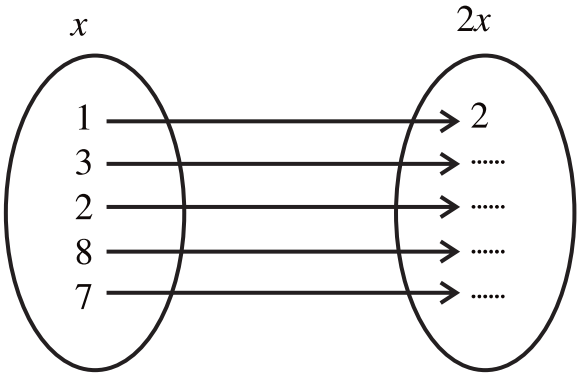
यदि $x = 3$ हो, तो $2x = 2\cdot(3) = 6$

यदि $x = -5$ हो, तो $2x = 2\cdot(-5) = -10$

और यदि $x = 0$ हो, तो $2x = 2\cdot(0) = 0$

$x = \frac{3}{8}$ हो, तो $2x = 2\cdot\frac{3}{8} = \frac{3}{4}$

निम्नांकित तालिका में रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए।



ध्यान रहे कि $2x$ में 2 गुणांक एवं x चरांक है। अतः यदि $x = 5$ हो, तो $2x = 25$ नहीं होगा, बल्कि $2x = 2 \times 5 = 10$ होगा।

एक दिन शिक्षक कक्षा में नीरज से पूछते हैं कि आपकी उम्र क्या है?

नीरज – मेरी उम्र 13 वर्ष है।

शिक्षक – 2 वर्ष बाद आपकी उम्र क्या होगी?

नीरज – 2 वर्ष बाद मेरी उम्र 13 + 2 = 15 वर्ष होगी।

शिक्षक – जितेन्द्र आपकी उम्र कितनी है?

जितेन्द्र – मेरी उम्र लगभग 12 वर्ष है।

शिक्षक – 2 वर्ष बाद आपकी उम्र क्या होगी?

जितेन्द्र – 2 वर्ष बाद मेरी उम्र 12 + 2 = 14 वर्ष होगी।

शिक्षक : यदि किसी व्यक्ति की वर्तमान आयु x वर्ष हो, तो 2 वर्ष पश्चात् उसकी आयु क्या होगी?

मनीषा ने उत्तर दिया कि 2 वर्ष बाद उसकी उम्र $(x+2)$ वर्ष होगी।

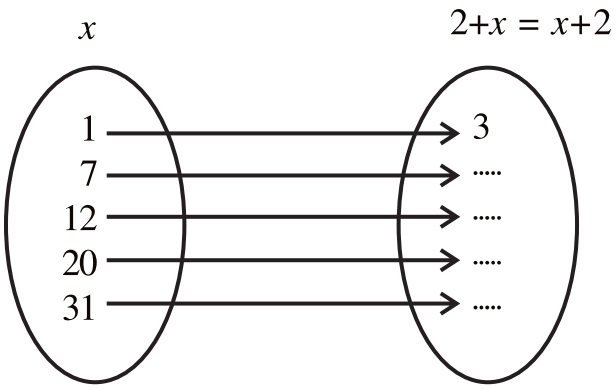
यदि हम x का मान अलग–अलग रखें तो $(x+2)$ का मान भी भिन्न–भिन्न होगा।

यदि $x = 3$ हो, तो $x + 2 = 3 + 2 = 5$ वर्ष

$x = 8$ हो, तो $x + 2 = 8 + 2 = 10$ वर्ष

$x = 5$ हो, तो $x + 2 = 5 + 2 = 7$ वर्ष

निम्नांकित तालिका में रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए।



इस प्रकार हम पाते हैं कि $2x$ जहाँ x के दुगुने को प्रदर्शित करता है वहाँ $(2+x)$, x से 2 अधिक को प्रदर्शित करता है

यदि $x = 0$, तो $2x = 2 \times 0 = 0$

यदि $x = 0$, तो $2+x = 2 + 0 = 2$

अत : $\boxed{2x \neq 2+x}$

एकपदीय व्यंजक का बहुपदीय व्यंजक के साथ गुणा
(Multiplying monomial expression with polynomial expression)

कक्षा सातवी में हमने किसी एकपदीय बीजीय व्यंजक का किसी द्विपदीय बीजीय व्यंजक से गुणा करना सीखा है।

आइए, एक पदीय व्यंजक का, द्विपदीय व्यंजक के साथ गुणा हम एक क्रियाकलाप के माध्यम से पुनः दोहरा लेते हैं।

क्रियाकलाप 2. (Activity - 2)

आगे दी गई तालिका में एक पदीय व्यंजक का द्विपदीय व्यंजक के साथ गुणनफल दिया है। कुछ रिक्त स्थान दिए गए हैं उनकी पूर्ति कीजिए।

सारणी 4.2

क्र.सं.	एक पदीय व्यंजक	द्विपदीय व्यंजक	एक पदीय × द्विपदीय व्यंजक	गुणनफल
1	x	$a + b$	$x(a + b)$	$ax + bx$
2	$-4y$	$3a + b$	----------	----------
3	xy	$7 + 8x$	$xy(7 + 8x)$	----------
4	$2t^2$	$3r^2 - 55$	----------	----------
5	$\frac{1}{2}m$	$m^3 + \frac{3}{2}n$	----------	----------
6	$4a$	$5x - \frac{1}{2}y$	----------	----------

इसी तरीके से हम किसी एक पदीय व्यंजक का गुणा किसी बहुपदीय व्यंजक से कर सकते हैं।

अथवा $a\,(b + c + d) = ab + ac + ad$

$(b + c + d)\,a = ba + ca + da$

इसी प्रकार $a\,(b + c + d + e) = ab + ac + ad + ae$

या $(b + c + d + e)\,a = ba + ca + da + ea$

उदाहरण 1. $2a\,(a + 2b + 5c) = 2a \cdot a + 2a \cdot 2b + 2a \cdot 5c$

$= 2a^2 + 4ab + 10ac$

उदाहरण 2. $(2q + r + 3s - t)\,p = 2q \cdot p + r \cdot p + 3s \cdot p - t \cdot p$

$= 2pq + pr + 3ps - pt$

उदाहरण 3. $(xy + 2y^2z + x^2)\,yz^2 = xy \cdot yz^2 + 2y^2z \cdot yz^2 + x^2 \cdot yz^2$

$= xy^2z^2 + 2y^3z^3 + x^2yz^2$

क्रियाकलाप 3.

रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए–

सारणी 4.3

क्र.सं.	बीजीय व्यंजकों का गुणा	गुणन प्रक्रिया	गुणनफल
1.	$(2a + b + c)\,5d$	$2a \times 5d + b \times 5d + c \times 5d$	$10ad + 5bd + 5cd$
2.	$7a^2\,(b + 2d - t)$	.....	.....
3.	..... $(x^2 + xy + z)$	$p \times x^2 + p \times xy + p \times z$	$p\,x^2 +$ .....
4.	$-5\,m\,(....+....+\,b)$	.....	$-5m^2 - 10mn - 5mb$
5.	$7p^2m\,(m + n^3 + p)$	.....	.....

आइए, अब हम दो द्विपदीय व्यंजकों को आपस में गुणा करने पर विचार करें–

दो द्विपदीय व्यंजकों का गुणा (Multiplication of two binomial expressions)

दो द्विपदीय व्यंजकों का आपस में गुणा दो एकपदीय व्यंजकों का द्विपदीय व्यंजकों से गुणा के योग के समान है।

$$(a + b)(c + d) = a(c + d) + b(c + d)$$
$$= (ac + ad) + (bc + bd)$$
$$= ac + ad + bc + bd$$

इसे हम निम्न प्रकार से भी हल कर सकते हैं:–

$$(a + b)(c + d)$$
$$= (a + b)c + (a + b)d$$
$$= ac + bc + ad + bd$$

इस प्रक्रिया में गुणा का योग पर वितरण के नियम का दो बार उपयोग होता है ।

उदाहरण 4. $(5x + 3y)$ एवं $(4x + 5y)$ को आपस में गुणा कीजिए।

हल: $(5x + 3y)(4x + 5y) = 5x(4x + 5y) + 3y(4x + 5y)$

[$(a + b)(c+d) = a(c+d) + b(c+d)$ के प्रयोग से]

$$= 5x \cdot 4x + 5x \cdot 5y + 3y \cdot 4x + 3y \cdot 5y$$

[$a(b + c) = ab + ac$ के प्रयोग से]

$$= 20x^2 + 25xy + 12yx + 15y^2$$
$$= 20x^2 + 37xy + 15y^2$$

इसे निम्न प्रकार से भी हल किया जा सकता है–

$(5x + 3y)(4x + 5y) = (5x + 3y) \cdot 4x + (5x + 3y) \cdot 5y$

[$(a + b)(c+d) = (a+b)c + (a+b)d$ के प्रयोग से]

$$= 5x \cdot 4x + 3y \cdot 4x + 5x \cdot 5y + 3y \cdot 5y$$

[$(a + b)c = ac + bc$ के प्रयोग से]

$$= 20x^2 + 12yx + 25xy + 15y^2$$
$$= 20x^2 + 37xy + 15y^2$$

उदाहरण 5. $(3s^2 + 2t)$ एवं $(2r^2 + st)$ का गुणनफल ज्ञात कीजिए –

हल: $(3s^2 + 2t)(2r^2 + st) = 3s^2 \cdot (2r^2 + st) + 2t \cdot (2r^2 + st)$

[$(a + b)(c + d) = a(c+d) + b(c+d)$ के प्रयोग से]

$$= 3s^2 \cdot 2r^2 + 3s^2 \cdot st + 2t \cdot 2r^2 + 2t \cdot st$$

[$a(b + c) = ab + ac$ के प्रयोग से]

$$= 6s^2r^2 + 3s^3t + 4tr^2 + 2st^2$$

उदाहरण 6. $(5x + 3y)$ और $(x + y)$ का आपस में गुणा कीजिए एवं $x = 3, y = -2$ के लिए गुणनफल की जाँच कीजिए।

हल: $(5x + 3y)(x + y) = 5x(x + y) + 3y(x + y)$

$= 5x \cdot x + 5x \cdot y + 3y \cdot x + 3y \cdot y$

$= 5x^2 + 5xy + 3xy + 3y^2$

$(5x + 3y)(x + y) = 5x^2 + 8xy + 3y^2$

जाँच: बायाँ पक्ष $= (5x + 3y)(x + y)$

$[x = 3, y = -2$ रखने पर $]$

$= [5(3) + 3(-2)](3-2)$

$= [15-6](1)$

$= 9 \times 1 = 9$

दायाँ पक्ष $= 5x^2 + 8xy + 3y^2$

$= 5(3)^2 + 8(3)(-2) + 3(-2)^2$

$= 5(9) - 48 + 3(4)$

$= 45 + 12 - 48$

$= 57 - 48 = 9$

बायाँ पक्ष $=$ दायाँ पक्ष

क्रियाकलाप 4.

गुणा की प्रक्रिया के अनुसार सारणी में दिए गए रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए –

सारणी 4.4

दो बीजीय व्यंजकों का गुणा	गुणा की प्रक्रिया		प्राप्त गुणनफल
	वितरण नियम के प्रयोग से	वितरण नियम के पुनः प्रयोग से	
1. (a + b) (c + d)	a (c + d) + b (c + d) या (a+b)c + (a+b) d	ac + ad +bc +bd या ac + bc+ad+bd	ac+ad+bc+bd ac+bc+ad+bd
(a) $(4x+5y)(2x+3y)$	$4x(2x+3y)+5y(2x+3y)$	$4x \times 2x+4x \times 3y+5y \times 2x+5y \times 3y$	$8x^2+22xy+15y^2$
(b) $(5x^2+2s)(2t+5)$	.....	.....	.....
(c) $(2r^2+5s^3)(r^2+t^3)$	.....	.....	.....
2. (a + b) (c – d)	a (c – d) + b (c – d)	ac – ad +bc – bd	ac–ad+bc–bd
(a) (b+2c) (3b – c)	.....	.....	.....
(b) $(5x+3y)(2y^2 - z)$	.....	.....	.....
3. (a – b) (c + d)	a (c + d) – b (c + d)	ac + ad – bc – bd	ac+ad–bc–bd
(a) $(2x-3y)(3x+z)$	.....	.....	.....
(b) $(5p-2q)(3x+4s)$	.....	.....	.....
4. (a – b) (c – d)	a (c – d) – b (c – d)	ac – ad – bc+bd	ac–ad–bc+bd
(a) $(2s-3p)(4x-5t)$	.....	.....	.....
(b) $(x^2+xy)(y^2-z)(y^2-z)$	.....	.....	.....

प्रश्नावली 4.1 (Exercise 4.1)

प्र.1 निम्न पदों का आपस में गुणनफल ज्ञात कीजिए।

(i) $(2x + 7)\ (3x + 2)$ (ii) $(3x - 5)\ (2x + 9)$

(iii) $(7x - 6)\ (15x - 2)$ (iv) $\left(\frac{1}{2}x + 5y\right)\left(3x - \frac{6}{5}y\right)$

(v) $(x + 5y)\ (7x - y)$

प्र.2 मान ज्ञात कीजिए –

(i) $(x + y)\ (2y + 3x) + (3x + y)\ (y + 2x)$ (ii) $\left(2x - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{3x}{2} - \frac{1}{4}\right)$

(iii) $(x^2 + y^2)\ (3x - 5y)$ (iv) $(a + b)\ (a + b)$

प्र.3 $(x + y)$ और $(3y + 4x)$ का आपस में गुणा कीजिए एवं नीचे दिए मानों के लिए सत्यापन कीजिए –

(i) $x = 2,\ y = -1$

(ii) $x = 1,\ y = 0$

बीजीय व्यंजकों के भाग (Division of Algebraic Expressions)

आप किसी एक पूर्णांक से किसी दूसरे पूर्णांक का गुणा व भाग करना जानते हैं। आइए, कुछ उदाहरण देखें –

1. $6 \times 8 = 48$ तो $48 \div 8 = 6$ तथा $48 \div 6 = 8$
2. $-15 \times 3 = -45$ तो $-45 \div -15 = 3$ तथा $-45 \div 3 = -15$
3. $m \times n = mn$ तो $mn \div m = n$ तथा $mn \div n = m$

एक पदीय व्यंजक का एक पदीय व्यंजक से भाग (Division of a monomial expression by another monomial expression)

आइए, प्रारम्भ में हम एक पदीय व्यंजक का एक पदीय व्यजंक से भाग देना जाने।

उदाहरण 7. $18x^2y$ में $6xy$ का भाग दीजिए।

हल : यहाँ $18x^2y \div 6xy = \frac{18x^2y}{6xy}$

$$= \frac{18}{6} \times \frac{x^2}{x} \times \frac{y}{y} = 3 \times \frac{x \times \cancel{x}}{\cancel{x}} \times \frac{\cancel{y}}{\cancel{y}} = 3x$$

उदाहरण 8. $-35mn^2p$ में $7np$ का भाग दीजिए।

हल : $-35mn^2p \div 7np = \frac{-35mn^2p}{7np}$

$$= \frac{-35}{7} \times \frac{m}{1} \times \frac{n^2}{n} \times \frac{p}{p} = -5 \times m \times \frac{n \times \cancel{n}}{\cancel{n}} \times \frac{\cancel{p}}{\cancel{p}} = -5mn$$

इस प्रकार आपने देखा कि भाग की क्रिया हम निम्न पदों में करते हैं –

1. यदि भाज्य और भाजक के चिन्ह समान हों, तो भागफल के चिह्न धनात्मक होता है।
2. यदि भाज्य और भाजक के चिन्ह असमान हों, तो भागफल का चिह्न ऋणात्मक होता है।
3. भाज्य के गुणांक में भाजक के गुणांक का भाग देते हैं।
4. भागफल में किसी चरांक का घात ज्ञात करने के लिए घातांक नियम $a^m \div a^n = a^{m-n}$ का उपयोग करते हैं। आइए, निम्न उदाहरण द्वारा समझें :–

उदाहरण 9. $-25a^3b^2c$ में $-5ab^2c$ का भाग दीजिए।

हल : यहाँ $-25a^3b^2c \div -5ab^2c = \dfrac{-25a^3b^2c}{-5ab^2c}$

$$= \frac{-25}{-5} \times \frac{a^3}{a} \times \frac{b^2}{b^2} \times \frac{c}{c}$$

$$= 5 \times a^{3-1} \times b^{2-2} \times c^{1-1} \quad [\because a^m \div a^n = a^{m-n}]$$

$$= 5a^2b^0c^0 = 5a^2 \{\text{चूंकि } b^0 = 1, c^0 = 1\}$$

क्रियाकलाप 5.

निम्न सारणी में दिए गए रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए।

सारणी 4.5

क्र.सं.	पहली संख्या × दूसरी संख्या	दोनों संख्याओं के गुणनफल का मान	भाग संक्रिया के रूप में दर्शाना	
			पहली विधि	दूसरी विधि
1.	$3x \times 4y$	$12xy$	$12xy \div 3x = 4y$	$12xy \div 4y = 3x$
2.	$2x \times (-7x)$	$-14x^2$	----------	----------
3.	$m \times 4n$	$4mn$	----------	----------
4.	$18a^2 \times 2b^2$	----------	----------	----------
5.	$13p^2 \times 7pq$	$91p^3q$	----------	----------

इस प्रकार, हम देखते है कि $3x$ एवं $4y$ का गुणा करने पर $12xy$ प्राप्त होता है तथा $12xy$ में $3x$ का भाग देने पर $4y$ तथा $12xy$ में $4y$ का भाग देने पर $3x$ प्राप्त होता है। अतः गुणा एवं भाग एक दूसरे की विपरीत क्रियाएं हैं।

बहुपदीय व्यंजकों का एकपदीय व्यंजक से विभाजन
(Division of a polynomial expression by a monomial expression)

आपने एकपदीय का एकपदीय व्यंजक से विभाजन तो जान लिया। आइए, अब निम्न उदाहरणों में बहुपदीय व्यंजकों का एकपदीय व्यंजकों से विभाजन देखें –

उदाहरण 10. $16m^2 + 4mn - 12mn^2$ को $2m$ से भाग दीजिए।

हल : $(16m^2 + 4mn - 12mn^2) \div 2m = \dfrac{16m^2 + 4mn - 12mn^2}{2m}$

$$= \frac{16m^2}{2m} + \frac{4mn}{2m} - \frac{12mn^2}{2m}$$

$$= 8m^{2-1} + 2m^{1-1}n - 6m^{1-1}n^2$$

$$= 8m + 2n - 6n^2$$

यहाँ बहुपदीय व्यंजक को अलग–अलग एकपदीय व्यंजक में बदलकर भाग की क्रिया की गई है।

प्रश्नावली 4.2

प्र.1. मान ज्ञात कीजिए –

(i) $(18x^2y^2) \div (-6xy)$ (ii) $(-15x^3y^2z) \div (-5x^2yz)$

(iii) $(-x^5y^7) \div -x^4y^5)$ (iv) $(32a^4b^2c) \div (-8abc)$

(v) $(28a^4b^6c^8) \div (-7a^2b^4c^6)$

प्र.2. भाग दीजिए।

(i) $2x^4 - 6x^3 + 4x^2$ को $2x^2$ से

(ii) $5a^4b^3 - 10a^3b^2 - 15a^2b^2$ में $-5a^2b^2$ का

(iii) $27a^4 - 36a^2$ को $-9a$ से

(iv) $x^4 + 2x^3 - 2x^2$ को $4x^2$ से

(v) $a^2 + ab + ac$ को a से

92KBQH

बहुपदीय में द्विपदीय का भाग (Division of a polynomial by binomial)

आप किसी एक पदीय या बहुपदीय व्यंजक में एक पदीय व्यंजक का भाग देना जान चुके हैं। आइए, निम्न उदाहरण को देखें –

उदाहरण 11. $18a^2 + 12a + 27a^3 + 8$ में $3a + 2$ का भाग दीजिए।

हल : सर्वप्रथम दिये गये बहुपदीय व्यंजक $18a^2 + 12a + 27a^3 + 8$ को घात के घटते हुए क्रम में लिख लेते हैं।

जैसे, $27a^3 + 18a^2 + 12a + 8$

चरण 1. यहाँ भाज्य का पहला पद $27a^3$ है। इसमें भाजक के पहले पद $3a$ का भाग देते हैं –

$$3a+2\overline{)27a^3+18a^2+12a+8}$$

$$\frac{27a^3}{3a}=9a^2$$

और $9a^2$ को भागफल में लिख लेते हैं।

चरण 2. अब $9a^2$ को पूरे भाजक से गुणा करते है।

अतः $9a^2(3a+2)=27a^3+18a^2$

$$\begin{array}{r} 9a^2 \\ 3a+2\overline{)\ 27a^3+18a^2+12a+8} \\ \underline{\pm 27a^3 \pm 18a^2} \end{array}$$

यहाँ $27a^3+18a^2$ को भाज्य में सजातीय पदों के नीचे लिखते है और घटा देते है।

अर्थात् नीचे वाले पद के चिह्न बदल देते है।

चरण 3. घटाने के बाद शेष बची संख्या को नीचे लिख लेते हैं।

$$\begin{array}{r} 9a^2 \\ 3a+2\overline{)\ 27a^3+18a^2+12a+8} \\ \pm 27a^3 \pm 18a^2 \\ \hline +12a+8 \end{array}$$

चरण 4. अब शेष भाज्य के पहले पद $12a$ में भाजक के पहले पद $3a$ का भाग देते हैं।

$12a \div 3a = 4$

$+4$ को भागफल में लिखते है तथा $+4$ का पुनः पूरे भाजक में गुणा करते है।

अतः $4(3a+2)=12a+8$

$$\begin{array}{r} 9a^2 \\ 3a+2\overline{)\ 27a^3+18a^2+12a+8} \\ \pm 27a^3 \pm 18a^2 \\ \hline +12a+8 \end{array}$$

चरण 5. भाज्य में सजातीय पदों के नीचे $12a+8$ को लिख लेते है एवं घटा देते है।

$$\begin{array}{r} 9a^2+4 \\ 3a+2\overline{)\ 27a^3+18a^2+12a+8} \\ \pm 27a^3 \pm 18a^2 \\ \hline +12a+8 \\ \underline{\pm 12a \pm 8} \\ 0 \end{array}$$

चरण 6. यहाँ घटाने पर शेषफल शून्य बचता है।

$$\begin{array}{r} 9a^2+4 \\ 3a+2\overline{)\ 27a^3+18a^2+12a+8} \\ \pm 27a^3 \pm 18a^2 \\ \hline 0 \ + \ 0 \ +12a+8 \\ \underline{\pm 12a \pm 8} \\ 0 \quad 0 \end{array}$$

चरण 7. ∴ अभीष्ट भागफल $= 9a^2 + 4$ है।

आप जानते है कि जब किसी एक संख्या में किसी दूसरी संख्या का पूरा–पूरा भाग जाता है और शेषफल शून्य बचता है तो दूसरी संख्या पहली संख्या का गुणनखण्ड कहलाती है।

यहाँ $27a^3 + 18a^2 + 12a + 8$ में $(3a + 2)$ का पूरा–पूरा भाग देने से शेषफल शून्य बचता है अतः $(3a+2)$, $27a^3 + 18a^2 + 12a + 8$ का एक गुणनखण्ड होगा।

आइए, एक और उदाहरण देखते हैं –

उदाहरण 12. $-12x^3 - 8x^2 - 5x + 10$ को $(2x - 3)$ से विभाजित कीजिए।

हल :

$$
\begin{array}{r}
2x-3\overline{)\,-12x^3-8x^2-5x+10\;(-6x^2-13x-22} \\
\mp 12x^3 \pm 18x^2 \\
\hline
-26x^2-5x+10 \\
\mp 26x^2 \pm 39x \\
\hline
-44x+10 \\
\mp 44x \pm 66 \\
\hline
-56
\end{array}
$$

यहाँ भी पूर्व की भाँति भाग दिया गया है। परन्तु शेषफल -56 है, शून्य नहीं।

अतः हम कह सकते है कि $(2x-3)$ व्यंजक $-12x^3 - 8x^2 - 5x + 10$ का एक गुणनखण्ड नहीं है।

उदाहरण 13. $8q^3 + 2q - 8q^2 - 1$ में $4q + 2$ का भाग दीजिए।

हल : यहाँ q के घात घटते क्रम में नहीं है, अतः पहले व्यंजक को घटते क्रम में लिखने पर $8q^3 - 8q^2 + 2q - 1$

$$
\begin{array}{r}
2q^2-3q+2 \\
4q+2\;\overline{)\;8q^3-8q^2+2q-1} \\
\pm 8q^3 \pm 4q^2 \\
\hline
-12q^2+2q-1 \\
\mp 12q^2 \mp 6q \\
\hline
+8q-1 \\
\pm 8q \pm 4 \\
\hline
-5
\end{array}
$$

यहाँ भी भाग के चरण पूर्व में बताएं अनुसार पूर्ण किए गए है। भाग की क्रिया तब तक करते हैं। जब तक शेषफल में बीजीय चरांक का घात भाजक के बीजीय चरांक के घात से कम न हो जाए।

जांच : भाज्य = भाजक × भागफल + शेषफल
(Verification : Dividend = Divisor x Quotient + Remainder)

इस प्रश्न में,

भाज्य $= 8q^3 - 8q^2 + 2q - 1$

भाजक $= 4q + 2$

भागफल $= 2q^2 - 3q + 2$

शेषफल $= -5$

दायाँ पक्ष = भाजक × भागफल + शेषफल

$= (4q + 2)\cdot(2q^2 - 3q + 2) + (-5)$

$= 4q\,(2q^2 - 3q + 2) + 2\,(2q^2 - 3q + 2) - 5$

$= 8q^3 - 12q^2 + 8q + 4q^2 - 6q + 4 - 5$

$= 8q^3 - 12q^2 + 4q^2 + 8q - 6q - 1$

$= 8q^3 - 8q^2 + 2q - 1$

= बायां पक्ष

अर्थात् **भाज्य = भाजक × भागफल + शेषफल**

Dividend = Divisor x Divison + Remainder

अतः प्राप्त भागफल $= 2q^2 - 3q + 2$ और शेषफल $= -5$ सही है।

प्रश्नावली 4.3

प्र.1. निम्नलिखित बहुपद को चर राशि के घातांक के घटते क्रम में लिखिए –

(i) $15x^2 - 3x + 8x^4 - 4x^3 - 15$

(ii) $12m^5 - 9m^3 + 16 - 6m^2 + 8m$

(iii) $9m^4 - 16m^2 - 4m + 16 - m^3$

(iv) $4 - 8y^3 + 12y^4 - 6\,y^2$

प्र.2. भागफल ज्ञात कीजिए एवं बताइये कि क्या भाजक, भाज्य का एक गुणनखण्ड है ?

(i) $x^2 - 11x + 30$ को $(x - 5)$ से

(ii) $x^2 + 20x + 91$ में $(x + 7)$ का

(iii) $x^2 - 5x - 6$ में $(x - 6)$ का

(iv) $x^3 - 5x^2 - 2x + 24$ को $(x - 4)$ से

(v) $a^2 + 2ab + b^2$ में $(a + b)$ का

प्र.3 भागफल ज्ञात कीजिए एवं बताइए कि भाजक भाज्य का गुणनखण्ड नहीं है ? भागफल एवं शेषफल लिखिए –

(i) $x^3 + 2x^2 + 3x + 4$ को $x - 1$ से

(ii) $-12 + 3x^2 - 4x + x^3$ को $x + 5$ से

(iii) $4x^4 - 2x^3 - 10x^2 + 13x - 6$ को $2x + 3$ से

(iv) $8x^3 - 6x^2 + 10x + 15$ को $4x + 1$ से

प्र.4. भाग देकर जांच कीजिए कि क्या –

भाज्य = भाजक × भागफल + शेषफल

(i) $m^2 - 3m + 7$ को $m - 2$ से

(ii) $a^3 - 2a^2 + a + 2$ को $a + 2$ से

(iii) $9x^3 + 15x^2 - 5x + 3$ को $3x + 1$ से

(iv) $2x^3 + 3x^2 + 7x + 15$ को $x^2 + 4$ से

92U7S5

हमने सीखा (We Have Learnt)

1. दो एक पदीय व्यंजकों का गुणा करने के लिए पहले उनके गुणांकों का उसके बाद चरांकों का गुणा करते है।
2. एक पदीय व्यंजक का द्विपदीय व्यंजकों से गुणा करने के लिए एक पदीय व्यंजक को, द्विपदीय व्यंजक के प्रत्येक पद से गुणा करते हैं तथा प्राप्त गुणनफलों को जोड़ देते हैं। इस प्रकार वितरण नियम का प्रयोग करते हैं।
3. चराकों का गुणा करते समय घातांक नियम का उपयोग करते है।
4. दो द्विपदीय व्यंजकों का आपस में गुणा करने के लिए दो बार वितरण नियम का प्रयोग करते हैं। जैसे–

   $(a+b)(c+d) = a(c+d) + b(c+d)$

   $= ac + ad + bc + bd$
5. गुणा करते समय यदि बीजीय व्यंजकों के चिह्न समान हो तो व्यंजक के चिह्न धनात्मक होता है एवं असमान चिह्न होने पर ऋणात्मक हो जाता है।
6. भागफल की क्रिया तब तक करते हैं जब तक शेषफल में बीजीय चरांक की घात, भाजक के घात से कम न हो जाये।
7. बहुपदीय व्यंजक में, एक पदीय व्यंजक का भाग देते समय प्रत्येक पद में, एकपदीय व्यंजक का भाग देते हैं।