

दो चरों वाले रैखिक समीकरण

Exercise 4.1

निम्न समीकरणों को आलेखीय विधि से हल कीजिए-

प्रश्न 1.

$$x + 3y = 6$$

$$2x - 3y = 6$$

हल:

1. दिया गया समीकरण निकाय है:

$$x + 3y = 6 \dots(1)$$

$$2x - 3y = 12 \dots(2)$$

चूँकि दोनों समीकरण x व y की प्रथम घात में हैं। इसलिए इनके आलेख सरल रेखाएँ होंगी।

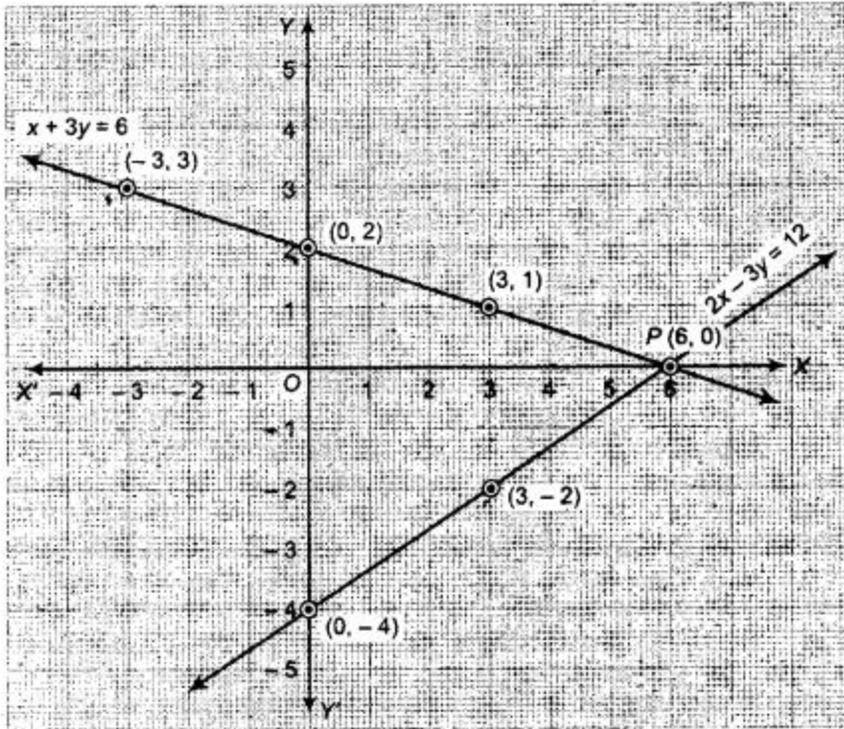
अब समीकरण $x + 3y = 6$ या $y = \frac{6-x}{3}$ से (x, y) के विभिन्न मानों की निम्न सारणी प्राप्त होती है।

x	3	0	-3
y	1	2	3

इस प्रकार, समीकरण $2x - 3y = 12$ या $y = \frac{2x-12}{3}$ से (x, y) के विभिन्न मानों की निम्न सारणी प्राप्त होती है-

x	0	3	6
y	-4	-2	0

अब बिन्दु $(3, 1)$, $(0, 2)$ तथा $(-3, 3)$ का आलेखन कर मिलाने से समीकरण $x + 3y = 6$ का आलेख तथा $(0, -4)$, $(3, -2)$ तथा $(6, 0)$ का आलेखन कर मिलाने से समीकरण $2x - 3y = 12$ का आलेख प्राप्त होता है।



ये आलेख (सरल रेखाएँ) बिन्दु P पर प्रतिच्छेदित होते हैं, जिसके निर्देशांक (6,0) हैं। अतः $x = 6, y = 0$ दिए गए समीकरण निकाय का अद्वितीय हल है।

प्रश्न 2. $2x + y = 12$
 $2x - y + 2 = 0$

हल: दिया गया समीकरण निकाय है:

$$2x + y = 6 \dots\dots (i)$$

$$2x - y + 2 = 0 \dots\dots(ii)$$

चूँकि दोनों समीकरण x व y की प्रथम घात में हैं। इसलिए इनके आलेख सरल रेखाएँ होंगी।

अब समीकरण $2x + y = 6$ या $y = 6 - 2x$ से (x, y) के विभिन्न मानों की निम्न सारणी प्राप्त होती है-

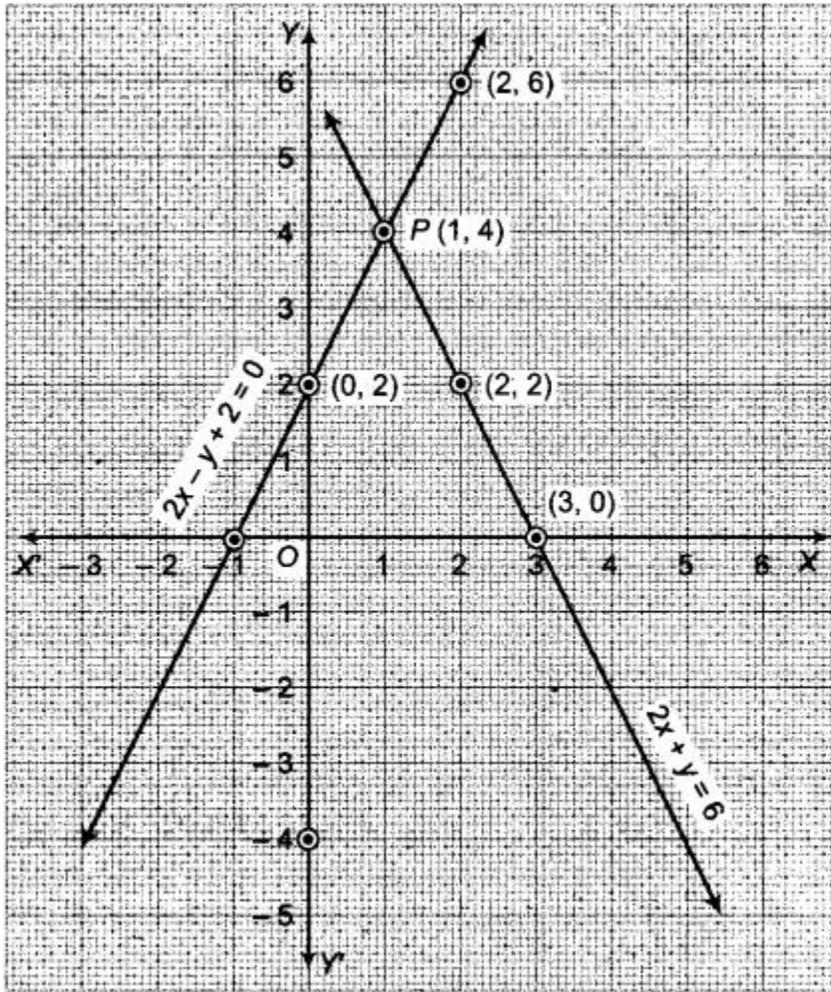
x	1	2	3
y	4	2	0

इस प्रकार, समीकरण $2x - y + 2 = 0$ या $y = 2x + 2$ से (x, y) के विभिन्न मानों की निम्न सारणी प्राप्त होती है-

x	0	1	2
y	2	4	6

अब बिन्दुओं (1, 4), (2, 2) तथा (3, 0) का आलेखन कर मिलाने से समीकरण $2x + y = 6$ का आलेख तथा (0, 2), (1, 4) तथा (2, 6) का आलेखन कर मिलाने से समीकरण $2x - y + 2 = 0$ का आलेख प्राप्त

होता है।



ये आलेख (सरल रेखाएँ) बिन्दु P पर प्रतिच्छेदित होते हैं, जिसके निर्देशांक (1,4) हैं। अतः $x = 1, y = 4$ दिए गए समीकरण का अद्वितीय हल है।

प्रश्न 3. $x - 2y = 6$

$3x - 6y = 0$

हल: दिया गया समीकरण निकाय है

$x - 2y = 6 \dots(i)$

$3x - 6y = 0 \dots(ii)$

चूँकि दोनों समीकरण x व y की प्रथम घात में हैं।

इसलिए इनके आलेख सरल रेखाएँ होंगी।

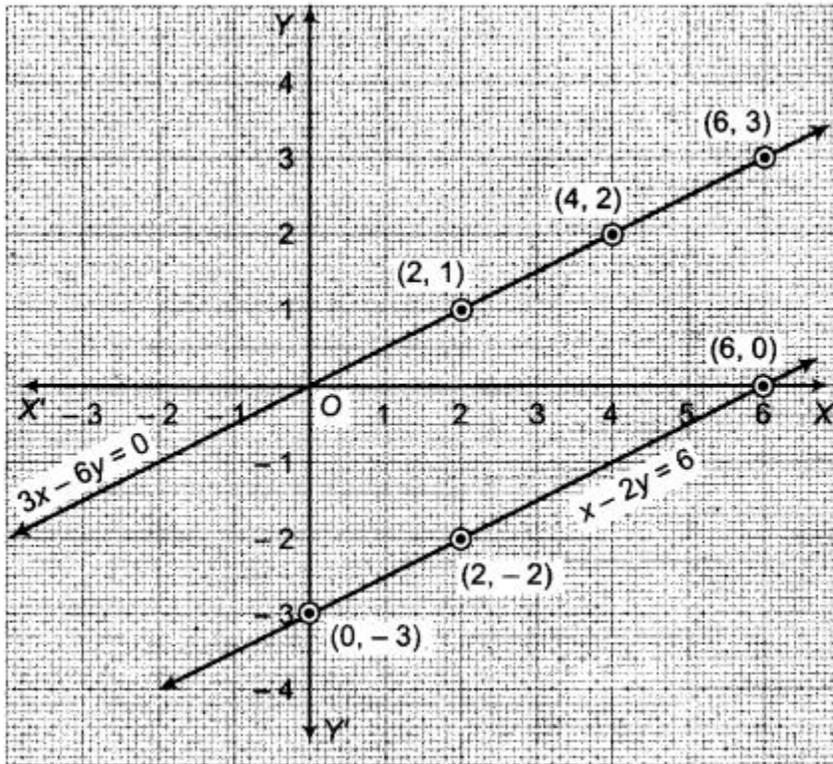
अब समीकरण $x - 2y = 6$ या $y = \frac{x-6}{2}$ से (x, y) के विभिन्न मानों की निम्न सारणी प्राप्त होती है-

x	0	6	2
y	-3	0	-2

इसी प्रकार, समीकरण $3x - 6y = 0$ या $y = \frac{x}{2}$ से (x, y) के विभिन्न मानों से निम्न सारणी प्राप्त होती है-

x	2	4	6
y	1	2	3

अब बिन्दुओं $(0, -3)$, $(6, 0)$ तथा $(2, -2)$ का आलेखन कर मिलाने से समीकरण $x - 2y = 6$ का आलेख तथा $(2, 1)$, $(4, 2)$ तथा $(6, 3)$ का आलेखन कर मिलाने से समीकरण $3x - 6y = 0$ का आलेख प्राप्त होता है।



ये सरल रेखाएँ (आलेख) एक दूसरे को प्रतिच्छेदित नहीं करती हैं। अतः दिए गए समीकरण निकाय का कोई हल नहीं है।

प्रश्न 4. $x + y = 4$
 $2x - 3y = 3$

हल: दिया गया समीकरण निकाय-

$x + y = 4$... (i)

$2x - 3y = 3$... (ii)

चूँकि दोनों समीकरण x व y की प्रथम घात में हैं। इसलिए इनके आलेख सरल रेखाएँ होंगी।

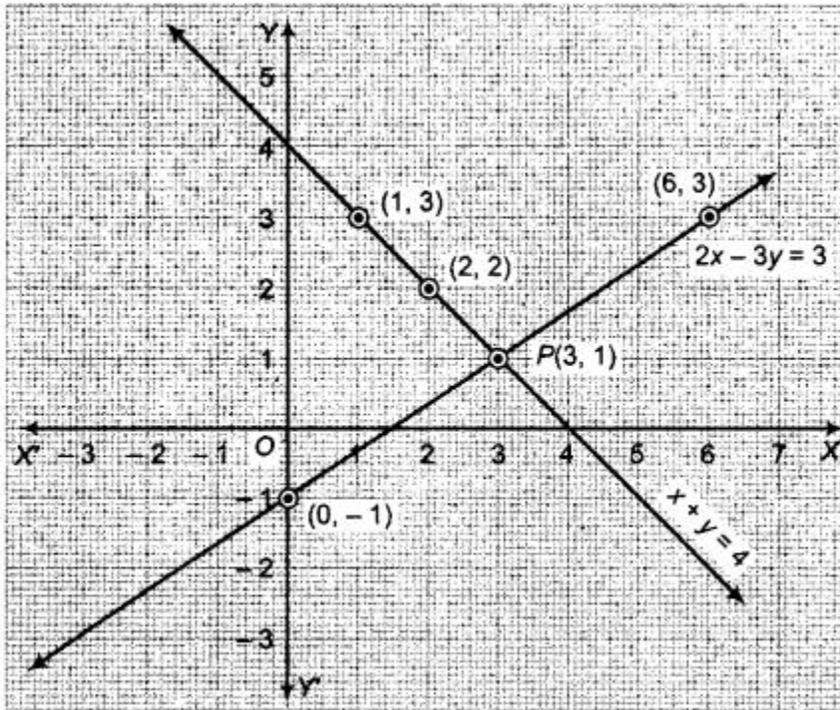
अब समीकरण $x + y = 4$ या $y = 4 - x$ से (x, y) के विभिन्न मानों की निम्न सारणी प्राप्त होती है-

x	1	2	3
y	3	2	1

इसी प्रकार, समीकरण $2x - 3y = 3$ या $y = \frac{2x-3}{3}$ से (x, y) के विभिन्न मानों की निम्न सारणी प्राप्त होती है-

x	0	3	6
y	-1	1	3

अब बिन्दुओं $(1, 3)$, $(2, 2)$ तथा $(3, 1)$ का आलेखन कर मिलाने से समीकरण $x + y = 4$ का आलेख तथा $(0, -1)$, $(3, 1)$ तथा $(6, 3)$ का आलेखन कर मिलाने से समीकरण $2x - 3y = 3$ का आलेख प्राप्त होता है।



ये सरल रेखाएँ (आलेख) बिन्दु P पर प्रतिच्छेदित होती हैं जिसके निर्देशांक $(3, 1)$ हैं। अतः $x = 3$ तथा $y = 1$ दिए गए समीकरण निकाय के अद्वितीय हल हैं।

प्रश्न 5. $2x - 3y + 13 = 0$

$3x - 2y + 12 = 0$

हल: दिया गया समीकरण निकाय है:

$2x - 3y + 13 = 0 \dots(i)$

$3x - 2y + 12 = 0 \dots(ii)$

चूँकि दोनों समीकरण x व y की प्रथम घात में हैं। इसलिए इनके आलेख सरल रेखाएँ होंगी।

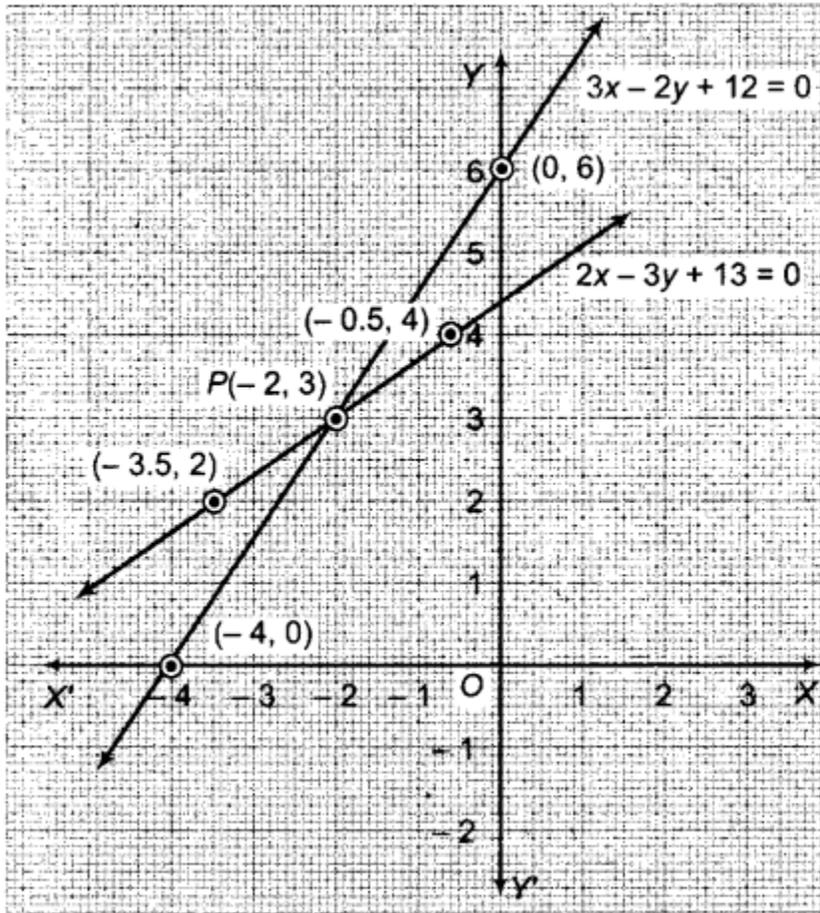
अब समीकरण $2x - 3y + 13 = 0$ या $y = \frac{2x+13}{3}$ से (x, y) के विभिन्न मानों की निम्न सारणी प्राप्त होती है।

x	-2	-3.5	-0.5
y	3	2	4

इसी प्रकार, समीकरण $3x - 2y + 12 = 0$ या $y = \frac{3x+12}{2}$ से (x, y) के विभिन्न मानों की निम्न सारणी प्राप्त होती है।

x	-2	0	-4
y	3	6	0

अब बिन्दुओं $(-2, 3)$, $(-3.5, 2)$ तथा $(-0.5, 4)$ का आलेखन कर मिलाने से समीकरण $2x - 3y + 13 = 0$ का आलेख तथा $(-2, 3)$, $(0, 6)$ तथा $(-4, 0)$ का आलेखन कर मिलाने से समीकरण $3x - 2y + 12 = 0$ का आलेख प्राप्त होता है।



ये आलेख (सरल रेखाएँ) बिन्दु P पर प्रतिच्छेदित होते हैं, जिसके निर्देशांक $(-2, 3)$ हैं। अतः $x = -2, y = 3$ दिए गए समीकरण निकाय का अद्वितीय हल है।

प्रश्न 6. $3x - 4y = 1$
 $-2x + \frac{8}{3}y = 5$

हल: दिया गया समीकरण निकाय है:

$$3x - 4y = 1 \dots(i)$$

$$-2x + \frac{8}{3}y = 5 \dots(ii)$$

चूँकि दोनों समीकरण x व y की प्रथम घात में हैं।

अतः इनके आलेख सरल रेखाएँ होंगी।

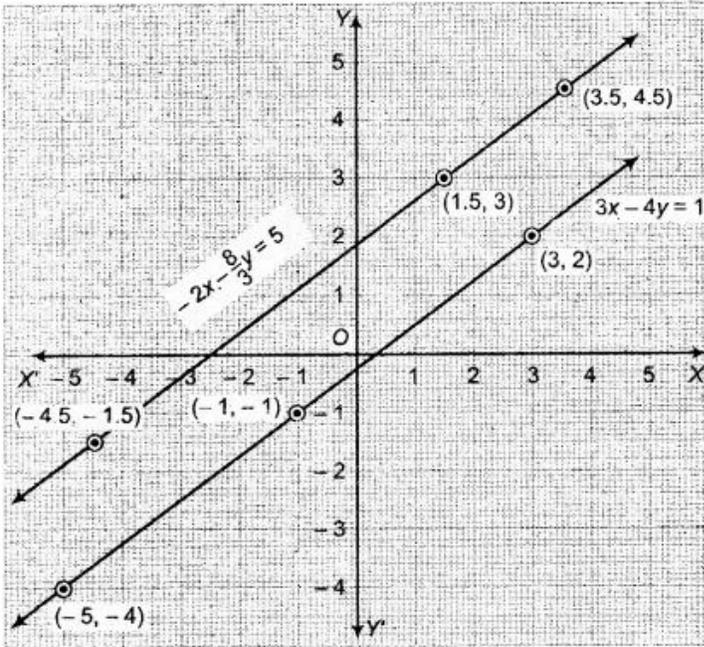
अब समीकरण $3x - 4y = 1$ या $y = \frac{3x-1}{4}$ से (x, y) के विभिन्न मानों की निम्न सारणी प्राप्त होती है-

x	-1	3	-5
y	-1	2	-4

इसी प्रकार, समीकरण $-2x + \frac{8}{3}y = 5$ या $y = \frac{3(5+2x)}{8}$ से (x, y) के विभिन्न मानों की निम्न सारणी प्राप्त होती है-

x	1.5	3.5	-4.5
y	3	4.5	-1.5

अब बिन्दुओं $(-1, -1)$, $(3, 2)$ तथा $(-5, -4)$ का आलेखन कर मिलाने से समीकरण $3x - 4y = 1$ का आलेख तथा $(1.5, 3)$, $(3.5, 4.5)$ तथा $(-4.5, -1.5)$ का आलेखन कर मिलाने से समीकरण $-2x + \frac{8}{3}y = 5$ का आलेख प्राप्त होता है।



ये सरल रेखाएँ परस्पर प्रतिच्छेदित नहीं करती हैं। अतः इस समीकरण युग्म का कोई हल नहीं है।

प्रश्न 7. $2x + \frac{y}{2} - 5 = 0$

$$\frac{x}{2} + y = -4$$

हल: दिया गया समीकरण निकाय है :

$$2x + \frac{y}{2} - 5 = 0 \dots\dots (i)$$

$$\frac{x}{2} + y = -4 \dots\dots(ii)$$

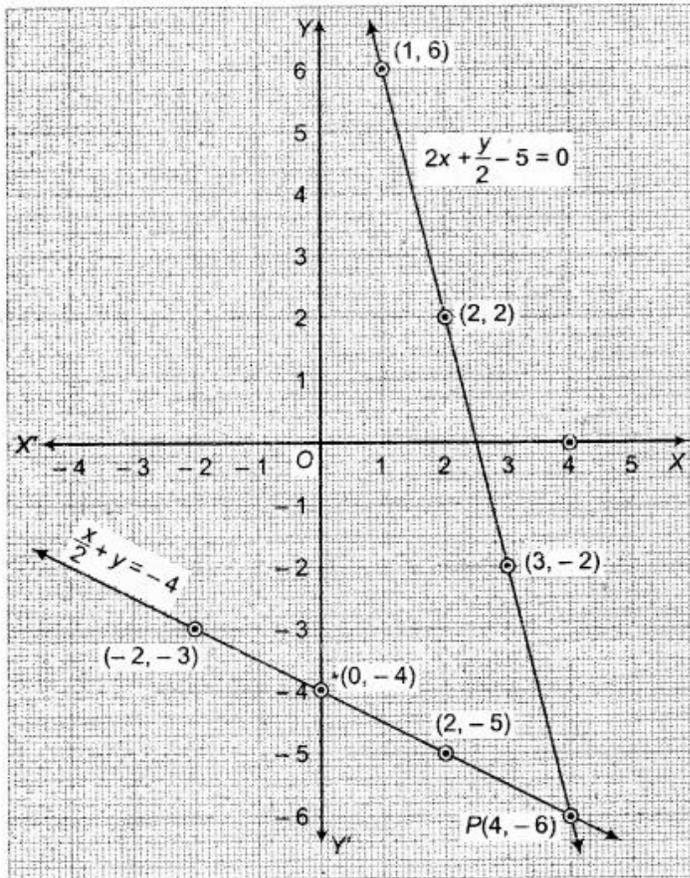
चूंकि दोनों समीकरण x व y की प्रथम घात में हैं। इसलिए इनके आलेख सरल रेखाएँ होंगी। समीकरण $2x + \frac{y}{2} - 5 = 0$ या $y = 2(5 - 2x)$ से (x, y) के विभिन्न मानों की निम्न सारणी प्राप्त होती है-

x	3	1	2
y	-2	6	2

इसी प्रकार, समीकरण $\frac{x}{2} + y = -4$ या $y = -4 - \frac{x}{2}$ से (x, y) के विभिन्न मानों की निम्न सारणी प्राप्त होती है-

x	2	-2	0
y	-5	-3	-4

अब बिन्दुओं $(3, -2)$, $(1, 6)$ तथा $(2, 2)$ का आलेखन कर मिलाने से समीकरण $2x + \frac{y}{2} - 5 = 0$ का आलेख तथा $(2, -5)$, $(-2, -3)$ तथा $(0, -4)$ का आलेखन कर मिलाने से समीकरण $\frac{x}{2} + y = -4$ का आलेख प्राप्त होता है।



ये दोनों सरल रेखाएँ (आलेख) बिन्दु P पर प्रतिच्छेदित होती हैं जिसके निर्देशांक $(4, -6)$ हैं।

अतः $x = 4, y = -6$ दिए गए समीकरण निकाय का अद्वितीय हल है।

प्रश्न 8. $0.3x + 0.4y = 32$; $0.6x + 0.8y = 2.4$

हल: दिया गया समीकरण निकाय है:

$$0.3x + 0.4y = 32 \dots(i)$$

$$0.6 + 0.8y = 24 \dots(ii)$$

चूंकि दोनों समीकरण x व y की प्रथम घात में हैं। इसलिए इनके आलेख सरल रेखाएँ होंगी।

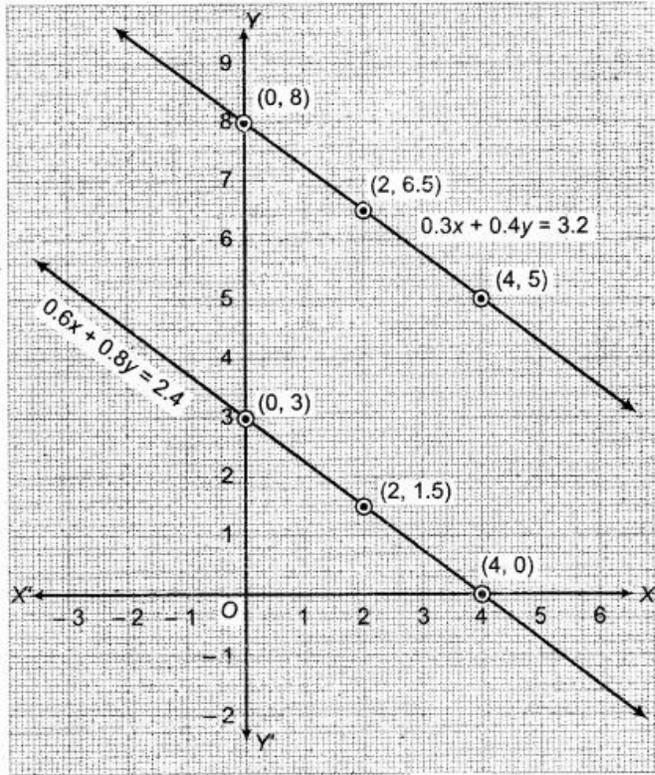
अब समीकरण $0.3x + 0.4y = 3.2$ या $y = \frac{32-3x}{4}$ से (x, y) के विभिन्न मानों की निम्न सारणी प्राप्त होती है-

x	4	0	2
y	5	8	6.5

इसी प्रकार, समीकरण $0.6x + 0.8y = 2.4$ या $y = \frac{24-6x}{8}$ से (x, y) के विभिन्न मानों की निम्न सारणी प्राप्त होती है।

x	0	2	4
y	3	1.5	0

अब बिन्दुओं $(4, 5)$, $(0, 8)$ तथा $(2, 6.5)$ को आलेखन कर मिलाने से समीकरण $0.3x + 0.4y = 3.2$ का आलेख तथा $(0, 3)$, $(2, 1.5)$ तथा $(4, 0)$ का आलेखन कर मिलाने से समीकरण $0.6x + 0.8y = 2.4$ का आलेख प्राप्त होता है।



ये सरल रेखाएँ (आलेख) एक दूसरे को प्रतिच्छेद नहीं करती हैं। अतः इनका कोई हल नहीं है।

प्रश्न 9. $2x + 3y = 8$; $4x - \frac{3}{2}y = 1$

हल: दिया गया समीकरण निकाय है:

$$2x + 3y = 8 \dots(i)$$

$$4x - \frac{3}{2}y = 1 \dots(ii)$$

चूँकि दोनों समीकरण x व y की प्रथम घात में हैं। इसलिए इनके आलेख सरल रेखाएँ होंगी।

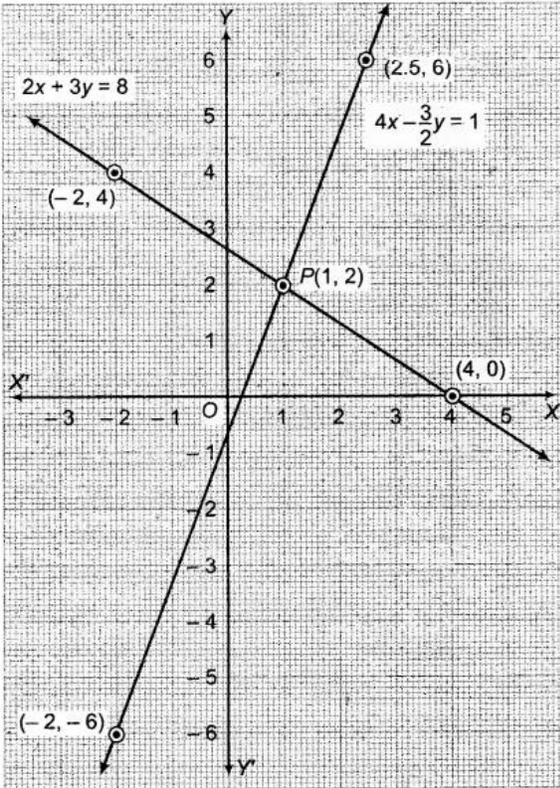
अब समीकरण $2x + 3y = 8$ या $y = \frac{8-2x}{3}$ से (x, y) के विभिन्न मानों की निम्न सारणी प्राप्त होती है-

x	4	1	-2
y	0	2	4

इसी प्रकार, समीकरण $4x - \frac{3}{2}y = 1$ या $y = \frac{2(4x-1)}{3}$ से (x, y) के विभिन्न मानों की निम्न सारणी प्राप्त होती है-

x	1	-2	2.5
y	2	-6	6

अब बिन्दुओं $(4, 0)$, $(1, 2)$ तथा $(-2, 4)$ का आलेखन कर मिलाने से समीकरण $2x + 3y = 8$ का आलेख तथा $(1, 2)$, $(-2, 6)$ तथा $(2.5, 6)$ का आलेखन कर मिलाने से समीकरण $4x - \frac{3}{2}y = 1$ का आलेख प्राप्त होता है।



ये सरल रेखाएँ (आलेख) परस्पर बिन्दु P पर प्रतिच्छेदित होती हैं, जिसके निर्देशांक $(1, 2)$ हैं। अतः $x = 1$, $y = 2$ दिए गए समीकरण निकाय के अद्वितीय हल हैं।

प्रश्न 10. $3x - y = 2$; $6x - 2y = 4$

हल: दिया गया समीकरण निकाय है:

$$3x - y = 2 \dots(i)$$

$$6x - 2y = 4 \dots(ii)$$

चूंकि दोनों समीकरण x व y की प्रथम घात में हैं। अतः इनके आलेख सरल रेखाएँ होंगी।

अब समीकरण $3x - y = 2$ या $y = 3x - 2$ से (x, y) के विभिन्न मानों की निम्न सारणी प्राप्त होती है-

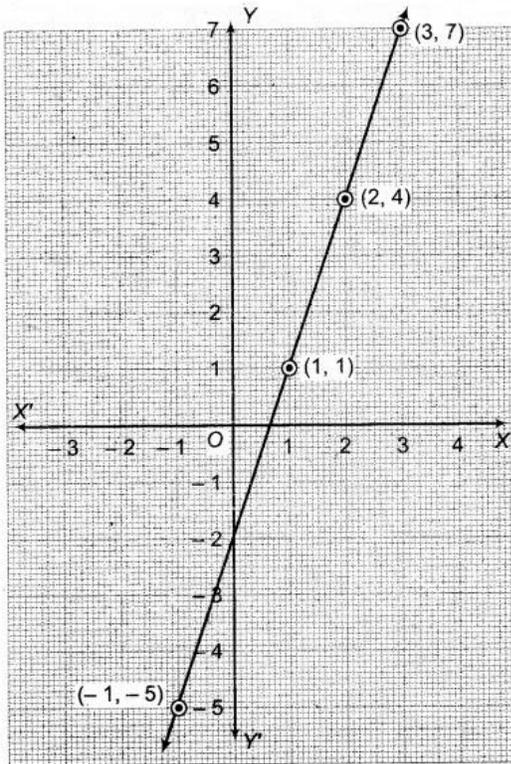
x	1	2	-1
y	1	4	-5

इसी प्रकार, समीकरण $6x - 2y = 4$ या $y = \frac{6x-4}{2}$ से (x, y) के विभिन्न मानों की निम्न सारणी प्राप्त होती है-

x	1	2	3
y	1	4	7

अब बिन्दुओं $(1, 1)$, $(2, 4)$ तथा $(-1, -5)$ का आलेखन कर मिलाने से समीकरण $3x - y = 2$ का आलेख प्राप्त होता है।

पुनः बिन्दुओं $(1, 1)$, $(2, 4)$ तथा $(3, 7)$ का आलेखन कर मिलाने से समीकरण $6x - 2y = 4$ का आलेख प्राप्त होता है।



हम देखते हैं कि ये तीनों बिन्दु पहली रेखा $3x - y = 2$ के आलेख पर विद्यमान हैं। अतः दोनों रेखाएँ सम्पाती होंगी। अतः दिया गया समीकरण निकाय संगत है तथा इसके अनन्त हल होंगे। अतः समीकरण $3x - y = 2$ का प्रत्येक हल इस निकाय का हल होगा।

प्रश्न 11. $3x + 2y = 0$; $2x + y = -1$

हल: दिया गया समीकरण निकाय

$$3x + 2y = 0 \dots(i)$$

$$2x + y = -1 \dots(ii)$$

चूँकि दोनों समीकरण x व y की प्रथम घात में हैं।

अतः इनके आलेख सरल रेखाएँ होंगी।

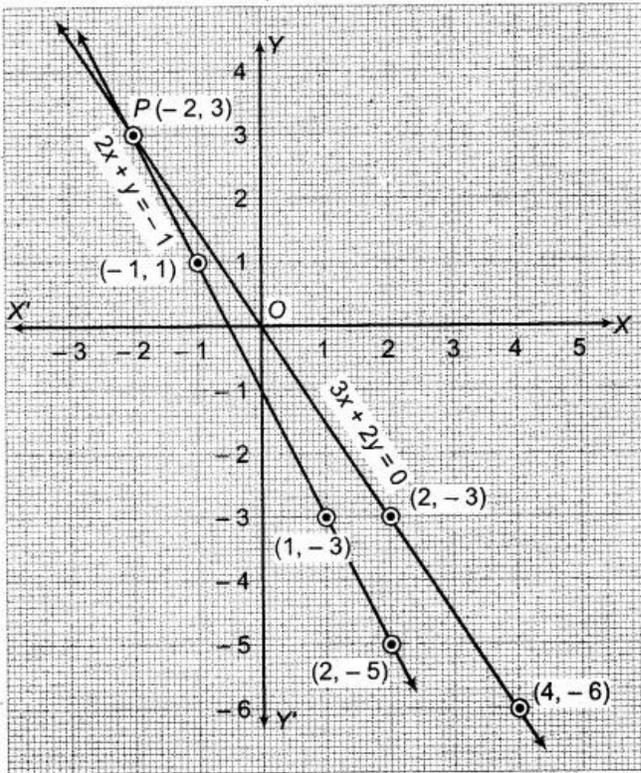
अब समीकरण $3x + 2y = 0$ या $y = \frac{-3}{2}x$ से (x, y) के विभिन्न मानों की निम्न सारणी प्राप्त होती है-

x	2	-2	4
y	-3	3	-6

इसी प्रकार, समीकरण $2x + y = -1$ या $y = -1 - 2x$ से $(3, 3)$ के विभिन्न मानों की निम्न सारणी प्राप्त होती है-

x	1	-1	2
y	-3	1	-5

अब बिन्दुओं $(2, -3)$, $(-2, 3)$ तथा $(4, -6)$ का आलेखन कर मिलाने से समीकरण $3x + 2y = 0$ का आलेख तथा $(1, -3)$, $(-1, 1)$ तथा $(2, -5)$ का आलेखन कर मिलाने से समीकरण $2x + y = -1$ का आलेख प्राप्त होता है।



ये सरल रेखाएँ (आलेख) बिन्दु P पर प्रतिच्छेदित होती हैं, जिसके निर्देशांक $(-2, 3)$ हैं। अतः $x = -2$, $y = 3$ दिए गए निकाय का अद्वितीय हल है।

Exercise 4.2

निम्न समीकरणों को विलोपन विधि (प्रतिस्थापन) द्वारा हल कीजिए (प्रश्न 1 से 6)

प्रश्न 1. $2x + 3y = 9$

$$3x + 4y = 5$$

हल:

दिए गए समीकरण हैं :

$$2x + 3y = 9 \quad \dots(i)$$

$$3x + 4y = 5 \quad \dots(ii)$$

समीकरण (i) से, $x = \frac{9-3y}{2} \quad \dots(iii)$

समीकरण (iii) से x का मान समीकरण (ii) में प्रतिस्थापित करने पर, $3\left(\frac{9-3y}{2}\right) + 4y = 5$

$$\Rightarrow 3 \times 9 - 3 \times 3y + 2 \times 4y = 2 \times 5$$

$$\Rightarrow 27 - 9y + 8y = 10 \Rightarrow 27 - y = 10$$

$$\Rightarrow y = 27 - 10 = 17 \Rightarrow y = 17$$

y के इस मान को समीकरण (iii) में रखने पर,

$$x = \frac{9-3 \times 17}{2} = \frac{9-51}{2} = \frac{-42}{2} = -21$$

प्रश्न 2. $x + 2y = -1$

$$2x - 3y = 12$$

हल: दिए गए समीकरण हैं:

$$x + 2y = -1 \quad \dots(i)$$

$$2x - 3y = 12 \quad \dots(ii)$$

समीकरण (i) से, $x = -1 - 2y \quad \dots(iii)$

समीकरण (iii) से x का मान समीकरण (ii) में रखने पर

$$2(-1 - 2y) - 3y = 12,$$

$$\Rightarrow -2 - 4y - 3y = 12$$

$$\Rightarrow -2 - 7y = 12$$

$$\Rightarrow 7y = -2 - 12 = -14$$

$$\Rightarrow y = -2.$$

y का मान समीकरण (iii) में रखने पर

$$x = -1 - 2(-2) = -1 + 4 = 3$$

प्रश्न 3. $3x + 2y = 11$
 $2x + 3y = 4$

हल:

दिए गए समीकरण हैं :

$$3x + 2y = 11 \quad \dots(i)$$

$$2x + 3y = 4 \quad \dots(ii)$$

समीकरण (i) से, $y = \frac{11-3x}{2} \quad \dots(iii)$

समीकरण (iii) से y का मान समीकरण (ii) में रखने पर

$$2x + 3\left(\frac{11-3x}{2}\right) = 4$$

$$\Rightarrow 4x + 3(11-3x) = 8 \Rightarrow 4x + 33 - 9x = 8$$

$$\Rightarrow 5x = 33 - 8 = 25 \Rightarrow x = 5$$

x का मान समीकरण (iii) में रखने पर

$$y = \frac{11-3(5)}{2} = \frac{11-15}{2} = -\frac{4}{2} = -2$$

प्रश्न 4. $8x + 5y = 9$
 $3x + 2y = 4$

हल:

दिए गए समीकरण हैं :

$$8x + 5y = 9 \quad \dots(i)$$

$$3x + 2y = 4 \quad \dots(ii)$$

समीकरण (i) से, $y = \frac{9-8x}{5} \quad \dots(iii)$

समीकरण (iii) से y का मान समीकरण (ii) में रखने पर

$$3x + 2\left(\frac{9-8x}{5}\right) = 4$$

$$\Rightarrow 15x + 2(9-8x) = 20 \Rightarrow 15x + 18 - 16x = 20$$

$$\Rightarrow 18 - x = 20 \Rightarrow x = -2$$

x का मान समीकरण (iii) में रखने पर

$$y = \frac{9-8(-2)}{5} = \frac{9+16}{5} = \frac{25}{5} = 5$$

प्रश्न 5. $4x - 5y = 39$

$2x - 7y = 51$

हल:

दिए गए समीकरण हैं :

$$4x - 5y = 39 \quad \dots(i)$$

$$2x - 7y = 51 \quad \dots(ii)$$

समीकरण (i) से $y = \frac{4x - 39}{5} \quad \dots(iii)$

समीकरण (iii) से y का मान समीकरण (ii) में रखने

पर $2x - 7\left(\frac{4x - 39}{5}\right) = 51$

$$\Rightarrow 10x - 7(4x - 39) = 255$$

$$\Rightarrow 10x - 28x + 273 = 255$$

$$\Rightarrow -18x = 255 - 273 = -18 \Rightarrow x = 1$$

x का मान समीकरण (iii) में रखने पर

$$y = \frac{4(1) - 39}{5} = \frac{4 - 39}{5} = \frac{-35}{5} = -7$$

प्रश्न 6. $5x - 2y = 19$

$3x + y = 18$

हल

दिए गए समीकरण हैं :

$$5x - 2y = 19 \quad \dots(i)$$

$$3x + y = 18 \quad \dots(ii)$$

समीकरण (i) से, $y = \frac{5x - 19}{2} \quad \dots(iii)$

समीकरण (iii) से y का मान समीकरण (ii) में रखने

पर $3x + \left(\frac{5x - 19}{2}\right) = 18$

$$\Rightarrow 6x + (5x - 19) = 36$$

$$\Rightarrow 11x = 36 + 19 = 55 \Rightarrow x = 5$$

x का मान समीकरण (ii) में रखने पर

$$3(5) + y = 18 \Rightarrow 15 + y = 18 \Rightarrow y = 3$$

गुणांकों को समान बनाकर विलोपन विधि द्वारा निम्नलिखित समीकरणों को हल कीजिए। (प्रश्न 7 से 12)

प्रश्न 7. $2x + y = 13$

$$5x - 3y = 16$$

हल: दिए गए समीकरण हैं :

$$2x + y = 13 \dots (i)$$

$$5x - 3y = 16 \dots (ii)$$

समीकरण (i) में 3 से गुणा करके इसमें समीकरण (ii) जोड़ने पर

$$6x + 3y = 39$$

$$5x - 3y = 16$$

$$11x = 55$$

$$x = \frac{55}{11} = 5$$

x का मान समीकरण (i) में रखने पर

$$2 \times 5 + y = 13$$

$$\Rightarrow 10 + y = 13$$

$$\Rightarrow y = 3$$

प्रश्न 8. $0.4x + 0.3y = 1.7$

$$0.7x - 0.2y = 0.8$$

हल: दिए गए समीकरण हैं:

$$0.4x + 0.3y = 1.7 \dots (i)$$

$$0.7x - 0.2y = 0.8 \dots (ii)$$

दशमलव विलोपित करने के लिए समीकरण (i) तथा (ii) के दोनों पक्षों को 10 से गुणा करने पर

$$4x + 3y = 17 \dots (iii)$$

$$7x - 2y = 8 \dots (iv)$$

समीकरण (iii) में 2 से तथा (iv) में 3 से गुणा करके दोनों को जोड़ने पर

$$8x + 6y = 34$$

$$21x - 6y = 24$$

$$29x = 58$$

$$x = \frac{58}{29} = 2$$

x का मान समीकरण (iv) में रखने पर

$$7 \times 2 - 2y = 8$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow 14 - 2y &= 8 \\ \Rightarrow -2y &= 8 - 14 \\ \Rightarrow y &= 3\end{aligned}$$

प्रश्न 9. $\frac{x}{7} + \frac{y}{3} = 5$
 $\frac{x}{2} - \frac{y}{9} = 6$

हल: दिए गए समीकरण हैं :

$$\frac{x}{7} + \frac{y}{3} = 5 \dots (i)$$

$$\frac{x}{2} - \frac{y}{9} = 6 \dots (ii)$$

समीकरण (i) में $\frac{1}{3}$ से गुणा करके समीकरण (i) के साथ जोड़ने पर

$$\frac{x}{21} + \frac{y}{9} = \frac{5}{3}$$

$$\frac{x}{2} - \frac{y}{9} = 6$$

$$\frac{x}{21} + \frac{x}{2} = \frac{5}{3} + 6$$

$$\Rightarrow \frac{2x + 21x}{42} = \frac{5 + 18}{3} \Rightarrow 23x = \frac{23 \times 42}{3}$$

$$\Rightarrow x = \frac{23 \times 42}{23 \times 3} = 14$$

x का मान समीकरण (i) में रखने पर

$$\frac{14}{7} + \frac{y}{3} = 5 \Rightarrow 2 + \frac{y}{3} = 5$$

$$\Rightarrow \frac{y}{3} = 5 - 2 = 3 \Rightarrow y = 9$$

प्रश्न 10. $11x + 15y = -23$

$$7x - 2y = 20$$

हल: दिए गए समीकरण हैं:

$$11x + 15y = -23 \dots (i)$$

$$7x - 2y = 20 \dots (ii)$$

समीकरण (i) को 2 से तथा समीकरण (ii) को 15 से गुणा करके जोड़ने पर

$$\begin{array}{r}
 22x + 30y = -46 \\
 105x - 30y = 300 \\
 \hline
 127x = 254 \\
 x = \frac{254}{127} = 2
 \end{array}$$

x का मान समीकरण (ii) में रखने पर,

$$7 \times 2 - 2y = 20$$

$$\Rightarrow 14 - 2y = 20$$

$$\Rightarrow 2y = 14 - 20 = -6$$

$$\Rightarrow y = -3$$

प्रश्न 11. $3x - 7y + 10 = 0$

$$y - 2x = 3$$

हल: दिए गए समीकरण हैं :

$$3x - 7y + 10 = 0 \text{ या } 3x - 7y = -10 \dots(i)$$

$$y - 2x = 3 \text{ या } -2x + y = 3 \dots(ii)$$

समीकरण (ii) को 7 से गुणा करके समीकरण (i) के साथ जोड़ने पर

$$\begin{array}{r}
 3x - 7y = -10 \\
 -14x + 7y = 21 \\
 \hline
 -11x = 11 \\
 x = -1
 \end{array}$$

x का मान समीकरण (ii) में रखने पर

$$-2(-1) + y = 3$$

$$\Rightarrow 2 + y = 3$$

$$\Rightarrow y = 3 - 2$$

$$\Rightarrow y = 1$$

प्रश्न 12. $x + 2y = \frac{3}{2}$

$$2x + y = \frac{3}{2}$$

हल: दिए गए समीकरण हैं:

$$x + 2y = \frac{3}{2} \text{ या } 2x + 4y = 3 \dots(i)$$

$$\text{तथा } 2x + y = \frac{3}{2} \text{ या } 4x + 2y = 3 \dots(ii)$$

समीकरण (ii) को 2 से गुणा करके समीकरण (i) में से घटाने पर

$$\begin{array}{r}
 2x + 4y = 3 \\
 \underline{-8x + 4y = -6} \\
 -6x = -3 \\
 x = \frac{-3}{-6} = \frac{1}{2}
 \end{array}$$

x का मान समीकरण (i) में रखने पर

$$\begin{aligned}
 2 \times \frac{1}{2} + 4y &= 3 \\
 \Rightarrow 1 + 4y &= 3 \\
 \Rightarrow 4y &= 3 - 1 = 2 \\
 \Rightarrow y &= \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

समीकरण हल कीजिए (प्रश्न 13 से 15)

प्रश्न 13. $8v - 3u = 5uv$

$6v - 5u = -2uv$

हल: दिए गए समीकरण हैं :

$8v - 3u = 5uv \dots\dots(i)$

$6v - 5u = -2uv \dots\dots(ii)$

समीकरण (i) को 5 से तथा (ii) को -3 से गुणा करके जोड़ने पर

$$40v - 15u = 25uv$$

$$\underline{-18v + 15u = 6uv}$$

$$22v = 31uv$$

$$\Rightarrow 31uv = 22v$$

$$\Rightarrow 31u = 22 \Rightarrow u = \frac{22}{31}$$

u का मान समीकरण (i) में रखने पर

$$8v - \frac{3 \times 22}{31} = 5 \times \frac{22}{31} \times v$$

$$\Rightarrow 248v - 66 = 110v \Rightarrow 248v - 110v = 66$$

$$\Rightarrow 138v = 66 \Rightarrow v = \frac{66}{138} = \frac{11}{23}$$

प्रश्न 14.

$$\frac{1}{2x} - \frac{1}{y} = -1$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{2y} = 8$$

हल

दिए गए समीकरण हैं: $\frac{1}{2x} - \frac{1}{y} = -1$

माना $\frac{1}{x} = X, \frac{1}{y} = Y \therefore \frac{1}{2}X - Y = -1$

$$\Rightarrow \frac{X}{2} - Y = -1 \Rightarrow X - 2Y = -2 \quad \dots(i)$$

तथा $\frac{1}{x} + \frac{1}{2y} = 8$

$$\Rightarrow X + \frac{Y}{2} = 8 \Rightarrow 2X + Y = 16 \quad \dots(ii)$$

समीकरण (ii) को 2 से गुणा करके समीकरण (i) के साथ जोड़ने पर,

$$X - 2Y = -2$$

$$4X + 2Y = 32$$

$$5X = 30$$

$$\Rightarrow X = 6$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x} = 6 \Rightarrow x = \frac{1}{6}$$

X का मान समीकरण (i) में रखने पर

$$6 - 2Y = -2 \Rightarrow -2Y = -2 - 6 = -8$$

$$Y = 4 \text{ या } \frac{1}{y} = 4 \Rightarrow y = \frac{1}{4}$$

प्रश्न 15.

$$\frac{5}{(x+y)} - \frac{2}{(x-y)} = -1; \quad \frac{15}{(x+y)} + \frac{7}{(x-y)} = 10$$

हल

दिए गए समीकरण हैं : $\frac{5}{x+y} - \frac{2}{x-y} = -1$

माना $\frac{1}{x+y} = X$ तथा $\frac{1}{x-y} = Y$

$\therefore 5X - 2Y = -1$... (i)

तथा $\frac{15}{x+y} + \frac{7}{x-y} = 10$

$\Rightarrow 15X + 7Y = 10$... (ii)

समीकरण (i) में 7 से तथा समीकरण (ii) में 2 से गुणा करके आपस में जोड़ने पर,

$$35X - 14Y = -7$$

$$\underline{30X + 14Y = 20}$$

$$65X = 13$$

$\Rightarrow X = \frac{13}{65} = \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{1}{x+y} = \frac{1}{5}$

$\Rightarrow x + y = 5$... (iii)

X का मान समीकरण (i) में रखने पर

$$5 \times \frac{1}{5} - 2Y = -1 \Rightarrow 1 - 2Y = -1$$

$\Rightarrow -2Y = -1 - 1 = -2 \Rightarrow Y = 1$

$\Rightarrow \frac{1}{x-y} = 1 \Rightarrow x - y = 1$... (iv)

समीकरण (iii) व (iv) को जोड़ने पर

$$x + y = 5$$

$$\underline{x - y = 1}$$

$$2x = 6 \Rightarrow x = 3$$

x का मान समीकरण (iii) में रखने पर

$$3 + y = 5 \Rightarrow y = 5 - 3 = 2$$

Exercise 4.3

निम्नलिखित समीकरणों के बारे में जाँच कीजिए कि समीकरण निकाय के अद्वितीय हल हैं, कोई हल नहीं है या अपरिमित हल हैं। यदि किसी निकाय के अद्वितीय हल हैं तो उन्हें ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 1. $2x + y = 35$
 $3x + 4y = 65$

हल: दिए गए समीकरण हैं :

$$2x + y = 35 \text{ या } 2x + y - 35 = 0 \dots(i)$$

$$\text{तथा } 3x + 4y = 65 \text{ या } 3x + 4y - 65 = 0 \dots(ii)$$

समीकरण (i) व (ii) से, $a_1 = 2, b_1 = 1, c_1 = -35$

$$a_2 = 3, b_2 = 4, c_2 = -65$$

$\therefore \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$, अतः समीकरण निकाय के अद्वितीय

हल हैं। वज्र-गुणन विधि से

$$\begin{aligned} \frac{x}{b_1c_2 - b_2c_1} &= \frac{y}{c_1a_2 - c_2a_1} = \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1} \\ \Rightarrow \frac{x}{1 \times (-65) - 4(-35)} &= \frac{y}{(-35) \times 3 - (-65) \times 2} \\ &= \frac{1}{2 \times 4 - 3 \times 1} \\ \Rightarrow \frac{x}{-65 + 140} &= \frac{y}{-105 + 130} = \frac{1}{8 - 3} \\ \Rightarrow \frac{x}{75} &= \frac{y}{25} = \frac{1}{5} \\ \Rightarrow x = \frac{75}{5} = 15 \text{ तथा } y &= \frac{25}{5} = 5 \end{aligned}$$

प्रश्न 2. $2x - y = 6$
 $x - y = 2$

हल: दिए गए समीकरण हैं:

$$2x - y = 6 \text{ या } 2x - y - 6 = 0 \dots(i)$$

$$\text{तथा } x - y = 2 \text{ या } x - y - 2 = 0 \dots(ii)$$

समीकरण (i) व (ii) से, $a_1 = 2, b_1 = -1, c_1 = -6$

$$a_2 = 1, b_2 = -1, c_2 = -2$$

$$\therefore \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$$

\therefore इस समीकरण निकाय के अद्वितीय हल हैं।

वज्र-गुणन विधि से

$$\frac{x}{b_1 c_2 - b_2 c_1} = \frac{y}{c_1 a_2 - c_2 a_1} = \frac{1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}$$
$$\Rightarrow \frac{x}{(-1) \times (-2) - (-1) \times (-6)} = \frac{y}{(-6) \times 1 - (-2) \times 2}$$
$$= \frac{1}{2 \times (-1) - 1 \times (-1)}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{2-6} = \frac{y}{-6+4} = \frac{1}{-1}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{-4} = \frac{y}{-2} = \frac{1}{-1} = -1$$

$$\Rightarrow x = (-4) \times (-1) = 4 \Rightarrow y = (-2) \times (-1) = 2$$

प्रश्न 3. $3x + 2y + 25 = 0$

$$23 + y + 10 = 0.$$

हल: दिए गए समीकरण हैं:

$$3x + 2y + 25 = 0 \dots(i)$$

$$2x + y + 10 = 0 \dots(ii)$$

समीकरण (i) व (ii) से, $a_1 = 3, b_1 = 2, c_1 = 25$

$$a_2 = 2, b_2 = 1, c_2 = 10$$

$$\therefore \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$$

\therefore इस निकाय के अद्वितीय हल हैं।

$$\frac{x}{b_1c_2 - b_2c_1} = \frac{y}{c_1a_2 - c_2a_1} = \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{2 \times 10 - 1 \times 25} = \frac{y}{25 \times 2 - 10 \times 3} = \frac{1}{3 \times 1 - 2 \times 2}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{20 - 25} = \frac{y}{50 - 30} = \frac{1}{3 - 4}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{-5} = \frac{y}{20} = \frac{1}{-1} = -1$$

$$\Rightarrow x = (-5) \times (-1) = 5 \Rightarrow y = 20 \times (-1) = -20$$

प्रश्न 4. $x + 2y + 1 = 0$

$$2x - 3y - 12 = 0$$

हल: दिए गए समीकरण हैं:

$$x + 2y + 1 = 0 \dots(i)$$

$$2x - 3y - 12 = 0 \dots(ii)$$

समीकरण (i) व (ii) से, $a_1 = 1, b_1 = 2, c_1 = 1$

$$a_2 = 2, b_2 = -3, c_2 = -12$$

$\therefore \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$, \therefore इस समीकरण निकाय के अद्वितीय

हल हैं। वज्र-गुणन विधि से

$$\frac{x}{b_1c_2 - b_2c_1} = \frac{y}{c_1a_2 - c_2a_1} = \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{2 \times (-12) - (-3) \times 1} = \frac{y}{1 \times 2 - (-12) \times 1} = \frac{1}{1 \times (-3) - 2 \times 2}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{-24 + 3} = \frac{y}{2 + 12} = \frac{1}{-3 - 4}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{-21} = \frac{y}{14} = \frac{1}{-7}$$

$$\Rightarrow x = \frac{-21}{-7} = 3, y = \frac{14}{-7} = -2$$

प्रश्न 5. k का मान ज्ञात कीजिए यदि समीकरण निकाय का कोई हल नहीं है।

(i) $2x + ky = 1, 3x - 5y = 7$

(ii) $kx + 2y = 5, 3x + y = 1$

हल: (i) दिए गए समीकरण हैं :

$$2x + ky = 1 \text{ या } 2x + ky - 1 = 0$$

$$\text{तथा } 3x - 5y = 7 \text{ या } 3x - 5y - 7 = 0 \dots(ii)$$

समीकरण (i) तथा (ii) से

$$a_1 = 2, b_1 = k, c_1 = 1$$

$$a_2 = 3, b_2 = -5, c_2 = -7$$

यदि समीकरण निकाय का कोई हल न होने के लिए प्रतिबन्ध

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2} \Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{k}{-5} \neq \frac{-1}{-7}$$

यह प्रतिबन्ध सत्य होगा, यदि

$$\frac{2}{3} = \frac{k}{-5} \Rightarrow k = -\frac{10}{3}$$

अतः $k = -\frac{10}{3}$ पर निकाय का कोई हल नहीं होगा।

∴ दिए गए समीकरण हैं :

$$kx + 2y = 5 \text{ या } kx + 2y - 5 = 0 \dots(i)$$

$$\text{तथा } 3x + y = 1 \text{ या } 3x + y - 1 = 0 \dots(ii)$$

समीकरण (i) व (ii) से, $a_1 = k, b_1 = 2, c_1 = -5$

$$a_2 = 3, b_2 = 1, c_2 = -1$$

समीकरण निकाय का कोई हल न होने के लिए प्रतिबन्ध

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2} \Rightarrow \frac{k}{3} = \frac{2}{1} \neq \frac{-5}{-1}$$

यदि प्रतिबन्ध सत्य होगा, यदि

$$\frac{k}{3} = \frac{2}{1} \Rightarrow k = 6$$

अतः $k = 6$ होने पर निकाय का कोई हल नहीं होगा।

प्रश्न 6. समीकरणों की निम्नलिखित प्रणाली को हल करें

$$mx - ny = m^2 + n^2$$

$$x + y = 2m$$

हल: दिया गया समीकरण निकाय

$$mx - ny = m^2 + n^2 \dots(i)$$

$$x + y = 2m \dots(ii)$$

समीकरण (ii) में n से गुणा करके समीकरण (i) के साथ जोड़ने पर

$$mx - ny = m^2 + n^2$$

$$nx + ny = 2mn$$

$$\hline (m + n)x = m^2 + n^2 + 2mn$$

$$\Rightarrow x = \frac{(m + n)^2}{(m + n)} \Rightarrow x = m + n$$

x का मान समीकरण (ii) में रखने पर

$$(m + n) + y = 2m$$

$$\Rightarrow y = 2m - m - n \Rightarrow y = m - n$$

प्रश्न 7. λ के वह मान ज्ञात कीजिए जिसके लिए निकाय $3x + \lambda y + 1 = 0$, $2x + y - 9 = 0$ के (i) अद्वितीय हल (ii) कोई हल नहीं है।

हल: दिए गए समीकरण हैं:

$$3x + \lambda y + 1 = 0 \dots(i)$$

$$2x + y - 9 = 0 \dots(ii)$$

समीकरण (i) तथा (ii) से, $a_1 = 3, b_1 = \lambda, c_1 = 1$

$$a_2 = 2, b_2 = 1, c_2 = -9$$

$$\therefore \frac{a_1}{a_2} = \frac{3}{2}, \frac{b_1}{b_2} = \frac{\lambda}{1} \text{ तथा } \frac{c_1}{c_2} = \frac{1}{-9}$$

(i) अद्वितीय हल के लिए, $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$

$$\Rightarrow \frac{3}{2} \neq \frac{\lambda}{1} \Rightarrow 2\lambda \neq 3 \Rightarrow \lambda \neq \frac{3}{2}$$

अतः निकाय के अद्वितीय हल के लिए शर्त है कि $\lambda \neq \frac{3}{2}$ अर्थात् $\frac{3}{2}$ मान के अतिरिक्त λ के प्रत्येक

मान के लिए निकाय का हल अद्वितीय होगा।

(ii) कोई भी हल नहीं के लिए प्रतिबन्ध

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \Rightarrow \frac{3}{2} = \frac{\lambda}{1} = \frac{1}{-9}$$

यह प्रतिबन्ध सत्य होगा यदि

$$\frac{3}{2} = \frac{\lambda}{1} \text{ या } 2\lambda = 3 \Rightarrow \lambda = \frac{3}{2}$$

अतः $\lambda = \frac{3}{2}$ होने पर निकाय का कोई हल नहीं होगा।

Exercise 4.4

निम्नलिखित समस्याओं का हल ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 1. दो अंकों की एक संख्या में इकाई का अंक दहाई के अंक का 3 गुना है। संख्या के 2 गुने में 10 जोड़ने पर प्राप्त नई संख्या में अंक परस्पर अपना स्थान बदल लेते हैं। संख्या ज्ञात कीजिए।

हल: माना इकाई का अंक = y तथा दहाई का अंक = x

संख्या = $10x + y$ तथा $y = 3x$... (i)

प्रश्नानुसार, $2(10x + y) + 10 = x + 10y$

$$\Rightarrow 20x + 2y + 10 = x + 10y$$

$$\Rightarrow 20x - x + 2y - 10y = -10$$

$$\Rightarrow 19x - 8y = -10$$

$$\Rightarrow 19x - 8 \times 3x = -10 \text{ (समी (i) से)}$$

$$\Rightarrow 19x - 24x = -10$$

$$\Rightarrow -5x = -10$$

$$\Rightarrow x = 2$$

समीकरण (i) में $x = 2$ रखने पर $y = 3 \times 2 = 6$

अतः $x = 2, y = 6$

संख्या = $10x + y = 10 \times 2 + 6 = 20 + 6 = 26$

प्रश्न 2. एक आयत का परिमाण 56 सेमी है। उसकी लम्बाई तथा चौड़ाई का अनुपात 4 : 3 है। आयत की लम्बाई एवं चौड़ाई ज्ञात कीजिए।

हल: आयत का परिमाण = 56 सेमी

माना आयत की लम्बाई x तथा चौड़ाई y है।

तो $2(x + y) = 56$ या $x + y = 28$... (i)

तथा $x : y = 4 : 3 \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{4}{3}$

$$\Rightarrow 3x = 4y \Rightarrow x = \frac{4}{3}y \quad \dots \text{(ii)}$$

$x = \frac{4}{3}y$ का मान समीकरण (i) में रखने पर

$$\frac{4}{3}y + y = 28 \Rightarrow \frac{7}{3}y = 28 \Rightarrow y = \frac{28 \times 3}{7} = 12$$

$\therefore y = 12, x = \frac{4}{3} \times 12 = 16$ अतः आयत की

लम्बाई = 16 सेमी तथा चौड़ाई = 12 सेमी

प्रश्न 3. दो संख्याओं का अनुपात 3:4 है। यदि प्रत्येक संख्या में से 5 घटा दिया जाए, तो उनका अनुपात 5 : 7 हो जाता है। संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

हल: माना दो संख्याएँ x व y हैं, तो $x : y = 3 : 4$

$$\text{या } \frac{x}{y} = \frac{3}{4} \text{ या } 4x = 3y \Rightarrow x = \frac{3}{4}y \quad \dots(i)$$

$$\text{प्रश्नानुसार, } \frac{x-5}{y-5} = \frac{5}{7} \Rightarrow 7(x-5) = 5(y-5)$$

$$\Rightarrow 7x - 35 = 5y - 25 \Rightarrow 7x - 5y = 35 - 25 = 10$$

$$\Rightarrow 7x - 5y = 10 \quad \dots(ii)$$

समीकरण (i) से $x = \frac{3}{4}y$ का मान समीकरण (ii) में

रखने पर

$$7 \times \frac{3}{4}y - 5y = 10 \Rightarrow 21y - 20y = 40 \Rightarrow y = 40$$

$$\text{तथा } x = \frac{3}{4} \times 40 = 30$$

प्रश्न 4. पिता की आयु अपने पुत्र की आयु के 6 गुना से 5 वर्ष अधिक है। 7 वर्ष पश्चात पिता की आयु पुत्र की आयु के 3 गुना से 3 अधिक होगी। दोनों की वर्तमान आयु ज्ञात कीजिए।

हल: माना पुत्र की वर्तमान आयु x वर्ष तथा पिता की वर्तमान आयु y वर्ष है। प्रथम शर्तानुसार,

$$y = 6x + 5$$

$$\Rightarrow 6x - y = -5 \quad \dots(i)$$

द्वितीय शर्तानुसार,

$$y + 7 = 3(x + 7) + 3$$

$$\Rightarrow y + 7 = 3x + 21 + 3$$

$$\Rightarrow y + 7 = 3x + 24$$

$$\Rightarrow -3x + y = 24 - 7$$

$$\Rightarrow -3x + y = 17 \quad \dots(ii)$$

समीकरण (i) व (ii) को जोड़ने पर

$$6x - y - 3x + y = -5 + 17$$

$$3x = 12 \Rightarrow x = 4$$

x को मान समीकरण (i) में रखने पर

$$6 \times 4 - y = -5$$

$$\Rightarrow 24 - y = -5$$

$$\Rightarrow y = 24 + 5 = 29$$

अतः पुत्र की आयु 4 वर्ष तथा पिता की आयु 29 वर्ष है।

प्रश्न 5. राम ने श्याम से कहा कि “तुम मुझे अपने पास से 100 रुपए दे दो तो मेरे पास तुमसे 2 गुना रुपए हो जाएँगे। तब श्याम ने राम से कहा कि “तुम यदि अपने पास से मुझे 10 रुपए दे दो तो मेरे पास तुमसे 6 गुना रुपए हो जाएँगे।” ज्ञात कीजिए कि दोनों के पास कितने-कितने रुपए हैं?

हल: माना राम के पास x रुपये तथा श्याम के पास y रुपये हैं।

प्रथम शर्तानुसार, $x + 100 = 2(y - 100)$

$$\Rightarrow x + 100 = 2y - 200$$

$$\Rightarrow x - 2y = -300 \dots(i)$$

द्वितीय शर्तानुसार,

$$6(x - 10) = (y + 10)$$

$$\Rightarrow 6x - 60 = y + 10$$

$$\Rightarrow 6x - y = 70 \dots(ii)$$

समीकरण (ii) को 2 से गुणा करके समीकरण (i) में से घटाने पर

$$\begin{array}{r} x - 2y = -300 \\ -12x + 2y = -140 \\ \hline -11x = -440 \\ x = \frac{-440}{-11} \end{array}$$

$$x = 40$$

x का मान समीकरण (i) में रखने पर

$$40 - 2y = -300$$

$$\Rightarrow -2y = -340$$

$$\Rightarrow y = 170$$

अतः राम के पास 40 रुपये तथा श्याम के पास 170 रुपये हैं।

प्रश्न 6. 4 कुर्सियों और 3 मेजों का मूल्य 2100 रुपए है तथा 5 कुर्सियों और 2 मेजों का मूल्य 1750 रुपए है, तो एक कुर्सी तथा एक मेज का मूल्य ज्ञात कीजिए।

हल: माना एक कुर्सी का मूल्य x रुपए तथा एक मेज का मूल्य y रुपए हैं।

प्रथम शर्तानुसार, $4x + 3y = 2100 \dots(i)$

द्वितीय शर्तानुसार, $5x + 2y = 1750 \dots(ii)$

समीकरण (i) में 2 से तथा (ii) में -3 से गुणा करके जोड़ने पर

$$\begin{array}{r} 8x + 6y = 4200 \\ -15x - 6y = -5250 \\ \hline -7x = -1050 \\ x = \frac{-1050}{-7} = 150 \end{array}$$

x का मान समीकरण (i) में रखने पर

$$\begin{aligned}
4 \times 150 + 3y &= 2100 \\
\Rightarrow 600 + 3y &= 2100 \\
\Rightarrow 3y &= 2100 - 600 = 1500 \\
\Rightarrow y &= 500
\end{aligned}$$

अतः एक कुर्सी का मूल्य 150 रुपए तथा मेज का मूल्य 500 रुपए है।

प्रश्न 7. दो संख्याएँ इस प्रकार की हैं, कि बड़ी संख्या के 3 गुने में छोटी संख्या का भाग दिया जाता है, तो भागफल 4 तथा शेषफल 3 प्राप्त होता है और जब छोटी संख्या के 7 गुने में बड़ी संख्या का भाग दिया जाता है, तो भागफल 5 तथा शेषफल 1 प्राप्त होता है। संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

हल: माना बड़ी संख्या x तथा छोटी संख्या y है तो प्रथम शर्तानुसार, बड़ी संख्या के 3 गुने में छोटी संख्या का भाग दिया है, तो भागफल 4 तथा शेषफल 3 प्राप्त होता है-

(सूत्र- भाज्य = भाजक \times भागफल + शेषफल से)

$$\begin{aligned}
3x &= y \times 4 + 3 \\
\Rightarrow 3x &= 4y + 3 \\
\Rightarrow 3x - 4y &= 3 \dots (i)
\end{aligned}$$

इसी प्रकार, द्वितीय शर्तानुसार,

$$\begin{aligned}
7y &= x \times 5 + 1 \\
\Rightarrow 7y &= 5x + 1 \\
\Rightarrow 5x - 7y &= -1 \dots (ii)
\end{aligned}$$

समीकरण (i) में 7 से तथा (ii) में -4 से गुणा करके परस्पर जोड़ने पर

$$\begin{array}{r}
21x - 28y = 21 \\
-20x + 28y = 4 \\
\hline
x = 25
\end{array}$$

x का मान समीकरण (ii) में रखने पर

$$\begin{aligned}
5 \times 25 - 7y &= -1 \Rightarrow 7y = 125 + 1 \Rightarrow \\
y &= \frac{126}{7} = 18
\end{aligned}$$

अतः बड़ी संख्या 25 तथा छोटी संख्या 18 है।

प्रश्न 8. दो अंकों की संख्या अपने अंकों के योग की 4 गुनी तथा अंकों के गुणनफल की 2 गुनी है। संख्या ज्ञात कीजिए।

हल: माना इकाई का अंक x तथा दहाई का अंक y है तो संख्या $x + 10y$ होगी।

प्रथम शर्तानुसार, $x + 10y = 4(x + y)$.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow x + 10y &= 4x + 4y \\
\Rightarrow x - 4x + 10y - 4y &= 0 \\
\Rightarrow 3x - 6y &= 0 \\
\Rightarrow x - 2y &= 0 \\
\Rightarrow x &= 2y \dots (i)
\end{aligned}$$

द्वितीय शर्तानुसार, $x + 10y = 2(x \times y)$

$$\Rightarrow x + 10y = 2xy \dots(ii)$$

समीकरण (i) से x का मान समीकरण (ii) में रखने पर,

$$2y + 10y = 2 \times 2y \times y$$

$$\Rightarrow 12y = 4y^2$$

$$\Rightarrow 4y^2 = 12y$$

$$\Rightarrow 4y = 12$$

$$\Rightarrow y = 3$$

समीकरण (i) से, $x = 2 \times 3 = 6$

$$\text{संख्या} = x + 10y = 6 + 10 \times 3 = 6 + 30 = 36$$

प्रश्न 9. एक भिन्न के अंश तथा हर में 1 जोड़ने पर वह $\frac{4}{5}$ बन जाती है, जबकि अंश व हर दोनों में से यदि 5 घटाते हैं तो वह $\frac{1}{2}$ हो जाती है। भिन्न ज्ञात कीजिए।

हल:

माना भिन्न का अंश x तथा हर y है। अतः भिन्न $= \frac{x}{y}$

$$\text{प्रथम शर्तानुसार, } \frac{x+1}{y+1} = \frac{4}{5} \Rightarrow 5x+5 = 4y+4$$

$$\Rightarrow 5x-4y = -1 \dots(i)$$

$$\text{द्वितीय शर्तानुसार, } \frac{x-5}{y-5} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2x-10 = y-5$$

$$\Rightarrow 2x-y = 5 \dots(ii)$$

समीकरण (ii) में -4 से गुणा करके समीकरण (i) के साथ जोड़ने पर

$$5x-4y = -1$$

$$\underline{-8x+4y = -20}$$

$$-3x = -21$$

$$\Rightarrow x = 7$$

x का मान समीकरण (ii) में रखने पर

$$2 \times 7 - y = 5 \Rightarrow y = 14 - 5 = 9$$

अतः भिन्न $\frac{7}{9}$ है।

प्रश्न 10. 5 वर्ष पूर्व गीता की आयु कमला की आयु की 3 गुना थी। 10 वर्ष बाद गीता की आयु कमला की आयु की 2 गुना होगी। दोनों की वर्तमान आयु ज्ञात कीजिए।

हल: माना गीता की वर्तमान आयु x वर्ष तथा कमला की वर्तमान आयु y वर्ष है।

प्रथम शर्तानुसार, $(x - 5) = 3(y - 5)$

$$\Rightarrow x - 6 = 3y - 15$$

$$\Rightarrow x - 3y = -15 + 5$$

$$\Rightarrow x - 3y = -10 \dots(i)$$

तथा द्वितीय शर्तानुसार,

$$(x + 10) = 2(y + 10)$$

$$\Rightarrow x + 10 = 2y + 20$$

$$\Rightarrow x - 2y = 20 - 10$$

$$\Rightarrow x - 2y = 10 \dots(ii)$$

समीकरण (i) में से (ii) घटाने पर

$$x - 3y = -10$$

$$\underline{-x + 2y = -10}$$

$$-y = -20$$

$$y = 20$$

y का मान समीकरण (i) में रखने पर

$$x - 3 \times 20 = -10$$

$$\Rightarrow x = -10 + 60 = 50$$

अतः गीता की वर्तमान उम्र 50 वर्ष तथा कमला की वर्तमान उम्र 20 वर्ष है।

प्रश्न 11. एक व्यक्ति 370 किमी की यात्रा में से कुछ दूरी रेल द्वारा तथा कुछ दूरी कार द्वारा तय करता है। यदि वह 250 किमी रेल द्वारा तथा शेष दूरी कार द्वारा तय करता है, तो उसे 4 घण्टे लगते हैं। परन्तु जब वह 130 किमी रेल द्वारा तथा शेष दूरी कार द्वारा तय करता है तो उसे 18 मिनट अधिक लगते हैं। रेल तथा कार की चाल ज्ञात कीजिए।

हल: माना रेल की चाल x किमी/घंटा तथा कार की चाल y किमी/घंटा है।

जब वह 250 किमी ट्रेन द्वारा तय करता है तो उसे $370 - 250 = 120$ किमी कार से तय करता है।

∴ रेल द्वारा दूरी तय करने में लगा समय = $\frac{250}{x}$ घंटे

कार द्वारा दूरी तय करने में लगा समय = $\frac{120}{y}$ घंटे

प्रथम शर्तानुसार $\frac{250}{x} + \frac{120}{y} = 4$

द्वितीय शर्तानुसार, $\frac{130}{x} + \frac{370-130}{y} = 4 + \frac{18}{60}$

⇒ $\frac{130}{x} + \frac{240}{y} = \frac{43}{10}$

माना कि $\frac{1}{x} = X, \frac{1}{y} = Y$ तो

$250X + 120Y = 4$... (i)

⇒ $130X + 240Y = \frac{43}{10}$... (ii)

समीकरण (i) में -2 से गुणा करके समीकरण (ii) के साथ जोड़ने पर

$-500X - 240Y = -8$

$130X + 240Y = \frac{43}{10}$

$-370X = -8 + \frac{43}{10}$

⇒ $-370X = \frac{-80 + 43}{10}$

⇒ $-370X = \frac{-37}{10} \Rightarrow X = \frac{-37}{10 \times (-370)} = \frac{1}{100}$

⇒ $\frac{1}{x} = \frac{1}{100} \Rightarrow x = 100$ $\left[\because X = \frac{1}{x} \right]$

X का मान समीकरण (i) में रखने पर

$250 \times \frac{1}{100} + 120Y = 4 \Rightarrow \frac{25}{10} + 120Y = 4$

⇒ $120Y = 4 - \frac{25}{10} = \frac{40 - 25}{10} = \frac{15}{10}$

⇒ $Y = \frac{15}{120 \times 10} = \frac{1}{80}$

⇒ $\frac{1}{y} = \frac{1}{80} \Rightarrow y = 80$ $\left[\because Y = \frac{1}{y} \right]$

अतः रेल की चाल 100 किमी/घंटा तथा कार की चाल 80 किमी/घंटा है।

Miscellaneous Exercise

विविध प्रश्नमाला

सही उत्तर को चुनिए : (प्रश्न 1 से 10)

प्रश्न 1. यदि $y = 2x - 3$ तथा $y = 5$ हो तो x का मान होगा

- (A) 1
- (B) 2
- (C) 3
- (D) 4

उत्तर: (D)

संकेत : $y = 2x - 3$

$\Rightarrow 2x = y + 3$

$\Rightarrow x = \frac{y+3}{2} = \frac{5+3}{2} = \frac{8}{2} = 4$

प्रश्न 2. यदि $2x + y = 6$ हो तो इसको संतुष्ट करने वाला युग्म

- (A) (1, 2)
- (B) (2, 1)
- (C) (2, 2)
- (D) (1, 1)

उत्तर : (C)

संकेत : $2x + y = 6 \Rightarrow y = 6 - 2x$

$x = 1$ पर, $y = 6 - 2(1) = 6 - 2 = 4$

$(x, y) = (1, 4)$

$x = 2$ पर, $y = 6 - 2(2) = 6 - 4 = 2$

$(x, y) = (2, 2)$

प्रश्न 3.

यदि $\frac{4}{x} + 5y = 7$ तथा $x = -\frac{4}{3}$ हों, तो y का मान

होगा :

- (A) $\frac{37}{15}$ (B) 2 (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{1}{3}$

उत्तर:

उत्तर : (B)

संकेत : $\frac{4}{x} + 5y = 7$

$$\Rightarrow 5y = \frac{1}{5} \left(7 - \frac{4}{x} \right) = \frac{1}{5} \left(7 - \frac{4}{(-4/3)} \right) = \frac{7+3}{5} = \frac{10}{5} = 2$$

प्रश्न 4. यदि $\frac{3}{x} + 4y = 5$ तथा $y = 1$ हो, तो x का मान होगा:

- (A) 3
(B) $\frac{1}{3}$
(C) -3
(D) $-\frac{1}{3}$

उत्तर : (A)

संकेत : $\frac{3}{x} + 4y = 5 \Rightarrow \frac{3}{x} + 4(1) = 5$

$$\Rightarrow \frac{3}{x} + 4 = 5 \Rightarrow \frac{3}{x} = 5 - 4 = 1 \Rightarrow x = 3$$

प्रश्न 5. यदि $x = 1$ हो, तो समीकरण $\frac{4}{x} + \frac{3}{y} = 5$ में y का मान

- (A) 1
(B) $\frac{1}{3}$
(C) 3
(D) -3

उत्तर : (C)

संकेत : $\frac{4}{1} + \frac{3}{y} = 5 \Rightarrow \frac{3}{y} = 5 - 4 = 1 \Rightarrow y = 3$

प्रश्न 6. यदि किसी संख्या के इकाई तथा दहाई के स्थान पर अंक क्रमशः तथा x हों, तो संख्या होगी :

- (A) $10x + y$
- (B) $10y + x$
- (C) $x + y$
- (D) xy

उत्तर : (A)

संकेत : इकाई का अंक = y ; दहाई का अंक = x
संख्या = $10x + y$.

प्रश्न 7. एक लड़के की आयु अपनी माता की आयु की एक तिहाई है। यदि माता की वर्तमान आयु x वर्ष है तो 12 वर्ष पश्चात् लड़के की आयु होगी :

- (A) $\frac{x}{2} + 12$
- (B) $\frac{x+12}{3}$
- (C) $x + 4$
- (D) $\frac{x}{3} - 12$

उत्तर : (A)

संकेत : माता की वर्तमान आयु x वर्ष है। लड़के की वर्तमान आयु माता की आयु की एक तिहाई है।
अतः लड़के की वर्तमान आयु = $\frac{x}{3}$ वर्ष
अब लड़के की 12 वर्ष बाद आयु = $\frac{x}{3} + 12$ वर्ष

प्रश्न 8. x -अक्ष पर बिन्दु है-

- (A) (2, 3)
- (B) (2,0)
- (C) (0, 2)
- (D) (2, 2)

उत्तर : (B)

प्रश्न 9. मूल बिन्दु के निर्देशांक हैं।

- (A) (0, 0)
- (B) (0, 1)
- (C) (1, 0)
- (D) (1, 1)

उत्तर : (A)

प्रश्न 10. बिन्दु (3, -4) किस पाद में विद्यमान है?

- (A) प्रथम
- (B) द्वितीय
- (C) तृतीय
- (D) चतुर्थ

उत्तर : (D)

प्रश्न 11. समीकरण $5y - 3x - 10 = 0$ में 3 को x के रूप में व्यक्त कीजिए। वह बिन्दु ज्ञात कीजिए जहाँ समीकरण $5y - 3x - 10 = 0$ द्वारा निरूपित रेखा y -अक्ष को काटती है।

हल

$$5y - 3x - 10 = 0 \Rightarrow 5y = 3x + 10 \Rightarrow y = \frac{3x + 10}{5}$$

दिया हुआ समीकरण y -अक्ष को काटता है तब $x = 0$

$$\Rightarrow y = \frac{3(0) + 10}{5} = \frac{10}{5} = 2 \text{ अतः बिन्दु } (0, 2) \text{ है।}$$

प्रश्न 12. x के माने $x = -2$ से $x = 2$ तक एवं इनके मध्य लेते हुए समीकरण $y = 2x + 1$ के मानों से सारणी का निर्माण कीजिए तथा उक्त समीकरण का आलेख खींचिए।

हल:

$$y = 2x + 1$$

$x = -2$ पर,

$$y = 2(-2) + 1 = -4 + 1 = -3, \text{ बिन्दु } (-2, -3)$$

$$x = -1 \text{ पर, } y = 2(-1) + 1 = -2 + 1 = -1, \text{ बिन्दु } (-1, -1)$$

$$x = 0 \text{ पर, } y = 2(0) + 1 = 0 + 1 = 1, \text{ बिन्दु } (0, 1)$$

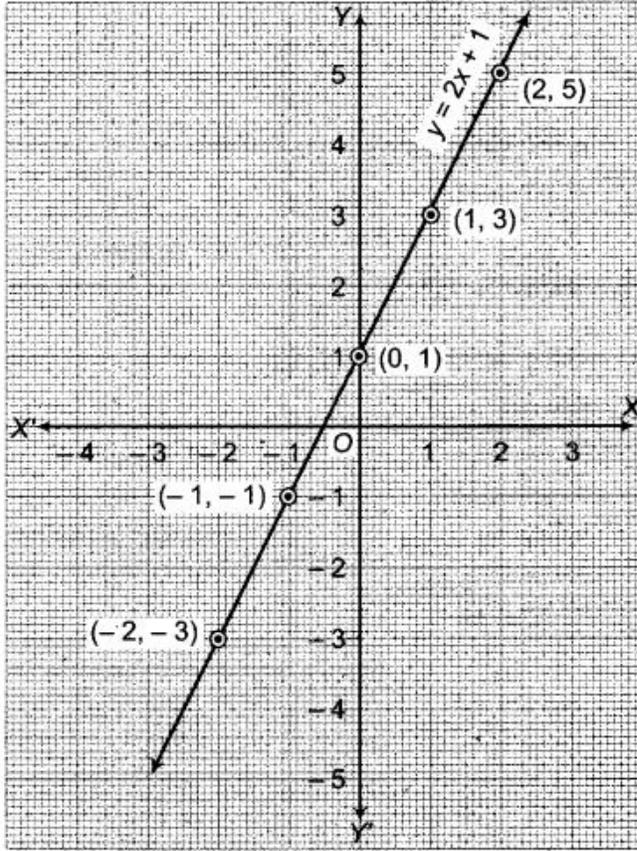
$$x = 1 \text{ पर, } y = 2(1) + 1 = 2 + 1 = 3, \text{ बिन्दु } (1, 3)$$

$$x = 2 \text{ पर, } y = 2(2) + 1 = 4 + 1 = 5, \text{ बिन्दु } (2, 5)$$

सारणी

x	-2	-1	0	1	2
y	-3	-1	1	3	5

आलेख



प्रश्न 13. निम्न युगपत समीकरणों का हल ज्ञात कीजिए-

$$0.5x + 0.6y = 2.3; 0.2x + 0.7y = 23$$

हल: दिए गए समीकरण निकाय के दोनों पक्षों को 10 से गुणा करने पर

$$5x + 6y = 23 \dots(i)$$

$$2x + 7y = 23 \dots(ii)$$

समीकरण (i) में 2 से तथा (ii) में -5 से गुणा करके परस्पर जोड़ने पर

$$10x + 12y = 46$$

$$\underline{-10x - 35y = -115}$$

$$-23y = -69$$

$$y = \frac{-69}{-23} = 3$$

y का मान समीकरण (ii) में रखने पर

$$2x + 7(3) = 23$$

$$\Rightarrow 2x + 21 = 23$$

$$\Rightarrow 2x = 23 - 21$$

$$\Rightarrow x = 1$$

प्रश्न 14. समीकरण निकाय $2x + 3y = 9$; $3x + 4y = 5$ का हल ज्ञात कीजिए।

हल: दिए गए समीकरण हैं :

$$2x + 3y = 9 \dots(i)$$

$$\text{तथा } 3x + 4y = 5 \dots(ii)$$

समीकरण (i) में 4 से तथा (ii) में -3 से गुणा करके परस्पर जोड़ने पर

$$\begin{array}{r} 8x + 12y = 36 \\ -9x - 12y = -15 \\ \hline -x = 21 \\ x = -21 \end{array}$$

x का मान समीकरण (i) में रखने पर

$$2(-21) + 3(y) = 9$$

$$\Rightarrow -42 + 3y = 9$$

$$\Rightarrow 3y = 9 + 42$$

$$\Rightarrow y = 17$$

प्रश्न 15.

$$\text{समीकरण निकाय } \frac{1}{2x} - \frac{1}{y} = -1; \frac{1}{x} + \frac{1}{2y} = 8; x \neq 0,$$

$y \neq 0$ का हल ज्ञात कीजिए।

हल:

दिए गए समीकरण हैं :

$$\frac{1}{2x} - \frac{1}{y} = -1 \dots(i) \text{ तथा } \frac{1}{x} + \frac{1}{2y} = 8 \dots(ii)$$

समीकरण (i) में $\frac{1}{2}$ से गुणा करके समीकरण (ii) में

जोड़ने पर,

$$\begin{array}{r} \frac{1}{4x} - \frac{1}{2y} = -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{2y} = 8 \\ \hline \frac{1}{4x} + \frac{1}{x} = -\frac{1}{2} + 8 \end{array}$$

$$\Rightarrow \frac{1+4}{4x} = \frac{-1+16}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{5}{4x} = \frac{15}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{6}$$

x का मान समीकरण (ii) में रखने पर

$$\frac{1}{(1/6)} + \frac{1}{2y} = 8 \Rightarrow 6 + \frac{1}{2y} = 8$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2y} = 8 - 6 = 2 \Rightarrow y = \frac{1}{4}$$

प्रश्न 16. दो संख्याएँ इस प्रकार की हैं कि यदि छोटी संख्या में 7 जोड़ दिया जाय तो योग बड़ी संख्या से दुगुना हो जाता है तथा यदि बड़ी संख्या में 4 जोड़ दिया जाय तो योग छोटी संख्या से तिगुना हो जाता है। दोनों संख्याओं को ज्ञात कीजिए।

हल: माना छोटी संख्या x और बड़ी संख्या y है।

पहली शर्त के अनुसार,

$$x + 7 = 2y$$

$$\Rightarrow x - 2y = -7 \dots(i)$$

द्वितीय शर्त के अनुसार,

$$y + 4 = 3x$$

$$\Rightarrow 3x - y = 4 \dots(ii)$$

$$\Rightarrow y = 3x - 4$$

y का मान समीकरण (i) में रखने पर,

$$\Rightarrow x - 2(3x - 4) = -7$$

$$\Rightarrow x - 6x + 8 = -7$$

$$\Rightarrow -5x = -7 - 8$$

$$\Rightarrow -5x = -15$$

$$\Rightarrow x = 3$$

$x = 3$ समीकरण (ii) में रखने पर

$$3 \times 3 - y = 4$$

$$\Rightarrow y = 5$$

अतः छोटी संख्या $x = 3$ तथा बड़ी संख्या $y = 5$

प्रश्न 17. किसी भिन्न का अंश, हर से 4 कम है। यदि अंश में से 2 घटा दिया जाए तथा हर में 1 जोड़ दिया जाए तो हर, अंश का 8 गुणा हो जाता है। भिन्न ज्ञात कीजिए।

हल: माना भिन्न का अंश x तथा हर y है तो भिन्न $= \frac{x}{y}$

प्रथम शर्तानुसार, $x = y - 4 \Rightarrow x - y = -4 \dots(i)$

द्वितीय शर्तानुसार, $8(x - 2) = y + 1$

$$\Rightarrow 8x - 16 = y + 1$$

$$\Rightarrow 8x - y = 17 \dots(ii)$$

समीकरण (ii) में से (i) घटाने पर

$$8x - y = 17$$

$$-x + y = -4$$

$$\hline 7x = 21$$

$$x = 3$$

x का मान समीकरण (i) में रखने पर

$$3 - y = -4 \Rightarrow y = 3 + 4 = 7$$

प्रश्न 18. 5 पुस्तकों तथा 7 कलमों का कुल मूल्य 79 रु है। जबकि 7 पुस्तकों तथा 5 कलमों का कुल मूल्य 77 रु है। 1 पुस्तक तथा 2 कलमों का कुल मूल्य ज्ञात कीजिए।

हल: माना एक पुस्तक का मूल्य x रुपये तथा एक कलम का मूल्य y रुपये है।

प्रथम शर्तानुसार $5x + 7y = 79 \dots(i)$

द्वितीय शर्तानुसार $7x + 5y = 77 \dots(ii)$

समीकरण (i) में 5 से तथा (ii) में -7 से गुणा करके परस्पर जोड़ने पर,

$$25x + 35y = 395$$

$$-49x - 35y = -539$$

$$\hline -24x = -144$$

$$x = \frac{-144}{-24} = 6$$

x का मान समीकरण (i) में रखने पर

$$5 \times 6 + 7y = 79$$

$$\Rightarrow 7y = 79 - 30 = 49$$

$$\Rightarrow 7y = 49$$

$$\Rightarrow y = 7$$

$$\Rightarrow 2y = 14$$

अतः 1 पुस्तक का मूल्य 6 रुपये तथा 2 कलमों का मूल्य 14 रुपयों तथा दोनों का कुल मूल्य $(6 + 14) = 20$ रुपये है।

प्रश्न 19. दो अंकों की एक संख्या इस प्रकार की है कि जब इसे 9 से गुणा किया जाए तो वह उस संख्या की दुगुनी हो जाएगी जो मूल संख्या के अंकों के स्थान परस्पर बदलने से बनती है। यदि संख्या के दोनों अंकों का अंतर 7 हो, तो संख्या ज्ञात कीजिए।

हल: माना एक संख्या का इकाई का अंक x तथा दहाई का अंक y है। दो अंकों की संख्या = $10y + x$
अंक परस्पर बदलने से बनी संख्या = $10x + y$

प्रश्न शर्तानुसार, $(10y + x) \times 9 = 2(10x + y)$

$$\Rightarrow 90y + 9x = 20x + 2y$$

$$\Rightarrow 20x - 9x - 90y + 2y = 0$$

$$\Rightarrow 11x - 88y = 0$$

$$\Rightarrow x - 8y = 0 \dots(i)$$

दूसरी शर्त के अनुसार, $x - y = 7 \dots(ii)$

समीकरण (ii) में से समीकरण (i) को घटाने पर,

$$\begin{array}{r} x - y = 7 \\ x - 8y = 0 \\ \hline 7y = 7 \\ y = 1 \end{array}$$

समीकरण (i) में $y = 1$ रखने पर

$$x - 8 \times 1 = 0 \Rightarrow x - 8 = 0 \Rightarrow x = 8$$

मूल संख्या का इकाई का अंक = 8

और मूल संख्या को दहाई का अंक = 1

$$\text{मूल संख्या} = 10y + x = 10 \times 1 + 8 = 18$$

अतः मूल संख्या 18 होगी।

नोट- उपर्युक्त प्रश्न में अंकों का अन्तर $y - x$ लेने पर x तथा y के मान ऋणात्मक रूप में प्राप्त होते हैं। जो कि गलत है।

प्रश्न 20. एक त्रिभुज में $\angle A = 3^\circ$, $\angle B = 3^\circ$ तथा $\angle C = y^\circ$ है। यदि $5x - 3y + 30 = 0$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि यह समकोण त्रिभुज है।

हल: दिया है त्रिभुज ABC में,

$$\angle A = x^\circ, \angle B = 3x^\circ \text{ तथा } \angle C = y^\circ$$

चूँकि, हम जानते हैं कि त्रिभुज के तीनों कोणों का योग 180° होता है।

$$x + 3x + y = 180$$

$$\Rightarrow 4x + y = 180 \dots(i)$$

$$\text{दिया है, } 5x - 3y + 30 = 0$$

$$\Rightarrow 5x - 3y = -30 \dots(ii)$$

समीकरण (i) में 3 से गुणा करके (ii) के साथ जोड़ने पर

$$12x + 3y = 540$$

$$5x - 3y = -30$$

$$17x = 510$$

$$x = \frac{510}{17} = 30$$

x का मान समीकरण (i) में रखने पर

$$4 \times 30 + y = 180$$

$$\Rightarrow y = 180 - 120 = 60$$

$$\angle B = 3x = 3 \times 30^\circ = 90^\circ$$

अतः त्रिभुज का कोण B = 90° है।

इससे स्पष्ट है कि त्रिभुज ABC एक समकोण त्रिभुज है।

प्रश्न 21. निम्न युगपत समीकरणों का हल आलेख विधि से ज्ञात कीजिए।

(a) $x + y = 4$; $x = y$

(b) $x + y = 3$; $2x + 5y = 12$

(c) $2x - 3y - 6 = 0$; $2x + y + 10 = 0$

(d) $2x + y - 3 = 0$; $2x - 3y - 7 = 0$

हल: (a) दिया गया समीकरण निकाय है:

$$x + y = 4 \dots(i)$$

$$x = y \dots(ii)$$

चूंकि दोनों समीकरण x व y की प्रथम घात में हैं।

इनके आलेख सरल रेखाएँ होंगी।

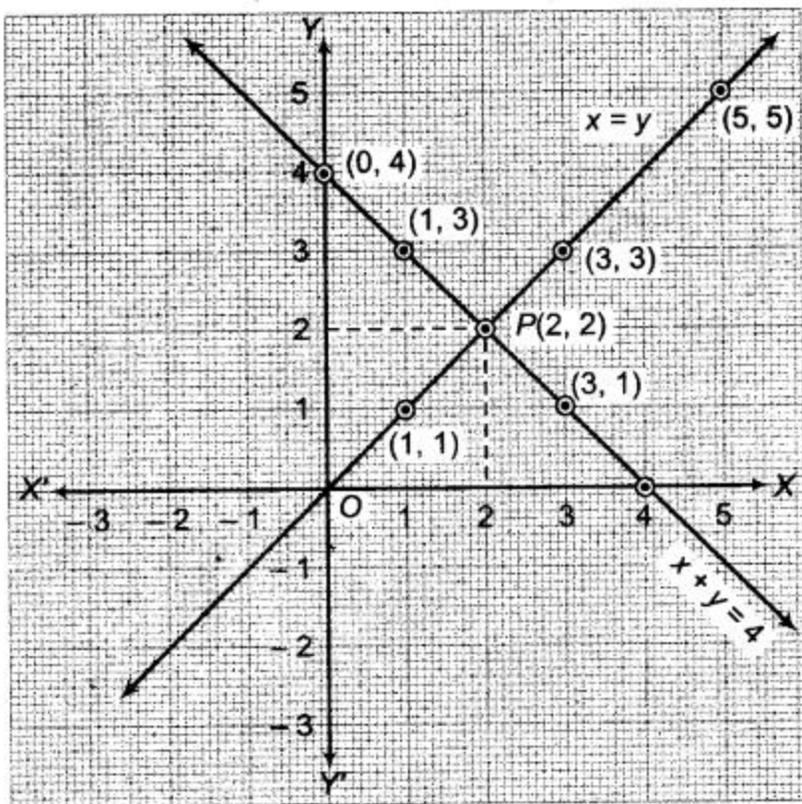
अब समीकरण $x + y = 4$ या $y = 4 - x$ से (x, y) के विभिन्न मानों की निम्न सारणी प्राप्त होती है-

x	0	1	3
y	4	3	1

इसी प्रकार, समीकरण $x = y$ से (x, y) के विभिन्न मानों की निम्न सारणी प्राप्त होती है-

x	1	3	5
y	1	3	5

अब बिन्दुओं (0, 4), (1, 3) तथा (3, 1) का आलेखन कर मिलाने से समीकरण $x + y = 4$ का आलेख तथा बिन्दुओं (1,1), (3, 3) तथा (5, 5) का आलेखन कर मिलाने से समीकरण $x = y$ का आलेख प्राप्त होता है।



ये सरल रेखाएँ (आलेख) बिन्दु P पर प्रतिच्छेदित होती हैं, जिसके निर्देशांक (2, 2) हैं।

अतः $x = 2$, $y = 2$ दिए गए समीकरण निकाय का अद्वितीय हल है।

(b) दिया गया समीकरण निकाय है-

$$x + y = 3 \dots(i)$$

$$2x + 5y = 12 \dots(ii)$$

चूँकि, दोनों समीकरण x व y की प्रथम घात में हैं। इनके आलेख सरल रेखाएँ होंगी।

अब समीकरण $x + y = 3$ या $y = 3 - x$ से (x, y) के विभिन्न मानों की निम्न सारणी प्राप्त होती है-

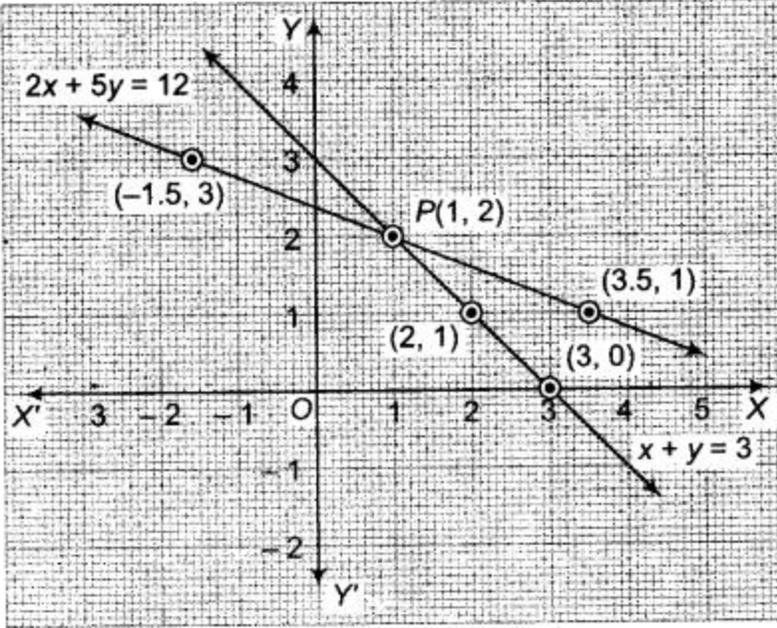
x	1	2	3
y	2	1	0

इसी प्रकार, समीकरण $2x + 5y = 12$ या $y = \frac{12 - 2x}{5}$

से (x, y) के विभिन्न मानों की निम्न सारणी प्राप्त होती है—

x	1	-1.5	3.5
y	2	3	1

अब बिन्दुओं (1, 2), (2, 1) तथा (3, 0) को आलेखन कर मिलाने से समीकरण $x + y = 3$ का आलेख तथा (1, 2), (-1.5, 3) तथा (3.5, 1) का आलेखन कर मिलाने से समीकरण $2x + 5y = 12$ का आलेख प्राप्त होता है।



ये सरल रेखाएँ (आलेख) बिन्दु P पर प्रतिच्छेदित होती हैं, जिसके निर्देशांक (1, 2) हैं। अतः $x = 1, y = 2$ दिए गए निकाय के अद्वितीय हल हैं।

(c) दिया गया समीकरण निकाय है

$$2x - 3y - 6 = 0 \dots(i)$$

$$2x + y + 10 = 0 \dots(ii)$$

चूँकि दोनों समीकरण व y की प्रथम घात में हैं।

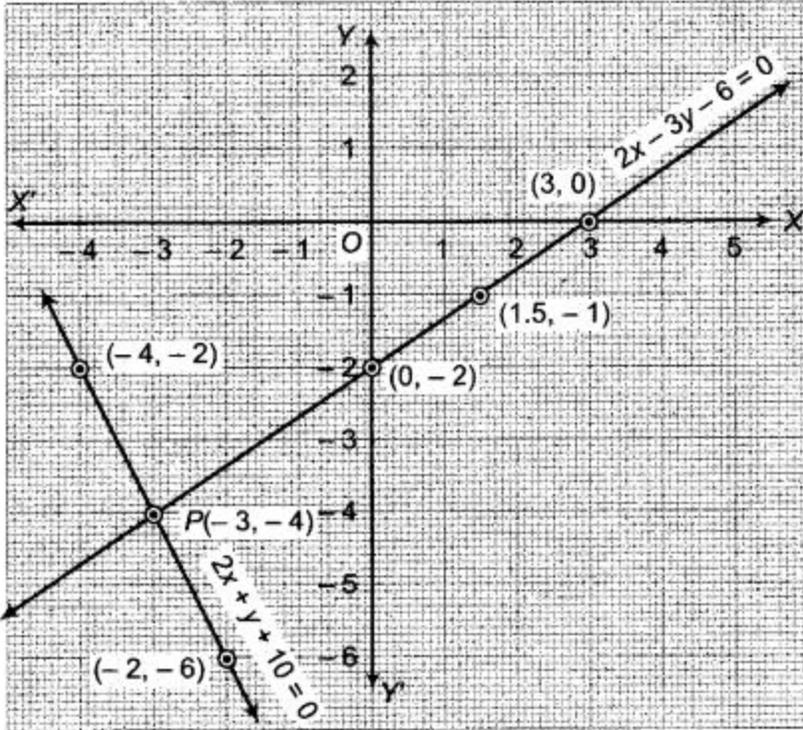
इनके आलेख सरल रेखाएँ होंगी। अब समीकरण $2x - 3y - 6 = 0$ या $y = \frac{2x-6}{3}$ से (x, y) के विभिन्न मानों की निम्न सारणी प्राप्त होती है-

x	0	1.5	3
y	-2	-1	0

इसी प्रकार, समीकरण $2x + y + 10 = 0$ या $y = -2x - 10$ से (x, y) के विभिन्न मानों की निम्न सारणी प्राप्त होती है-

x	-2	-3	-4
y	-6	-4	-2

अब बिन्दुओं (0, -2), (1.5, -1) तथा (3, 0) का आलेखन कर मिलाने से समीकरण $2x - 3y - 6 = 0$ का आलेख तथा (-2, -6), (-3, -4) तथा (-4, -2) का आलेखन करे' मिलाने से समीकरण $2x + y + 10 = 0$ का आलेख प्राप्त होता है।



ये सरल रेखाएँ (आलेख) बिन्दु P पर प्रतिच्छेदित होती हैं, जिसके निर्देशांक $(-3, -4)$ हैं। अतः $x = -3, y = -4$ दिए गए निकाय के अद्वितीय हल हैं।

(d) दिया गया समीकरण निकाय है :

$$2x + y - 3 = 0 \dots(i)$$

$$2x - 3y - 7 = 0 \dots(ii)$$

चूँकि दोनों समीकरण x व y की प्रथम घात में हैं।

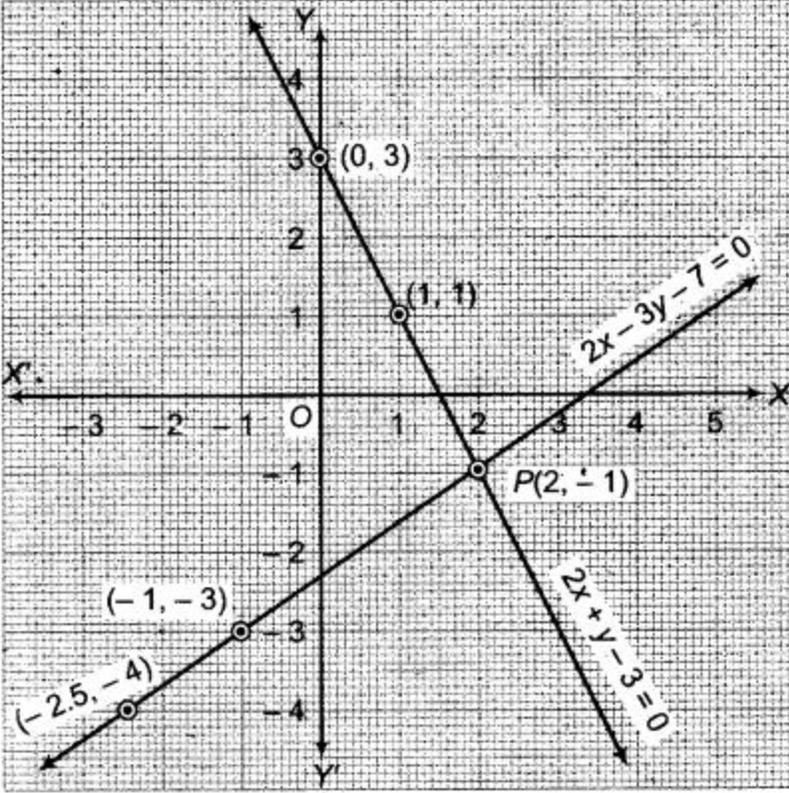
इनके आलेख सरल रेखाएँ होंगी। अब समीकरण $2x + y - 3 = 0$ या $y = 3 - 2x$ से (x, y) के विभिन्न मानों की निम्न सारणी प्राप्त होती है-

x	0	1	2
y	3	1	-1

इसी प्रकार, समीकरण $2x - 3y - 7 = 0$ या $y = \frac{2x-7}{3}$ से (x, y) के विभिन्न मानों की निम्न सारणी प्राप्त होती है-

x	2	-1	-2.5
y	-1	-3	-4

अब बिन्दुओं $(0, 3), (1, 1)$ तथा $(2, -1)$ का आलेखन कर मिलाने से समीकरण $2x + y - 3 = 0$ का आलेख तथा $(2, -1), (-1, -3)$ तथा $(-2.5, -4)$ का आलेखन कर मिलाने से समीकरण $2x - 3y - 7 = 0$ का आलेख प्राप्त होता है।



ये सरल रेखाएँ बिन्दु P पर प्रतिच्छेदित होती हैं, जिसके निर्देशांक (2, -1) हैं। अतः $x = 2, y = -1$ दिए गए समीकरण निकाय का अद्वितीय हल हैं।

प्रश्न 22. समीकरण निकाय $2x - y = 1, x + 2y = 8$ की आलेख विधि से हल ज्ञात कीजिए तथा इनके संगत रेखाएँ y -अक्ष को जिन बिन्दुओं पर मिलती हैं उन बिन्दुओं के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

हल: दिया गया समीकरण निकाय है-

$$2x - y = 1 \dots (i)$$

$$\text{तथा } x + 2y = 8 \dots (ii)$$

चूँकि दोनों समीकरण x व y की प्रथम घात में हैं।

अतः इनके आलेख सरल रेखाएँ होंगी।

अब समीकरण $2x - y = 1$ या $y = 2x - 1$ से (x, y) के विभिन्न मानों की निम्न सारणी प्राप्त होती है-

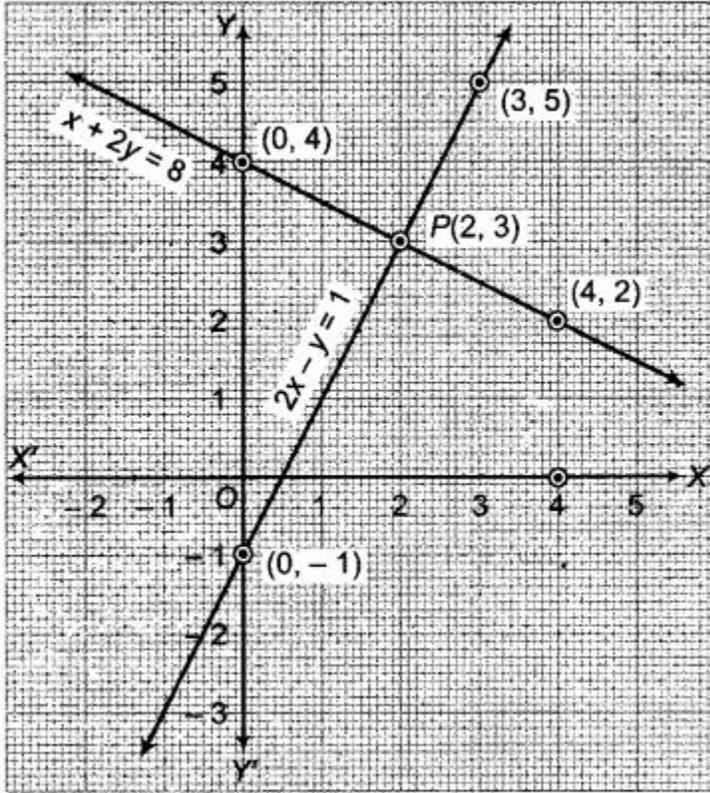
x	0	2	3
y	-1	3	5

इसी प्रकार, समीकरण $x + 2y = 8$ या $y = \frac{8-x}{2}$ से (x, y) के विभिन्न मानों की निम्न सारणी प्राप्त होती है-

x	0	2	4
y	4	3	2

अब बिन्दुओं (0, -1), (2, 3) तथा (3, 5) का आलेखन कर मिलाने से समीकरण $2x - y = 1$ का आलेख

तथा $(0, 4)$, $(2, 3)$ तथा $(4, 2)$ का आलेखन कर मिलाने से समीकरण $x + 2y = 8$ का आलेख प्राप्त होता है।



ये सरल रेखाएँ (आलेख) बिन्दु P पर प्रतिच्छेदित होती हैं। जिसके निर्देशांक $(2, 3)$ हैं। अतः $x = 2$, $y = 3$ दिए गए समीकरण निकाय का अद्वितीय हल है।
 ग्राफ से स्पष्ट है कि ये रेखाएँ -अक्ष को जिन बिन्दुओं पर मिलती हैं, उनके निर्देशांक $(0, -1)$ और $(0, 4)$ है।

Additional Questions

बहुविकल्पीय प्रश्न

प्रश्न 1. समीकरण $x + 3y = 10$ को सन्तुष्ट करने वाला बिन्दु है-

- (A) (4, 2)
- (B) (-4, 2)
- (C) (4, -1)
- (D) (2,4)

प्रश्न 2. समीकरण $x + 4y = 0$ है-

- (A) एक चर समीकरण
- (B) दो चर समीकरण
- (C) द्विघात समीकरण
- (D) उपर्युक्त में से कोई नहीं।

प्रश्न 3. समीकरण $4x + 5y = k$ में, यदि $x = 2, y = 1$ हो, तो k का मान होगा-

- (A) 9
- (B) -12
- (C) -13
- (D) 13

प्रश्न 4. रैखिक समीकरण $y - 2 = 0$ का आलेख खींचने पर प्राप्त होगा:

- (A) X-अक्ष के समान्तर
- (B) मूलबिन्दु से गुजरती हुई
- (C) Y-अक्ष के समान्तर
- (D) आलेख नहीं खींचा जा सकता।

प्रश्न 5. दो चर वाले रैखिक समीकरण के हल होंगे:

- (A) एक अद्वितीय हल
- (B) अपरिमित रूप से अनेक हल
- (C) केवल दो हल
- (D) केवल चार हल

प्रश्न 6. रैखिक समीकरण $y = 3x$ से व्यक्त रेखा पर स्थित बिन्दु होगा:

- (A) (2, 3)
- (B) (3, 1)
- (C) (1, 3)
- (D) (1, -3)

प्रश्न 7. किसी रैखिक समीकरण में चर की उच्चतम घात होगी :

- (A) कोई भी
- (B) 0
- (C) 2
- (D) 1

प्रश्न 8. रैखिक समीकरण के बिन्दु (2, 5) से गुजरने वाली रेखाओं की संख्या होगी :

- (A) 2
- (B) 5
- (C) अनन्त
- (D) 7

प्रश्न 9. यदि $2x + y = 6$ हो, तो इसको सन्तुष्ट करने वाला युग्म है:

- (A) (1, 2)
- (B) (2, 1)
- (C) (2, 2)
- (D) (1, 1)

प्रश्न 10. यदि $\frac{4}{x} + 5y = 7$ तथा $x = \frac{-4}{3}$ हो, तो y का मान होगा-

- (A) $\frac{37}{15}$
- (B) 2
- (C) $\frac{1}{2}$
- (D) $\frac{1}{3}$

प्रश्न 11. मेरी आयु पुत्र की आयु की तिगुनी है। 13 वर्ष बाद मेरी आयु पुत्र की आयु की दुगुनी हो जायेगी। मेरी और मेरे पुत्र की आयु होगी-

- (A) 39 वर्ष, 13 वर्ष
- (B) 45 वर्ष, 15 वर्ष
- (C) 30 वर्ष, 10 वर्ष
- (D) 36 वर्ष, 12 वर्ष।

उत्तरमाला

1. (A)
2. (B)
3. (D)
4. (A)
5. (B)

6. (C)
7. (D)
8. (C)
9. (C)
10. (B)
11. (A)

अतिलघूत्तरीय/लघूत्तीय प्रश्नोत्तर

प्रश्न 1. निम्नलिखित समीकरणों को $ax + by + c = 0$ के रूप में व्यक्त करने पर a , b और c के मान ज्ञात करो:

- (i) $3 + 5y = \pi x$
- (ii) $2x + \frac{3}{2} = 1.4y$

हल:

- (i) समीकरण $3 + 5y = \pi x$
 $\Rightarrow \pi x - 5y - 3 = 0$ की तुलना $ax + by + c = 0$ से करने पर
 $a = \pi$, $b = -5$ और $c = -3$
- (ii) समीकरण $2x + \frac{3}{2} = 1.4y$
 $= 2x - 1.4y + \frac{3}{2} = 0$ की तुलना $ax + by + c = 0$
से करने पर $a = 2$, $b = -1.4$ और $c = \frac{3}{2}$.

प्रश्न 2. निम्नलिखित समीकरणों में से प्रत्येक के दो हल ज्ञात कीजिए:

- (i) $4x + 3y = 12$
- (ii) $2x + 5y = 0$

- हल:** (i) $x = 0$ लेने पर, $4(0) + 3y = 12 \Rightarrow y = 4$
अतः $(0, 4)$ समीकरण का हल है।
 $y = 0$ लेने पर,
 $4x + 3(0) = 12$.
 $\Rightarrow 4x = 12$
 $\Rightarrow x = 3$
अतः $(3, 0)$ समीकरण का हल है।
- (ii) $x = 0$ लेने पर,
 $2(0) + 5y = 0$
 $\Rightarrow y = 0$
अतः $(0, 0)$ समीकरण का हल है।
 $x = 1$ पर, $2 \times 1 + 5y = 0$

$$\Rightarrow 5y = -2$$

$$\Rightarrow y = \frac{-2}{5}$$

अतः $(1, \frac{2}{5})$ समीकरण का हल है।

प्रश्न 3. एक थैले में 2 रुपये तथा 5 रुपये के कुल 15 सिक्के रखे हुए हैं। सिक्कों का कुल मूल्य 45 रुपये हो, तो प्रत्येक प्रकार के सिक्कों की संख्या ज्ञात कीजिए।

हल: माना थैले में 2 रुपये के सिक्कों की संख्या = x

थैले में 5 रुपये के सिक्कों की संख्या = $15 - x$

सिक्कों का कुल मूल्य 45 रुपये है।

अब प्रश्नानुसार, $2 \times x + 5 \times (15 - x) = 45$

हल करने पर, $x = \frac{30}{3} = 10$

2 रुपये के सिक्कों की संख्या = 10 5 रुपये के सिक्कों की संख्या = $15 - x = 15 - 10 = 5$

सिक्के अतः 2 रुपये के सिक्कों की संख्या 10 और 5 रुपये के सिक्कों की संख्या 5 होगी।

प्रश्न 4. समीकरण $2x - 3y + 4 = 0$ का आलेख खींचिए।

हल: दिया गया समीकरण $2x - 3y + 4 = 0$

$$\Rightarrow 2x = 3y - 4 \Rightarrow x = \frac{3y - 4}{2}$$

यदि $y = 0$ हो, तो $x = \frac{3 \times 0 - 4}{2} = -2$

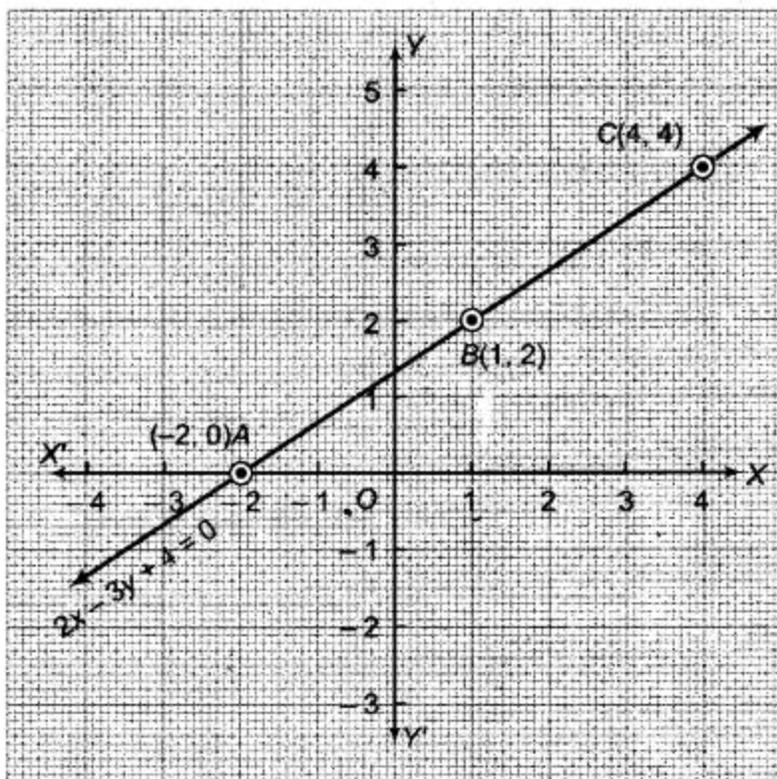
यदि $y = 2$ हो, तो $x = \frac{3 \times 2 - 4}{2} = 1$

यदि $y = 4$ हो तो, $x = \frac{3 \times 4 - 4}{2} = 4$

x तथा y के मानों के लिए सारणी

x	-2	1	4
y	0	2	4

आलेख खींचना : माना पैमाना : X -अक्ष पर 1 सेमी = 1 इकाई, Y -अक्ष पर 1 सेमी = 1 इकाई।



ग्राफ पेपर पर बिन्दुओं A (-2, 0), B (1, 2) तथा C(4, 4) का आलेखन कर मिलाने से $2x - 3y + 4 = 0$ का आलेख AC प्राप्त होता है।

प्रश्न 5. यदि दो अंकों वाली संख्या में इकाई का अंक b तथा दहाई का अंक a हो तो संख्या लिखिए।

हल: संख्या $(10a + b)$

प्रश्न 6. पिता की आयु पुत्र की आयु से 25 वर्ष अधिक है। 10 वर्ष पूर्व पिता की आयु पुत्र की आयु से दुगुनी थी। दोनों की वर्तमान आयु ज्ञात करो।

हल: माना, पिता की आयु x वर्ष तथा पुत्र की आयु y वर्ष है।

प्रश्नानुसारे, $x = y + 25$... (i)

तथा 10 वर्ष पूर्व दोनों की आयु $(x - 10)$ वर्ष तथा $(y - 10)$ वर्ष होगी।

$$(x - 10) = 2(y - 10)$$

$$\Rightarrow x - 10 = 2y - 20$$

$$\Rightarrow x = 2y - 20 + 10$$

$$\Rightarrow x = 2y - 10 \text{ ... (ii)}$$

समी. (i) में (ii) से x का मान रखने पर

$$y + 25 = 2y - 10$$

$$\Rightarrow 25 + 10 = 2y - y$$

$$\Rightarrow y = 35$$

समी. (i) में y का मान रखने पर,

$$x = 35 + 25 = 60$$

पिता की आयु 60 वर्ष तथा पुत्र की आयु 35 वर्ष।

प्रश्न 7. k का मान ज्ञात कीजिए ताकि निम्न समीकरण युग्म का कोई हल नहीं हो-

$$(3k + 1)x + 3y - 2 = 0 \text{ तथा } (k^2 + 1)x + (k - 2)y - 5 = 0$$

हल:

दिए गए समीकरण युग्म का कोई हल नहीं होने के

$$\text{लिए प्रतिबन्ध } \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$$

$$\Rightarrow \frac{3k+1}{k^2+1} = \frac{3}{k-2} \neq \frac{-2}{-5}$$

$$\Rightarrow \frac{3k+1}{k^2+1} = \frac{3}{k-2} \text{ तथा } \frac{3}{k-2} \neq \frac{2}{5}$$

$$\text{अब } \frac{3k+1}{k^2+1} = \frac{3}{k-2} \Rightarrow (3k+1)(k-2) = 3(k^2+1)$$

$$\Rightarrow 3k^2 - 5k - 2 = 3k^2 + 3 \Rightarrow -5k - 2 = 3$$

$k = -1$ के लिए निम्न व्यक्तव्य सही है—

$$\frac{3}{k-2} \neq \frac{2}{5}$$

अतः दिए गए समीकरण का कोई हल नहीं होगा।

यदि $k = -1$ है।

प्रश्न 8. अमित ने दो पेन्सिल तथा 3 चाकलेट 11 रुपये में खरीदीं जबकि सुमित ने एक पेन्सिल और 2 चाकलेट 7 रुपये में खरीदी। इस स्थिति को रैखिक समीकरणों द्वारा प्रदर्शित कीजिए तथा ग्राफ द्वारा एक पेन्सिल तथा एक चाकलेट का मूल्य ज्ञात कीजिए।

हल: माना कि एक पेन्सिल का मूल्य x रु. तथा 1 चाकलेट का मूल्य y रु. है।

अतः 2 पेन्सिल तथा 3 चाकलेट का मूल्य = $(2x + 3y)$ रु.

प्रश्नानुसार, 2 पेन्सिल तथा 3 चाकलेट का मूल्य 11 रु. है। तब $2x + 3y = 11$

1 पेन्सिल तथा 2 चाकलेट का मूल्य = $(x + 2y)$ रु

प्रश्नानुसार, 1 पेन्सिल तथा 2 चाकलेट का मूल्य 7 रु है। तब $x + 2y = 7$

रैखिक समीकरण हैं-

$$2x + 3y = 11 \dots (i) \text{ तथा } x + 2y = 7 \dots (ii)$$

समीकरण (1) से, $3y = 11 - 2x \Rightarrow y = \frac{11 - 2x}{3}$

$x = 1$ रखने पर, $y = \frac{11 - 2 \times 1}{3} = 3$

$x = 4$ रखने पर, $y = \frac{11 - 2 \times 4}{3} = 1$

$x = -2$ रखने पर, $y = \frac{11 - 2 \times (-2)}{3} = 5$

सारणी I—(x तथा y के मानों के लिए)

x	1	4	-2
y	3	1	5

समीकरण (2) से, $2y = 7 - x \Rightarrow y = \frac{7 - x}{2}$

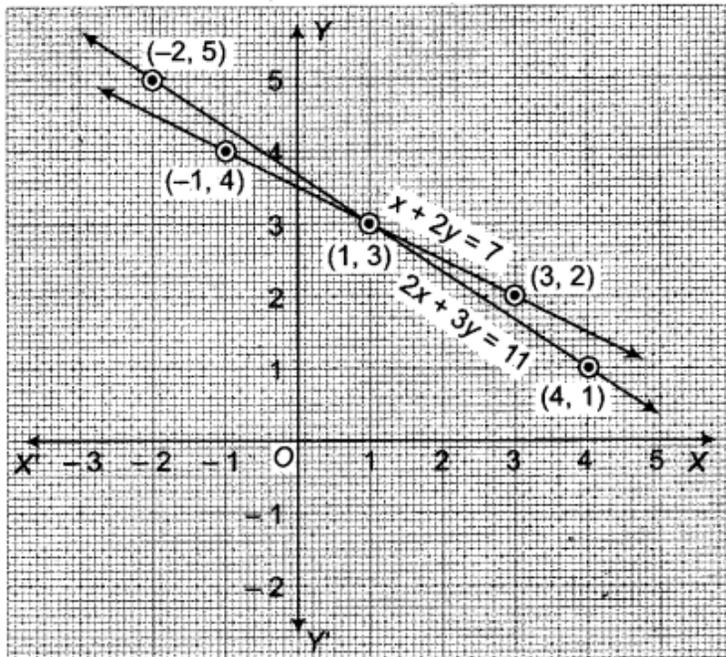
$x = 1$ रखने पर, $y = \frac{7 - 1}{2} = 3$

$x = 3$ रखने पर, $y = \frac{7 - 3}{2} = 2$

$x = -1$ रखने पर, $y = \frac{7 - (-1)}{2} = 4$

सारणी II—(x तथा y के मानों के लिए)

x	1	3	-1
y	3	2	4



बिन्दुओं (1, 3), (4, 1) तथा (-2, 5) को ग्राफ पेपर आलेखित कर मिलाने से $2x + 3y = 11$ का आलेख तथा बिन्दुओं (1, 3), (3, 2) तथा (-1, 4) का आलेखन कर मिलाने से $x + 2y = 7$ का आलेख प्राप्त होता है।

ग्राफ से स्पष्ट है कि दोनों समीकरणों की सरल रेखाएँ बिन्दु (1, 3) पर प्रतिच्छेद करती हैं।

उक्त समीकरणों का अभीष्ट हल : $x = 1, y = 3$

अतः 1 पेन्सिल का मूल्य 1 रु. तथा 1 चाकलेट का मूल्य 3 रु. है।