પ્રકરણ 12

બીજગણિતીય પદાવલિ

12.1 પ્રસ્તાવના :

આપણે ધોરણ-6મપાં પકેટલીક બીજગણિતીય અભિવ્યક્તિ શીખી ગયાં છીએ. જેવી કે $x + 3$, $y - 5$, $4x + 5$, $10y - 5$ વગેરે. આપણે જોયું કે અભિવ્યક્તિ આપણને કોયડાની રચના અને પ્રશ્નના ઉકેલ માટે કેટલી ઉપયોગી છે. કેટલીક અભિવ્યક્તિનાં ઉદાહરણ સરળ સમીકરણના પ્રકરણમાં આપણે જોઈ ગયાં છીએ.

અભિવ્યક્તિ એ બીજગણિતના પાયાનો ખ્યાલ છે. આ પ્રકરણમાં તેને આપણે બીજગણિતીય પદાવલી તરીકે ઓળખીશું. તમે જ્યારે આ પ્રકરણનો અભ્યાસ કરશો ત્યારે તમે શીખશો કે બીજગણિતીય પદાવલિની રચના કેવી રીતે થાય છે, કેવી રીતે તેમાં પ્રક્રિયાઓ થાય છે, કેવી રીતે તેની કિંમત શોધી શકાય છે અને કેવી રીતે તે ઉપયોગી છે.

11.2 પદાવલીની રચના કેવી રીતે થાય છે ?

આપણે સારી રીતે જાણીએ છીએ કે ચલ શું છે ? આપણે x, y, l, m જેવા અક્ષરોનો ઉપયોગ ચલને દર્શાવવા માટે કરીએ છીએ. **ચલ** જુદી-જુદી કિંમતો ધારણ કરી શકે છે. તેની કિંમત ચોક્કસ હોતી નથી. બીજી બાજુ **અચલ**ને ચોક્કસ કિંમત હોય છે. 4, 100, (–17) વગેરે અચલનાં ઉદાહરણ છે.

ચલ અને અચલનાં જોડાણથી બીજગણિતીય પદાવલિ રચાય છે. આ માટે આપણે સરવાળા, બાદબાકી, ગુણાકાર અને ભાગાકાર જેવી ક્રિયાઓનો ઉપયોગ કરીએ છીએ. ખરેખર તો આપણે $4x + 5$, $10y - 20$ જેવી બીજગણિતીય પદાવલિ શીખી ગયાં છીએ. પદાવલિ $4x + 5$ આપણને ચલ x નો અચલ 4 સાથે ગુણાકાર કરી તેમાં 5 ઉમેરવાથી મળે છે. તે જ રીતે $10y - 20$ એ પહેલાં y નો 10 વડે ગુણાકાર કરી તેમાંથી 20 બાદ કરતાં મળે છે.

ઉપરની પદાવલિ ચલ અને અચલના જોડાણથી મેળવી શક્યા છીએ. આપણે એવી પદાવલિ મેળવીશું કે જેમાં ચલનું પોતાની સાથે અથવા બીજા ચલ સાથે જોડાણ થયેલું હોય. નીચેની પદાવલિ કેવી રીતે મેળવી છે તે જુઓ :

$$x^2,\ 2y^2,\ 3x^2 - 5,\ xy,\ 4xy + 7$$

(i) પદાવલિ x^2 એ ચલ xના તેની સાથેના ગુણાકાર વડે મળે છે.

$$x \times x = x^2$$

જેમ $4 \times 4 = 4^2$ લખીએ છીએ તેમ $x \times x = x^2$ લખાય. તેને સામાન્ય રીતે xનો વર્ગ એમ વંચાય છે.

(આગળ આપણે ઘાત અને ઘાતાંકના પ્રકરણમાં જોઈશું કે x^2 ને x ની બે ઘાત એમ વંચાય.)

તે જ રીતે આપણે $x \times x \times x = x^3$ લખીએ છીએ.

સામાન્ય રીતે x^3 ને ''xનો ઘન'' એમ વંચાય છે. x^3ને x ની ત્રણ ઘાત એમ પણ વંચાય.

$x, x^2, x^3, ...$ એ તમામ xમાંથી મળતી બીજગણિતીય પદાવલિ છે.

(ii) અભિવ્યક્તિ $2y^2$ એ y વડે મેળવાય છે : $2y^2 = 2 \times y \times y$

અહીં yનો y સાથે ગુણાકાર કરવાથી y^2 મળે છે અને પછી y^2 નો અચલ 2 સાથે ગુણાકાર કરવામાં આવે છે.

આ પ્રયત્ન કરો

નીચેનાં પદ કેવી રીતે મેળવવામાં આવે છે તે વર્ણવો.

$7xy + 5, x^2y, 4x^2 - 5x$

(iii) $3x^2 - 5$ માં પહેલાં x^2 લઈ તેને 3 વડે ગુણાકાર કરી $3x^2$ મેળવવામાં આવે છે. $3x^2$ માંથી 5 બાદ કરી છેવટે $3x^2 - 5$ મળે છે.

(iv) xy માં આપણે ચલ x નો બીજા ચલ y સાથે ગુણાકાર કરીએ છીએ. આમ, $x \times y = xy$.

(v) $4xy + 7$માં પહેલા xy લઈ તેનો 4 સાથે ગુણાકાર કરી $4xy$ મેળવી તેમાં 7 ઉમેરી $4xy + 7$ પદાવલી મેળવવામાં આવે છે.

12.3 પદાવલિના પદ (Terms of an Expression) :

આગળ આપણે જે અભિવ્યક્તિની રચના શીખી ગયાં તેની પદ્ધતિસરની રચના આપણે જોઈએ. આ માટે આપણને પદાવલિના **પદ** અને તેના **અવયવ**ની સમજણ હોવી જરૂરી છે.

$(4x + 5)$ અભિવ્યક્તિને લઈએ. આ પદાવલિની રચના માટે પહેલાં આપણે 4 અને x નો ગુણાકાર કરી તેમાં 5 ઉમેરીએ છીએ તે જ રીતે પદાવલિ $(3x^2 + 7y)$માં પહેલાં 3, x અને xનો ગુણાકાર કરી $3x^2$ મેળવીએ છીએ તે જ રીતે 7 અને y નો ગુણાકાર કરી $7y$ મેળવીએ છીએ. $3x^2$ અને $7y$ નો સરવાળો કરી આપેલ પદાવલિ મેળવીએ છીએ.

તમે જોયું હશે કે આપણે પદાવલિ જે બનાવી તે આ જ રીતે કરી છે. તેમાંના ભાગોને અલગ રીતે મેળવી અને પછી સરવાળો કરવામાં આવ્યો. પદાવલિના આ ભાગો કે જેને અલગ રીતે મેળવીને સરવાળો કરવામાં આવ્યો તે ભાગોને **પદ** તરીકે ઓળખવામાં આવે છે. પદાવલિ $(4x^2 - 3xy)$ જુઓ. આપણે કહી શકીશું કે તેમાં બે પદ $4x^2$ અને $-3xy$ છે. $4x^2$ એ 4, x અને x નો ગુણાકાર જ્યારે પદ $(-3xy)$ એ (-3), x અને y નો ગુણાકાર છે.

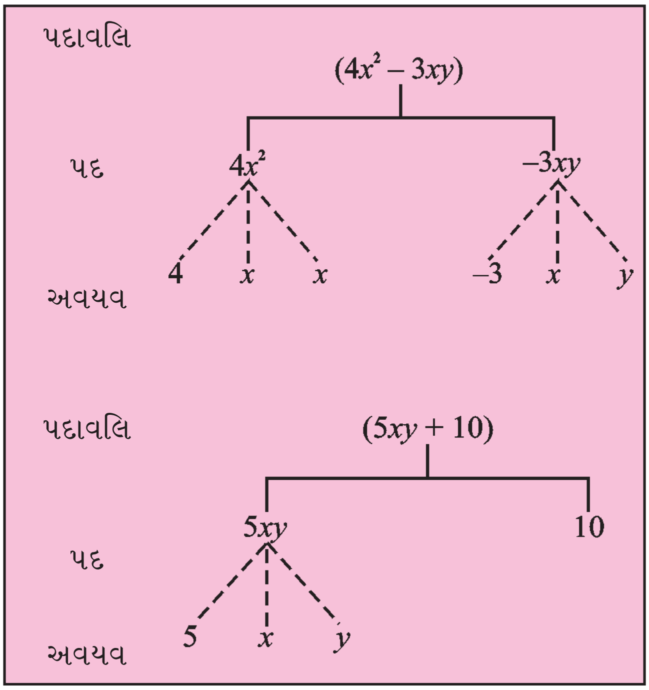
પદાવલિની રચના માટે પદોનો સરવાળો - પદાવલિ $4x + 5$ એ પદ $4x$ અને 5નો સરવાળો કરી મેળવવામાં આવે છે. $4x^2$ અને $(-3xy)$નો સરવાળો કરી $(4x^2 - 3xy)$ મેળવવામાં આવે છે. કારણ કે $4x^2 + (-3xy) = 4x^2 - 3xy$.

> નોંધો કે ઋણ ચિહ્ન(–)નો પદમાં સમાવેશ કરેલ છે. પદાવલિ $4x^2 - 3xy$ માં આપણે પદ $(-3xy)$ લીધું છે $3xy$ નહીં અને તેથી જ આપણે પદ ઉમેરવું કે બાદ કરવું તે કહેવાની જરૂર નથી. પદાવલિની રચનામાં ઉમેરવું એમ કહેવું પૂરતું છે.

પદના અવયવ (Factors of a term)

આપણે જોઈ ગયાં કે પદાવલિ $(4x^2 - 3xy)$ એ બે પદ $4x^2$ અને $-3xy$ની બનેલી છે. પદ $4x^2$ એ 4, x અને x નો ગુણાકાર છે. આપણે કહીશું કે, 4, x અને x એ $4x^2$ ના અવયવ છે. આપેલું પદ એ તેના અવયવોનો ગુણાકાર છે. પદ $-3xy$ એ અવયવ -3, x અને y નો ગુણાકાર છે.

આપણે પદાવલિ અને તેના પદ તથા તે પદોના અવયવને ''ટ્રી ચાર્ટ'' (વૃક્ષ જેવી રચના) વડે સરળ અને સુંદર રીતે દર્શાવી શકીએ. $(4x^2 - 3xy)$ પદાવલિનો ટ્રી ચાર્ટ બાજુની આકૃતિમાં બતાવેલ છે.



નોંધો કે, ટ્રી ચાર્ટમાં આપણે તૂટક રેખાનો ઉપયોગ અવયવ અને રેખાનો ઉપયોગ પદ માટે કરીએ છીએ તેઓ ભેગી ન થાય.

પદાવલિ $5xy + 10$ માટે રેખાકૃતિ જુઓ.

અવયવ એ છે કે જેમનું આગળ અવયવીકરણ થઈ શકતું નથી. તેથી આપણે $5xy$ ને $5 \times xy$ લખી શકતાં નથી. કારણ કે xy નું અગાઉથી જ અવયવીકરણ થયેલ છે. તે જ રીતે, x^3 એ પદ હોય તો તેને $x \times x \times x$ લખાશે, નહિ કે $x^2 \times x$. એ યાદ રાખો કે 1 ને અલગ અવયવ તરીકે લેવામાં આવતો નથી.

સહગુણક (Coefficient)

આપણે શીખી ગયાં કે પદને અવયવના ગુણાકાર વડે કેવી રીતે લખી શકાય. તેમાંનો એક અવયવ સંખ્યાત્મક અને બીજો બીજગણિતીય હશે (એટલે કે ચલને સમાવતા હશે). સંખ્યાત્મક અવયવને સંખ્યાત્મક સહગુણક અથવા પદના **સહગુણક** તરીકે ઓળખવામાં આવે છે. તેને બાકીના પદ માટેનો સહગુણક કહે છે (જે દેખીતી રીતે પદના બીજગણિતીય અવયવોથી મળે છે). આમ, $5xy$ માં 5 એ પદનો સહગુણક છે. તે xy નો પણ સહગુણક છે. $10xyz$ પદમાં 10 એ xyz નો સહગુણક છે. પદ $-7x^2y^2$ માં -7 એ x^2y^2 નો સહગુણક છે.

આ પ્રયત્ન કરો

1. નીચેની પદાવલિઓમાં કયાં પદો છે ? પદો કેવી રીતે બન્યા છે તે દર્શાવો. દરેક પદાવલિ માટે ટ્રી ચાર્ટ બનાવો :

   $8y + 3x^2$, $7mn - 4$, $2x^2y$

2. 4 પદો વાળી ત્રણ પદાવલિઓ લખો.

જ્યારે પદનો સહગુણક +1 હોય ત્યારે તેને સામાન્ય રીતે અવગણવામાં આવે છે. દાખલા તરીકે $1x$ ને x લખવામાં આવે છે. $1x^2y^2$ ને x^2y^2 લખવામાં આવે છે. સહગુણક (-1) એ માત્ર ઋણ ચિહ્ન જ સૂચવે છે. આમ $(-1)x$ ને $-x$ લખવામાં આવે છે. $(-1)x^2y^2$ ને $-x^2y^2$ લખવામાં આવે છે.

આ પ્રયત્ન કરો

નીચેની પદાવલિઓમાં પદોના સહગુણકો ઓળખો :

$4x - 3y$, $a + b + 5$, $2y + 5$, $5xy$

કેટલીક વખતે શબ્દ સહગુણકનો ઉપયોગ ઘણો વ્યાપક રીતે કરવામાં આવે છે. આમ આપણે કહી શકીએ કે $5xy$ પદમાં 5 એ xy નો સહગુણક છે. x એ $5y$ નો સહગુણક છે અને y એ $5x$નો સહગુણક છે. $10xy^2$ માં 10 એ xy^2 નો સહગુણક છે. x એ $10y^2$ નો અને y^2 એ $10x$ નો સહગુણક છે. આમ વધુ વ્યાપક રીતે સહગુણક એ સંખ્યાત્મક અવયવ અથવા બીજગણિતીય અવયવ અથવા બે કે વધુ અવયવનો ગુણાકાર છે. તેને બાકીના અવયવોના ગુણાકારનો સહગુણક કહે છે.

ઉદાહરણ 1 : નીચેની પદાવલિઓમાં અચળ સિવાયના પદો દર્શાવો. તેમના સંખ્યાત્મક સહગુણકો લખો.

$$xy + 4,\ 13 - y^2, 13 - y + 5y^2,\ 4p^2q - 3pq^2 + 5$$

ઉકેલ

ક્રમ	પદાવલિ	પદ (જે અચળ નથી)	સંખ્યાત્મક સહગુણક
(i)	$xy + 4$	xy	1
(ii)	$13 - y^2$	$-y^2$	-1
(iii)	$13 - y + 5y^2$	$-y$ $5y^2$	-1 5
(iv)	$4p^2q - 3pq^2 + 5$	$4p^2q$ $-3pq^2$	4 -3

ઉદાહરણ 2

(a) નીચેની પદાવલિમાં xના કયા સહગુણક છે તે લખો.

$4x - 3y$, $8 - x + y$, $y^2x - y$, $2z - 5xz$

(b) નીચેની પદાવલિમાં y ના સહગુણક કયા છે તે લખો.

$4x - 3y$, $8 + yz$, $yz^2 + 5$, $my + m$

ઉકેલ

(a) દરેક પદાવલિમાં આપણે જોઈ શકીએ છીએ કે x એક અવયવ છે. પદનો બાકીનો ભાગ એ x નો સહગુણક છે.

ક્રમ	પદાવલિ	અવયવ x સાથેનું પદ	x નો સહગુણક
(i)	$4x - 3y$	$4x$	4
(ii)	$8 - x + y$	$-x$	-1
(iii)	$y^2x - y$	y^2x	y^2
(iv)	$2z - 5xz$	$-5xz$	$-5z$

(b) ઉપર પ્રમાણેની સમાન પદ્ધતિથી.

ક્રમ	પદાવલિ	અવયવ y સાથેનું પદ	y નો સહગુણક
(i)	$4x - 3y$	$-3y$	-3
(ii)	$8 + yz$	yz	z
(iii)	$yz^2 + 5$	yz^2	z^2
(iv)	$my + m$	my	m

12.4 સજાતીય અને વિજાતીય પદ (Like and Unlike Terms) :

જે પદમાં સમાન બીજગણિતીય અવયવો હોય, તે પદોને **સજાતીય પદો** કહે છે. જ્યારે પદમાં અસમાન બીજગણિતીય અવયવો હોય તો તેને **વિજાતીય પદ** કહે છે. દાખલા તરીકે પદાવલિ $2xy - 3x + 5xy - 4$ના પદ $2xy$ અને $5xy$ જુઓ. $2xy$ના અવયવ 2, x અને y છે. $5xy$ના અવયવ 5, x અને y છે. આમ

તેમના બીજગણિતીય (એટલે કે તે ચલના બનેલા) અવયવ સરખા છે તેથી તે સજાતીય પદ છે. બીજી બાજુ $2xy$ અને $-3x$માં બીજગણિતીય અવયવ જુદા જુદા છે. તેથી તેઓ વિજાતીય પદ છે. તે જ રીતે પદ $2xy$ અને 4 એ વિજાતીય પદ છે. $-3x$ અને 4 પણ વિજાતીય પદ છે.

આ પ્રયત્ન કરો

નીચે આપેલામાંથી સજાતીય પદોનું જૂથ બનાવો.

$12x, 12, -25x, -25, -25y, 1, x, 12y, y$

12.5 (એકપદી) (Monomials), (દ્વિપદી) (Binomials), (ત્રિપદી) (Trinomials) અને (બહુપદી) (Polynomials)

એવી પદાવલિ કે જેમાં માત્ર એક જ પદ હોય તો તેને એકપદી કહેવાય.

દા.ત. $7xy, -5m, 3z^2$, 4 વગેરે

એવી પદાવલિ કે જેમાં બે વિજાતીય પદો હોય તો તેને **દ્વિપદી** કહે છે. $x + y$, $m - 5$, $mn + 4m$, a^2-b^2 વગેરે. પદાવલિ $10pq$ એ દ્વિપદી નથી. તે એકપદી છે. પદાવલિ $(a + b + 5)$ એ દ્વિપદી નથી કારણ કે તેમાં ત્રણ પદ છે.

એવી પદાવલિ કે જેમાં ત્રણ પદ હોય, તેને **ત્રિપદી** કહે છે. પદાવલિ $x + y + 7$, $ab + a + b$, $3x^2 - 5x + 2$, $m + n + 10$ એ ત્રિપદી છે. પદાવલિ $ab + a + b + 5$ એ તેમ છતાં **ત્રિપદી** નથી કારક કે તેમાં ત્રણ નહિ પણ 4 પદ છે. પદાવલિ $x + y + 5x$ એ ત્રિપદી નથી, કારણ કે x અને $5x$ એ સજાતીય પદ છે.

આ પ્રયત્ન કરો

નીચે આપેલ પદાવલિઓને એકપદી, દ્વિપદી અને ત્રિપદીમાં વર્ગીકૃત કરો.

$a + b$, $ab + a + b$, $ab + a + b - 5$, xy, $xy + 5$, $5x^2 - x + 2$, $4pq - 3q + 5p$ 7, $4m - 7n + 10$, $4má + 7$.

ટૂંકમાં, આપેલ પદાવલિમાં એક અથવા વધુ પદો હોય તો તેને **બહુપદી** કહે છે. આમ એકપદી, દ્વિપદી અને ત્રિપદી એ બહુપદી છે.

ઉદાહરણ 3 કારણ સહિત કહો કે નીચે આપેલાં પદની જોડમાંથી કયાં પદ સજાતીય અને ક્યા પદ વિજાતીય છે.

(i) $7x, 12y$ (ii) $15x, -21x$ (iii) $-4ab, 7ba$ (iv) $3xy, 3x$

(v) $6xy^2, 9x^2y$ (vi) $pq^2, -4pq^2$ (vii) $mn^2, 10\ mm$

ક્રમ	જોડ	અવયવો	બીજગણિતીય અવયવો સરખા છે કે જુદા	સજાતીય કે વિજાતીય	નોંધ
(i)	$7x$ $12y$	$\left.\begin{matrix}7, x\\12, y\end{matrix}\right\}$	જુદા	વિજાતીય	પદોમાં ચલ જુદા જુદા છે.
(ii)	$15x$ $-21x$	$\left.\begin{matrix}15, x\\-21, x\end{matrix}\right\}$	સરખા	સજાતીય	
(iii)	$-4ab$ $7ba$	$\left.\begin{matrix}-4, a, b\\7, a, b\end{matrix}\right\}$	સરખા	સજાતીય	યાદ રાખો કે $ab = ba$

(iv)	$3xy$ $3x$	$\left.\begin{array}{c}3, x, y\\3, x\end{array}\right\}$	જુદા	વિજાતીય	ચલ y માત્ર એક જ પદમાં છે.
(v)	$6xy^2$ $9x^2y$	$\left.\begin{array}{c}6, x, y, y\\9, x, x, y\end{array}\right\}$	જુદા	વિજાતીય	બે પદોમાં ચલ સરખા છે પરંતુ ઘાત સમાન નથી.
(vi)	pq^2 $-4pq^2$	$\left.\begin{array}{c}1, p, q, q\\-4, p, q, q\end{array}\right\}$	સરખા	સજાતીય	નોંધો કે સંખ્યાત્મક અવયવ 1 દેખાતો નથી.
(vii)	mn^2 $10mn$	$\left.\begin{array}{c}m, n, n\\10, m, n\end{array}\right\}$	જુદા	વિજાતીય	n ના ઘાત સરખા નથી.

નીચેનાં પગથિયાં તમને આપેલાં પદ **સજાતીય** છે કે **વિજાતીય** તે નક્કી કરવામાં ઉપયોગી થશે.

(i) સંખ્યાત્મક સહગુણકને અવગણો. પદના બીજગણિતીય ભાગ પર ધ્યાન આપો.

(ii) પદમાંના ચલને તપાસો. તે સરખા જ હોવા જોઈએ.

(iii) હવે, પદમાંના દરેક ચલના ઘાતાંક તપાસો. તે પણ સરખા જ હોવા જોઈએ.

ધ્યાને લો કે સજાતીય પદ નક્કી કરવા માટે બે બાબતોનો કોઈ જ વાંધો નથી : (1) પદના સહગુણક (2) પદમાં ગુણાકાર સ્વરૂપે ગોઠવાયેલા ચલનો ક્રમ.

સ્વાધ્યાય 12.1

1. નીચે આપેલી બાબતોમાં ચલ, અચલ અને ગાણિતિક પ્રક્રિયાઓનો ઉપયોગ કરી બીજગણિતીય પદાવલિઓ બનાવો.

   (i) yમાંથી z બાદ કરો.

   (ii) x અને yના સરવાળાના અડધા.

   (iii) સંખ્યા zનો તે જ સંખ્યા સાથેનો ગુણાકાર

   (iv) p અને qના ગુણાકારનો ચતુર્થ ભાગ

   (v) x અને y બંને સંખ્યાનો વર્ગ અને તેમનો સરવાળો

   (vi) m અને n સંખ્યાના ગુણાકારના ત્રણ ગણામાં 5 ઉમેરતાં

   (vii) y અને zના ગુણાકારને 10માંથી બાદ કરતાં

   (viii) a અને bના ગુણાકારમાંથી તેમનો સરવાળો બાદ કરતાં

2. (i) નીચે આપેલ પદાવલિમાંથી પદ અને તેમના અવયવ ઓળખી કાઢો.
   આ પદ અને અવયવને ટ્રી ચાર્ટ વડે દર્શાવો.

   (a) $x - 3$ (b) $1 + x + x^2$ (c) $y - y^3$

   (d) $5xy^2 + 7x^2y$ (e) $-ab + 2b^2 - 3a^2$

3. નીચે આપેલી પદાવલિમાંથી પદ અને અવયવ ઓળખી કાઢો.

   (a) $-4x + 5$ (b) $-4x + 5y$ (c) $5y + 3y^2$

   (d) $xy + 2x^2y^2$ (e) $pq + q$ (f) $1.2ab - 2.4\,b + 3.6\,a$

(g) $\frac{3}{4}x + \frac{1}{4}$ (e) $0.1\ p^2 + 0.2\ q^2$

3. નીચે આપેલી પદાવલિમાં (અચલ સિવાયના) પદનો સંખ્યાત્મક સહગુણક શોધીને લખો.

(i) $5 - 3t^2$ (ii) $1 + t + t^2 + t^3$ (iii) $x + 2xy + 3y$

(iv) $100m + 1000n$ (v) $-p^2q^2 + 7pq$ (vi) $1.2\ a + 0.8\ b$

(vii) $3.14\ r^2$ (viii) $2\ (l + b)$ (ix) $0.1\ y + 0.01\ y^2$

4. (a) x વાળાં પદો શોધો અને xના સહગુણક લખો.

(i) $y^2x + y$ (ii) $13y^2 - 8yx$ (iii) $x + y + 2$

(iv) $5 + z + zx$ (v) $1 + x + xy$ (vi) $12xy^2 + 25$

(vii) $7x + xy^2$

(b) y^2 વાળું પદ શોધી તેમનો સહગુણક લખો.

(i) $8 - xy^2$ (ii) $5y^2 + 7x$ (iii) $2x^2y - 15\ xy^2 + 7y^2$

5. નીચેનાનું એકપદી, દ્વિપદી અને ત્રિપદીમાં વર્ગીકરણ કરો.

(i) $4y - 7z$ (ii) y^2 (iii) $x + y - xy$ (iv) 100

(v) $ab - a - b$ (vi) $5 - 3t$ (vii) $4p^2q - 4pq^2$ (viii) $7mn$

(ix) $z^2 - 3z + 8$ (x) $a^2 + b^2$ (xi) $z^2 + z$ (xii) $1 + x + x^2$

6. નીચે આપેલી જોડ સજાતીય કે વિજાતીય પદોની છે તે કહો.

(i) 1, 100 (ii) $-7x,\ \frac{5}{2}x$ (iii) $-29x, -29y$

(iv) $14xy, 42yx$ (v) $4m^2p, 4mp^2$ (vi) $12xz, 12x^2z^2$

7. નીચેનામાંથી સજાતીય પદ શોધી કાઢો.

(a) $-xy^2, -4yx^2, 8x^2, 2xy^2, 7y, -11x^2, -100x, -11yx, 20x^2y,$
$-6x^2, y, 2xy, 3x$

(b) $10pq, 7p, 8q, -p^2q^2, -7qp, -100q, -23, 12q^2p^2, -5p^2, 41, 2405p,$
$78qp, 13p^2q, qp^2, 701p^2$

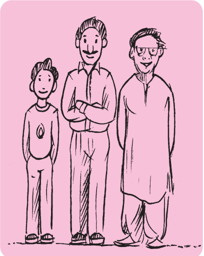
12.6 પદાવલિના સરવાળા બાદબાકી

નીચેની સમસ્યા ઉકેલો :

1. સરિતા પાસે કેટલીક લખોટીઓ છે. અમીના પાસે તેનાથી 10 વધુ છે. અપ્પુએ કહ્યું કે તેની પાસે સરિતા અને અમીના પાસેની લખોટીઓને ભેગી કરીએ તેના કરતાં 3 વધારે લખોટી છે. તમે અપ્પુ પાસે કેટલી લખોટી છે તે કેવી રીતે જાણી શકશો ?

અહીં સરિતા પાસે કેટલી લખોટી છે તે આપેલ નથી, ધારો કે આપણે તે x લઈએ. અમીના પાસે તેના કરતાં 10 લખોટી વધુ છે એટલે કે $x + 10$ છે. અપ્પુએ કહ્યું કે તેની પાસે અમીના અને સરિતા

પાસેની લખોટીઓને ભેગી કરીએ તેના કરતાં 3 લખોટી વધારે છે. તેથી આપણે અમીના પાસેની લખોટીઓ અને સરિતા પાસેની લખોટીઓનો સરવાળો લઈશું અને આ સરવાળામાં 3 ઉમેરીશું. આપણે x, $x + 10$ અને 3નો સરવાળો કરીશું.



2. રામુના પિતાની હાલની ઉંમર રામુની ઉંમર કરતાં 3 ગણી છે. રામુના દાદાની ઉંમર રામુની ઉંમર અને તેના પિતાની ઉંમરના સરવાળા કરતાં 13 વર્ષ વધુ છે. તમે રામુના દાદાની ઉંમર કેવી રીતે શોધશો ?

   અહીં રામુની ઉંમર આપેલ નથી. ચાલો, આપણે તેને y વર્ષ લઈએ. તેથી તેના પિતાની ઉંમર $3y$ થશે. રામુના દાદાની ઉંમર શોધવા આપણે રામુની ઉંમર (y) અને તેના પિતાની ઉંમર ($3y$)નો સરવાળો કરી આ સરવાળામાં 13 ઉમેરવા પડશે. આમ, આપણે y, $3y$ અને 13નો સરવાળો કરવો પડશે.

3. એક બગીચાના ચોરસ પ્લોટમાં ગુલાબ અને ગલગોટાના છોડ રોપવામાં આવ્યા છે. ગલગોટા રોપવામાં આવ્યા છે તે ચોરસ પ્લોટની લંબાઈ, ગુલાબ રોપવામાં આવ્યા છે તે ચોરસ પ્લોટની લંબાઈ કરતાં 3 મીટર વધુ છે. ગુલાબના પ્લોટના ક્ષેત્રફળ કરતાં ગલગોટાના પ્લોટનું ક્ષેત્રફળ કેટલું વધુ હશે ?

   ચાલો ગુલાબના પ્લોટની એક બાજુની લંબાઈ l મીટર લો. તેથી ગલગોટાના પ્લોટની લંબાઈ $(l + 3)$ મીટર હશે. તેને અનુરૂપ ક્ષેત્રફળ l^2 અને $(l + 3)^2$ થશે. $(l + 3)^2$ અને l^2 નો તફાવત ગલગોટાના પ્લોટનું ક્ષેત્રફળ કેટલું વધારે છે તે દર્શાવશે.

ત્રણેય પરિસ્થિતિમાં આપણે બીજગણિતીય પદાવલિનાં સરવાળા અથવા બાદબાકી લીધા. આપણા વાસ્તવિક જીવનમાં ઘણા બધા પ્રશ્નો છે કે જેમાં આપણને પદાવલિ અને તેના પરની ક્રિયાઓની જરૂર પડશે. હવે પછી આપણે બીજગણિતીય પદાવલિના સરવાળા અને બાદબાકી કેવી રીતે કરવામાં આવે છે, તે જોઈશું.

પ્રયત્ન કરો

ઓછામાં ઓછી બે પરિસ્થિતિ વિચારો કે જેમાં તમારે બે બીજગણિતીય પદાવલિના સરવાળા કે બાદબાકી કરવાની જરૂર પડે.

સજાતીય પદોના સરવાળા અને બાદબાકી

સૌથી સરળ પદાવલિ એ એકપદીઓ છે. તે માત્ર એક જ પદની બનેલી છે. સજાતીય પદોનાં સરવાળા કે બાદબાકી કેવી રીતે કરી શકાય તે આપણે શીખીશું.

- ચાલો $3x$ અને $4x$નો સરવાળો કરો. આપણે જાણીએ છીએ કે x એ સંખ્યા છે તેથી $3x$ અને $4x$ પણ સંખ્યા જ છે.

હવે, $3x + 4x = (3 \times x) + (4 \times x)$

$= (3 + 4) \times x$ (વિભાજનના નિયમ મુજબ)

$= 7 \times x = 7x$

અથવા, $3x + 4x = 7x$

અહીં ચલ એ સંખ્યા છે. તેમના માટે વિભાજનનો નિયમ આપણે વાપરી શકીએ.

- હવે $8xy$, $4xy$ અને $2xy$નો સરવાળો કરો.

$$8xy + 4xy + 2xy = (8 \times xy) + (4 \times xy) + (2 \times xy)$$
$$= (8 + 4 + 2) \times xy$$
$$= 14 \times xy = 14xy$$

અથવા, $8xy + 4xy + 2xy = 14xy$

- $7n$માંથી $4n$ બાદ કરો.

$$7n - 4n = (7 \times n) - (4 \times n)$$
$$= (7 - 4) \times n = 3 \times n = 3n$$

અથવા, $7n - 4n = 3n$

- આ જ રીતે $11ab$માંથી $5ab$ બાદ કરો.

$$11ab - 5ab = (11 - 5)\ ab = 6ab$$

આમ, બે કે તેથી વધુ સજાતીય પદોનો સરવાળો એ એવું સજાતીય પદ છે કે જેનો સંખ્યાત્મક સહગુણક આપેલા સજાતીય પદોના સંખ્યાત્મક સહગુણકોના સરવાળા જેટલો છે.

તે જ રીતે, બે સજાતીય પદોનો તફાવત એ એવું સજાતીય પદ છે કે જેનો સંખ્યાત્મક સહગુણક આપેલા સજાતીય પદોના સંખ્યાત્મક સહગુણકોના તફાવત જેટલો છે.

નોંધો કે, સજાતીય પદોનાં સરવાળા કે બાદબાકીની જેમ વિજાતીય પદોનાં સરવાળા કે બાદબાકી કરી શકાતાં નથી. આપણે તેનું ઉદાહરણ આગળ જોઈ જ ગયાં છીએ કે જ્યારે xમાં 5 ઉમેરવાના હોય ત્યારે આપણે $(x + 5)$ લખીએ છીએ. જુઓ કે $(x + 5)$ માંના બંને પદ 5 અને x એમના એમ જ રહેશે. તે જ રીતે વિજાતીય પદો $3xy$ અને 7 નો સરવાળો $3xy + 7$ થશે.

આ જ રીતે $3xy$માંથી 7 બાદ કરતાં પરિણામ $3xy - 7$ આવશે.

સામાન્ય બીજગણિતીય પદાવલિઓનાં સરવાળા-બાદબાકી

ચાલો, કેટલાંક ઉદાહરણ લઈએ.

- $3x + 11$ અને $7x - 5$ નો સરવાળો કરો.

સરવાળો $= 3x + 11 + 7x - 5$

હવે, આપણે જાણીએ છીએ કે $3x$ અને $7x$ સજાતીય પદો છે અને તે જ રીતે 11 અને -5 પણ સજાતીય પદો છે.

વધુમાં $3x + 7x = 10\,x$ અને $11 + (-5) = 6$. આમ આપણે આ દાખલાને સરળ રૂપ આપી શકીએ.

સરવાળો $= 3x + 11 + 7x - 5$

$= 3x + 7x + 11 - 5$ (પદોને ફરીથી ગોઠવતાં)

$= 10x + 6$

તેથી, $3x + 11 + 7x - 5 = 10x + 6$

- $3x + 11 + 8z$ અને $7x - 5$ નો સરવાળો કરો.

સરવાળો $= 3x + 11 + 8z + 7x - 5$

$= 3x + 7x + 11 - 5 + 8z$ (પદોને ફરીથી ગોઠવતાં)

સજાતીય પદોને સાથે ગોઠવીશું અને એકમાત્ર વિજાતીય પદ $8z$ ને ત્યાંના ત્યાં જ રાખીશું.

તેથી સરવાળો $= 10x + 6 + 8z$ થશે.

- $3a - b + 4$ માંથી $a - b$ બાદ કરો.

  તફાવત $= 3a - b + 4 - (a - b)$

  $= 3a - b + 4 - a + b$

  $(a - b)$ને કેવી રીતે કૌંસમાં લીધો છે તે જુઓ અને કૌંસ છોડતી વખતે નિશાનીની કાળજી રાખો. સજાતીય પદો સાથે રહે તે રીતે પદોની ગોઠવણી કરો.

નોંધો કે જેમ $-(5 - 3) = -5 + 3$, તેમ $-(a - b) = -a + b$, સંખ્યાની નિશાનીની જેમ જ બીજગણિતીય પદની નિશાની બદલાય.

તફાવત $= 3a - a + b - b + 4$

$= (3 - 1)a + (1 - 1)\, b + 4$

તફાવત $= 2a + (0)b + 4 = 2a + 4$

અથવા $3a - b + 4 - (a - b) = 2a + 4$

પદાવલિનાં સરવાળા અને બાદબાકીના વધુ મહાવરા માટે કેટલાંક વધુ ઉદાહરણ લઈએ.

ઉદાહરણ 4 સજાતીય પદો ગોઠવીને પદાવલિનું સાદું રૂપ આપો.

$12m^2 - 9m + 5m - 4m^2 - 7m + 10$

ઉકેલ પદોને ગોઠવતાં,

$12m^2 - 4m^2 + 5m - 9m - 7m + 10$

$= (12 - 4)\, m^2 + (5 - 9 - 7)\, m + 10$

$= 8m^2 + (-4 - 7)\, m + 10$

$= 8m^2 + (-11)\, m + 10$

$= 8m^2 - 11m + 10$

પ્રયત્ન કરો

સરવાળા અને બાદબાકી કરો.

(i) $m - n, m + n$

(ii) $mn + 5 - 2, mn + 3$

નોંધ : બાદબાકી એ સરવાળાની ઉલટી પ્રક્રિયા છે. $-10b$ બાદ કરવા અને $+10b$ ઉમેરવા, બંને સમાન છે. $-18a$ બાદ કરવા અને $+18a$ ઉમેરવા, બંને સમાન છે. $24ab$ બાદ કરવા અને $-24ab$ ઉમેરવા બંને સમાન છે. પદાવલિની નીચે બતાવેલાં ચિહ્નોને યોગ્ય રીતે લઈને બાદબાકી કરો.

ઉદાહરણ 5 $30ab + 12b + 14a$ માંથી $24ab - 10b - 18a$ બાદ કરો.

ઉકેલ $30ab + 12b + 14a - (24ab - 10b - 18a)$

$= 30ab + 12b + 14a - 24ab + 10b + 18a$

$= 30ab - 24ab + 12b + 10b + 14a + 18a$

$= 6ab + 22b + 32a$

બીજી રીત, એક પદાવલિની નીચે બીજીને એવી રીતે ગોઠવો કે જેથી બંનેના સજાતીય પદ એકબીજાની નીચે રહે.

$$\begin{array}{rrr} 30ab & +\,12b & +\,14a \\ 24ab & -\,10b & -\,18a \\ - & + & + \\ \hline 6ab & +\,22b & +\,32a \\ \hline \end{array}$$

ઉદાહરણ 6 $2y^2 + 3yz$, $-y^2 - yz - z^2$ અને $yz + 2z^2$, ના સરવાળામાંથી $3y^2 - z^2$ અને $-y^2 + yz + z^2$નો સરવાળો બાદ કરો.

ઉકેલ પહેલાં આપણે $2y^2 + 3yz$, $-y^2 - yz - z^2$ અને $yz + 2z^2$ નો સરવાળો કરો.

$$\begin{array}{rrrrr} 2y^2 & + & 3yz & & \\ -\,y^2 & - & yz & - & z^2 \\ & + & yz & + & 2z^2 \\ \hline y^2 & + & 3yz & + & z^2 \\ \hline \end{array} \qquad (1)$$

હવે આપણે, $3y^2 - z^2$ અને $-y^2 + yz + z^2$ નો સરવાળો કરીએ,

$$\begin{array}{rrrrr} 3y^2 & & & - & z^2 \\ -\,y^2 & + & yz & + & z^2 \\ \hline 2y^2 & + & yz & & \\ \hline \end{array} \qquad (2)$$

હવે, સરવાળા (1) માંથી સરવાળા (2) બાદ કરતાં :

$$\begin{array}{rrrrr} y^2 & + & 3yz & + & z^2 \\ 2y^2 & + & yz & & \\ - & & - & & \\ \hline -y^2 & + & 2yz & + & z^2 \\ \hline \end{array}$$

સ્વાધ્યાય 12.2

1. સજાતીય પદ સાથે ગોઠવી સાદું રૂપ આપો :

   (i) $21b - 32 + 7b - 20b$
   (ii) $-z^2 + 13z^2 - 5z + 7z^3 - 15z$
   (iii) $p - (p - q) - q - (q - p)$
   (iv) $3a - 2b - ab - (a - b + ab) + 3ab + b - a$
   (v) $5x^2y - 5x^2 + 3yx^2 - 3y^2 + x^2 - y^2 + 8xy^2 - 3y^2$
   (vi) $(3y^2 + 5y - 4) - (8y - y^2 - 4)$

2. સરવાળા કરો :
   (i) $3mn, -5mn, 8mn, -4mn$
   (ii) $t - 8tz, 3tz - z, z - t$
   (iii) $-7mn + 5, 12mn + 2, 9mn - 8, -2mn - 3$
   (iv) $a + b - 3, b - a + 3, a - b + 3$
   (v) $14x + 10y - 12xy - 13, 18 - 7x - 10y + 8xy, 4xy$
   (vi) $5m - 7n, 3n - 4m + 2, 2m - 3mn - 5$
   (vii) $4x^2y, -3xy^2, -5xy^2, 5x^2y$

(viii) $3p^2q^2 - 4pq + 5, - 10p^2q^2, 15 + 9pq + 7p^2q^2$

(ix) $ab - 4a, 4b - ab, 4a - 4b$

(x) $x^2 - y^2 - 1, y^2 - 1 - x^2, 1 - x^2 - y^2$

3. બાદબાકી કરો :

(i) y^2 માંથી $-5y^2$

(ii) $-12xy$ માંથી $6xy$

(iii) $(a + b)$ માંથી $(a - b)$

(iv) $b (5 - a)$ માંથી $a(b - 5)$

(v) $4m^2 - 3mn + 8$ માંથી $- m^2 + 5mn$

(vi) $5x - 10$ માંથી $- x^2 + 10x - 5$

(vii) $3ab - 2a^2 - 2b^2$ માંથી $5a^2 - 7ab + 5b^2$

(viii) $5p^2 + 3q^2 - pq$ માંથી $4pq - 5q^2 - 3p^2$

4. (a) $x^2 + xy + y^2$ માં શું ઉમેરવાથી $2x^2 + 3xy$ મેળવી શકાય ?

(b) $2a + 8b + 10$ માંથી શું બાદ કરવાથી $-3a + 7b + 16$ મેળવી શકાય ?

5. $3x^2 - 4y^2 + 5xy + 20$ માંથી શું લઈ લેવાથી $- x^2 - y^2 + 6xy + 20$ મેળવી શકાય.

6. (a) $3x - y + 11$ અને $-y - 11$ ના સરવાળામાંથી $3x - y - 11$ બાદ કરો.

(b) $4 + 3x$ અને $5 - 4x + 2x^2$ ના સરવાળામાંથી $3x^2 - 5x$ અને $-x^2 + 2x + 5$ નો સરવાળો બાદ કરો.

12.7 આપેલી પદાવલિની કિંમત શોધવી

આપણે જાણીએ છીએ કે બીજગણિતીય પદાવલિની કિંમત તે પદાવલિની રચના કરતાં ચલની કિંમત પર આધારિત હોય છે. ઘણી એવી પરિસ્થિતિ હોય છે કે જેમાં આપણને પદાવલિની કિંમત શોધવાની જરૂર પડે છે. જેમ કે જ્યારે આપણને એમ થાય કે આપેલ ચલની ચોક્કસ કિંમત સમીકરણનું સમાધાન કરે છે કે નહિ તે ચકાસવા માટે.

ભૂમિતિના સૂત્રના ઉપયોગમાં અને રોજિંદા ગણિતમાં આપણે પદાવલિની કિંમત શોધી તેનો ઉપયોગ કરીએ છીએ. દા.ત. ચોરસનું ક્ષેત્રફળ l^2 છે. જ્યાં l એ ચોરસની એક બાજુની લંબાઈ છે. જો $l = 5$ સેમી તો ક્ષેત્રફળ 5^2 સેમી^{2} અથવા 25 સેમી^{2} છે. જો બાજુ 10 સેમી હોય તો ક્ષેત્રફળ 10^2 સેમી^{2} અથવા 100 સેમી^{2} થાય. હવે પછીના ભાગમાં આપણે આ પ્રકારનાં વધુ ઉદાહરણો જોઈશું.

ઉદાહરણ 7 $x = 2$ માટે નીચે આપેલી પદાવલિની કિંમત શોધો.

(i) $x + 4$ (ii) $4x - 3$ (iii) $19 - 5x^2$ (iv) $100 - 10x^3$

ઉકેલ : $x = 2$ મૂકતાં,

(i) આપણે $x + 4$ ની કિંમત શોધીએ.

એટલે કે $x + 4 = 2 + 4 = 6$

(ii) $4x - 3$ માં આપણે

$4x - 3 = (4 \times 2) - 3 = 8 - 3 = 5$ મેળવીશું.

(iii) $19 - 5x^2$ માં આપણે

$19 - 5x^2 = 19 - (5 \times 2^2) = 19 - (5 \times 4) = 19 - 20 = (-1)$ મેળવીશું.

(iv) $100 - 10x^3$ માં આપણે

$100 - (10 \times 2^3) = 100 - (10 \times 8)$ (નોંધ : $2^3 = 8$ થાય.)

$= 100 - 80 = 20$

ઉદાહરણ 8 $n = -2$ માટે નીચેની પદાવલિઓની કિંમત શોધો.

(i) $5n - 2$ (ii) $5n^2 + 5n - 2$ (iii) $n^3 + 5n^2 + 5n - 2$

ઉકેલ

(i) $n = -2$ કિંમત $5n - 2$ માં મૂકતાં

$5(-2) - 2 = -10 - 2 = -12$

(ii) $5n^2 + 5n - 2$ માં

$n = -2$, માટે $5n - 2 = -12$

અને $5n^2 = 5 \times (-2)^2 = 5 \times 4 = 20$ [જ્યાં $(-2)^2 = 4$]

સાથે લખતાં,

$5n^2 + 5n - 2 = 20 - 12 = 8$

(iii) હવે $n = -2$ માટે

$5n^2 + 5n - 2 = 8$ અને

$n^3 = (-2)^3 = (-2) \times (-2) \times (-2) = (-8)$

હવે, સાથે લખતાં,

$n^3 + 5n^2 + 5n - 2 = -8 + 8 = 0$

હવે, આપણે બે ચલની પદાવલિ જોઈશું. ઉદારણ તરીકે, $x + y$ અને xy બે ચલ ધરાવતી પદાવલિની સંખ્યાત્મક કિંમત શોધીએ. અહીં આપણને બંને ચલની કિંમતની જરૂર પડશે. જેમ કે, $x = 3$ અને $y = 5$ માટે $(x + y)$ ની કિંમત $3 + 5 = 8$ થશે.

ઉદાહરણ 9 $a = 3$ અને $b = 2$ માટે નીચેની પદાવલિની કિંમત શોધો.

(i) $a + b$ (ii) $7a - 4b$ (iii) $a^2 + 2ab + b^2$ (iv) $a^3 - b^3$

ઉકેલ $a = 3$ અને $b = 2$ મૂકતાં

(i) $a + b = 3 + 2 = 5$

(ii) $7a - 4b$ માટે

$7a - 4b = 7 \times 3 - 4 \times 2 = 21 - 8 = 13$

(iii) $a^2 + 2ab + b^2$ માટે

$a^2 + 2ab + b^2 = 3^2 + 2 \times 3 \times 2 + 2^2 = 9 + 2 \times 6 + 4 = 9 + 12 + 4 = 25$

(iv) $a^3 - b^3$ માટે

$a^3 - b^3 = 3^3 - 2^3 = 3 \times 3 \times 3 - 2 \times 2 \times 2 = 9 \times 3 - 4 \times 2 = 27 - 8 = 19$

સ્વાધ્યાય 12.3

1. જો $m = 2$ હોય તો નીચેનાં પદોની કિંમત શોધો :

   (i) $m - 2$ (ii) $3m - 5$ (iii) $9 - 5m$

   (iv) $3m^2 - 2m - 7$ (v) $\frac{5m}{2} - 4$

2. જો $p = -2$ હોય, તો નીચેનાની કિંમત શોધો :

   (i) $4p + 7$ (ii) $-3p^2 + 4p + 7$ (iii) $-2p^3 - 3p^2 + 4p + 7$

3. $x = -1$ માટે નીચેની પદાવલિની કિંમત શોધો.

   (i) $2x - 7$ (ii) $-x + 2$ (iii) $x^2 + 2x + 1$

   (iv) $2x^2 - x - 2$

4. જો $a = 2$ અને $b = -2$ હોય તો નીચેનાંની કિંમત શોધો :

   (i) $a^2 + b^2$ (ii) $a^2 + ab + b^2$ (iii) $a^2 - b^2$

5. $a = 0$, $b = -1$ માટે આપેલ પદાવલિની કિંમત શોધો.

   (i) $2a + 2b$ (ii) $2a^2 + b^2 + 1$ (iii) $2a^2b + 2ab^2 + ab$

   (iv) $a^2 + ab + 2$

6. આપેલી પદાવલિઓનું સાદું રૂપ આપી $x = 2$ માટે કિંમત શોધો.

   (i) $x + 7 + 4(x - 5)$ (ii) $3(x + 2) + 5x - 7$

   (iii) $6x + 5(x - 2)$ (iv) $4(2x - 1) + 3x + 11$

7. આપેલી પદાવલિઓનું સાદું રૂપ આપો અને $x = 3$, $a = -1$ અને $b = -2$ લઈ કિંમત શોધો.

   (i) $3x - 5 - x + 9$ (ii) $2 - 8x + 4x + 4$

   (iii) $3a + 5 - 8a + 1$ (iv) $10 - 3b - 4 - 5b$

   (v) $2a - 2b - 4 - 5 + a$

8. (i) જો $z = 10$ હોય તો, $z^3 - 3(z - 10)$ની કિંમત શોધો.

   (ii) $p = -10$ હોય તો, $p^2 - 2p - 100$ની કિંમત શોધો.

9. $x = 0$ માટે $2x^2 + x - a$ ની કિંમત 5 હોય તો aની કિંમત શોધો.

10. આપેલી પદાવલિનું સાદુંરૂપ આપી $a = 5$ અને $b = -3$ માટે કિંમત શોધો.

    $2(a^2 + ab) + 3 - ab$

12.8 બીજગણિતીય પદાવલિનો ઉપયોગ - સૂત્રો અને નિયમો

બીજગણિતીય પદાવલિનો ઉપયોગ કરીને ગણિતમાં સૂત્રો અને નિયમોને સંક્ષિપ્તમાં સામાન્ય રીતે કેવી રીતે લખી શકાય તે આપણે અગાઉ શીખી ગયાં. આપણે કેટલાંક ઉદાહરણો જોઈએ.

- **પરિમિતિનાં સૂત્રો**

1. સમબાજુ ત્રિકોણની પરિમિતિ = 3 $\times$ તેની એક બાજુની લંબાઈ

   જો આપણે સમબાજુ ત્રિકોણની બાજુની લંબાઈને l તરીકે ઓળખીએ તો

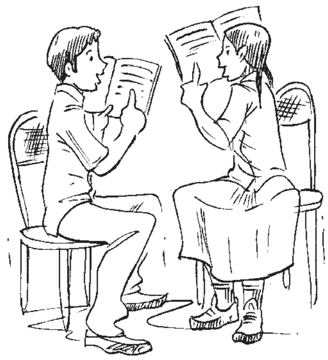
   સમબાજુ ત્રિકોણની પરિમિતિ = $3l$ થશે.

2. તે જ રીતે **ચોરસની પરિમિતિ** = $4l$

   જ્યાં l એ ચોરસની બાજુની લંબાઈ છે.

3. નિયમિત **પંચકોણની પરિમિતિ** = $5l$

   જ્યાં l એ પંચકોણની બાજુની લંબાઈ છે.



- **ક્ષેત્રફળનાં સૂત્રો**

1. જો આપણે ચોરસની બાજુની લંબાઈને l લઈશું તો તે ચોરસનું ક્ષેત્રફળ l^2 થશે.
2. જો આપણે લંબચોરસની બાજુની લંબાઈને l અને તેની પહોળાઈને b કરીએ તો લંબચોરસનું ક્ષેત્રફળ $l \times b = lb$ થશે.
3. તે જ રીતે ત્રિકોણના પાયાને b અને ઊંચાઈને h લેવામાં આવે તો ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ = $\frac{b \times h}{2} = \frac{bh}{2}$ થશે.

આપેલ રાશિ માટે બીજગણિતીય પદાવલિનાં સૂત્ર જાણતા હોઈએ તો જરૂર પ્રમાણે અન્ય રાશિની કિંમત જાણી શકાય. જેમ કે, ચોરસની લંબાઈ 3 સેમી છે. ચોરસની પરિમિતિની અભિવ્યક્તિમાં $l = 3$ સેમી કિંમત મૂકી પરિમિતિ મેળવી શકાય એટલે કે $4l$.

આપેલા ચોરસની પરિમિતિ = (4 $\times$ 3) સેમી = 12 સેમી

તે જ રીતે ચોરસના ક્ષેત્રફળની અભિવ્યક્તિમાં $l = 3$ સેમી કિંમત મૂકી ચોરસનું ક્ષેત્રફળ મેળવી શકીએ. તે l^2 છે. આપેલા ચોરસનું ક્ષેત્રફળ = $(3)^2$ સેમી^{2} = 9 સેમી^{2}

- **આંકડાની પેટર્નના નિયમો :**

નીચેનાં વિધાનો વાંચો.

1. જો કોઈ પ્રાકૃતિક સંખ્યાને n કહીએ તો તેની અનુગામી સંખ્યા $(n + 1)$ થશે. આપણે કોઈ પણ પ્રાકૃતિક સંખ્યા માટે તે ચકાસી શકીએ. જેમ કે, જો $n = 10$ તો તેની અનુગામી સંખ્યા $n + 1 = 11$ છે. જે આપણે જાણીએ છીએ.

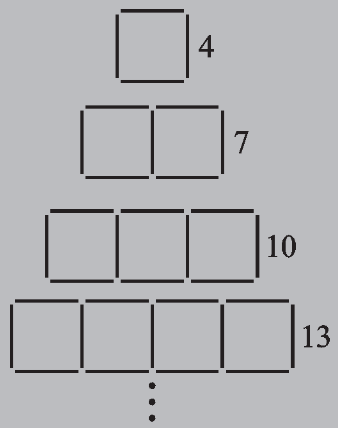
2. જો પ્રાકૃતિક સંખ્યાને n કહીએ તો $2n$ એ બેકી સંખ્યા અને $2n + 1$ એ એકી સંખ્યા થશે. ચાલો કોઈ પણ સંખ્યા માટે ચકાસીએ. 15 લઈએ તો $2n = 2 \times n = 2 \times 15 = 30$ જે ખરેખર બેકી સંખ્યા છે અને $2n + 1 = 2 \times 15 + 1 = 30 + 1 = 31$ જે ખરેખર એકી સંખ્યા છે.

જાતે કરો

સરખી લંબાઈના રેખાખંડો લો જેવાં કે, દિવાસળીની સળીઓ, દાંતખોતરણી, અથવા સ્ટ્રોને કાપીને બનાવેલા સરખી લંબાઈના નાના ટુકડા. આપેલી આકૃતિમાં દર્શાવ્યા પ્રમાણે યોગ્ય પેટર્નમાં જોડો.

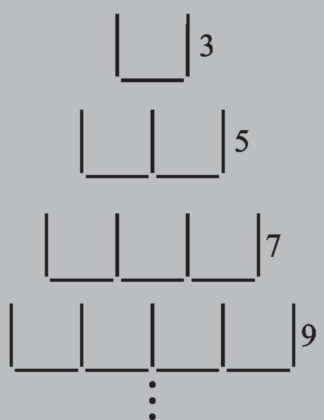
1. આકૃતિ 12.1માંની પેટર્ન જુઓ. અહીં □ આકારનું પુનરાવર્તન દર્શાવ્યું છે. જે ચાર રેખાખંડનો બનેલો છે. જો તમારે એક આકાર બનાવવો હોય તો 4 ટુકડાની જરૂર પડશે. બે આકાર માટે 7, ત્રણ આકાર માટે 10 અને તે જ રીતે જો આકારોની સંખ્યા n હોય તો આ n આકારો માટે ટુકડાની સંખ્યા $(3n + 1)$ જરૂર પડશે.

   તમે $n = 1, 2, 3, 4, \ldots 10 \ldots$ વગેરે લઈને ચકાસી શકશો. જેમ કે જો આપણે ત્રીજા પ્રકારની રચના કરવી હોય તો જરૂરી રેખાખંડની સંખ્યા $3 \times 3 + 1 = 9 + 1 = 10$ જોઈશે. જે બાજુની આકૃતિમાં દર્શાવેલ છે.

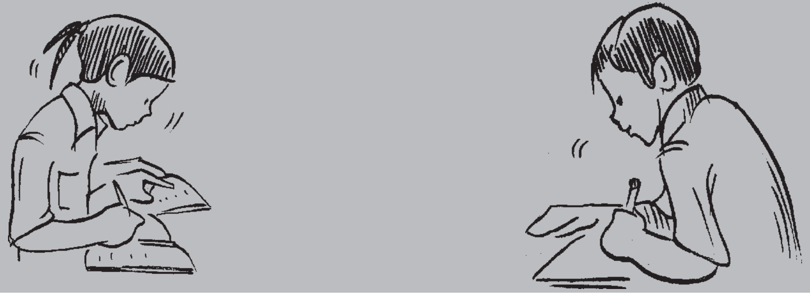


આકૃતિ 12.1

2. આકૃતિ 12.2 માંની તરાહ જુઓ. અહીં ⊔ આકારનું પુનરાવર્તન છે. અહીં 1, 2, 3, 4, ... આકારને અનુરૂપ જરૂરી ટુકડાઓની સંખ્યા અનુક્રમે 3, 5, 7, 9, ... છે. જો n આકારની રચના કરવી હોય તો જરૂરી ટુકડાઓની સંખ્યા પદાવલિ $(2n + 1)$ વડે દર્શાવી શકાય. n ની કોઈ પણ કિંમત લઈ પદાવલિ સાચી છે કે નહીં તે ચકાસો. જો $n = 4$ લઈએ તો $(2n + 1) = (2 \times 4) + 1 = 9$, જે ખરેખર 4 આકારની રચના માટે જરૂરી રેખાખંડોની સંખ્યા છે.

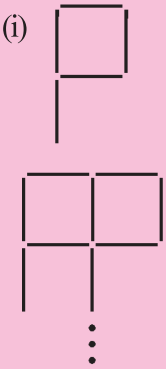


આકૃતિ 12.2



પ્રયત્ન કરો

(i)



5

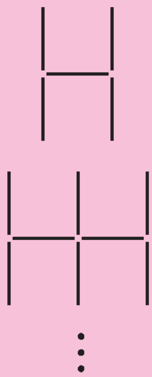
9

.
.
.

$(4n + 1)$

(મૂળાક્ષર P)

(ii)



5

8

.
.
.

$(3n + 2)$

(મૂળાક્ષર H)

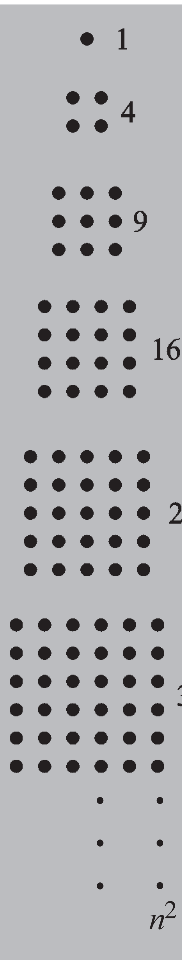
(આકૃતિ બનાવવા માટે કેટલા ટુકડાની જરૂર પડે છે તે જમણી બાજુમાં દર્શાવેલ છે. n આકાર બનાવવા માટે કેટલા ટુકડાની જરૂર પડશે તેની પદાવલિ પણ આપેલ છે.)

આગળ વધો અને આ રીતની વધુ પેટર્ન શોધો.

જાતે કરો

નીચે પ્રમાણે ટપકાં (ડોટ)ની પેટર્ન બનાવો. જો તમે ગ્રાફપેપર કે ડોટપેપરનો ઉપયોગ કરશો તો તે સરળતાથી બનાવી શકશો.

અવલોકન કરો કે ચોરસ આકારમાં ટપકાં (ડોટ) કેવી રીતે ગોઠવાયેલા છે. જો કોઈ ચોક્કસ આકૃતિમાં હાર અને સ્તંભમાં ગોઠવાયેલા ડોટનો ચલ n લેવામાં આવે, તો આકૃતિમાં ડોટની સંખ્યા $n \times n = n^2$ થશે. જેમ કે $n = 4$ લઈએ તો આકૃતિમાં ડોટની સંખ્યા હાર કે સ્તંભમાં 4 પ્રમાણે લેતાં $4 \times 4 = 16$ થશે. જે ખરેખર આકૃતિમાં જોઈ શકાય છે. તમે nની બીજી કોઈ કિંમત માટે ચકાસો. પ્રાચીન ગ્રીક ગણિતશાસ્ત્રીઓ સંખ્યાઓ 1, 4, 9, 16, 25. ... ને 'સ્ક્વેર સંખ્યા' (વર્ગ સંખ્યા) તરીકે ઓળખતા.



● સંખ્યાની કેટલીક વધુ પેટર્ન

ચાલો, અંકોની બીજી પેટર્ન જુઓ. આ વખતે કોઈ પણ ચિત્રની મદદ વગર કરીએ.

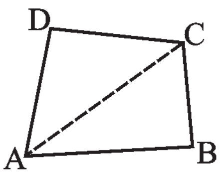
$$3, 6, 9, 12 \ldots, 3n, \ldots$$

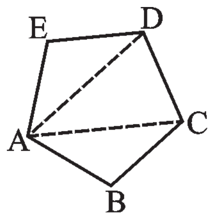
આ નંબરો એવા છે કે જે 3થી શરૂ થાય છે અને 3ના ગુણકમાં ચઢતા ક્રમમાં ગોઠવાયેલ છે. nના સ્થાને ક્યું પદ હશે તે પદાવલિ $3n$ વડે જાણી શકાશે. તમે 10મા સ્થાને રહેલું પદ સરળતાથી (કે જે $3 \times 10 = 30$) શોધી શકશો. તે જ રીતે 100મા સ્થાને પદ (કે જે $3 \times 100 = 300$) મેળવી શકશો.

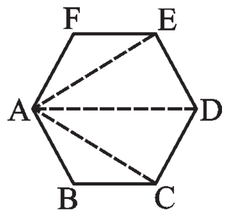
● ભૂમિતિમાં પેટર્ન

ચતુષ્કોણનાં એક શિરોબિંદુમાંથી કેટલા વિકર્ણો દોરી શકાય ? તપાસો, તે એક છે.

પંચકોણના એક શિરોબિંદુમાંથી ? તપાસો, તે બે છે.







ષટ્કોણના શિરોબિંદુમાંથી ? તપાસો, તે ત્રણ છે.

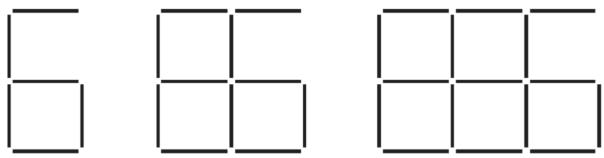
n બાજુઓ ધરાવતા બહુકોણના એક શિરોબિંદુમાંથી $(n - 3)$ સંખ્યામાં વિકર્ણો દોરી શકાય. સપ્તકોણ (સાત બાજુ) અને અષ્ટકોણ (આઠ બાજુ) માટે આકૃતિ દોરીને તે ચકાસો. ત્રિકોણ (3 બાજુ) માટે કેટલા હશે ? અવલોકન કરો કે કોઈ પણ શિરોબિંદુમાંથી દોરવામાં આવેલ વિકર્ણો બહુકોણને એકબીજા પર ઓવરલેપીંગ ન કરતા ત્રિકોણોમાં વિભાજીત કરે છે.

અહીં બનતા ત્રિકોણની સંખ્યા શિરોબિંદુમાંથી રચાતા વિકર્ણોની સંખ્યા કરતા એક વધુ હોય છે.

સ્વાધ્યાય 12.4

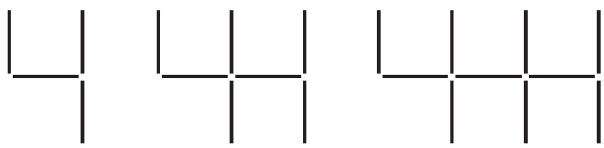
1. એકસરખા રેખાખંડોમાંથી બનાવેલ આંકડાની પેટર્નનું અવલોકન કરો. આ પ્રકારના વિભાજિત અંકો તમે ઈલેક્ટ્રોનિક્સ ઘડિયાળ કે કેલ્ક્યુલેટરમાં જોયા હશે.

(a)



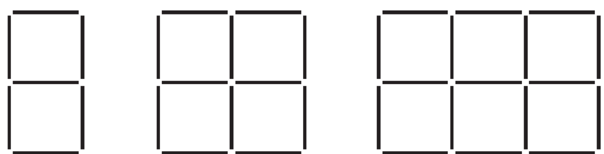
6   11   16   ... 21....   ... $(5n + 1)$...

(b)



4   7   10   ... 13....   ... $(3n + 1)$...

(c)



7   12   17   ... 22.... $(3n + 1)$ ... $(5n + 2)$...

જો રચવામાં આવતાં આંકડાની સંખ્યા n લેવામાં આવે તો n અંક રચવા માટેના ટુકડાની સંખ્યા દરેક પેટર્નની જમણી બાજુ બીજગણિતીય પદાવલિ વડે દર્શાવવામાં આવેલ છે.

6, 4, 8. ની જેમ 5, 10 અને 100 અંકો રચવા માટે કેટલા ટુકડાની જરૂર પડશે ?

2. આપેલ બીજગણિતીય પદાવલિનો ઉપયોગ કરી નંબર પેટર્નથી કોષ્ટક પૂર્ણ કરો.

ક્રમ	પદાવલિ	પદ									
		1^{st}	2^{nd}	3^{rd}	4^{th}	5^{th}	...	10^{th}	...	100^{th}	...
(i)	$2n-1$	1	3	5	7	9	-	19	-	-	-
(ii)	$3n+2$	5	8	11	14	-	-	-	-	-	-
(iii)	$4n+1$	5	9	13	17	-	-	-	-	-	-
(iv)	$7n+20$	27	34	41	48	-	-	-	-	-	-
(v)	n^2+1	2	5	10	17	-	-	-	-	10,001	-

આપણે શી ચર્ચા કરી ?

1. બીજગણિતીય પદાવલિ ચલ અને અચલની બનેલી હોય છે. આપણે **સરવાળા**, **બાદબાકી**, **ગુણાકાર** અને **ભાગાકાર** જેવી ક્રિયાઓ પદાવલિના ચલ અને અચલ પર કરીએ છીએ. ઉદાહરણ તરીકે પદાવલિના $4xy + 7$ એ ચલ x અને y તથા અચલ પદ 4 અને 7ની બનેલી છે. અચલ 4 અને ચલ x અને yનો ગુણાકાર કરી $4xy$ મેળવવામાં આવે છે. જેમાં 7 ઉમેરી આ પદાવલિ બનાવવામાં આવે છે.
2. પદાવલિ એ **પદ**ની બનેલી હોય છે. પદોના **સરવાળા**થી પદાવલિ બને છે. દાખલા તરીકે પદો $4xy$ અને 7નો સરવાળો પદાવલિ $4xy + 7$ બનાવે છે.
3. પદ એ **અવયવોનો ગુણાકાર** છે. પદાવલિ $4xy + 7$ માં $4xy$ એ અવયવ x, y અને 4નો ગુણાકાર છે. અવયવ જો ચલનો હોય તો તેને **બીજગણિતીય અવયવ** કહે છે.
4. **સહગુણક** એ પદમાં આંકડાકીય અવયવ છે. કેટલીક વખત પદમાંના કોઈ પણ અવયવને તે પદના બાકીના ભાગનો સહગુણક કહે છે.
5. પદાવલિમાં એક અથવા વધુ પદ હોય તો તેને **બહુપદી** કહે છે. ખાસ કરીને જો એક જ પદ પદાવલિમાં હોય તો તેને **એકપદી**, પદાવલિમાં બે પદ હોય તો **દ્વિપદી** અને ત્રણ પદ હોય તો તેને ત્રિપદી કહે છે.
6. પદો કે જેમાં સરખા બીજગણિતીય અવયવો હોય તો તે **સજાતીય પદો** છે. પદો કે જેમાં ભિન્ન બીજગણિતીય અવયવો હોય તો તે **વિજાતીય પદો** છે. આમ, પદો $4xy$ અને $-3xy$ સજાતીય પદો છે પરંતુ પદો $4xy$ અને$-3x$ સજાતીય પદો નથી.
7. **બે સજાતીય પદોનો સરવાળો** (અથવા **તફાવત**) એ એવું સજાતીય પદ છે, કે જેનો સહગુણક આ બંને સજાતીય પદોના **સહગુણકો**ના સરવાળા (તથા **તફાવત**) જેટલો હોય છે. જેમકે,
   $8xy - 3xy = (8-3)xy$, એટલે કે $5xy$
8. જ્યારે આપણે બે પદાવલિનો સરવાળો કરીએ છીએ ત્યારે **સજાતીય પદો**નો સરવાળો ઉપર આપ્યા પ્રમાણે કરવામાં આવે છે અને **વિજાતીય પદોને જ્યાં હોય ત્યાં છોડી દેવામાં આવે છે.** આમ $4x^2 + 5x$ અને$2x + 3$ એ $4x^2 + 7x + 3$ થાય. સજાતીય પદ $5x$ અને $2x$નો સરવાળો $7x$ થાય, જ્યારે $4x^2$ અને 3 જ્યાં હોય ત્યાં છોડી દેવામાં આવે છે.

9. એવી સ્થિતિં, જેમ કે સમીકરણ ઉકેલવું અને સૂત્રનો ઉપયોગ કરવામાં આપણે પદાવલિની કિંમત શોધીએ છીએ. પદાવલિની કિંમત પદાવલિની રચના કરતા ચલની કિંમત પર આધાર રાખે છે. આમ $7x - 3$ ની કિંમત $x = 5$ માટે 32 છે, જ્યાં $7(5) - 3 = 35 - 3 = 32$.

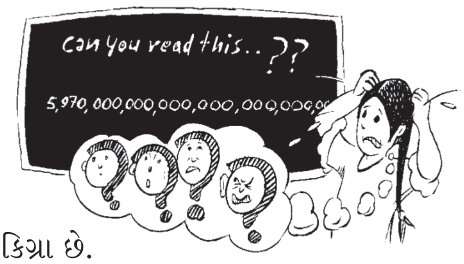
10. સંક્ષિપ્ત અને સામાન્ય સ્વરૂપે ગણિતમાં લખવામાં આવતાં નિયમો અને સૂત્રો માટે બીજગણિતીય પદાવલિનો ઉપયોગ કરવામાં આવે છે. આમ, લંબચોરસનું ક્ષેત્રફળ $= lb$, જ્યાં l એ લંબાઈ અને b એ પહોળાઈ છે.

પદાવલિમાં સામાન્ય રીતે (n^{th}) પદોની નંબર પેટર્ન (અથવા ક્રમ) એ nમાં પદાવલિ છે. આમ, 11, 21, 31, 41, ... પેટર્નના nમાં પદની પદાવલિ $(10n + 1)$ છે.

પ્રકરણ 13

ઘાત અને ઘાતાંક

13.1 પ્રસ્તાવના :



શું તમે જાણો છો કે પૃથ્વીનું દળ કેટલું છે ? હા, તે
5, 970, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000 કિગ્રા છે.
તમે આ સંખ્યા વાંચી શકશો ?
યુરેનસનું દળ 86, 800, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000 કિગ્રા છે.
કોનું દળ વધુ છે પૃથ્વીનું કે યુરેનસનું ?
સૂર્ય અને શનિ વચ્ચેનું અંતર 1, 433, 500, 000, 000 મીટર તેમજ સૂર્ય અને યુરેનસ વચ્ચેનું અંતર 1, 439, 000, 000, 000 મીટર છે. શું તમે આ સંખ્યા વાંચી શકશો ? કયું અંતર ઓછું છે ?
આ એટલી મોટી સંખ્યા છે કે જે વાંચવા, સમજવા અને સરખામણી કરવામાં મુશ્કેલ છે. આ સંખ્યાને સરળતાથી વાંચવા, સમજવા અને તેમની સરખામણી કરવા માટે આપણે ઘાતાંકનો ઉપયોગ કરીશું. આ પ્રકરણમાં આપણે ઘાતાંક અને તેનો ઉપયોગ કેવી રીતે કરવામાં આવે છે એ શીખીશું.

13.2 ઘાતાંક (Exponents) :

આપણે મોટી સંખ્યાને ઘાતાંકનો ઉપયોગ કરી ટૂકમાં નીચે પ્રમાણે લખી શકીએ.

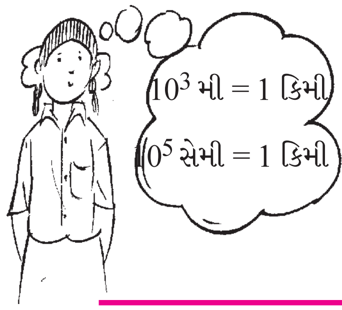
જુઓ $10{,}000 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^4$

ગુણાકાર $10 \times 10 \times 10 \times 10$ માટેનો ટૂંકો સંકેત 10^4 છે. અહીં '10'ને **આધાર** અને '4'ને **ઘાતાંક** કહે છે. સંખ્યા 10^4 ને 10 ની 4 ઘાત એટલે કે દસની ચાર ઘાત એમ વાંચવામાં આવે છે. 10^4 ને 10000 નું ઘાતાંકીય સ્વરૂપ કહે છે.

તે જ રીતે આપણે 1000 ને 10ના ઘાતાંક સ્વરૂપે લઈ શકીએ.

નોંધો કે,

$1000 = 10 \times 10 \times 10 = 10^3$



ફરીથી અહીં 10^3 એ, 1000 નું ઘાતાંકીય સ્વરૂપ છે.

તે જ રીતે, $1{,}00{,}000 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^5$

10^5 એ 1,00,000 નું ઘાતાંકીય સ્વરૂપ છે. 10^3 ના કિસ્સામાં ઘાતાંક 3 અને 10^5 ના કિસ્સામાં ઘાતાંક 5 છે.

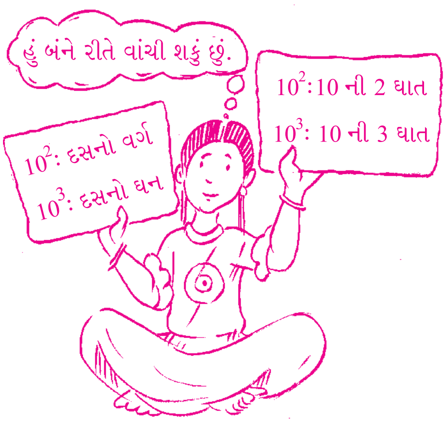
આપણે સંખ્યાઓ જેવી કે 10, 100 અને 1000 વગેરેનો ઉપયોગ કર્યો. આપણે સંખ્યાઓને દર્શાવ્યા મુજબ વિસ્તૃત સ્વરૂપે લખી શકીએ છીએ,

ઉદાહરણ તરીકે, $47561 = 4 \times 10000 + 7 \times 1000 + 5 \times 100 + 6 \times 10 + 1$.

આને આમ પણ લખી શકાય

$$4 \times 10^4 + 7 \times 10^3 + 5 \times 10^2 + 6 \times 10 + 1$$

આ જ રીતે, સંખ્યાઓ 172, 5642 અને 6374ને લખવા પ્રયત્ન કરો. ઉપરનાં બધાં જ ઉદાહરણમાં આપણે જોયું કે સંખ્યાઓનો આધાર 10 છે. જો કે આધાર બીજી કોઈ સંખ્યા પણ હોઈ શકે.



જેમ કે, $81 = 3 \times 3 \times 3 \times 3$ ને $81 = 3^4$ એમ લખી શકાય.

અહીં 3 એ આધાર છે અને 4 એ ઘાતાંક છે.

કેટલાક ઘાતાંકને ચોક્કસ નામ હોય છે. જેમ કે, 10^2, જેને 10ની બે ઘાત કહે છે. પણ તેને '10નો વર્ગ' એમ પણ કહેવાય. 10^3, જેને 10નો ત્રણ ઘાત કહે છે. પણ તેને 10નો ઘન પણ કહેવાય. 5^3(5નો ઘન)નો અર્થ શું થાય તે કહી શકશો ?

$5^3 = 5 \times 5 \times 5 = 125$

તેથી, આપણે કહી શકીશું કે 125 એ 5નો 3 ઘાત છે.

5^3નો આધાર અને ઘાતાંક કયો છે ?

તે જ રીતે $2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$ જે 2નો પંચ ઘાત છે.

2^5 માં 2 એ આધાર અને 5 એ ઘાતાંક છે.

તેવી જ રીતે, $243 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^5$

$64 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^6$

$625 = 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5^4$

પ્રયત્ન કરો

આ પ્રકારનાં વધુ પાંચ ઉદાહરણ શોધો જેમાં સંખ્યાને ઘાતાંકીય સ્વરૂપે રજૂ કરી શકાય. દરેક કિસ્સામાં આધાર અને ઘાતાંક પણ ઓળખી કાઢો.

જ્યારે આધાર ઋણ પૂર્ણાંક હોય ત્યારે પણ આ રીતે વિસ્તૃત કરી લખી શકો.

$(-2)^3$ નો અર્થ શું છે ?

તે છે $(-2)^3 = (-2) \times (-2) \times (-2) = (-8)$

$(-2)^4 = 16$ છે ? તે ચકાસો.

કોઈ ચોક્કસ સંખ્યા લેવાને બદલે આધાર તરીકે કોઈ પૂર્ણાંક a લઈએ અને સંખ્યાની જેમ લખતાં,

$a \times a = a^2$ (જે aનો વર્ગ અથવા aનો બે ઘાત કહેવાય)

$a \times a \times a = a^3$ (જેને aનો ઘન અથવા aનો ત્રણ ઘાત કહેવાય)

$a \times a \times a \times a = a^4$ (જેને aનો ચાર ઘાત અથવા aનો ચતુર્થ ઘાત વંચાય)

....

$a \times a \times a \times a \times a \times a \times a = a^7$ (જેને aનો સાત ઘાત અથવા aનો સપ્ત ઘાત એમ વંચાય)

અને તે પરથી,

$a \times a \times a \times b \times b$ ને $a^3 b^2$ વડે દર્શાવી શકાય. (જેને a ઘન b વર્ગ વંચાય)

$a \times a \times b \times b \times b \times b$ ને $a^2 b^4$ વડે દર્શાવી શકાય. (જેને aની બે ઘાત bની ચાર ઘાત એમ વંચાય)

ઉદાહરણ 1 256ને 2ના ઘાત સ્વરૂપે દર્શાવો.

ઉકેલ આપણી પાસે

$256 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$

તેથી આપણે કહી શકીએ કે $256 = 2^8$

ઉદાહરણ 2 2^3 અને 3^2 માં કઈ મોટી છે ?

ઉકેલ $2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$ અને $3^2 = 3 \times 3 = 9$

$9 > 8$ તેથી 3^2 એ 2^3 થી મોટી છે.

ઉદાહરણ 3 8^2 અને 2^8 માંથી કઈ મોટી છે ?

ઉકેલ $8^2 = 8 \times 8 = 64$

$2^8 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 256$

સ્પષ્ટ છે કે, $2^8 > 8^2$

ઉદાહરણ 4 વિસ્તરણ કરો $a^3 b^2$, $a^2 b^3$, $b^2 a^3$, $b^3 a^2$ શું તે બધા સરખા છે ?

ઉકેલ $a^3 b^2 = a^3 \times b^2$

$= (a \times a \times a) \times (b \times b)$

$= a \times a \times a \times b \times b$

$a^2 b^3 = a^2 \times b^3$

$= a \times a \times b \times b \times b$

$b^2 a^3 = b^2 \times a^3$

$= b \times b \times a \times a \times a$

$b^3 a^2 = b^3 \times a^2$

$= b \times b \times b \times a \times a$

નોંધો કે $a^3 b^2$ અને $a^2 b^3$ પદોના કિસ્સામાં a અને bના ઘાતાંક જુદા-જુદા છે. આમ $a^3 b^2$ અને $a^2 b^3$ જુદા જુદા છે.

બીજી બાજુ, $a^3 b^2$ અને $b^2 a^3$ એ સરખા છે. અહીં બંને પદોમાં a અને bના ઘાતાંક સરખા છે. તેમના અવયવના ક્રમનો કોઈ વાંધો નથી.

આ રીતે, $a^3 b^2 = a^3 \times b^2 = b^2 \times a^3 = b^2 a^3$ તે જ રીતે, $a^2 b^3$ અને $b^3 a^2$ સરખા છે.

ઉદાહરણ 5 નીચેની સંખ્યાઓના અવિભાજ્ય અવયવ પાડીને તેના ગુણાકાર સ્વરૂપને ઘાતમાં દર્શાવો.

(i) 72 (ii) 432 (iii) 1000 (iv) 16000

ઉકેલ

(i) $72 = 2 \times 36 = 2 \times 2 \times 18$

$= 2 \times 2 \times 2 \times 9$

$= 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 = 2^3 \times 3^2$

આમ, $72 = 2^3 \times 3^2$ (માંગેલા અવિભાજ્ય અવયવના ગુણાકાર સ્વરૂપ)

2	72
2	36
2	18
3	9
	3

પ્રયત્ન કરો

અભિવ્યક્તિ કરો :

(i) 729ને 3ની ઘાતમાં

(ii) 128ને 2ની ઘાતમાં

(iii) 343ને 7ની ઘાતમાં

(ii) $432 = 2 \times 216 = 2 \times 2 \times 108 = 2 \times 2 \times 2 \times 54$

$= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 27 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 9$

$= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3$

અથવા $432 = 2^4 \times 3^3$ (માગેલું સ્વરૂપ)

(iii) $1000 = 2 \times 500 = 2 \times 2 \times 250 = 2 \times 2 \times 2 \times 125$

$= 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 25 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5$

અથવા $1000 = 2^3 \times 5^3$

અતુલ આ ઉદાહરણને જુદી રીતે ઉકેલવા માંગે છે.

$1000 = 10 \times 100 = 10 \times 10 \times 10$

$= (2 \times 5) \times (2 \times 5) \times (2 \times 5)$ (જ્યાં $10 = 2 \times 5$)

$= 2 \times 5 \times 2 \times 5 \times 2 \times 5 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5$

અથવા $1000 = 2^3 \times 5^3$

શું અતુલની રીત સાચી છે ?

(iv) $16{,}000 = 16 \times 1000 = (2 \times 2 \times 2 \times 2) \times 1000 = 2^4 \times 10^3$ (જ્યાં $16 = 2 \times 2 \times 2 \times 2$)

$= (2 \times 2 \times 2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5) = 2^4 \times 2^3 \times 5^3$

(જ્યાં $1000 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5$)

$= (2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2) \times (5 \times 5 \times 5)$

અથવા $16{,}000 = 2^7 \times 5^3$

ઉદાહરણ 6 કિંમત શોધો : $(1)^5, (-1)^3, (-1)^4, (-10)^3, (-5)^4$.

ઉકેલ

(i) $(1)^5 = 1 \times 1 \times 1 \times 1 \times 1 = 1$

હકીકતમાં, તમને ખ્યાલ આવશે કે 1ના કોઈ પણ ઘાતની કિંમત 1 જ થાય.

$(-1)^{\text{એકી સંખ્યા}} = -1$

$(-1)^{\text{બેકી સંખ્યા}} = +1$

(ii) $(-1)^3 = (-1) \times (-1) \times (-1) = 1 \times (-1) = (-1)$

(iii) $(-1)^4 = (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) = 1 \times 1 = 1$

તમે જોશો કે (–1) ના **એકી** ઘાતની કિંમત (–1) થાય અને (–1) ના **બેકી** ઘાતની કિંમત (+1) થાય.

(iv) $(-10)^3 = (-10) \times (-10) \times (-10) = 100 \times (-10) = -1000$

(v) $(-5)^4 = (-5) \times (-5) \times (-5) \times (-5) = 25 \times 25 = 625$

સ્વાધ્યાય 1.3

1. કિંમત શોધો :

   (i) 2^6 (ii) 9^3 (iii) 11^2 (iv) 5^4

2. નીચે દર્શાવેલ સ્વરૂપને ઘાત સ્વરૂપે લખો.

   (i) $6 \times 6 \times 6 \times 6$ (ii) $t \times t$ (iii) $b \times b \times b \times b$

   (iv) $5 \times 5 \times 7 \times 7 \times 7$ (ii) $2 \times 2 \times a \times a$ (iii) $a \times a \times a \times c \times c \times c \times c \times d$

3. નીચે દર્શાવેલ દરેક સંખ્યાને ઘાતસ્વરૂપે ઘાતાંક સંકેતનો ઉપયોગ કરીને લખો :
   (i) 512 (ii) 343 (iii) 729 (iv) 3125
4. નીચેના દરેકમાંથી શક્ય હોય ત્યાં મોટી સંખ્યા શોધી કાઢો.
   (i) 4^3 અને 3^4 (ii) 5^3 અને 3^5 (iii) 2^8 અને 8^2
   (iv) 100^2 અને 2^{100} (v) 2^{10} અને 10^2
5. નીચેના દરેકના અવિભાજ્ય અવયવ પાડીને તેના ગુણાકારને ઘાત સ્વરૂપે દર્શાવો.
   (i) 648 (ii) 405 (iii) 540 (iv) 3,600
6. સાદુંરૂપ આપો :
   (i) 2×10^3 (ii) $7^2 \times 2^2$ (iii) $2^3 \times 5$ (iv) 3×4^4
   (v) 0×10^2 (vi) $5^2 \times 3^3$ (vii) $2^4 \times 3^2$ (viii) $3^2 \times 10^4$
7. સાદુંરૂપ આપો :
   (i) $(-4)^3$ (ii) $(-3) \times (-2)^3$ (iii) $(-3)^2 \times (-5)^2$
   (iv) $(-2)^3 \times (-10)^3$
8. નીચેની સંખ્યાઓની સરખામણી કરો :
   (i) 2.7×10^{12} ; 1.5×10^8 (ii) 4×10^{14} ; 3×10^{17}

13.3 ઘાતાંકના નિયમો (Laws of Exponents)

13.3.1 સમાન આધારની ઘાતનો ગુણાકાર (Multiplying Powers with the Same Base)

(i) ચાલો ગણીએ : $2^2 \times 2^3$

$$2^2 \times 2^3 = (2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2)$$
$$= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5 = 2^{2+3}$$

નોંધ કરો કે 2^2 અને 2^3 નો આધાર સરખો છે અને તેમના ઘાતાંકો એટલે કે 2 અને 3 નો સરવાળો 5 છે.

(ii) $(-3)^4 \times (-3)^3 = [(-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3)] \times [(-3) \times (-3) \times (-3)]$
$$= (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3) \times (-3)$$
$$= (-3)^7$$
$$= (-3)^{4+3}$$

ફરીથી નોંધો કે, જો આધાર સરખો હોય તો ઘાતાંકોનો સરવાળો થાય, એટલે કે 4 અને 3નો સરવાળો 7 થાય.

(iii) $a^2 \times a^4 = (a \times a) \times (a \times a \times a \times a)$
$$= a \times a \times a \times a \times a \times a = a^6$$

(નોંધ : આધાર સરખો છે અને ઘાતાંકોનો સરવાળો $2 + 4 = 6$)

તે જ રીતે ચકાસો,

$$4^2 \times 4^2 = 4^{2+2}$$
$$3^2 \times 3^3 = 3^{2+3}$$

પ્રયત્ન કરો

સાદુંરૂપ આપો અને ઘાત સ્વરૂપે લખો :

(i) $2^5 \times 2^3$

(ii) $p^3 \times p^2$

(iii) $4^3 \times 4^2$

(iv) $a^3 \times a^2 \times a^7$

(v) $5^3 \times 5^7 \times 5^{12}$

(vi) $(-4)^{100} \times (-4)^{20}$

હવે, તમે યોગ્ય સંખ્યા આપેલા બૉક્સમાં લખી શકશો.

$$(-11)^2 \times (-11)^6 = (-11)^{\square}$$

$b^2 \times b^3 = b^{\square}$ (યાદ રાખો કે આધાર સરખો છે અને b પૂર્ણાંક છે.)

$c^3 \times c^4 = c^{\square}$ (c એ કોઈ પૂર્ણાંક છે.)

$d^{10} \times d^{20} = d^{\square}$

આ પરથી આપણે સામાન્ય રીતે તારવી શકીશું કે કોઈ પણ શૂન્ય સિવાયનો પૂર્ણાંક a હોય અને m અને n પૂર્ણ સંખ્યાઓ હોય તો.

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

વિચારો !

ગણો $2^3 \times 3^2$

શું તમે ઘાતાંકોનો સરવાળો કરી શકશો ? ના, તમે જોયું, શા માટે ? 2^3 નો આધાર 2 છે જ્યારે 3^2 નો આધાર 3 છે. આધાર સરખા નથી.

13.3.2 સરખા આધાર પર ઘાતાંકોનો ભાગાકાર (Dividing Powers with the Same Base)

ચાલો સાદુંરૂપ આપીએ $3^7 \div 3^4$?

$$3^7 \div 3^4 = \frac{3^7}{3^4} = \frac{3\times3\times3\times3\times3\times3\times3}{3\times3\times3\times3}$$
$$= 3 \times 3 \times 3 = 3^3 = 3^{7-4}$$

આમ, $3^7 \div 3^4 = 3^{7-4}$

(નોંધ 3^7 અને 3^4 નો આધાર સરખો છે અને $3^7 \div 3^4$ એ 3^{7-4} બને છે.)

તે જ રીતે,

$$5^6 \div 5^2 = \frac{5^6}{5^2} = \frac{5\times5\times5\times5\times5\times5}{5\times5}$$
$$= 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5^4 = 5^{6-2}$$

અથવા, $5^6 \div 5^2 = 5^{6-2}$

શૂન્ય સિવાયના પૂર્ણાંક હોય ત્યારે,

$$a^4 \div a^2 = \frac{a^4}{a^2} = \frac{a\times a\times a\times a}{a\times a} = a \times a = a^2 = a^{4-2}$$

અથવા, $a^4 \div a^2 = a^{4-2}$

હવે, તમે ઝડપથી જવાબ આપી શકશો ?

$$10^8 \div 10^3 = 10^{8-3} = 10^5$$

$$7^9 \div 7^6 = 7^{\square}$$

$$a^8 \div a^5 = a^{\square}$$

શૂન્ય સિવાયના પૂર્ણાંકો b અને c માટે,

$$b^{10} \div b^5 = b^{\square}$$

$$c^{100} \div c^{90} = c^{\square}$$

વ્યાપક રીતે, શૂન્ય સિવાયના પૂર્ણાંક a માટે,

$$a^m \div a^n = a^{m-n}$$

જ્યાં m અને n પૂર્ણાંક સંખ્યા છે અને $m > n$.

પ્રયત્ન કરો

સાદુંરૂપ આપી તેને ઘાત સ્વરૂપે લખો :

(દા.ત. $11^6 \div 11^2 = 11^4$)

(i) $2^9 \div 2^3$ (ii) $10^8 \div 10^4$

(iii) $9^{11} \div 9^7$ (iv) $20^{15} \div 20^{13}$

(v) $7^{13} \div 7^{10}$

13.3.3 ઘાતનો ઘાત (Taking Power of a Power)

સાદું રૂપ આપો : $(2^3)^2$ $(3^2)^4$

હવે, $(2^3)^2$, નો અર્થ (2^3) નો તેની સાથેનો બે વખત ગુણાકાર

$$(2^3)^2 = 2^3 \times 2^3$$

$$= 2^{3+3} \quad (a^m \times a^n = a^{m+n})$$

$$= 2^6 = 2^{3\times2}$$

આમ, $(2^3)^2 = 2^{3\times2}$

તે જ રીતે, $(3^2)^4 = 3^2 \times 3^2 \times 3^2 \times 3^2$

$$= 3^{2+2+2+2}$$

$$= 3^8 \quad \text{(8 એ 2 અને 4નો ગુણાકાર છે)}$$

$$= 3^{2\times4}$$

તમે કહી શકશો કે, $(7^2)^{10}$ ને સમાન શું થશે ?

અહીં, $(2^3)^2 = 2^{3\times2} = 2^6$

$$(3^2)^4 = 3^{2\times4} = 3^8$$

તે જ રીતે, $(7^2)^{10} = 7^{2\times10} = 7^{20}$

$$(a^2)^3 = a^{2\times3} = a^6$$

$$(a^m)^3 = a^{m\times3} = a^{3m}$$

આ ઉપરથી આપણે તારવી શકીએ કે કોઈ શૂન્ય સિવાયનો પૂર્ણાંક 'a' હોય અને જ્યાં m અને n પૂર્ણ સંખ્યાઓ હોય, તો

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

આ પ્રયત્ન કરો

સાદું રૂપ આપી ઘાતાંક સ્વરૂપે જવાબ લખો :

(i) $(6^2)^4$ (ii) $(2^2)^{100}$

(iii) $(7^{50})^2$ (iv) $(5^3)^7$

ઉદાહરણ 7 $(5^2) \times 3$ અને $(5^2)^3$ માંથી કયું પદ મોટું છે તે તમે કહી શકશો ?

ઉકેલ $(5^2) \times 3$નો અર્થ 5^2નો 3 સાથેનો ગુણાકાર છે એટલે કે $5 \times 5 \times 3 = 75$

પરંતુ $(5^2)^3$ નો અર્થ 5^2નો પોતાની સાથેનો ત્રણ વખત ગુણાકાર છે. એટલે કે,

$$5^2 \times 5^2 \times 5^2 = 5^6 = 15,625$$

તેથી, $(5^2)^3 > (5)^2 \times 3$

13.3.4 સરખા ઘાતાંકના ઘાતનો ગુણાકાર (Multiplying Powers with the Same Exponents)

તમે $2^3 \times 3^3$ નું સાદું રૂપ આપી શકશો ? નોંધો કે અહીં બે પદો 2^3 અને 3^3 ના આધાર જુદા છે પણ ઘાતાંક સરખા છે.

હવે, $2^3 \times 3^3 = (2 \times 2 \times 2) \times (3 \times 3 \times 3)$

$= (2 \times 3) \times (2 \times 3) \times (2 \times 3)$

$= 6 \times 6 \times 6$

$= 6^3$ (6 એ 2 વડે 3નો ગુણાકાર છે)

ગણો $4^4 \times 3^4 = (4 \times 4 \times 4 \times 4) \times (3 \times 3 \times 3 \times 3)$

$= (4 \times 3) \times (4 \times 3) \times (4 \times 3) \times (4 \times 3)$

$= 12 \times 12 \times 12 \times 12$

$= 12^4$

ગણો $3^2 \times a^2 = (3 \times 3) \times (a \times a)$

$= (3 \times a) \times (3 \times a)$

$= (3 \times a)^2$

$= (3a)^2$ (નોંધ $3 \times a = 3a$)

આમ કરો

$a^m \times b^m = (ab)^m$; નો ઉપયોગ કરીને તે સ્વરૂપમાં દર્શાવો.

(i) $4^3 \times 2^3$ (ii) $2^5 \times b^5$

(iii) $a^2 \times t^2$ (iv) $5^6 \times (-2)^6$

(v) $(-2)^4 \times (-3)^4$

તે જ રીતે, $a^4 \times b^4 = (a \times a \times a \times a) \times (b \times b \times b \times b)$

$= (a \times b) \times (a \times b) \times (a \times b) \times (a \times b)$

$= (a \times b)^4$

$= (ab)^4$ (નોંધ $a \times b = ab$)

તારવી શકાય કે, કોઈ શૂન્ય સિવાયના પૂર્ણાંક a અને b માટે.

$$a^m \times b^m = (ab)^m$$ (જ્યાં m એ એક પૂર્ણ સંખ્યા છે.)

ઉદાહરણ 8 નીચેનાં પદોને ઘાત સ્વરૂપે દર્શાવો.

(i) $(2 \times 3)^5$ (ii) $(2a)^4$ (iii) $(-4m)^3$

ઉકેલ

(i) $(2 \times 3)^5 = (2 \times 3) \times (2 \times 3) \times (2 \times 3) \times (2 \times 3) \times (2 \times 3)$

$= (2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2) \times (3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3)$

$= 2^5 \times 3^5$

(ii) $(2a)^4 = 2a \times 2a \times 2a \times 2a$

$= (2 \times 2 \times 2 \times 2) \times (a \times a \times a \times a)$

$= 2^4 \times a^4$

(iii) $(-4m)^3 = (-4 \times m)^3$

$= (-4 \times m) \times (-4 \times m) \times (-4 \times m)$

$= (-4) \times (-4) \times (-4) \times (m \times m \times m)$

$= (-4)^3 \times m^3$

13.3.5 સરખા ઘાતાંકવાળી સંખ્યાઓનો ભાગાકાર (Dividing Powers with the Same Exponents)

નીચે આપેલું સાદુંરૂપ જુઓ :

(i) $\frac{2^4}{3^4} = \frac{2\times2\times2\times2}{3\times3\times3\times3} = \frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{2}{3} = \left(\frac{2}{3}\right)^4$

(ii) $\frac{a^3}{b^3} = \frac{a\times a\times a}{b\times b\times b} = \frac{a}{b}\times\frac{a}{b}\times\frac{a}{b} = \left(\frac{a}{b}\right)^3$

ઉદાહરણો પરથી આપણે તારવી શકીએ કે,

$a^m \div b^m = \frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$ જ્યા a અને b શૂન્ય સિવાયના પૂર્ણાંક છે અને m એ પૂર્ણ સંખ્યા છે.

પ્રયત્ન કરો

$a^m \div b^m = \left(\frac{a}{b}\right)^m$ નો ઉપયોગ કરી બીજી રીતે લખો.

(i) $4^5 \div 3^5$

(ii) $2^5 \div b^5$

(iii) $(-2)^3 \div b^3$

(iv) $p^4 \div q^4$

(v) $5^6 \div (-2)^6$

ઉદાહરણ 9 વિસ્તાર કરો : (i) $\left(\frac{3}{5}\right)^4$ (ii) $\left(\frac{-4}{7}\right)^5$

ઉકેલ

(i) $\left(\frac{3}{5}\right)^4 = \frac{3^4}{5^4} = \frac{3\times3\times3\times3}{5\times5\times5\times5}$

(ii) $\left(\frac{-4}{7}\right)^5 = \frac{(-4)^5}{7^5} = \frac{(-4)\times(-4)\times(-4)\times(-4)\times(-4)}{7\times7\times7\times7\times7}$

- **ઘાતાંક 0 સાથેની સંખ્યા (Numbers with Exponent Zero)**

$\frac{3^5}{3^5}$ ને સમાન શું હશે ? તે તમે કહી શકશો ?

$\frac{3^5}{3^5} = \frac{3\times3\times3\times3\times3}{3\times3\times3\times3\times3} = 1$

ઘાતાંકના નિયમનો ઉપયોગ કરતાં

a^0 શું છે ?

નીચેની પેટર્નનું અવલોકન કરો

$2^6 = 64$

$2^5 = 32$

$2^4 = 16$

$2^3 = 8$

$2^2 = ?$

$2^1 = ?$

$2^0 = ?$

આ પેટર્નના અભ્યાસ પરથી તમે 2^0ની કિંમતનું અનુમાન કરી શકશો. તમે શોધી શકશો કે $2^0 = 1$ જો તમે $3^6 = 729$ થી શરૂ કરો અને ઉપર દર્શાવેલ પદ્ધતિને અનુસરો તો લખી શકશો કે 3^5, 3^4, 3^3, ... વગેરે, હવે 3^0 શું હશે ?

$3^5 \div 3^5 = 3^{5-5} = 3^0$

તેથી, $3^0 = 1$

7^0 ને સમાન સંખ્યા કઈ તે હવે તમે કહી શકશો ?

$7^3 \div 7^3 = 7^{3-3} = 7^0$

અને, $\frac{7^3}{7^3} = \frac{7 \times 7 \times 7}{7 \times 7 \times 7} = 1$

તેથી, $7^0 = 1$

તેવી જ રીતે, $a^3 \div a^3 = a^{3-3} = a^0$

અને, $a^3 \div a^3 = \frac{a^3}{a^3} = \frac{a \times a \times a}{a \times a \times a} = 1$

આમ, $a^0 = 1$ (શૂન્ય સિવાયના પૂર્ણાંક a માટે)

તેથી, આપણે કહી શકીએ કે કોઈ પણ સંખ્યા(0 સિવાયની)ના 0 ઘાતની કિંમત 1 છે.

13.4 ઘાતાંકના નિયમોનો ઉપયોગ થતો હોય તેવાં ઉદાહરણો

ઘાતાંકના નિયમોનો ઉપયોગ થતો હોય તેવા કેટલાંક ઉદાહરણો આપણે જોઈએ,

ઉદાહરણ 10 2ને આધાર તરીકે લઈ $8 \times 8 \times 8 \times 8$ને ઘાતાંક સ્વરૂપે દર્શાવો.

ઉકેલ હવે, $8 \times 8 \times 8 \times 8 = 8^4$

પરંતુ આપણે જાણીએ છીએ કે, $8 = 2 \times 2 \times 2 = 2^3$

તેથી, $8^4 = (2^3)^4 = 2^3 \times 2^3 \times 2^3 \times 2^3$

$= 2^{3 \times 4}$ [અહીં તમે $(a^m)^n = a^{mn}$ નો ઉપયોગ કર્યો છે]

$= 2^{12}$

ઉદાહરણ 11 સાદુંરૂપ આપો અને જવાબને ઘાતાંક સ્વરૂપે લખો.

(i) $\left(\frac{3^7}{3^2}\right) \times 3^5$ (ii) $2^3 \times 2^2 \times 5^5$ (iii) $(6^2 \times 6^4) \div 6^3$

(iv) $[(2^2)^3 \times 3^6] \times 5^6$ (v) $8^2 \div 2^3$

ઉકેલ

(i) $\left(\frac{3^7}{3^2}\right) \times 3^5 = \left(3^{7-2}\right) \times 3^5$

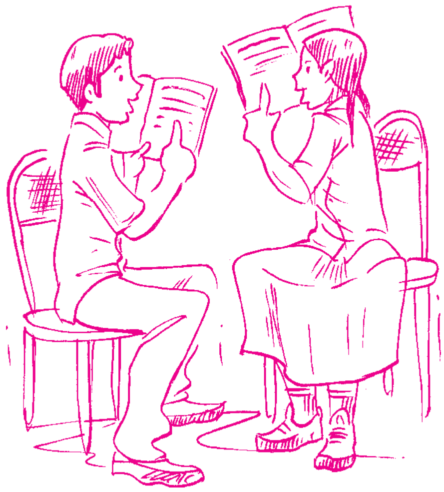
$= 3^5 \times 3^5 = 3^{5+5} = 3^{10}$

(ii) $2^3 \times 2^2 \times 5^5 = 2^{3+2} \times 5^5$

$= 2^5 \times 5^5 = (2 \times 5)^5 = 10^5$

(iii) $(6^2 \times 6^4) \div 6^3 = 6^{2+4} \div 6^3$

$= \dfrac{6^6}{6^3} = 6^{6-3} = 6^3$



(iv) $\left[\left(2^2\right)^3 \times 3^6\right] \times 5^6 = \left[2^6 \times 3^6\right] \times 5^6$

$= (2 \times 3)^6 \times 5^6$

$= (2 \times 3 \times 5)^6 = 30^6$

(v) $8 = 2 \times 2 \times 2 = 2^3$

તેથી, $8^2 \div 2^3 = (2^3)^2 \div 2^3$

$= 2^6 \div 2^3 = 2^{6-3} = 2^3$

ઉદાહરણ 12 સાદુંરૂપ આપો :

(i) $\dfrac{12^4 \times 9^3 \times 4}{6^3 \times 8^2 \times 27}$ (ii) $2^3 \times a^3 \times 5a^4$ (iii) $\dfrac{2 \times 3^4 \times 2^5}{9 \times 4^2}$

ઉકેલ

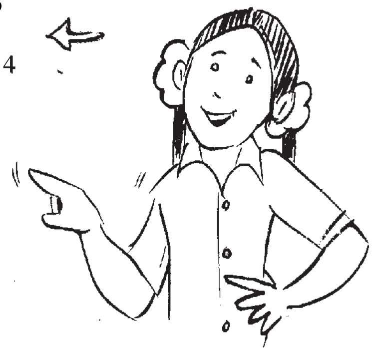
(i) અહીં, $\dfrac{12^4 \times 9^3 \times 4}{6^3 \times 8^2 \times 27} = \dfrac{(2^2 \times 3)^4 \times (3^2)^3 \times 2^2}{(2 \times 3)^3 \times (2^3)^2 \times 3^3}$

$= \dfrac{(2^2)^4 \times (3)^4 \times 3^{2\times 3} \times 2^2}{2^3 \times 3^3 \times 2^{2\times 3} \times 3^3} = \dfrac{2^8 \times 2^2 \times 3^4 \times 3^6}{2^3 \times 2^6 \times 3^3 \times 3^3}$

$= \dfrac{2^{8+2} \times 3^{4+6}}{2^{3+6} \times 3^{3+3}} = \dfrac{2^{10} \times 3^{10}}{2^9 \times 3^6}$

$= 2^{10-9} \times 3^{10-6} = 2^1 \times 3^4$

$= 2 \times 81 = 162$



(ii) $2^3 \times a^3 \times 5a^4 = 2^3 \times a^3 \times 5 \times a^4$

$= 2^3 \times 5 \times a^3 \times a^4 = 8 \times 5 \times a^{3+4}$

$= 40\, a^7$

(iii) $\frac{2\times 3^4\times 2^5}{9\times 4^2} = \frac{2\times 3^4\times 2^5}{3^2\times (2^2)^2} = \frac{2\times 2^5\times 3^4}{3^2\times 2^{2\times 2}}$

$= \frac{2^{1+5}\times 3^4}{2^4\times 3^2} = \frac{2^6\times 3^4}{2^4\times 3^2} = 2^{6-4}\times 3^{4-2}$

$= 2^2\times 3^2 = 4\times 9 = 36$

નોંધ : આ પ્રકરણનાં મોટાં ભાગનાં ઉદાહરણમાં ઘાતાંકનો આધાર પૂર્ણાંક સંખ્યા લેવામાં આવેલ છે. પરંતુ પ્રકરણનાં બધાં જ નિયમોમાં આધાર તરીકે સંમેય સંખ્યા હોય તો પણ સમાન રીતે લાગુ પડે છે.

સ્વાધ્યાય 13.2

1. ઘાતાંકના નિયમોનો ઉપયોગ કરી સાદુંરૂપ આપો અને જવાબને ઘાત સ્વરૂપે લખો.

(i) $3^2\times 3^4\times 3^8$ (ii) $6^{15}\div 6^{10}$ (iii) $a^3\times a^2$

(iv) $7^x\times 7^2$ (v) $(5^2)^3\div 5^3$ (vi) $2^5\times 5^5$

(vii) $a^4\times b^4$ (viii) $(3^4)^3$ (ix) $(2^{20}\div 2^{15})\times 2^3$

(x) $8^t\div 8^2$

2. સાદુંરૂપ આપી નીચેના દરેકને ઘાત સ્વરૂપે દર્શાવો.

(i) $\frac{2^3\times 3^4\times 4}{3\times 32}$ (ii) $\left[\left(5^2\right)^3\times 5^4\right]\div 5^7$ (iii) $25^4\div 5^3$

(iv) $\frac{3\times 7^2\times 11^8}{21\times 11^3}$ (v) $\frac{3^7}{3^4\times 3^3}$ (vi) $2^0+3^0+4^0$

(vii) $2^0\times 3^0\times 4^0$ (viii) $(3^0+2^0)\times 5^0$ (ix) $\frac{2^8\times a^5}{4^3\times a^3}$

(x) $\left(\frac{a^5}{a^3}\right)\times a^8$ (xi) $\frac{4^5\times a^8b^3}{4^5\times a^5b^2}$ (xii) $(2^3\times 2)^2$

3. ખરાં છે કે ખોટાં તે કહો અને તમારા જવાબને ચકાસો.

(i) $10\times 10^{11} = 100^{11}$ (ii) $2^3 > 5^2$ (iii) $2^3\times 3^2 = 6^5$

(iv) $3^0 = (1000)^0$

4. નીચેના ગુણાકારના અવિભાજ્ય અવયવ પાડી તેને ઘાત સ્વરૂપે દર્શાવો.

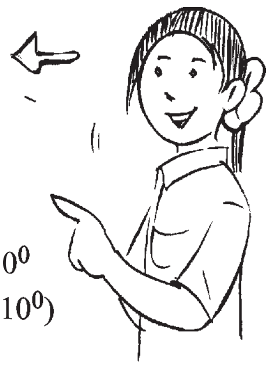
(i) 108×192 (ii) 270 (iii) 729×64

(iv) 768

5. સાદું રૂપ આપો :

(i) $\dfrac{(2^5)^2 \times 7^3}{8^3 \times 7}$ (ii) $\dfrac{25 \times 5^2 \times t^8}{10^3 \times t^4}$ (iii) $\dfrac{3^5 \times 10^5 \times 25}{5^7 \times 6^5}$

13.5 દશાંશ પદ્ધતિ (Decimal Number System)



47561નું વિસ્તૃત સ્વરૂપ જુઓ, કે જે આપણે જાણીએ છીએ :

$$47561 = 4 \times 10000 + 7 \times 1000 + 5 \times 100 + 6 \times 10 + 1$$

આપણે તેને 10ના ઘાતનો ઉપયોગ કરી ઘાત સ્વરૂપે દર્શાવીએ.

તેથી, $$47561 = 4 \times 10^4 + 7 \times 10^3 + 5 \times 10^2 + 6 \times 10^1 + 1 \times 10^0$$

(નોંધો કે, $10000 = 10^4$, $1000 = 10^3$, $100 = 10^2$, $10 = 10^1$ અને $1 = 10^0$)

ચાલો, બીજી સંખ્યાનું વિસ્તરણ જોઈએ :

$$\begin{aligned} 104278 &= 1 \times 100000 + 0 \times 10000 + 4 \times 1000 + 2 \times 100 + 7 \times 10 + 8 \times 1 \\ &= 1 \times 10^5 + 0 \times 10^4 + 4 \times 10^3 + 2 \times 10^2 + 7 \times 10^1 + 8 \times 10^0 \\ &= 1 \times 10^5 + 4 \times 10^3 + 2 \times 10^2 + 7 \times 10^1 + 8 \times 10^0 \end{aligned}$$

નોંધો કે, xનો ઘાત મહત્તમ કિંમત 5 થી શરૂ થાય છે અને દરેક પગથિયે 1નો ઘટાડો થઈ ડાબેથી જમણાં જતાં 0 થાય છે.

13.6 વિશાળ સંખ્યાઓને પ્રમાણભૂત સ્વરૂપમાં દર્શાવવી

ચાલો, આપણે પ્રકરણની શરૂઆત થઈ ત્યાં પાછા જઈએ. આપણે કહ્યું હતું કે મોટી સંખ્યાઓને ઘાતાંકનો ઉપયોગ કરીને સરળતાથી દર્શાવી શકીએ છીએ. આપણે હજુ સુધી તે સંખ્યાઓ જોઈ નથી, હવે આપણે તે જોઈએ.

1. સૂર્ય એ આપણી આકાશગંગા ગેલેક્સીના કેન્દ્રથી 300, 000, 000, 000, 000, 000, 000 મીટર દૂર આવેલો છે.
2. આપણી ગેલેક્સીમાં 100, 000, 000, 000 તારાઓ આવેલા છે.
3. પૃથ્વીનું દળ 5, 976, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000 કિગ્રા છે.

આ સંખ્યાઓ વાંચવા અને લખવા માટે સરળ નથી. તેને સરળ બનાવવા ઘાતનો ઉપયોગ કરીશું.

નીચેનાનું અવલોકન કરો :

$$59 = 5.9 \times 10 = 5.9 \times 10^1$$

$$590 = 5.9 \times 100 = 5.9 \times 10^2$$

$$5900 = 5.9 \times 1000 = 5.9 \times 10^3$$

$$59000 = 5.9 \times 10000 = 5.9 \times 10^4$$

પ્રયત્ન કરો

10 ના ઘાતમાં વિસ્તૃત રીતે દર્શાવી ઘાત સ્વરૂપ લખો.

(i) 172

(ii) 5,643

(iii) 56,439

(iv) 1,76,428

કોઈ પણ સંખ્યાને (1.0 અને 10.0 વચ્ચેની દશાંશ સંખ્યા $\times$ 10 નો ઘાત) સ્વરૂપમાં દર્શાવી શકાય છે. સંખ્યાના આવા સ્વરૂપને પ્રમાણભૂત સ્વરૂપ કહે છે.

$5{,}985 = 5.985 \times 1000 = 5.985 \times 10^3$ એ 5985નું પ્રમાણભૂત સ્વરૂપ છે.

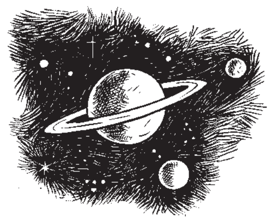
નોંધો કે 5985ને 59.85×100 અથવા 59.85×10^2 સ્વરૂપે લખી શકાય, પણ તે 5985નું પ્રમાણભૂત સ્વરૂપ નથી. તે જ રીતે $5985 = 0.5985 \times 10{,}000 = 0.5985 \times 10^4$ લખી શકાય, તે પણ 5985નું પ્રમાણભૂત સ્વરૂપ નથી. હવે આપણે પ્રકરણની શરૂઆતમાં આવતી વિશાળ સંખ્યાઓને આ સ્વરૂપમાં દર્શાવી શકીશું. આપણી ગેલેક્સી (આકાશગંગા)ના કેન્દ્રથી સૂર્યનું અંતર

300, 000, 000, 000, 000, 000, 000 મીટરને

$3.0 \times$ 100, 000, 000, 000, 000, 000, 000 $= 3.0 \times 10^{20}$ મીટર લખી શકીશું.

હવે, તમે 40, 000, 000, 000 ને આ સ્વરૂપે દર્શાવી શકશો ?

આમાં, કેટલા ‘0’ છે તે ગણો તે 10 છે.



તેથી, 40, 000, 000, 000 $= 4.0 \times 10^{10}$

પૃથ્વીનું દળ = 5,976, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000 કિગ્રા

$= 5.976 \times 10^{24}$ કિગ્રા

તમે એ હકીકત સાથે સહમત છો કે પ્રમાણભૂત સ્વરૂપમાં દર્શાવવામાં આવતી સંખ્યા એ 25 અંકમાં લખવામાં આવતી સંખ્યા કરતાં વાંચવા, સમજવા કે સરખામણી કરવામાં સરળ છે ?

યુરેનસનું દળ = 86, 800, 000, 000, 000, 000, 000, 000, 000 કિગ્રા

$= 8.68 \times 10^{25}$ કિગ્રા

ઉપરના બંનેની 10 ની ઘાત સરળતાથી સરખાવી શકાય. તમે કહી શકશો કે યરેનસનું દળ એ પૃથ્વીનાં દળ કરતાં વધુ હશે.

સૂર્ય અને શનિ વચ્ચેનું અંતર 1,433, 500, 000, 000 મીટર અથવા 1.4335×10^{12} મીટર છે. યુરેનસ અને શનિ વચ્ચેનું અંતર 1, 439, 000, 000, 000 મીટર અથવા 1.439×10^{12} મીટર થશે. સૂર્ય અને પૃથ્વી વચ્ચેનું અંતર 1, 49, 600, 000, 000 મીટર અથવા 1.496×10^{11} મીટર છે.

ત્રણમાંથી સૌથી ઓછું અંતર કયું છે તે તમે કહી શકશો ?

ઉદાહરણ 13 નીચેની સંખ્યાઓને પ્રમાણભૂત સ્વરૂપમાં દર્શાવો :

(i) 5985.3 (ii) 65,950

(iii) 3, 430,000 (iv) 70,040,000,000

ઉકેલ

(i) $5985.3 = 5.9853 \times 1000 = 5.9853 \times 10^3$

(ii) $65{,}950 = 6.595 \times 10{,}000 = 6.595 \times 10^4$

(iii) $3{,}430{,}000 = 3.43 \times 1{,}000{,}000 = 3.43 \times 10^6$

(iv) 70,040,000, 000 $= 7.004 \times$ 10,000,000, 000 $= 7.004 \times 10^{10}$

એ મુદ્દો યાદ રાખો કે જો સંખ્યામાં દશાંશચિહ્ન આપેલ હોય અને તેને 10 ની ઘાતના પ્રમાણભૂત સ્વરૂપમાં ફેરવવાની હોય તો દશાંશચિહ્નની ડાબી બાજુ જેટલા અંકો હોય તેના કરતાં એક અંક ઓછો આવશે. આમ 70,040,000,000 માં દશાંશચિહ્ન દેખાતું નથી. આપણે અનુમાન કરીએ કે તે જમણી બાજુના છેડે હશે, ત્યાંથી ડાબી બાજુના અંકોની સંખ્યા 11 છે. તેથી તેના પ્રમાણિત સ્વરૂપમાં 10નો ઘાત $11 - 1 = 10$ થશે. 5983.3 માં દશાંશ ચિહ્નની ડાબી બાજુ 4 અંક છે. તેથી તેના પ્રમાણિત સ્વરૂપમાં 10નો ઘાત $(4–1) = 3$ થશે.

સ્વાધ્યાય 13.3

1. નીચેની સંખ્યાઓને વિસ્તૃત સ્વરૂપે લખો :

 279404, 3006194, 2806196, 120719, 20068

2. આપેલા દરેક વિસ્તૃત સ્વરૂપને સંખ્યામાં દર્શાવો.
 (a) $8 \times 10^4 + 6 \times 10^3 + 0 \times 10^2 + 4 \times 10^1 + 5 \times 10^0$
 (b) $4 \times 10^5 + 5 \times 10^3 + 3 \times 10^2 + 2 \times 10^0$
 (c) $3 \times 10^4 + 7 \times 10^2 + 5 \times 10^0$
 (d) $9 \times 10^5 + 2 \times 10^2 + 3 \times 10^1$

3. નીચેની સંખ્યાઓને પ્રમાણિત સ્વરૂપમાં લખો :
 (i) 5, 00, 00, 000 (ii) 70,00,000 (iii) 3,18,65,00,000
 (iv) 3,90,878 (v) 39087.8 (vi) 3908.78

4. નીચેનાં વિધાનોમાં દેખાતી સંખ્યાઓને પ્રમાણિત સ્વરૂપમાં ફેરવો.
 (a) પૃથ્વી અને ચંદ્ર વચ્ચેનું અંતર 384, 000, 000 મીટર છે.
 (b) શૂન્યાવકાશમાં પ્રકાશનો વેગ 300, 000, 000 મી/સે છે.
 (c) પૃથ્વીનો વ્યાસ 1, 27, 56, 000 મીટર છે.
 (d) સૂર્યનો વ્યાસ 1, 400, 000, 000 મીટર છે.
 (e) આકાશ ગંગામાં સરેરાશ 100, 000, 000, 000 તારાઓ છે.
 (f) વિશ્વ 12,000, 000, 000, વર્ષ પહેલાં અસ્તિત્વમાં આવ્યું છે.
 (g) આકાશગંગા ગેલેક્સીના કેન્દ્રથી સૂર્યનું અંતર 300, 000, 000, 000, 000, 000, 000 મીટર છે.
 (h) 1.8 ગ્રામ વજન ધરાવતાં પાણીનાં ટીપાંમાં 60, 230, 000, 000, 000, 000, 000, 000 પરમાણુંઓ સમાયેલાં હોય છે.
 (i) પૃથ્વી પર 1, 353, 000, 000, ઘન કિલોમીટર દરિયાનું પાણી છે.
 (j) માર્ચ 2001માં ભારતની વસ્તી આશરે 1, 027, 000, 000 હતી.