বাস্তৱ সংখ্যা
(Real Numbers)

প্ৰথম অধ্যায়

1.1 অৱতাৰণা (Introduction)

নৱম শ্ৰেণীত তোমালোকে বাস্তৱ সংখ্যাৰ পৰিজগতখনৰ উন্মোচন আৰম্ভ কৰিছিলা আৰু অপৰিমেয় সংখ্যাবোৰৰ সৈতে মুখামুখি হৈছিলা। এই অধ্যায়ত আমি বাস্তৱ সংখ্যাৰ আলোচনাকেই অব্যাহত ৰাখিম। অনুচ্ছেদ 1.2 আৰু 1.3ত আমি যোগাত্মক অখণ্ড সংখ্যাৰ দুটা অতি প্ৰয়োজনীয় ধৰ্ম বিশেষকৈ ইউক্লিডৰ বিভাজন কলনবিধি (Euclid's division algorithm) আৰু পাটীগণিতৰ মৌলিক উপপাদ্যৰে আৰম্ভ কৰিম।

ইউক্লিডৰ বিভাজন কলনবিধি, নামটোৱে কোৱা অনুসাৰেই অখণ্ড সংখ্যাৰ বিভাজ্যতাৰে কাম কৰিবলগীয়া হয়। চমুকৈ বৰ্ণালে, ই হ'ল— যি কোনো এটা যোগাত্মক অখণ্ড সংখ্যা aক অইন এটা যোগাত্মক অখণ্ড সংখ্যা b ৰে এনেদৰে ভাগ কৰিব পাৰি যাতে ই b তকৈ সৰু এটা ভাগশেষ r বাকী এৰে। তোমালোকৰ বহুতেই সম্ভৱতঃ ইয়াক এটা দীঘলীয়া ভাগ প্ৰক্ৰিয়া ৰূপেহে চিনি পোৱা। যদিও এই ফলটো বৰ্ণনা কৰা আৰু বুজি পোৱাত সহজ, ইয়াৰ অখণ্ড সংখ্যাৰ বিভাজ্যতাৰ ধৰ্ম সম্পৰ্কীয় বহুতো প্ৰয়োগ আছে। আমি সেইবোৰৰ কেইটামান আলোচনা কৰিম আৰু ইয়াক প্ৰধানকৈ দুটা যোগাত্মক অখণ্ড সংখ্যাৰ গ.সা.উ. নিৰ্ণয় কৰাত ব্যৱহাৰ কৰিম।

আনহাতে, পাটীগণিতৰ মৌলিক উপপাদ্যই দুটা যোগাত্মক অখণ্ড সংখ্যাৰ গুণন সম্পৰ্কে কিছুমান কাম কৰাত সহায় কৰে। তোমালোকে ইতিমধ্যেই জানিছা যে— প্ৰতিটো যৌগিক সংখ্যাকে (composite number) কেতবোৰ মৌলিক সংখ্যাৰ পূৰণফল হিচাপে এক অদ্বিতীয় ৰূপত প্ৰকাশ কৰিব পাৰি— এই দৰকাৰী সত্যটোৱে হ'ল পাটীগণিতৰ মৌলিক উপপাদ্য। আকৌ এই ফলটো যিদৰে বৰ্ণিবলৈ আৰু বুজিবলৈ সহজ, একেদৰে গণিতৰ ক্ষেত্ৰত ইয়াৰ কিছুমান গভীৰ আৰু তাৎপৰ্যপূৰ্ণ প্ৰয়োগ আছে। পাটীগণিতৰ মৌলিক উপপাদ্যটোক আমি প্ৰধানকৈ দুটা মুখ্য প্ৰয়োগৰ বাবে ব্যৱহাৰ কৰো। প্ৰথমতে আমি ইয়াক তোমালোকে নৱম

শ্রেণীতে অধ্যয়ন কৰা $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ আৰু $\sqrt{5}$ ৰ দৰে বহুতো সংখ্যাৰ অপৰিমেয়ত্ব প্ৰমাণৰ বাবে ব্যৱহাৰ কৰো। দ্বিতীয়তে, এটা পৰিমেয় সংখ্যা যেনে $\frac{p}{q}$ $(q \neq 0)$ক কেতিয়া সাবধি (সীমিত) (terminating) আৰু কেতিয়া ইয়াক নিৰবধি পৌনঃপুনিক (non-terminating repeating) দশমিকত সঠিককৈ বিস্তাৰ কৰিব পাৰি তাৰ উদ্‌ঘাটনত আমি এই উপপাদ্যটো ব্যৱহাৰ কৰিম। আমি সেইটো $\frac{p}{q}$ ৰ হৰ q ৰ মৌলিক উৎপাদকীকৰণক লক্ষ্য কৰি কৰিম। তোমালোকে দেখিবলৈ পাবা যে q ৰ মৌলিক উৎপাদকীকৰণে $\frac{p}{q}$ ৰ দশমিক বিস্তাৰৰ প্ৰকৃতি সম্পূৰ্ণভাৱে প্ৰকাশ কৰিব।

গতিকে, আমি আমাৰ উদ্‌ঘাটন আৰম্ভ কৰোঁ আহা।

1.2 ইউক্লিডৰ বিভাজন প্ৰমেয়িকা (Euclid's Division Lemma)

তলৰ লোক-সাঁথৰটো লোৱা*।

এজন বেপাৰীয়ে কণী বেছি বজাৰে গৈ আছিল। এজন কাম কৰা নোহোৱা ধোদ (নিকৰ্মা) এজনে বেপাৰীটোৰ লগত কথাৰ তৰ্কাতৰ্কি আৰম্ভ কৰিলে। ইয়ে গৈ কাজিয়াত পৰিণত হ'ল। সি কণীৰ পাচিটো টনাটনি কৰি মাটিত বগৰাই দিলে। কণীবোৰ ভাগি থাকিল। বেপাৰীজনে পঞ্চায়তক বাবৌ কৰিলে ধোদজনক ভগা কণীৰ মূল্য পৰিশোধ কৰাবলৈ। পঞ্চায়তে বেপাৰীজনক সুধিলে, কিমান কণী ভাগিছিল? বেপাৰীয়ে তলত দিয়া উত্তৰবোৰ দিলে—

'যদি দুটাকৈ গণো, বাকী থাকে এটা;
যদি তিনিটাকৈ গণো, বাকী থাকে দুটা;
যদি চাৰিটাকৈ গণো, বাকী থাকে তিনিটা;
যদি পাঁচটাকৈ গণো, বাকী থাকে চাৰিটা;
যদি ছয়টাকৈ গণো, বাকী থাকে পাঁচটা;
যদি সাতটাকৈ গণো, বাকী নাথাকে এটাও,
মোৰ পাচিটোত পিছে 150 টাতকৈ বেছি কণী নধৰে।'

গতিকে তাত কিমানটা কণী আছিল? আমি চেষ্টা কৰি সাঁথৰটো সমাধা কৰোঁ আহা। ধৰা কণীৰ সংখ্যা a। তেন্তে, বিপৰীত মুখে হিচাপ কৰি আমি পাওঁ যে a, 150 তকৈ সৰু বা সমান।

* এ. ৰামপাল আৰু অইন কিছুমানৰ 'Numeracy Counts'ত দিয়া সাঁথৰ এটাৰ ই ৰূপভেদ (modification)।

যদি সাতটাকৈ গণা হয়, তেন্তে এটাও বাকী নাথাকে। ইয়াৰ অৰ্থ, $a = 7p + 0$, কোনো স্বাভাৱিক সংখ্যা pৰ ক্ষেত্ৰত।

যদি ছয়টাকৈ গণা হয়, পাঁচটা ৰয়। ইয়াৰ অৰ্থ, $a = 6q+5$, কোনো স্বাভাৱিক সংখ্যা qৰ ক্ষেত্ৰত।

যদি পাঁচটাকৈ গণা হয়, চাৰিটা ৰয়। ইয়াৰ অৰ্থ, $a = 5w + 4$, কোনো স্বাভাৱিক সংখ্যা w ৰ ক্ষেত্ৰত।

যদি চাৰিটাকৈ গণা হয়, তিনিটা বাকী ৰয়। ইয়াৰ অৰ্থ $a = 4s + 3$, কোনো স্বাভাৱিক সংখ্যা s ৰ ক্ষেত্ৰত।

যদি তিনিটাকৈ গণা হয়, দুটা বাকী ৰয়। ইয়াৰ অৰ্থ $a = 3t + 2$, কোনো স্বাভাৱিক সংখ্যা t ৰ ক্ষেত্ৰত।

যদি দুটাকৈ গণা হয়, এটা বাকী ৰয়। ইয়াৰ অৰ্থ $a = 2u + 1$, কোনো স্বাভাৱিক সংখ্যা uৰ ক্ষেত্ৰত। অৰ্থাৎ, প্ৰতিটো ক্ষেত্ৰতে, আমি পাওঁ a আৰু এটা যোগাত্মক অখণ্ড সংখ্যা b (আমাৰ উদাহৰণত b য়ে যথাক্ৰমে 7, 6, 5, 4, 3 আৰু 2 মানবোৰ গ্ৰহণ কৰিছে), যিয়ে a ক হৰণ কৰে আৰু b তকৈ সৰু এটা সংখ্যা r বাকী ৰাখে (আমাৰ ক্ষেত্ৰত r য়ে যথাক্ৰমে 0, 5, 4, 3, 2 আৰু 1 হৈছে)। বাস্তৱিকতে এনেবোৰ সমীকৰণ লিখাৰ প্ৰতি মুহূৰ্ত্তে আমি 1.1 উপপাদ্যত দিয়া ইউক্লিডৰ বিভাজ্যতাৰ প্ৰমেয়িকাটো ব্যৱহাৰ কৰি আহিছো।

সাঁথৰটোলৈ আকৌ উভতিলে, ইয়াৰ সমাধানৰ কিবা ধাৰণা তোমাৰ আছে নেকি? এবাৰু তুমি 7ৰ গুণিতকবোৰ চাব লাগিব যিয়ে আটাইবোৰ চৰ্ত সিদ্ধ কৰে। (ল.সা.গু.ৰ ধাৰণাৰে) প্ৰয়াস-প্ৰমাদ প্ৰণালীৰে (trail and error method) তুমি পাবা যে বেপাৰীজনৰ 119 টা কণী আছিল।

ইউক্লিডৰ বিভাজন প্ৰমেয়িকা কি তাক অনুভৱ কৰিবলৈ তলৰ অখণ্ড সংখ্যাৰ যোৰকেইটালৈ মন কৰা—

17, 6;   5, 12;   20, 4

উদাহৰণটোত কৰাৰ দৰে, আমি এনে প্ৰতিটো যোৰৰ ক্ষেত্ৰত তলৰ সম্পৰ্কবোৰ লিখিব পাৰোঃ

$17 = 6 \times 2 + 5$ (6 য়ে 17ৰ ভিতৰত দুবাৰ যায় আৰু 5 এটা বাকী ৰাখে)

$5 = 12 \times 0 + 5$ (এই সম্পৰ্কটো খাটে যিহেতু 12, 5 তকৈ ডাঙৰ)

$20 = 4 \times 5 + 0$ (ইয়াত 4, 20 ৰ ভিতৰত পাঁচবাৰ যায় আৰু কোনো বাকী নেৰাখে)

অৰ্থাৎ যোগাত্মক অখণ্ড a আৰু bৰ প্ৰতিযোৰৰ ক্ষেত্ৰতে আমি পূৰ্ণ সংখ্যা q আৰু r বিচাৰি পাম যাতে

$a = bq + r, 0 \le r < b$

এই সম্পৰ্কটো সিদ্ধ হয়। মন কৰা যে q বা r শূন্যও হ'ব পাৰে।

তলৰ অখণ্ড a আৰু b যোগাত্মক প্ৰতিযোৰ সংখ্যাৰ ক্ষেত্ৰত এতিয়া তোমালোকে q আৰু r অখণ্ড সংখ্যা দুটাকৈ উলিয়াব চেষ্টা নকৰা কিয়?

(i) 10, 3; (ii) 4, 19; (iii) 81, 3

তোমালোকে লক্ষ্য কৰিছিলা নেকি যে q আৰু r অদ্বিতীয়? ইহঁত দুটা একমাত্ৰ অখণ্ড সংখ্যা যিয়ে $a = bq + r$, য'ত $0 \leq r < b$, এই সম্পৰ্কবোৰ সিদ্ধ কৰে। তোমালোকে হয়তো আৰু অনুভৱ কৰিছা যে এইটো তোমালোকে ইমান বছৰে কৰি অহা দীৰ্ঘ হৰণ প্ৰণালীৰ পুনৰবিবৃতিৰ বাহিৰে একো নহয় আৰু q আৰু r অখণ্ড সংখ্যা দুটাও যথাক্ৰমে ভাগফল আৰু ভাগশেষৰ বাহিৰে একো নহয়।

এই ফলটোৰ এটা বিধিগত বিবৃতি তলত দিয়াৰ দৰে হ'ব

উপপাদ্য (Theorem) 1.1 (ইউক্লিডৰ বিভাজন প্ৰমেয়িকা) : দুটা যোগাত্মক অখণ্ড সংখ্যা a আৰু b, দিয়া থাকিলে এনে দুটা অদ্বিতীয় সংখ্যা q আৰু r থাকিব যাতে $a = bq + r, 0 \leq r < b$।

এই ফলটো সম্ভৱতঃ বহু আগৰে পৰাই জনাজাত আছিল কিন্তু ইয়াক ইউক্লিডৰ এলিমেণ্টছৰ VII কিতাপখনত প্ৰথমে অভিলেখন কৰা হৈছিল। ইউক্লিডৰ বিভাজন কলনবিধি এই প্ৰমেয়িকাটোৰ ওপৰতে ভিত্তি কৰা হৈছে।

কিছুমান সুসজ্জিত স্তৰৰ (স্তৰৰ) এটা শ্ৰেণীয়েই এটা **কলনবিধি (algorithm)** যিয়ে কোনো এক বিশেষ ধৰণৰ সমস্যা সমাধানৰ বাবে এটা প্ৰণালী আগবঢ়ায়।

নৱম শতিকাৰ পাৰ্চী গণিতজ্ঞ অল-খোৱাৰি জমীৰ নামটোৰ পৰাই 'এলগ'ৰিথিম' অৰ্থাৎ 'কলনবিধি' শব্দটোৰ উৎপত্তি হয়। প্ৰকৃততে, 'এলজেব্ৰা' (বীজগণিত) শব্দটোও আনকি তেওঁ লিখা 'হিচাব অল-জাবৰ ৱাল-মুকাবলা' নামৰ কিতাপ এখনৰপৰা ওলোৱা।

প্ৰমেয়িকা (lemma) এটা প্ৰমাণিত বিবৃতি যাক অইন বিবৃতি এটা প্ৰমাণ কৰাৰ বাবে ব্যৱহাৰ কৰা হয়।

মহম্মদ ইবন মুচা অল-খোৱাৰি জমী
(খৃষ্টাব্দ 780 – 850)

ইউক্লিডৰ বিভাজন কলনবিধি দুটা যোগাত্মক অখণ্ড সংখ্যাৰ গৰিষ্ঠ সাধাৰণ উৎপাদক (গ.সা.উ.) উলিওৱাৰ এটা কৌশল। মনত পেলোৱা যে দুটা যোগাত্মক অখণ্ড সংখ্যা a আৰু bৰ গ.সা.উ.

হ'ল a আৰু b উভয়কে হৰণ কৰা আটাইতকৈ ডাঙৰ যোগাত্মক অখণ্ড সংখ্যা d।

এটা উদাহৰণৰ সহায়ত প্ৰথমে আমি চাওঁ আহা কলনবিধি এটাই কিদৰে কাম কৰে। ধৰা আমি 455 আৰু 42ৰ গ.সা.উ. উলিয়াব লাগে। আমি দুয়োটাৰে ডাঙৰ সংখ্যাটো, অৰ্থাৎ 455 ৰে আৰম্ভ কৰো। পিছত আমি ইউক্লিডৰ প্ৰমেয়িকা ব্যৱহাৰ কৰি পাওঁ—

$$455 = 42 \times 10 + 35$$

এতিয়া ভাজক 42 আৰু ভাগশেষ 35 লোৱা। বিভাজন প্ৰমেয়িকা প্ৰয়োগ কৰি পাওঁ

$$42 = 35 \times 1 + 7$$

এতিয়া ভাজক 35 আৰু ভাগশেষ 7 লোৱা। বিভাজন প্ৰমেয়িকা প্ৰয়োগ কৰি পাওঁ

$$35 = 7 \times 5 + 0$$

লক্ষ্য কৰা যে ভাগশেষ শূন্য হ'ল আৰু আমি আগলৈ আগবাঢ়িব নোৱাৰিম। আমি কম যে, 455 আৰু 42 ৰ গ.সা.উ. এই পৰ্যায়ত সিহঁতৰ ভাজকটো অৰ্থাৎ 7। তোমালোকে 455 আৰু 42ৰ আটাইবোৰ উৎপাদকৰ তালিকা উলিয়াই এইটো সহজে সত্যাপন কৰি চাব পাৰিবা। এই পদ্ধতিটো বাৰু কিয় কাৰ্যকাৰী হয়? তলৰ ফলটোৰ বাবেই ই কাৰ্যকৰী হয়। সেয়ে, আমি স্পষ্টভাবে ইউক্লিডৰ বিভাজন কলনবিধিটো বৰ্ণাই লওঁ আহা।

দুটা যোগাত্মক অখণ্ড সংখ্যা, ধৰা c আৰু dৰ, যাতে $c > d$, গ.সা.উ. পাবলৈ তলৰ সোপান (পৰ্যায়)কেইটা অনুসৰণ কৰা :

সোপান (Step) 1 c আৰু dত ইউক্লিডৰ বিভাজন প্ৰমেয়িকা প্ৰয়োগ কৰা। তেতিয়া আমি পূৰ্ণ সংখ্যা q আৰু r পাম যাতে $c = dq + r$, $0 \leq r < d$.

সোপান (Step) 2 যদি $r = 0$, তেন্তে c আৰু dৰ গ.সা.উ. d। যদি $r \neq 0$, তেন্তে d আৰু rত বিভাজন প্ৰমেয়িকা প্ৰয়োগ কৰা।

সোপান (Step) 3 ভাগশেষ শূন্য পোৱালৈকে এই প্ৰণালীটো অব্যাহত ৰাখা। এই পৰ্যায়ত পোৱা ভাজকটোৱে হ'ব নিৰ্ণেয় গ.সা.উ.।

কলনবিধিটো কাৰ্যকৰী হ'ব কাৰণ গ.সা.উ.(c, d) = গ.সা.উ. (d, r) য'ত গ.সা.উ. (c, d) প্ৰতীকে c আৰু dৰ গ.সা.উ. বুজায় ইত্যাদি।

উদাহৰণ 1 : ইউক্লিডৰ কলনবিধি প্ৰয়োগ কৰি 4052 আৰু 12576ৰ গ.সা.উ. উলিওৱা।

সমাধান :

সোপান (Step) 1 যিহেতু 12576 > 4052, আমি 12576 আৰু 4052ৰ ওপৰত বিভাজন প্ৰমেয়িকা প্ৰয়োগ কৰি পাওঁ,

$$12576 = 4052 \times 3 + 420$$

সোপান (Step) 2 যিহেতু ভাগশেষ $420 \neq 0$, আমি 4052 আৰু 420ৰ ওপৰত বিভাজন

প্ৰমেয়িকা প্ৰয়োগ কৰি পাওঁ,

$$4052 = 420 \times 9 + 272$$

সোপান (Step) 3 : আমি নতুন ভাজক 420 আৰু নতুন ভাগশেষ 272 বাচি লৈ আৰু বিভাজন প্ৰমেয়িকা প্ৰয়োগ কৰি পাওঁ,

$$420 = 272 \times 1 + 148$$

আকৌ নতুন ভাজক 272 আৰু নতুন ভাগশেষ 148 বিবেচনা কৰি আৰু বিভাজন প্ৰমেয়িকা প্ৰয়োগ কৰি আমি পাওঁ,

$$272 = 148 \times 1 + 124$$

নতুন ভাজক 148 আৰু নতুন ভাগশেষ 124 বিবেচনা কৰি আৰু বিভাজন প্ৰমেয়িকা প্ৰয়োগ কৰি আমি পাওঁ,

$$148 = 124 \times 1 + 24$$

এতিয়া নতুন ভাজক 124 আৰু নতুন ভাগশেষ 24 বিবেচনা কৰি আৰু বিভাজন প্ৰমেয়িকা প্ৰয়োগ কৰি আমি পাওঁ,

$$124 = 24 \times 5 + 4$$

আকৌ নতুন ভাজক 24 আৰু নতুন ভাগশেষ 4 লৈ আৰু বিভাজন প্ৰমেয়িকা প্ৰয়োগ কৰি আমি পাওঁ,

$$24 = 4 \times 6 + 0$$

ইয়াত ভাগশেষ এতিয়া শূন্য হ'ল, গতিকে আমাৰ প্ৰণালীও বন্ধ হ'ব। যিহেতু এই পৰ্যায়ত ভাজক 4, গতিকে 12576 আৰু 4052ৰ গ.সা.উ. 4

লক্ষ্য কৰা যে 4 = গ.সা.উ. (24, 4) = গ.সা.উ. (124, 24) = গ.সা.উ. (148, 124)

= গ.সা.উ. (272, 148) = গ.সা.উ. (420, 272)

= গ.সা.উ. (4052, 420) = গ.সা.উ. (12576, 4052)

ইউক্লিডৰ বিভাজন কলনবিধি অকল বৰ ডাঙৰ সংখ্যাৰ গ.সা.উ. উলিওৱাৰ কাৰণেহে যে উপকাৰী এনে নহয়, কিন্তু এটা কম্পিউটাৰে পালন কৰিবলগীয়া প্ৰপ্ৰেমিত্তৰ কলনবিধিৰ আদিম উদাহৰণবোৰৰ ভিতৰত ইও এটা।

মন্তব্য (Remark) :

1. ইউক্লিডৰ বিভাজন প্ৰমেয়িকা আৰু কলনবিধি ইমান ঘনিষ্ঠভাবে জড়িত যে মানুহে প্ৰায়েই প্ৰথমটোকে বিভাজন কলনবিধি বুলিও কয়।
2. যদিও ইউক্লিডৰ বিভাজন কলনবিধিক অকল যোগাত্মক অখণ্ড সংখ্যাৰ কাৰণেহে বৰ্ণোৱা হৈছে, ইয়াক শূন্যৰ বাহিৰে অৰ্থাৎ $b \neq 0$, আটাইবোৰ অখণ্ড সংখ্যালৈকে বিস্তাৰ কৰিব পাৰি। বিয়েই নহওক, আমি এই দিশটোৰ বিষয়ে ইয়াত আলোচনা নকৰিম।

সংখ্যাৰ ধৰ্ম নিৰ্ণয় সম্পৰ্কত ইউক্লিডৰ বিভাজন প্ৰমেয়িকাৰ্কলনবিধিৰ অজস্ৰ প্ৰয়োগ আছে।

আমি তাৰে কেইটামান উদাহৰণ তলত দিলো :

উদাহৰণ 2 : দেখুওৱা যে প্ৰত্যেক যোগাত্মক যুগ্ম অখণ্ড সংখ্যা $2q$ আৰ্হিৰ আৰু প্ৰত্যেক যোগাত্মক অযুগ্ম অখণ্ড সংখ্যাই $2q + 1$ আৰ্হিৰ, য'ত q কোনো অখণ্ড সংখ্যা।

সমাধান : ধৰা a যিকোনো যোগাত্মক সংখ্যা আৰু $b = 2$। তেন্তে ইউক্লিডৰ কলনবিধিৰ সহায়ত $a = 2q + r$, য'ত $q \geq 0$, আৰু $r = 0$ বা $r = 1$, কাৰণ $0 \leq r < 2$। গতিকে $a = 2q$ বা $a = 2q + 1$।

যদি $a = 2q$ আৰ্হিৰ, তেন্তে a এটা যুগ্ম অখণ্ড সংখ্যা। আকৌ এটা যোগাত্মক অখণ্ড সংখ্যাই হয় যুগ্ম নাইবা অযুগ্ম। গতিকে যিকোনো যোগাত্মক যুগ্ম অখণ্ড সংখ্যাই $2q + 1$ আৰ্হিৰ হ'ব।

উদাহৰণ 3 : দেখুওৱা যে যিকোনো যোগাত্মক অযুগ্ম অখণ্ড সংখ্যাই $4q + 1$ নাইবা $4q + 3$ আৰ্হিৰ য'ত q কোনোবা এটা অখণ্ড সংখ্যা।

সমাধান : আমি এটা যোগাত্মক অযুগ্ম সংখ্যা a ৰে আৰম্ভ কৰোহঁক। আমি এইটো a লৈ আৰু $b = 4$ ধৰি বিভাজন কলনবিধি প্ৰয়োগ কৰোঁ।

যিহেতু $0 \leq r < 4$, যোগাত্মক ভাগশেষবোৰ 0, 1, 2 আৰু 3 অৰ্থাৎ a যে $4q$ বা $4q+1$ বা $4q + 2$ নাইবা $4q + 3$ হে হ'ব পাৰে য'ত q ভাগফল। যিয়েই নহওক, যিহেতু a অযুগ্ম, a যে $4q$ বা $4q + 2$ হ'ব নোৱাৰে (যিহেতু ইহঁত দুয়ো 2 ৰে বিভাজ্য)। গতিকে যিকোনো অযুগ্ম অখণ্ড সংখ্যা $4q + 1$ নাইবা $4q + 3$ আৰ্হিৰ।

উদাহৰণ 4 : এজন মিঠাই বেপাৰীৰ 420 টা কাজু বৰফি আৰু 130 টা বাদাম বৰফি আছে। তেওঁ সেইবোৰ কেইটামান থাকত এনেদৰে সজাব বিচাৰিলে যে প্ৰতিটো থাকতে সমান সংখ্যক মিঠাই থাকে আৰু ট্ৰেখনত এইবোৰে আটাইতকৈ কম ঠাই আগুৰে। এই উদ্দেশ্যৰে থাকবোৰ সজাব খুজিলে প্ৰতিটো থাকতে কিমান সংখ্যক মিঠাই থাকিব?

সমাধান : প্ৰয়াস-প্ৰমাদ প্ৰণালীৰ সহায়ত এইটো সমাধান কৰিব পাৰি। কিন্তু পদ্ধতিযুক্তভাৱে কৰিবলৈ আমি গ.সা.উ. (420, 130) উলিয়াব লাগিব। তেতিয়া এই সংখ্যাটোৱে প্ৰতিটো থাকতে সৰ্বোচ্চ সংখ্যক বৰফি দিব আৰু থাকৰ সংখ্যাও নিম্নতম হ'ব।

এতিয়া সংখ্যা দুটাৰ গ.সা.উ. নিৰ্ণয় কৰিবলৈ আমি ইউক্লিডৰ কলনবিধি ব্যৱহাৰ কৰোহঁক। আমি পাওঁ—

$$420 = 130 \times 3 + 30$$
$$130 = 30 \times 4 + 10$$
$$30 = 10 \times 3 + 0$$

$\therefore$ 420 আৰু 130 ৰ গ.সা.উ. হ'ব 10।

গতিকে মিঠাই বিক্ৰেতাজনে দুয়োধৰণৰ বৰফিকে 10 টাকৈ প্ৰতিটো থাকতে সজাব।

অনুশীলনী 1.1

1. ইউক্লিডৰ কলনবিধি ব্যৱহাৰ কৰি গ.সা.উ. উলিওৱা—
   (i) 135 আৰু 225 (ii) 196 আৰু 38220 (iii) 867 আৰু 255
2. দেখুওৱা যে যিকোনো যোগাত্মক অযুগ্ম অখণ্ড সংখ্যাই $6q + 1$, বা $6q + 3$, বা $6q+5$ আৰ্হিৰ, য'ত q এটা কোনোবা অখণ্ড সংখ্যা।
3. 616 সদস্যৰ এটা সৈন্যবাহিনীৰ গোটে 32 জনীয়া এটা সেনাদলৰ পিছে পিছে কদম-খোজ কাঢ়ি কাঢ়ি যাবলগীয়া হ'ল। দুয়োটা দলেই একে সমান সংখ্যক স্তম্ভত কদম-খোজ কাঢ়িবলগীয়া হ'ল। তেওঁলোকে খোজ কাঢ়িবলগীয়া স্তম্ভৰ উচ্চতম সংখ্যা কি হ'ব?
4. ইউক্লিডৰ বিভাজন প্ৰমেয়িকা ব্যৱহাৰ কৰি দেখুওৱা যে যিকোনো যোগাত্মক অখণ্ড সংখ্যাৰ বৰ্গ হয় $3m$ নাইবা $3m + 1$ আৰ্হিৰ, য'ত m এটা কোনোবা অখণ্ড সংখ্যা। [ইংগিত : ধৰা x এটা যিকোনো যোগাত্মক অখণ্ড সংখ্যা। তেন্তে ইয়াৰ আৰ্হি হ'ব $3q$, $3q + 1$ বা $3q + 2$ এতিয়া ইহঁতৰ প্ৰতিটোকে বৰ্গ কৰা আৰু দেখুওৱা যে সিহঁতক $3m$ বা $3m + 1$ আৰ্হিত লিখিব পাৰি।]
5. ইউক্লিডৰ বিভাজন প্ৰমেয়িকা ব্যৱহাৰ কৰি দেখুওৱা যে যি কোনো যোগাত্মক অখণ্ড সংখ্যাৰ ঘনফলটো $9m$, $9m + 1$ নাইবা $9m + 8$ আৰ্হিৰ।

1.3. পাটীগণিতৰ মৌলিক উপপাদ্য (The Fundamental Theorem of Arithmetic)

আগৰ শ্ৰেণীবোৰত তোমালোকে দেখিছা যে যিকোনো স্বাভাৱিক সংখ্যাকে ইয়াৰ মৌলিক উৎপাদকবোৰৰ পূৰণফল হিচাপে লিখিব পাৰি। উদাহৰণস্বৰূপে $2 = 2$, $4 = 2 \times 2$, $253 = 11 \times 23$ আৰু ইত্যাদি। এতিয়া আমি স্বাভাৱিক সংখ্যাবোৰক অইনটো দিশৰ পৰা চাবলৈ চেষ্টা কৰো আহা। যেনে ধৰা, যিকোনো স্বাভাৱিক সংখ্যাকে মৌলিক সংখ্যা কিছুমানক পূৰণ কৰি পাব পাৰিনে? আমি চাওঁ।

যিকোনো মৌলিক সংখ্যা কিছুমান লোৱা, যেনে— 2, 3, 7, 11 আৰু 23। আমি যদি ইয়াৰে কিছুমান নাইবা আটাইবোৰকে পূৰণ কৰো আৰু একোটাকে যিমান ইচ্ছা সিমানবাৰেই পূৰণ কৰো, তেন্তে আমি এক বৃহৎ সংখ্যক যোগাত্মক অখণ্ড সংখ্যা উৎপন্ন কৰিব পাৰো (প্ৰকৃততে, অসীমভাৱে অজস্ৰ)। আমি সিহঁতৰ কেতবোৰ এইদৰে দেখুৱাব পাৰো—

$7 \times 11 \times 23 = 1771$ $\qquad$ $3 \times 7 \times 11 \times 23 = 5313$

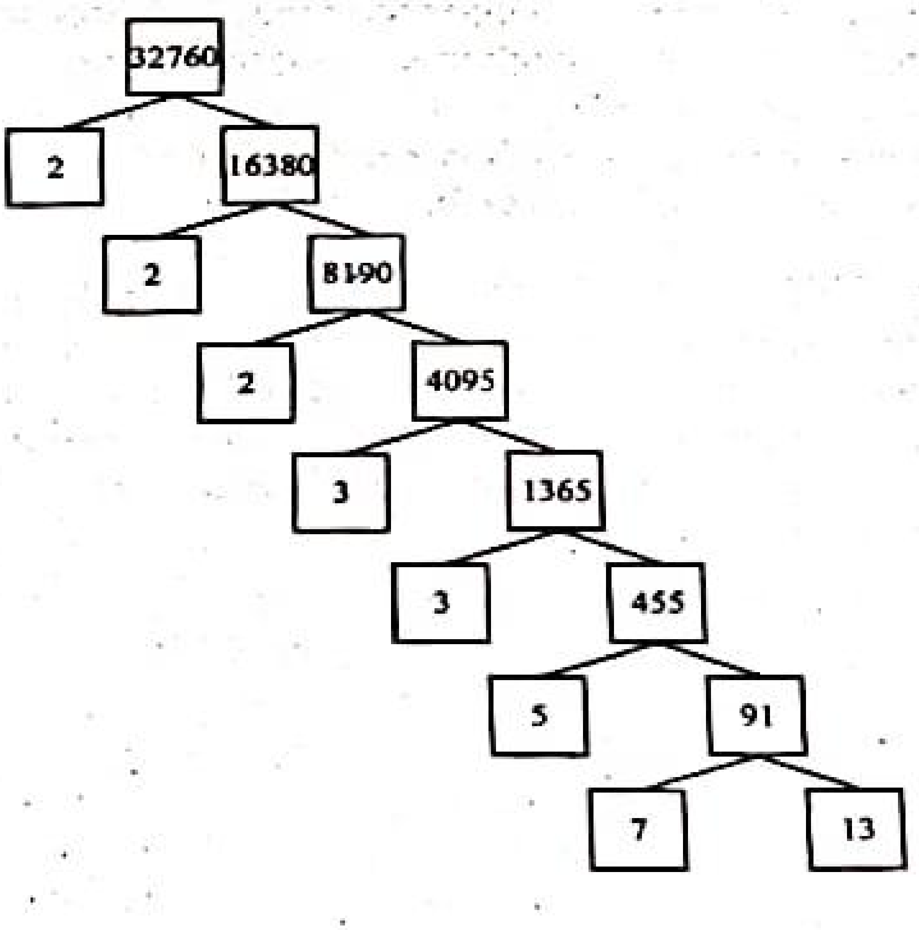
$2 \times 3 \times 7 \times 11 \times 23 = 10626$ $\qquad$ $2^3 \times 3 \times 7^3 = 8232$

$2^2 \times 3 \times 7 \times 11 \times 23 = 21252$ ইত্যাদি বহুতো।

এতিয়া ধৰা তুমি লোৱা মৌলিক সংখ্যাৰ সংগ্ৰহটোত সম্ভৱপৰ আটাইবোৰ মৌলিক সংখ্যা আছে। এই সংগ্ৰহটোৰ আকাৰ সম্বন্ধে তোমাৰ ধাৰণা কি? ইয়াত কেৱল সসীম সংখ্যক অখণ্ড

সংখ্যা থাকিব, নে অসীম সংখ্যক? প্ৰকৃততে মৌলিক সংখ্যা অসীম সংখ্যক আছে। গতিকে, যদি আমি এই মৌলিক সংখ্যাবোৰ সকলো সম্ভৱপৰ ধৰণে লগ লগাওঁ, আমি অসীম সংখ্যক সংখ্যাৰ এটা সংগ্ৰহ পাম, আটাইবোৰ মৌলিক আৰু মৌলিকৰ সম্ভৱপৰ আটাইবোৰ গুণফল। প্ৰশ্নটো হ'ল— এইদৰে আমি আটাইবোৰ যৌগিক সংখ্যাকেই উৎপন্ন কৰিব পাৰো নেকি; তোমালোকে কি ভাবা? তোমালোকে ভাবা নেকি যে এনে এটা যৌগিক সংখ্যা থাকিব পাৰে যি মৌলিকৰ ঘাতবোৰৰ গুণফল নহয়? এইটোৰ উত্তৰ দিয়াৰ আগতে, আমি যোগাত্মক অখণ্ড সংখ্যাৰ উৎপাদক উলিয়াওঁ, অৰ্থাৎ আমি এতিয়ালৈ যি কৰিছো তাৰ বিপৰীতটো কৰোঁ আহা।

তোমালোক আটাইৰে পৰিচিত উৎপাদক বৃক্ষকে আমি ব্যৱহাৰ কৰিব গৈছো। আমি এটা ডাঙৰ সংখ্যা লওঁ, ধৰা 32760, আৰু ইয়াক তলত দিয়া ধৰণে উৎপাদক বিশ্লেষণ কৰোঁ :



গতিকে আমি 32760 ক মৌলিকৰ গুণফল হিচাপে $2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7 \times 13$,

অর্থাৎ $32760 = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7 \times 13$ বা মৌলিকৰ ঘাতৰ গুণফলৰূপে উৎপাদকত ভাঙিব পাৰো। আমি অইন এটা সংখ্যা চেষ্টা কৰি চাওঁ; ধৰা 123456789, ইয়াক এইদৰে লিখিব পাৰি— $3^2 \times 3803 \times 3607$। অৱশ্যে তুমি পৰীক্ষা কৰিব লাগিব যে 3803 আৰু 3607 মৌলিকহে (নিজে অইন কেবাটাও স্বাভাৱিক সংখ্যা লৈ চেষ্টা কৰা) ইয়ে আমাক এটা অনুমানলৈ লৈ যাব যে, প্ৰত্যেক যৌগিক সংখ্যাকে মৌলিক সংখ্যাৰ ঘাতৰ গুণফল ৰূপে লিখিব পাৰি। প্ৰকৃততে, এই বিবৃতিটো সত্য আৰু অখণ্ড সংখ্যাৰ অধ্যয়নত ইয়াৰ মৌলিক নিৰ্ণায়ক গুৰুত্বপূৰ্ণ ভূমিকাৰ বাবে ইয়াক বোলা হয় **পাটীগণিতৰ মৌলিক উপপাদ্য**। এতিয়া আমি বিধিগতভাৱে এই উপপাদ্যটো বৰ্ণনা কৰো আহা :

উপপাদ্য (Theorem) 1.2(পাটীগণিতৰ মৌলিক উপপাদ্য) : *প্ৰত্যেক যৌগিক সংখ্যাকেই মৌলিকৰ গুণফল হিচাপে প্ৰকাশ (উৎপাদকত) কৰিব পাৰি; আৰু মৌলিক উৎপাদকবোৰ প্ৰকাশ পোৱা ক্ৰমৰ বাহিৰে এই উৎপাদকীকৰণ অদ্বিতীয়।*

উপৰিউক্ত 1.2 উপপাদ্যটো এনেদৰে পাটীগণিতৰ মৌলিক উপপাদ্যৰূপে জনাজাত হোৱাৰ আগতেই ইয়াৰ এটা সমাৰ্থক উক্তি সম্ভৱতঃ ইউক্লিডৰ এলিমেণ্টছৰ কিতাপ IX ৰ সম্পাদ্য 14 ত উল্লেখিত হৈছিল। হ'লেও, ইয়াৰ প্ৰথম শুদ্ধ প্ৰমাণটো কাৰ্ল ফ্ৰেডৰিক গাউছে তেওঁৰ 'ডিছকুইজিচন্‌চ এৰিথমেটিকা'ত দাঙি ধৰিছিল।

কাৰ্ল ফ্ৰেডৰিক গাউছক প্ৰায়েই 'গণিতজ্ঞসকলৰ ৰাজকুমাৰ' বুলি অভিহিত কৰা হয়। আৰ্কিমিডিছ্ আৰু নিউটনৰ সৈতে গাউছক সৰ্বকালৰ শ্ৰেষ্ঠ গণিতজ্ঞ তিনিজনৰ ভিতৰত এজন বুলি মনা হয়। তেওঁ গণিত আৰু বিজ্ঞান উভয়তে বহুতো মৌলিক অৱদান আগবঢ়াই গৈছে।

কাৰ্ল ফ্ৰেডৰিক গাউছ
(1777 – 1855)

পাটীগণিতৰ মৌলিক উপপাদ্যটোৱে কৈছে যে প্ৰত্যেক যৌগিক সংখ্যাকেই মৌলিক সংখ্যাৰ গুণফলৰূপে উৎপাদকত ভাঙিব পাৰি। প্ৰকৃতাৰ্থত ই তাতোকৈ বেছিকৈ কয়। ইয়েই কয় যে প্ৰদত্ত যিকোনো এটা যৌগিক সংখ্যাক মৌলিক সংখ্যাৰ গুণফলৰূপে আৰু মৌলিক উৎপাদকবোৰ প্ৰকাশ পোৱা ক্ৰমৰ বাহিৰে ইয়াক এক অদ্বিতীয়ভাৱে উৎপাদকত ভাঙিব পাৰি। অৰ্থাৎ যিকোনো এটা যৌগিক সংখ্যা দিয়া থাকিলে, ইয়াৰ মৌলিকবোৰৰ ক্ৰম সম্পৰ্কে বিশেষভাৱে ধ্যান দিয়া নোহোৱালৈকে তাক এক আৰু মাত্ৰ এক ধৰণেহে মৌলিকৰ গুণফলৰূপে প্ৰকাশ কৰিব পাৰি। সেয়ে, উদাহৰণস্বৰূপে, $2 \times 3 \times 5 \times 7$ গুণফলটোক $3 \times 5 \times 7 \times 2$ নাইবা অইন যিকোনো সম্ভৱপৰ ক্ৰমত মৌলিকবোৰ লিখা থাকিলেও আমি একেই বুলি ধৰিম। এই সত্যটোক তলত

দিয়া ধৰণেও বৰ্ণোৱা হয় :

উৎপাদকবোৰৰ ক্ৰমৰ বাহিৰে, এটা স্বাভাৱিক সংখ্যাৰ মৌলিক উৎপাদকীকৰণ অদ্বিতীয়। সাধাৰণতে, এটা যৌগিক সংখ্যা x দিয়া থাকিলে, আমি ইয়াক $x = p_1 p_2 \dots p_n$, য'ত $p_1, p_2, \dots, p_n$ বোৰ মৌলিক আৰু উৰ্ধক্ৰমত লিখা হয়, অৰ্থাৎ $p_1 \le p_2 \le \dots \le p_n$. একেবোৰ মৌলিকক যদি আমি লগ লগাও, আমি মৌলিকৰ ঘাত পাম। উদাহৰণস্বৰূপে,

$$32760 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7 \times 13 = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7 \times 13$$

ক্ৰমটো উৰ্ধহাৰত থকাটো এবাৰ সিদ্ধান্ত কৰি ল'লে যি ধৰণে সংখ্যাটো উৎপাদকীকৰণ হয় সেইটো অদ্বিতীয়।

পাটীগণিতৰ মৌলিক উপপাদ্যটোৰ প্ৰয়োগ গণিতৰ ভিতৰ আৰু বাহিৰ ক্ষেত্ৰতো বহুতো আছে। আমি কেইটামান উদাহৰণলৈ চকু ফুৰাওঁ আহা।

উদাহৰণ 5 : 4^n সংখ্যাবোৰ লোৱা, য'ত n এটা স্বাভাৱিক সংখ্যা। n ৰ এনে কোনো মান আছে নেকি যাতে 4^nৰ মান শূন্য অংকটোৰে শেষ হয়, পৰীক্ষা কৰা।

সমাধান : n ৰ কোনো মানৰ ক্ষেত্ৰত যদি 4^n সংখ্যাটো শূন্য অংকটোৰে শেষ হ'বলগীয়া হয়, তেন্তে ই 5ৰে বিভাজ্য হ'ব। ইয়াৰ অৰ্থ, 4^nৰ মৌলিক উৎপাদকীকৰণত 5 মৌলিক সংখ্যাটো থাকিব। এইটো সম্ভৱ নহয়, কাৰণ $4^n = (2)^{2n}$; অৰ্থাৎ 4^n ৰ উৎপাদকীকৰণত একল মৌলিক 2হে থাকিব। গতিকে পাটীগণিতৰ মৌলিক উপপাদ্যই নিশ্চিত কৰে যে 4^nৰ উৎপাদকীকৰণত আইন কোনো মৌলিক উৎপাদক নাই। সেয়ে এনে কোনো স্বাভাৱিক সংখ্যা n নাই যাৰ ক্ষেত্ৰত 4^nয়ে শূন্য অংকেৰে শেষ হয়।

পাটীগণিতৰ মৌলিক উপপাদ্য সম্পৰ্কে কোনো অনুভৱ নকৰাকৈয়ে তোমালোকে আগৰ শ্ৰেণীবোৰত ইয়াৰ সহায় লৈয়ে কিদৰে দুটা সংখ্যাৰ গ.সা.উ. আৰু ল.সা.গু. উলিয়াব লাগে তাক শিকিছা। এই পদ্ধতিটোক মৌলিক উৎপাদকীকৰণ পদ্ধতি বুলিও কোৱা হয়। এটা উদাহৰণেৰে আমি এই পদ্ধতিটো মনত পেলাওঁ আহা।

উদাহৰণ 6 : মৌলিক উৎপাদকীকৰণ পদ্ধতিৰে 6 আৰু 20ৰ ল.সা.গু. আৰু গ.সা.উ. উলিওৱা।

সমাধান : আমি পাওঁ, $6 = 2^1 \times 3^1$

আৰু $20 = 2 \times 2 \times 5 = 2^2 \times 5^1$

তোমাৰ আগৰ শ্ৰেণীত কৰি অহাৰ দৰে, উলিয়াব পাৰা যে, গ.সা.উ.$(6, 20) = 2$ আৰু ল.সা.গু.$(6, 20) = 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 60$।

লক্ষ্য কৰা যে, গ.সা.উ.$(6, 20) = 2^1 =$ **সংখ্যা দুটাত থকা প্ৰতিটো সাধাৰণ মৌলিক উৎপাদকৰ ক্ষুদ্ৰতম ঘাতৰ গুণফল।**

ল.সা.গু $(6, 20) = 2^2 \times 3^1 \times 5^1 =$ **সংখ্যা দুটাত থকা প্ৰতিটো মৌলিক উৎপাদকৰ বৃহত্তম ঘাতৰ গুণফল।**

ওপৰৰ উদাহৰণৰপৰা তুমি পোৱা যে,

গ.সা.উ (6, 20) × ল.সা.গু. (6, 20) = 6 × 20।

প্ৰকৃততে আমি সত্যাপন কৰিব পাৰো যে—

যিকোনো দুটা অখণ্ড সংখ্যা a আৰু bৰ ক্ষেত্ৰত গ.সা.উ. (a, b) × ল.সা.গু. $(a, b) = a \times b$।

দুটা অখণ্ড সংখ্যাৰ ল.সা.গু উলিয়াবলৈ আমি এই ফলটো ব্যৱহাৰ কৰিব পাৰো যদিহে আমি এই অখণ্ড সংখ্যা দুটাৰ গ.সা.উ. ইতিমধ্যে পাইছো।

উদাহৰণ 7 : মৌলিক উৎপাদকীকৰণ পদ্ধতিৰে 96 আৰু 404ৰ গ.সা.উ. উলিওৱা। ইয়াৰপৰা সিহঁতৰ ল.সা.গু. উলিওৱা।

সমাধান : 96 আৰু 404ৰ মৌলিক উৎপাদকীকৰণে দিব

$96 = 2^5 \times 3,$ $\quad\quad 404 = 2^2 \times 101$

গতিকে এই অখণ্ড সংখ্যা দুটাৰ গ.সা.উ. হ'ব $= 2^2 = 4$।

$$\text{আকৌ ল.সা.গু.}\ (96, 404) = \frac{96 \times 404}{\text{গ.সা.উ.}\ (96, 404)} = \frac{96 \times 404}{4} = 9696$$

উদাহৰণ 8 : মৌলিক উৎপাদকীকৰণ পদ্ধতিৰে 6, 72 আৰু 120ৰ গ.সা.উ. আৰু ল.সা.গু. উলিওৱা।

সমাধান : আমি পাওঁ

$6 = 2 \times 3,$ $\quad 72 = 2^3 \times 3^2,$ $\quad 120 = 2^3 \times 3 \times 5$

ইয়াত 2^1 আৰু 3^1 দুয়ো যথাক্ৰমে 2 আৰু 3 এই সাধাৰণ উৎপাদক দুটাৰ নিম্নতম ঘাত।

গতিকে, গ.সা.উ. (6, 72, 120) $= 2^1 \times 3^1 = 2 \times 3 = 6$

সংখ্যা তিনিটা থকা 2, 3, আৰু 5 এই মৌলিক উৎপাদককেইটাৰ যথাক্ৰমে 2^3, 3^2 আৰু 5^1 বৃহত্তম ঘাত।

গতিকে ল.সা.গু. (6, 72, 120) $= 2^3 \times 3^2 \times 5^1 = 360$।

মন্তব্য (Remark) : মন কৰা, $6 \times 72 \times 120 \neq$ গ.সা.উ. (6, 72, 120) × ল.সা.গু. (6, 72, 120)। গতিকে সংখ্যা তিনিটাৰ গুণফলটো সিহঁতৰ গ.সা.উ. আৰু ল.সা.গু.ৰ গুণফলৰ সমান নহ'ব পাৰে।

অনুশীলনী 1.2

1. প্ৰতিটো সংখ্যাকে ইয়াৰ মৌলিক উৎপাদকবোৰৰ গুণফল হিচাপে প্ৰকাশ কৰা :

   (i) 140 (ii) 156 (iii) 3825 (iv) 5005 (v) 7429

2. তলৰ অখণ্ড সংখ্যাকেইযোৰৰ ল.সা.গু. আৰু গ.সা.উ. উলিওৱা। সত্যাপন কৰা যে ল.সা.গু. × গ.সা.উ. = সংখ্যাদুটাৰ গুণফল।

   (i) 26 আৰু 91 (ii) 510 আৰু 92 (iii) 336 আৰু 54

3. মৌলিক উৎপাদকীকৰণ পদ্ধতিৰে তলৰ অখণ্ড সংখ্যাবোৰৰ ল.সা.গু. আৰু গ.সা.উ. উলিওৱা।

(i) 12, 15 আৰু 21 (ii) 17, 23 আৰু 29 (iii) 8, 9 আৰু 25

4. দিয়া আছে গ.সা.উ. (306, 657) = 9। ল.সা.গু. (306, 657) উলিওৱা।

5. পৰীক্ষা কৰা, কোনোৱা স্বাভাৱিক সংখ্যা n ৰ ক্ষেত্ৰত 6^n সংখ্যাটো 0 অংকেৰে শেষ হ'ব পাৰেনে নাই।

6. $7 \times 11 \times 13 + 13$ আৰু $7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 + 5$ সংখ্যা দুটা কিয় যৌগিক সংখ্যা, ব্যাখ্যা কৰা।

7. এখন খেল পথাৰৰ চাৰিওপিনে এটা বৃত্তাকাৰ পথ। খেল পথাৰখন গাড়ীৰে এবাৰ ঘুৰিবলৈ ছোনিয়াৰ 18 মিনিট লাগে, য'ত একেটা ঘুৰণতে ৰবিৰ লাগে 12 মিনিট। ধৰা তেওঁলোকে একেটা বিন্দুতে একে সময়তে আৰু একেটা দিশত যাত্ৰা আৰম্ভ কৰে। কিমান মিনিট পিছত তেওঁলোক আকৌ আৰম্ভণিৰ বিন্দুটোত লগ লাগিব?

1.4 অপৰিমেয় সংখ্যালৈ পুনৰ উভতি যাওঁ (Revisiting Irrational Numbers)

নৱম শ্ৰেণীত তোমালোকক অপৰিমেয় সংখ্যা আৰু এইবোৰৰ বহুতো ধৰ্মৰ লগত পৰিচয় কৰোৱা হৈছে। তোমালোকে সেইবোৰৰ অস্তিত্ব আৰু কিদৰে পৰিমেয় আৰু অপৰিমেয়বোৰ লগ হৈ বাস্তৱ সংখ্যাবোৰ গঠন কৰিছে তাৰ বিষয়ে অধ্যয়ন কৰিছিলা। তোমালোকে আনকি অপৰিমেয় সংখ্যাবোৰ সংখ্যাৰেখাৰ ওপৰত কিদৰে স্থান নিৰ্ণয় কৰিব পাৰি তাকো অধ্যয়ন কৰিছিলা। কিন্তু সেইবোৰ যে অপৰিমেয় সংখ্যা আছিল তাক আমি প্ৰমাণ কৰা নাছিলো। এই অনুচ্ছেদত, আমি প্ৰমাণ কৰিম যে $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ আৰু $\sqrt{5}$, আৰু সাধাৰণতে, যদি p মৌলিক তেন্তে $\sqrt{p}$ এটা অপৰিমেয় সংখ্যা। প্ৰমাণ কৰোঁতে আমি ব্যৱহাৰ কৰা উপপাদ্যবোৰৰ ভিতৰত এটা হ'ব পাটীগণিতৰ মৌলিক উপপাদ্য।

মনত পেলোৱা যে এটা সংখ্যা 's' ক অপৰিমেয় বোলে যদি ইয়াক $\frac{p}{q}$ আৰ্হিত, য'ত p, q অখণ্ড সংখ্যা আৰু $q \neq 0$, প্ৰকাশ কৰিব নোৱাৰি। তোমালোকে ইতিমধ্যে সুপৰিচিত হোৱা অপৰিমেয় সংখ্যা কেতবোৰৰ উদাহৰণ হ'ল, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, π, $-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, 0.10110111011110..., ইত্যাদি।

$\sqrt{2}$ অপৰিমেয় বুলি প্ৰমাণ কৰাৰ আগেয়ে আমাক তলৰ উপপাদ্যটো লাগিব, যাৰ প্ৰমাণ 'পাটীগণিতৰ মৌলিক উপপাদ্য'ৰ ওপৰত ভিত্তি কৰা হয়।

উপপাদ্য 1.3 : *ধৰা p মৌলিক। যদি p য়ে a^2ক হৰণ কৰে, তেন্তে p য়ে aক হৰণ কৰিব, য'ত a এটা যোগাত্মক অখণ্ড সংখ্যা।*

*প্রমাণ : ধৰা aৰ মৌলিক উৎপাদকীকৰণ এনে,
$a = p_1p_2 \ldots p_n$, য'ত $p_1, p_2, \ldots, p_n$ আদি মৌলিক, কিন্তু স্পষ্ট হোৱাৰ আৱশ্যক নাই। গতিকে $a^2 = (p_1p_2 \ldots p_n)(p_1p_2 \ldots p_n) = p^2_1p^2_2 \ldots p^2_n$।

এতিয়া আমাক দিয়া আছে যে p য়ে a^2ক হৰণ কৰে। সেয়ে পাটীগণিতৰ মৌলিক উপপাদ্যৰ পৰা পাওঁ যে a^2ৰ মৌলিক উৎপাদকবোৰৰ ভিতৰত pয়ো এটা। যিয়েই নহওঁক, পাটীগণিতৰ মৌলিক উপপাদ্য ব্যৱহাৰ কৰি আমি গম পাওঁ যে a^2ৰ একমাত্ৰ মৌলিক উৎপাদকবোৰ হ'ব— $p_1, p_2, \ldots, p_n$। সেয়ে $p_1, p_2, \ldots, p_n$বোৰৰ ভিতৰত p য়ো এটা হ'ব। এতিয়া যিহেতু $a = p_1\, p_2 \ldots p_n$, গতিকে pয়ে aক হৰণ কৰিব।

এতিয়া আমি $\sqrt{2}$ যে অপৰিমেয় তাৰ প্ৰমাণ এটা দিবৰ বাবে প্ৰস্তুত হ'লো। প্ৰমাণটো 'বিৰুদ্ধৰ সহায়ত প্ৰমাণ' (proof by contradiction) নামৰ বিশেষ প্ৰবিধি (কৌশল) এটাৰ ওপৰত ভিত্তি কৰা হয়। (এই প্ৰবিধিটো অলপ বিতংভাৱে পৰিশিষ্ট-1অত আলোচনা কৰা হৈছে)

উপপাদ্য (Theorem) 1.4 : $\sqrt{2}$ অপৰিমেয়

প্ৰমাণ : ওপৰৰ উক্তিটোৰ বিৰুদ্ধে আমি ধৰি লওঁ যে $\sqrt{2}$ পৰিমেয়। গতিকে আমি অখণ্ড সংখ্যা r আৰু $s\ (\neq 0)$ পাব পাৰিম যাতে $\sqrt{2} = \frac{r}{s}$।

ধৰা r আৰু sঅৰ 1অৰ বাহিৰে অইন সাধাৰণ উৎপাদক আছে। তেন্তে আমি এই সাধাৰণ উৎপাদকেৰে ভাগ কৰি পাওঁ, $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, য'ত a আৰু b সহমৌলিক (coprime)। গতিকে $b\sqrt{2} = a$।

দুয়োপিনে বৰ্গ কৰি আৰু সজাই $2b^2 = a^2$ (i)। গতিকে 2য়ে a^2ক হৰণ কৰে। এতিয়া উপপাদ্য 1.3 অনুসৰি এইটো পাওঁ যে 2য়ে aক হৰণ কৰে। সেয়ে আমি লিখিব পাৰো

$a = 2c$, কোনোবা অখণ্ড cৰ ক্ষেত্ৰত। (i)ত aৰ মান বহুৱাই আমি পাওঁ, $2b^2 = 4c^2$, অৰ্থাৎ $b^2 = 2c^2$ ইয়াৰ অৰ্থ হ'ল 2য়ে b^2ক হৰণ কৰে আৰু সেয়ে 2য়ে bক হৰণ কৰে (আৰু উপপাদ্য 1.3 ব্যৱহাৰ কৰি, $p = 2$ৰ বাবে)

গতিকে a আৰু b উভয়ৰে অন্ততঃ এটা সাধাৰণ উৎপাদক আছে, যি 2। কিন্তু ইয়ে আমি ধৰা 'a আৰু bৰ 1অৰ বাহিৰে অইন সাধাৰণ উৎপাদক নাই' এই সত্যটোক বিৰোধ কৰে। এই বিৰুদ্ধৰ কাৰণ এয়ে যে '$\sqrt{2}$ পৰিমেয়' বুলি কৰা আমাৰ ধাৰ্যটো অশুদ্ধ। সেয়ে আমি সিদ্ধান্তত উপনীত হ'লো যে $\sqrt{2}$ অপৰিমেয়।

---

* পৰীক্ষাৰ দৃষ্টিকোণৰ পৰা নহয়।

উদাহৰণ 9 : প্ৰমাণ কৰা যে $\sqrt{3}$ অপৰিমেয়।

সমাধান : বিৰুদ্ধভাৱে আমি ধৰো যে $\sqrt{3}$ পৰিমেয়। অৰ্থাৎ আমি অখণ্ড a আৰু $b\ (\neq 0)$ পাব পাৰো যাতে $\sqrt{3} = \frac{a}{b}$।

ধৰা a আৰু bৰ 1ৰ বাহিৰে বেলেগ সাধাৰণ উৎপাদক আছে। তেতিয়া আমি এই সাধাৰণ উৎপাদকটোৰে হৰণ কৰিব পাৰো আৰু ধৰিব পাৰো যে a আৰু b সহমৌলিক। গতিকে $b\sqrt{3} = a$।

দুয়োপিনে বৰ্গ কৰি আৰু সজাই $3b^2 = a^2$ (i)। গতিকে a^2, 3ৰে বিভাজ্য। উপপাদ্য 1.3 অনুসৰি, aও 3ৰে বিভাজ্য। সেয়ে আমি লিখিব পাৰো $a = 3c$, কোনো অখণ্ড cৰ ক্ষেত্ৰত। (i)ত aৰ সলনি $3c$ বহুৱাই পাওঁ, $3b^2 = 9c^2$, অৰ্থাৎ $b^2 = 3c^2$। ইয়াৰ অৰ্থ, b^2, 3ৰে বিভাজ্য আৰু সেয়ে bও 3ৰে বিভাজ্য, (উপপাদ্য 1.3, $p = 3$ৰ বাবে ব্যৱহাৰ কৰি)।

গতিকে a আৰু bৰ অন্ততঃ এটা সাধাৰণ উৎপাদক 3 আছে। কিন্তু ই 'a আৰু b সহমৌলিক' এই ধাৰ্য সত্যটোক বিৰোধ কৰে।

এই বিৰুদ্ধ ফল ওলোৱাৰ কাৰণ হ'ল যে '$\sqrt{3}$ পৰিমেয়' বুলি ধৰা আমাৰ এই কথাটো অশুদ্ধ। গতিকে আমি সিদ্ধান্ত পাওঁ যে $\sqrt{3}$ অপৰিমেয়।

নৱম শ্ৰেণীত আমি উল্লেখ কৰিছিলো—

- এটা পৰিমেয় আৰু এটা অপৰিমেয়ৰ সমষ্টি বা অন্তৰফল এটা অপৰিমেয়।
- এটা অশূন্য পৰিমেয় আৰু এটা অপৰিমেয়ৰ গুণফল বা ভাগফল এটা অপৰিমেয়।

কেইটামান বিশেষফল আমি ইয়াত ব্যৱহাৰ কৰিম।

উদাহৰণ 10 : দেখুওৱা যে $5 - \sqrt{3}$ অপৰিমেয়।

সমাধান : বিৰুদ্ধভাৱে আমি ধৰো যে $5 - \sqrt{3}$ পৰিমেয়।

তেন্তে আমি a আৰু $b\ (b \neq 0)$ সহমৌলিক দুটা পাব পাৰো যাতে, $5 - \sqrt{3} = \frac{a}{b}$, গতিকে $5 - \frac{a}{b} = \sqrt{3}$।

সমীকৰণটো সজাই পাওঁ, $\sqrt{3} = 5 - \frac{a}{b} = \frac{5b - a}{b}$

যিহেতু a, b অখণ্ড, আমি পাওঁ, $5 - \frac{a}{b}$ পৰিমেয় আৰু সেয়ে $\sqrt{3}$ পৰিমেয়। কিন্তু ইয়ে '$\sqrt{3}$

অপৰিমেয়' এই সত্যতাৰ বিৰোধ কৰে। এই বিৰুদ্ধ ফলৰ কাৰণ হ'ল যে আমাৰ ধাৰ্য্য $5-\sqrt{3}$ পৰিমেয়। গতিকে আমি সিদ্ধান্ত পালো যে, $5-\sqrt{3}$ অপৰিমেয়।

উদাহৰণ 11 : দেখুওৱা যে $3\sqrt{2}$ অপৰিমেয়।

সমাধান : বিৰুদ্ধভাৱে আমি ধৰো, $3\sqrt{2}$ পৰিমেয়।

সেয়ে আমি a আৰু b $(b \neq 0)$ সহমৌলিকযোৰ পাব পাৰো যে, $3\sqrt{2}=\frac{a}{b}$ । সজাই পাওঁ $\sqrt{2}=\frac{a}{3b}$ । যিহেতু 3, a আৰু b যোৰ অখণ্ড, $\frac{a}{3b}$ পৰিমেয় আৰু সেয়ে $\sqrt{2}$ পৰিমেয়। কিন্তু ইয়ে '$\sqrt{2}$ অপৰিমেয়' এই সত্যতাৰ বিৰোধ কৰে। গতিকে আমি সিদ্ধান্ত পালো যে $3\sqrt{2}$ অপৰিমেয়।

অনুশীলনী 1.3

1. দেখুওৱা যে $\sqrt{5}$ অপৰিমেয়।
2. দেখুওৱা যে $3+2\sqrt{5}$ অপৰিমেয়।
3. দেখুওৱা যে তলৰ সংখ্যাবোৰ অপৰিমেয় :

(i) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (ii) $7\sqrt{5}$ (iii) $6+\sqrt{2}$

1.5 পৰিমেয় সংখ্যা আৰু সিহঁতৰ দশমিক বিস্তাৰত পুনৰ ভূমুকি (Revisiting Rational Numbers and Their Decimal Expansions)

নৱম শ্ৰেণীত তোমালোকে অধ্যয়ন কৰিছিলা যে পৰিমেয় সংখ্যাবোৰৰ হয় পৰিসমাপ্ত বা সাৱধি (সীমাবদ্ধ) দশমিক বিস্তৃতি নাইবা এটা অপৰিসমাপ্ত বা নিৰবধি দশমিক বিস্তৃতি থাকে। এই অনুচ্ছেদত আমি $\frac{p}{q}$ $(q \neq 0)$ৰ দৰে এটা পৰিমেয় সংখ্যা ল'ম আৰু সঠিকভাৱে কেতিয়া $\frac{p}{q}$ৰ বিস্তৃতি পৰিসমাপ্ত বা সাৱধি আৰু কেতিয়া ই নিৰবধি পৌনঃপুনিক তাক বিচাৰ কৰিম। আমি কেবাটাও উদাহৰণ বিবেচনাৰে সেইটো কৰিবলৈ চাম।

তলৰ পৰিমেয় সংখ্যাবোৰ বিবেচনা কৰোঁ আহা

(i) 0.375 (ii) 0.104 (iii) 0.0875 (iv) 23.3408.

এতিয়া (i) $0.375=\frac{375}{1000}=\frac{375}{10^3}$ (ii) $0.104=\frac{104}{1000}=\frac{104}{10^3}$

(iii) $0.0875 = \frac{875}{10000} = \frac{875}{10^4}$ (iv) $23.3408 = \frac{233408}{10000} = \frac{233408}{10^4}$

আশা কৰাৰ দৰেই এই আটাইবোৰকে পৰিমেয় সংখ্যা হিচাপে প্ৰকাশ কৰিব পাৰি যাৰ হৰবোৰ 10অৰ ঘাত। আমি লব আৰু হৰবোৰৰ মাজত থকা সাধাৰণ উৎপাদকবোৰ বিলোপ কৰিবলৈ চেষ্টা কৰি কি পাওঁ চাওঁ আহা :

(i) $0.375 = \frac{375}{10^3} = \frac{3 \times 5^3}{2^3 \times 5^3} = \frac{3}{2^3}$ (ii) $0.104 = \frac{104}{10^3} = \frac{13 \times 2^3}{2^3 \times 5^3} = \frac{13}{5^3}$

(iii) $0.0875 = \frac{875}{10^4} = \frac{7}{2^4 \times 5}$

(iv) $23.3408 = \frac{233408}{10^4} = \frac{2^2 \times 7 \times 521}{5^4}$

তোমালোকে কিবা আহিঁ লক্ষ্য কৰিছানে? দেখা গৈছে যে এটা বাস্তৱ সংখ্যা, যাৰ দশমিক বিস্তৃতিটো সাবধি তাক আমি এটা $\frac{p}{q}$ আহিঁৰ পৰিমেয় সংখ্যালৈ পৰিবৰ্তিত কৰিছো য'ত p [illegible] q সহমৌলিক আৰু হৰটোৰ (অৰ্থাৎ qৰ) মৌলিক উৎপাদকীকৰণত কেৱল 2 ৰ [illegible] 5 ঘাত নাইবা দুয়োৰে ঘাতহে আছে। হৰটো এনে হোৱাটো আমি আশা কৰো, কাৰণ 10ৰ ঘাতত উৎপাদক হিচাপে কেৱল 2 আৰু 5হে থাকিব পাৰে।

যদিও আমি মাত্ৰ কেৱল কেইটামান উদাহৰণহে কৰি দেখুৱাইছো, তোমালোকে দেখা পাবা যে সাবধি (সীমাবদ্ধ) দশমিক বিস্তৃতি থকা যিকোনো বাস্তৱ সংখ্যাকে এটা পৰিমেয় সংখ্যাৰূপে প্ৰকাশ কৰিব পাৰি যাৰ হৰটো এটা 10ৰ ঘাত। আকৌ 10ৰ একমাত্ৰ মৌলিক উৎপাদক 2 আৰু 5। গতিকে লব আৰু হৰৰ মাজত থকা সাধাৰণ উৎপাদক বিলোপ কৰি আমি দেখিবলৈ পাম যে এই বাস্তৱ সংখ্যাটো এটা $\frac{p}{q}$ আহিঁৰ পৰিমেয় সংখ্যা, য'ত qৰ মৌলিক উৎপাদকীকৰণ 2^n5^m আহিঁৰ আৰু n, m বোৰ অ-বিয়োগাত্মক অখণ্ড সংখ্যা (পূৰ্ণ সংখ্যা)।

আমাৰ এই ফলটো এতিয়া বিধিগতভাৱে লিখো আহা :

উপপাদ্য 1.5 : *ধৰা x এটা পৰিমেয় সংখ্যা যাৰ দশমিক বিস্তৃতিটো পৰিসমাপ্ত (সাবধি)। তেতিয়া xঅক $\frac{p}{q}$ আহিঁত প্ৰকাশ কৰিব পাৰি, য'ত p, q সহমৌলিক। তদুপৰি qৰ মৌলিক উৎপাদকীকৰণটো 2^n5^m আহিঁৰ, য'ত n, mবোৰ অ-বিয়োগাত্মক সংখ্যা।*

তোমালোক চাগে উদ্বিগ্নই হৈ আছা যে উপপাদ্য 1.5ৰ ওলোটা দিশত গ'লে কি হ'ব? অৰ্থাৎ

যদি আমাৰ এটা $\frac{p}{q}$ আৰ্হিৰ পৰিমেয় সংখ্যা পাওঁ আৰু যদি qৰ মৌলিক উৎপাদকীকৰণ $2^n.5^m$, য'ত n, m অবিয়োগাত্মক সংখ্যা হয়, তেন্তে $\frac{p}{q}$ ৰ এটা পৰিসমাপ্তি বা সাবধি (সীমাবদ্ধ) দশমিক বিস্তৃতি থাকিবনে?

এইটো কিদৰে সত্য হ'ব পাৰে তাৰ কিবা স্পষ্ট কাৰণ আছেনে আমি চাওঁ আহা। তোমালোকে নিশ্চয়কৈ মানি ল'বা যে, যদি b এটা 10ৰ ঘাত হয় তেন্তে $\frac{a}{b}$ আৰ্হিৰ যিকোনো পৰিমেয় সংখ্যাৰে এটা সাবধি দশমিক বিস্তৃতি থাকিব। গতিকে এটা $\frac{p}{q}$ আৰ্হিৰ পৰিমেয় সংখ্যা, যাৰ qটো 2^n5^m আৰ্হিৰ, তাক 10ৰ ঘাত বিশিষ্ট b থকা $\frac{a}{b}$ আৰ্হিৰ এটা সমতুল্য পৰিমেয় সংখ্যালৈ পৰিবৰ্তন কৰাটো বোধপূৰ্ণ হ'ব। আমি ওপৰৰ উদাহৰণকেইটালৈ উভতি যাও আৰু বিপৰীত দিশত কামবোৰ কৰি যাওঁ আহা।

(i) $\frac{3}{8}=\frac{3}{2^3}=\frac{3\times5^3}{2^3\times5^3}=\frac{375}{10^3}=0.375$ (ii) $\frac{13}{125}=\frac{13}{5^3}=\frac{13\times2^3}{5^3\times2^3}=\frac{104}{10^3}=0.104$

(iii) $\frac{7}{80}=\frac{7}{2^4\times5}=\frac{7\times5^3}{2^4\times5^4}=\frac{875}{10^4}=0.0875$

(iv) $\frac{14588}{625}=\frac{2^2\times7\times521}{5^4}=\frac{2^6\times7\times521}{2^4\times5^4}=\frac{233408}{10^4}=23.3408$

গতিকে এই উদাহৰণবোৰে আমাক দেখুৱায় আমি কিদৰে 2^n5^m আৰ্হিৰ এটা হৰ q থকা $\frac{p}{q}$ আৰ্হিৰ পৰিমেয় সংখ্যাক $\frac{a}{b}$ আৰ্হিৰ, য'ত b এটা 10ৰ ঘাত, পৰিমেয় সংখ্যালৈ ৰূপান্তৰ কৰিব পাৰো। সেয়ে এনেবোৰ পৰিমেয় সংখ্যাৰ দশমিক বিস্তৃতিবোৰ পৰিসমাপ্তি বা সাবধি। আমাৰ এই ফলটো এতিয়া বিধিগতভাৱে লিখি লওঁ আহা।

উপপাদ্য 1.6 : *ধৰা $x=\frac{p}{q}$ এটা পৰিমেয় সংখ্যা, যাতে n, m অবিয়োগাত্মক সংখ্যাৰ ক্ষেত্ৰত q হৰটোৰ মৌলিক উৎপাদকীকৰণ 2^n5^m আৰ্হিৰ। তেন্তে xঅৰ এটা সাবধি দশমিক বিস্তৃতি আছে।*

আমি এতিয়া সেইবোৰ পৰিমেয় সংখ্যালৈ যাব ওলাইছো যিবোৰৰ দশমিক বিস্তৃতি নিৰৱধি আৰু পৌনঃপুনিক। পুনৰ এবাৰ এটা উদাহৰণলৈ চাম ইয়াত কি হয়। আমি তোমালোকৰ নৱম শ্ৰেণীৰ অধ্যায়-1ৰ উদাহৰণ 5লৈ আঙুলিয়াও আঁহা। বিশেষকৈ $\frac{1}{7}$ পৰিমেয় সংখ্যাটোলৈ। ইয়াত ভাগশেষবোৰ ক্ৰমে 3, 2, 6, 4, 5, 1, 3, 2, 6, 4, 5, 1, . . . আৰু ভাজক 7।

$$
\begin{array}{r}
0.1428571 \\
7\,\overline{)\,10} \\
\underline{7} \\
30 \\
\underline{28} \\
20 \\
\underline{14} \\
60 \\
\underline{56} \\
40 \\
\underline{35} \\
50 \\
\underline{49} \\
10 \\
\underline{7} \\
30
\end{array}
$$

লক্ষ্য কৰা, ইয়াৰ হৰত থকা 7 সংখ্যাটো স্পষ্টভাৱে 2^n5^m আৰ্হিৰ নহয়। গতিকে উপপাদ্য 1.5 আৰু 1.6ৰ পৰা আমি জানো যে $\frac{1}{7}$ ৰ সাবধি দশমিক বিস্তৃতি নাথাকিব।

সেয়ে 0টোক ভাগশেষ ৰূপত দেখা নাযাব (কিয়?) আৰু এটা নিৰ্দিষ্ট পৰ্য্যায়ৰ পিছত ভাগশেষবোৰ পৌনঃপুনিক ৰূপত ওলাবলৈ আৰম্ভ কৰিব। গতিকে $\frac{1}{7}$ ৰ ভাগফলত আমি অংক কিছুমানৰ সমষ্টি এটা পাম, যেনে 142857, যিয়ে পুনৰাবৃত্তি কৰি থাকিব।

$\frac{1}{7}$ ৰ ক্ষেত্ৰত আমি যি দেখিলো সেইটো উপপাদ্য 1.5 বা উপপাদ্য 1.6.য়ে সামৰি নোলোৱা যি কোনো পৰিমেয় সংখ্যাৰ ক্ষেত্ৰতেই সত্য। এনে সংখ্যাবোৰৰ ক্ষেত্ৰত আমি পাওঁঃ

উপপাদ্য 1.7 : *ধৰা $x = \frac{p}{q}$ এটা পৰিমেয় সংখ্যা যাতে হৰ qৰ মৌলিক উৎপাদকীকৰণটো 2^n5^m আৰ্হিৰ নহয়, য'ত n, m অ-বিয়োগাত্মক সংখ্যা। তেন্তে xৰ এটা দশমিক বিস্তৃতি থাকিব যি অপৰিসমাপ্ত বা নিৰৱধি আৰু পৌনঃপুনিক।*

ওপৰৰ আলোচনাৰপৰা আমি সিদ্ধান্ত ল'ব পাৰো যে, *প্ৰত্যেক পৰিমেয় সংখ্যাৰ দশমিক বিস্তৃতিটো হয় সাবধি নহয় নিৰৱধি পৌনঃপুনিক।*

অনুশীলনী 1.4

1. দীৰ্ঘ হৰণ নকৰাকৈ তলত উল্লেখ কৰা পৰিমেয়-সংখ্যাবোৰৰ কোনবোৰৰ দশমিক বিস্তৃতি পৰিসমাপ্তি (সাবধি) নাইবা কোনবোৰৰ নিৰৱধি পৌনঃপুনিক দশমিক বিস্তৃতি থাকিব বৰ্ণনা কৰা ঃ

   (i) $\frac{13}{3125}$ (ii) $\frac{17}{8}$ (iii) $\frac{64}{455}$ (iv) $\frac{15}{1600}$ (v) $\frac{29}{343}$

(vi) $\frac{23}{2^3.5^2}$ (vii) $\frac{129}{2^2.5^7.7^5}$ (viii) $\frac{6}{15}$ (ix) $\frac{35}{50}$ (x) $\frac{77}{210}$

2. ওপৰৰ প্ৰশ্ন-1অত যিবোৰ পৰিমেয় সংখ্যাৰ পৰিসমাপ্ত দশমিক বিস্তৃতি আছে সেইবোৰৰ দশমিক বিস্তৃতিবোৰ লিখি দেখুওৱা।

3. তলৰ বাস্তব সংখ্যাবোৰৰ ইয়াত দেখুওৱা ধৰণে দশমিক বিস্তৃতি আছে। প্ৰতিটোৰ ক্ষেত্ৰতে ই এটা পৰিমেয় হয় নে নহয় সিদ্ধান্ত কৰা। যদি ই পৰিমেয় আৰু ই $\frac{p}{q}$ আৰ্হিৰ, তেন্তে ইয়াৰ qৰ মৌলিক উৎপাদকীকৰণৰ বিষয়ে কি ক'ব পাৰিবা?

(i) 43.123456789 (ii)0.120120012000120000. . .

(iii) $43.\overline{123456789}$

1.6 সাৰাংশ (Summary)

এই অধ্যায়ত তোমালোকে তলৰ প্ৰসংগকেইটা অধ্যয়ন কৰিছা :

1. **ইউক্লিডৰ বিভাজন প্ৰমেয়িকা :**
a আৰু b দুটা যোগাত্মক অখণ্ড সংখ্যা দিয়া থাকিলে, q আৰু r দুটা এনে পূৰ্ণ সংখ্যা বিচাৰি পোৱা যাব যাতে $a = bq + r,\ 0 \le r < b$।

2. **ইউক্লিডৰ বিভাজন কলনবিধি :** ইউক্লিডৰ বিভাজন প্ৰমেয়িকা ওপৰত ই নিৰ্ভৰ কৰে। এইটোৰ মতে, দুটা যোগাত্মক অখণ্ড সংখ্যা a আৰু bৰ ($a > b$ ধৰি) গ.সা.উ. তলত দিয়াৰ দৰে পোৱা যায় :

সোপান (Step) 1 : q আৰু r পাবলৈ ইউক্লিডৰ বিভাজন প্ৰমেয়িকা প্ৰয়োগ কৰা য'ত $a = bq + r,\ 0 \le r < b$.

সোপান (Step) 2 : যদি $r = 0$, গ.সা.উ. হ'ব b। যদি $r \neq 0$, b আৰু rক লৈ ইউক্লিডৰ প্ৰমেয়িকা প্ৰয়োগ কৰা।

সোপান (Step) 3 : ভাগশেষ শূন্য পোৱালৈকে এই প্ৰণালীটো অব্যাহত ৰাখা। এই পৰ্যায়ত পোৱা ভাজকটোৱে হ'ব গ.সা.উ. (a, b)। তদুপৰি গ.সা.উ. (a, b) = গ.সা.উ.(b, r)।

3. **পাটিগণিতৰ মৌলিক উপপাদ্য :** প্ৰত্যেক যৌগিক সংখ্যাকেই মৌলিকৰ গুণফল হিচাপে প্ৰকাশ কৰিব (উৎপাদকত) পাৰি আৰু মৌলিক উৎপাদকবোৰ প্ৰকাশ পোৱা ক্ৰমৰ বাহিৰে এই উৎপাদকীকৰণ অদ্বিতীয়।

4. যদি p মৌলিক আৰু pয়ে a^2ক হৰণ কৰে, য'ত a এটা যোগাত্মক অখণ্ড সংখ্যা, তেন্তে pয়ে aক হৰণ কৰিব।

5. প্ৰমাণ কৰিব লাগে যে, $\sqrt{2}, \sqrt{3}$ বোৰ অপৰিমেয়।

6. ধৰা x এটা পৰিমেয় সংখ্যা যাৰ দশমিক বিস্তৃতিটো পৰিসমাপ্ত। তেতিয়া xক $\frac{p}{q}$ আৰ্হিত প্ৰকাশ কৰিব পাৰি, য'ত p, q সহমৌলিক। তদুপৰি qৰ মৌলিক উৎপাদকীকৰণটো 2^n5^m আৰ্হিৰ, য'ত n, mবোৰ অবিয়োগাত্মক সংখ্যা।

7. ধৰা $x = \frac{p}{q}$ এটা পৰিমেয় সংখ্যা যাতে n, m অবিয়োগাত্মক সংখ্যাৰ ক্ষেত্ৰত q হৰটোৰ মৌলিক উৎপাদকীকৰণ 2^n5^m আৰ্হিৰ।
তেন্তে xঅৰ এটা সাবধি দশমিক বিস্তৃতি আছে।

8. ধৰা $x = \frac{p}{q}$ এটা পৰিমেয় সংখ্যা যাতে হৰ qৰ মৌলিক উৎপাদকীকৰণটো 2^n5^m আৰ্হিৰ নহয়, য'ত n, m অবিয়োগাত্মক সংখ্যা। তেন্তে xৰ এটা দশমিক বিস্তৃতি থাকিব যি নিৰবধি আৰু পৌনঃপুনিক।

পঢ়ুৱৈলৈ এটি টোকা (A NOTE TO THE READER)

তোমালোকে দেখিলা যে :

গ.সা.উ. $(p, q, r) \times$ ল.সা.গু. $(p, q, r) \neq p \times q \times r$, য'ত p, q, r কেইটা যোগাত্মক অখণ্ড সংখ্যা (উদাহৰণ 8 চোৱা)। যি নহওক তিনিটা সংখ্যা p, q, r ৰ ক্ষেত্ৰত তলৰ ফল দুটা প্ৰযোজ্য :

$$\text{ল.সা.গু.}\,(p, q, r) = \frac{p \cdot q \cdot r \cdot \text{গ.সা.উ.}\,(p, q, r)}{\text{গ.সা.উ.}\,(p, q) \times \text{গ.সা.উ.}\,(q, r) \times \text{গ.সা.উ.}\,(p, r)}$$

$$\text{গ.সা.উ.}\,(p, q, r) = \frac{p \cdot q \cdot r \cdot \text{ল.সা.গু.}\,(p, q, r)}{\text{ল.সা.গু.}\,(p, q) \times \text{ল.সা.গু.}\,(q, r) \times \text{ল.সা.গু.}\,(p, r)}$$