ਗਣਿਤ

(ਦਸਵੀਂ ਸ਼੍ਰੇਣੀ ਲਈ)

ਪੰਜਾਬ ਸਕੂਲ ਸਿੱਖਿਆ ਬੋਰਡ

ਸਾਹਿਬਜ਼ਾਦਾ ਅਜੀਤ ਸਿੰਘ ਨਗਰ

ਪਹਿਲਾ ਐਡੀਸ਼ਨ : 2014 .... 1,55,000 ਕਾਪੀਆਂ
Revised ਐਡੀਸ਼ਨ : 2017 .... 81,000 ਕਾਪੀਆਂ

[This book has been adopted with the kind permission of the National Council of Educational Research and Training, New Delhi]

ਅਨੁਵਾਦਕ — ਸ. ਪਰਵਿੰਦਰ ਸਿੰਘ ਲੈਕ.
ਸ. ਸੀ. ਸੈ. ਸਕੂਲ (ਲੜਕੇ) ਅਬੋਹਰ

ਸੰਯੋਜਕ — ਸ. ਪ੍ਰਿਤਪਾਲ ਸਿੰਘ ਕਥੂਰੀਆ
ਵਿਸ਼ਾ ਮਾਹਿਰ ਪ. ਸ. ਸ. ਬ.

ਚਿੱਤਰਕਾਰ — ਸ. ਮਨਜੀਤ ਸਿੰਘ ਢਿੱਲੋਂ
ਆਰਟ ਸੈਲ ਪੰਜਾਬ ਸਕੂਲ ਸਿੱਖਿਆ ਬੋਰਡ (ਮੋਹਾਲੀ)

ਚੇਤਾਵਨੀ

1. ਕੋਈ ਵੀ ਏਜੰਸੀ-ਹੋਲਡਰ ਵਾਧੂ ਪੈਸੇ ਵਸੂਲਣ ਦੇ ਮੰਤਵ ਨਾਲ ਪਾਠ-ਪੁਸਤਕਾਂ 'ਤੇ ਜਿਲਦ-ਸਾਜ਼ੀ ਨਹੀਂ ਕਰ ਸਕਦਾ। (ਏਜੰਸੀ-ਹੋਲਡਰਾਂ ਨਾਲ ਹੋਏ ਸਮਝੌਤੇ ਦੀ ਧਾਰਾ ਨੰ. 7 ਅਨੁਸਾਰ)
2. ਪੰਜਾਬ ਸਕੂਲ ਸਿੱਖਿਆ ਬੋਰਡ ਦੁਆਰਾ ਛਪਵਾਈਆਂ ਅਤੇ ਪ੍ਰਕਾਸ਼ਿਤ ਪਾਠ-ਪੁਸਤਕਾਂ ਦੇ ਜਾਅਲੀ ਨਕਲੀ ਪ੍ਰਕਾਸ਼ਨਾਂ (ਪਾਠ-ਪੁਸਤਕਾਂ) ਦੀ ਛਪਾਈ, ਪ੍ਰਕਾਸ਼ਨ, ਸਟਾਕ ਕਰਨਾ, ਜਮ੍ਹਾਂ-ਖੋਰੀ ਜਾਂ ਵਿਕਰੀ ਆਦਿ ਕਰਨਾ ਭਾਰਤੀ ਦੰਡ ਪ੍ਰਨਾਲੀ ਦੇ ਅੰਤਰਗਤ ਫ਼ੌਜਦਾਰੀ ਜੁਰਮ ਹੈ।

(ਪੰਜਾਬ ਸਕੂਲ ਸਿੱਖਿਆ ਬੋਰਡ ਦੀਆਂ ਪਾਠ-ਪੁਸਤਕਾਂ ਬੋਰਡ ਦੇ 'ਵਾਟਰ ਮਾਰਕ' ਵਾਲੇ ਕਾਗ਼ਜ਼ ਉੱਪਰ ਹੀ ਛਪਵਾਈਆਂ ਜਾਂਦੀਆਂ ਹਨ।)

ਮੁੱਲ : ₹ 154/-

ਸਕੱਤਰ, ਪੰਜਾਬ ਸਕੂਲ ਸਿੱਖਿਆ ਬੋਰਡ, ਵਿੱਦਿਆ ਭਵਨ, ਫੇਜ਼-8 ਸਾਹਿਬਜ਼ਾਦਾ ਅਜੀਤ ਸਿੰਘ ਨਗਰ 160062 ਰਾਹੀਂ ਪ੍ਰਕਾਸ਼ਿਤ ਅਤੇ ਮੈਸ : ਨਾਰਦਨ ਸਟੇਸ਼ਨਰੀ ਮਾਰਟ, ਜਲੰਧਰ ਦੁਆਰਾ ਛਾਪੀ ਗਈ।

ਦੋ ਸ਼ਬਦ

ਪੰਜਾਬ ਸਕੂਲ ਸਿੱਖਿਆ ਬੋਰਡ ਪਾਠ-ਕ੍ਰਮਾਂ ਅਤੇ ਪਾਠ-ਪੁਸਤਕਾਂ ਨੂੰ ਸੋਧਣ ਅਤੇ ਤਿਆਰ ਕਰਨ ਦੇ ਕੰਮ ਵਿੱਚ ਜੁਟਿਆ ਹੋਇਆ ਹੈ। ਅੱਜ ਜਿਸ ਦੌਰ ਵਿੱਚੋਂ ਅਸੀਂ ਲੰਘ ਰਹੇ ਹਾਂ ਉਸ ਵਿੱਚ ਬੱਚਿਆਂ ਨੂੰ ਸਹੀ ਵਿੱਦਿਆ ਦੇਣਾ ਮਾਪਿਆਂ ਅਤੇ ਅਧਿਆਪਕਾਂ ਦੋਹਾਂ ਦੀ ਸਾਂਝੀ ਜ਼ਿੰਮੇਵਾਰੀ ਬਣਦੀ ਹੈ। ਇਸੇ ਜ਼ਿੰਮੇਵਾਰੀ ਅਤੇ ਵਿੱਦਿਅਕ ਜ਼ਰੂਰਤਾਂ ਨੂੰ ਸਮਝਦਿਆਂ ਹੋਇਆਂ ਗਣਿਤ ਵਿਸ਼ੇ ਦੇ ਪਾਠ-ਕ੍ਰਮਾਂ ਅਤੇ ਪਾਠ-ਪੁਸਤਕਾਂ ਵਿੱਚ ਨੈਸ਼ਨਲ ਕਰੀਕੁਲਮ ਫਰੇਮਵਰਕ-2005 ਅਨੁਸਾਰ ਕੁਝ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਪਰਿਵਰਤਨ ਕੀਤੇ ਜਾ ਰਹੇ ਹਨ।

ਸਕੂਲ ਕਰੀਕੁਲਮ ਵਿੱਚ ਗਣਿਤ ਵਿਸ਼ੇ ਦਾ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਯੋਗਦਾਨ ਹੈ ਅਤੇ ਲੋੜੀਂਦੇ ਸਿੱਖਿਅਕ ਨਤੀਜੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਲਈ ਚੰਗੀ ਪਾਠ-ਪੁਸਤਕ ਦਾ ਹੋਣਾ ਪਹਿਲੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਇਸ ਪਾਠ-ਪੁਸਤਕ ਵਿੱਚ ਵਿਸ਼ਾ ਸਾਮੱਗਰੀ ਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸਥਾਪਿਤ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ ਜਿਸ ਨਾਲ਼ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੀ ਤਰਕ ਸ਼ਕਤੀ ਪ੍ਰਫੁਲਿਤ ਹੋਣ ਦੇ ਨਾਲ਼-ਨਾਲ਼ ਵਿਸ਼ੇ ਨੂੰ ਸਮਝਣ ਦੀ ਯੋਗਤਾ ਵਿੱਚ ਵੀ ਵਾਧਾ ਹੋਵੇਗਾ। ਅਭਿਆਸਾਂ ਦੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੇ ਮਾਨਸਿਕ ਪੱਧਰ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਤਿਆਰ ਕੀਤੇ ਗਏ ਹਨ। ਇਹ ਪੁਸਤਕ ਰਾਸ਼ਟਰੀ ਵਿੱਦਿਆ ਖੋਜ ਅਤੇ ਸਿਖਲਾਈ ਸੰਸਥਾ ਵੱਲੋਂ ਦਸਵੀਂ ਸ਼੍ਰੇਣੀ ਲਈ ਤਿਆਰ ਕੀਤੀ ਗਈ ਗਣਿਤ ਵਿਸ਼ੇ ਦੀ ਪੁਸਤਕ ਦੀ ਅਨੁਸਾਰਤਾ ਕਰਦੀ ਹੈ। ਇਹ ਪੁਸਤਕ ਐਨ.ਸੀ.ਈ.ਆਰ.ਟੀ. ਤੋਂ ਪ੍ਰਵਾਨਗੀ ਲੈਣ ਉਪਰੰਤ ਪੰਜਾਬ ਸਕੂਲ ਸਿੱਖਿਆ ਬੋਰਡ ਦੁਆਰਾ ਪ੍ਰਕਾਸ਼ਿਤ ਕੀਤੀ ਗਈ ਹੈ।

ਇਸ ਪਾਠ-ਪੁਸਤਕ ਨੂੰ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਅਤੇ ਅਧਿਆਪਕਾਂ ਦੇ ਲਈ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਉਪਯੋਗੀ ਬਣਾਉਣ ਦਾ ਭਰਪੂਰ ਯਤਨ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ। ਫਿਰ ਵੀ, ਪੁਸਤਕ ਨੂੰ ਹੋਰ ਚੰਗੇਰਾ ਬਣਾਉਣ ਲਈ ਖੇਤਰ ਵਿੱਚੋਂ ਆਏ ਸੁਝਾਵਾਂ ਦਾ ਸਤਿਕਾਰ ਕੀਤਾ ਜਾਵੇਗਾ।

ਚੇਅਰਮੈਨ

ਪੰਜਾਬ ਸਕੂਲ ਸਿੱਖਿਆ ਬੋਰਡ

NCERT ਦੀ ਪਾਠ-ਪੁਸਤਕ ਤਿਆਰ ਕਰਨ ਵਾਲੀ ਕਮੇਟੀ

ਵਿਗਿਆਨ ਅਤੇ ਗਣਿਤ ਦੇ ਸਲਾਹਕਾਰ ਸਮੂਹ ਦੇ ਚੇਅਰਮੈਨ

ਜਯੰਤ ਵਿਸ਼ਨੂੰ ਨਾਰਲੀਕਰ, ਇਮੀਰਿਟਸ ਪ੍ਰੋਫ਼ੈਸਰ, ਚੇਅਰਮੈਨ, ਆਈ.ਯੂ.ਸੀ.ਏ.ਏ., ਗਣੇਸ਼ਖਿੰਡ, ਪੂਨਾ ਯੂਨਿਵਰਸਿਟੀ, ਪੂਨਾ

ਮੁੱਖ ਸਲਾਹਕਾਰ

ਪੀ.ਸਿੰਕਲੇਅਰ, ਪ੍ਰੋਫ਼ੈਸਰ, ਵਿਗਿਆਨ ਵਿਦਿਆਪੀਠ, ਇ.ਗਾ.ਰਾ.ਮੁ.ਵਿ., ਨਵੀਂ ਦਿੱਲੀ

ਮੁੱਖ ਕੋਆਰਡੀਨੇਟਰ

ਹੁਕੁਮ ਸਿੰਘ, ਪ੍ਰੋਫ਼ੈਸਰ, ਡੀ.ਈ.ਐਸ.ਐਮ., ਰਾ.ਸ਼ੈ.ਅ.ਪ੍ਰ.ਪ., ਨਵੀਂ ਦਿੱਲੀ

ਮੈਂਬਰ

ਅੰਜਲੀ ਲਾਲ, ਪੀ.ਜੀ.ਟੀ. (ਗਣਿਤ), ਡੀ.ਏ.ਵੀ. ਪਬਲਿਕ ਸਕੂਲ, ਸੈਕਟਰ-14, ਗੁੜਗਾਵਾਂ

ਅੰਜੂ ਨਿਰੂਲਾ, ਪੀ.ਜੀ.ਟੀ. (ਗਣਿਤ) ਡੀ.ਏ.ਵੀ. ਪਬਲਿਕ ਸਕੂਲ, ਪੁਸ਼ਪਾਂਜਲੀ ਇੰਨਕਲੇਵ, ਪੀਤਮ ਪੁਰਾ, ਦਿੱਲੀ

ਉਦੇ ਸਿੰਘ, ਲੈਕਚਰਾਰ, ਡੀ.ਈ.ਐਸ.ਐਮ., ਰਾ.ਸ਼ੈ.ਅ.ਪ੍ਰ.ਪ., ਨਵੀਂ ਦਿੱਲੀ

ਏ.ਕੇ.ਵਜਲਵਾਰ, ਰੀਡਰ, ਡੀ.ਈ.ਐਸ.ਐਮ., ਰਾ.ਸ਼ੈ.ਅ.ਪ੍ਰ.ਪ., ਨਵੀਂ ਦਿੱਲੀ

ਐਸ.ਵੈਂਕਟਰਮਨ, ਲੈਕਚਰਾਰ, ਵਿਗਿਆਨ ਵਿਦਿਆਪੀਠ, ਇ.ਗਾ.ਰਾ.ਮੁ.ਵਿ., ਨਵੀਂ ਦਿੱਲੀ

ਜੀ.ਪੀ.ਦੀਕਸ਼ਿਤ, ਪ੍ਰੋਫ਼ੈਸਰ, ਗਣਿਤ ਅਤੇ ਖਗੋਲਿਕੀ ਵਿਭਾਗ, ਲਖਨਊ ਯੂਨੀਵਰਸਿਟੀ, ਲਖਨਊ

ਕੇ.ਏ.ਐਸ.ਐਸ.ਵੀ.ਕਾਮੇਸ਼ਵਰ ਰਾਵ, ਲੈਕਚਰਾਰ, ਖੇਤਰੀ ਸਿੱਖਿਆ ਸੰਸਥਾਨ, ਭੂਵਨੇਸ਼ਵਰ

ਮਹਿੰਦਰ ਆਰ.ਗਜਰੇ, ਪੀ.ਜੀ.ਟੀ., ਅਤੁਲ ਸਕੂਲ, ਅਤੁਲ, ਜ਼ਿਲ੍ਹਾ ਵਲਸਾਦ

ਮਹਿੰਦਰ ਸ਼ੰਕਰ, ਲੈਕਚਰਾਰ (ਐਸ.ਜੀ.) (ਰਿਟਾ.), ਰਾ.ਸ਼ੈ.ਅ.ਪ੍ਰ.ਪ., ਨਵੀਂ ਦਿੱਲੀ

ਰਮਾ ਬਾਲਾਜੀ, ਟੀ.ਜੀ.ਟੀ. (ਗਣਿਤ), ਕੇ.ਵੀ.ਮੇਗ ਅਤੇ ਕੇਂਦਰ, ਸੈਂਟ ਜੋਹਨਜ਼ ਰੋਡ, ਬੰਗਲੂਰੂ

ਵੇਦ ਡੁਡੇਜਾ, ਉਪ-ਪ੍ਰਿੰਸੀਪਲ (ਰਿਟਾ.), ਗੌ.ਗ.ਮਿਡਲ ਸਕੂਲ, ਸੈਨਿਕ ਵਿਹਾਰ, ਦਿੱਲੀ

ਸੰਜੇ ਮੁਦਗੱਲ, ਲੈਕਚਰਾਰ, ਸੀ.ਆਈ.ਈ.ਟੀ., ਰਾ.ਸ਼ੈ.ਅ.ਪ੍ਰ.ਪ. ਨਵੀਂ ਦਿੱਲੀ

ਸ਼ਸ਼ੀਧਰ ਜਗਦੀਸ਼ਨ, ਅਧਿਆਪਕ ਅਤੇ ਮੈਂਬਰ, ਗਵਰਨਿੰਗ ਕਾਊਂਸਿਲ, ਸੈਂਟਰ ਫ਼ਾਰ ਲਰਨਿੰਗ, ਬੰਗਲੂਰੂ

ਹਿੰਦੀ ਅਨੁਵਾਦਕ :

ਜੀ.ਪੀ. ਦੀਕਸ਼ਿਤ, ਪ੍ਰੋਫ਼ੈਸਰ, ਗਣਿਤ ਅਤੇ ਖਗੋਲਿਕੀ ਵਿਭਾਗ, ਲਖਨਊ ਯੂਨੀਵਰਸਿਟੀ, ਲਖਨਊ

ਮਹਿੰਦਰ ਸ਼ੰਕਰ, ਲੈਕਚਰਾਰ (ਐਸ.ਜੀ.) (ਰਿਟਾ.), ਰਾ.ਸ਼ੈ.ਅ.ਪ੍ਰ.ਪ., ਨਵੀਂ ਦਿੱਲੀ

ਹਰੀਸ਼ਵਰ ਪ੍ਰਸਾਦ ਸਿਨਹਾ, ਸੀ-210, ਰਾਜਾਜੀ ਪੁਰਮ, ਲਖਨਊ

ਮੈਂਬਰ ਕੋਆਰਡੀਨੇਟਰ

ਰਾਮ ਅਵਤਾਰ, ਪ੍ਰੋਫ਼ੈਸਰ, ਡੀ.ਈ.ਐਸ.ਐਮ., ਰਾ.ਸ਼ੈ.ਅ.ਪ੍ਰ.ਪ., ਨਵੀਂ ਦਿੱਲੀ (ਦਿਸੰਬਰ 2005 ਤੱਕ)

ਆਰ.ਪੀ.ਮੋਰੀਆ, ਰੀਡਰ, ਡੀ.ਈ.ਐਸ.ਐਮ., ਰਾ.ਸ਼ੈ.ਅ.ਪ੍ਰ.ਪ., ਨਵੀਂ ਦਿੱਲੀ (ਜਨਵਰੀ 2006 ਤੋਂ)

ਵਿਸ਼ਾ-ਸੂਚੀ

ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ REAL NUMBERS

1

1.1 ਭੂਮਿਕਾ

ਨੌਵੀਂ ਜਮਾਤ ਵਿੱਚ ਤੁਸੀਂ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਖੋਜ ਸ਼ੁਰੂ ਕੀਤੀ ਅਤੇ ਇਸ ਪ੍ਰੀਕਿਰਿਅ ਦੌਰਾਨ ਤੁਹਾਨੂੰ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਬਾਰੇ ਜਾਣਕਾਰੀ ਮਿਲੀ। ਇਸ ਪਾਠ ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਬਾਰੇ ਆਪਣੀ ਚਰਚਾ ਜਾਰੀ ਰੱਖਾਂਗੇ। ਇਹ ਚਰਚਾ ਅਸੀਂ ਭਾਗ 1.2 ਅਤੇ 1.3 ਵਿੱਚ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ (integers) ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਦੋ ਬਹੁਤ ਹੀ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਗੁਣਾਂ ਤੋਂ ਸ਼ੁਰੂ ਕਰਾਂਗੇ ਇਹ ਗੁਣ ਹਨ : ਯੁਕਲਿਡ ਵੰਡ ਐਲਗੋਰਿਥਮ (ਕਲਨ ਵਿਧੀ) (Euclid's division algorithm ਅਤੇ ਅੰਕਗਣਿਤ ਦੀ ਮੂਲਭੂਤ ਪ੍ਰਮੇਯ (ਥਿਊਰਮ) (Fundamental Theorem Arithmetic)।

ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਿ ਨਾਮ ਤੋਂ ਪਤਾ ਲੱਗਦਾ ਹੈ, ਯੁਕਲਿਡ ਵੰਡ ਐਲਗੋਰਿਥਮ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵ (integers) ਦੀ ਵੰਡ ਨਾਲ ਕਿਸੇ ਨਾ ਕਿਸੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਸੰਬੰਧਿਤ ਹੈ। ਸਧਾਰਨ ਭਾਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਕਿਹਾ ਜਾਵੇ ਤਾ ਐਲਗੋਰਿਥਮ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ, ਇੱਕ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ a ਨੂੰ ਕਿਸੇ ਦੂਸਰੀ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ b ਨਾਲ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਵੰਡਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਕਿ ਬਾਕੀ r ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਵੇ, ਜੋ b ਤੋਂ ਛੋਟਾ (ਘੱਟ ਹੋਵੇ। ਤੁਹਾਡੇ ਵਿੱਚੋਂ ਜ਼ਿਆਦਾਤਰ ਲੋਕ ਸ਼ਾਇਦ ਇਸਨੂੰ ਸਧਾਰਨ ਲੰਬੀ ਵੰਡ ਪ੍ਰੀਕਿਰਿਆ (long divisior process) ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਜਾਣਦੇ ਹਨ। ਭਾਵੇਂ ਕਿ ਇਹ ਪਰਿਣਾਮ (ਸਿੱਟਾ) ਕਹਿਣ ਅਤੇ (ਸਮਝਣ) ਵਿੱਚ ਬਹੁਤ ਸਰਲ ਹੈ, ਪਰੰਤੂ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਵੰਡ ਦੇ ਗੁਣਾਂ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਇਸ ਦੀਆਂ ਬਹੁਤ ਸਾਰੀਆਂ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾਵਾਂ ਹਨ। ਅਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚ ਕੁਝ 'ਤੇ ਰੌਸ਼ਨੀ ਪਾਵਾਂਗੇ ਅਤੇ ਮੁੱਖ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਇਸ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੋ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਮਹੱਤਮ ਸਮਾਪਵਰਤਕ (HCF) ਕੱਢਣ ਦੇ ਬਾਰੇ ਕਰਾਂਗੇ।

ਦੂਸਰੇ ਪਾਸੇ ਅੰਕਗਣਿਤ ਦੀ ਮੂਲਭੂਤ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦਾ ਸੰਬੰਧ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਗੁਣਾ ਤੋਂ ਹੈ। ਤੁਸੀਂ ਪਹਿਲਾਂ ਤੋਂ ਹੀ ਜਾਣਦੇ ਹੋ ਕਿ ਹਰ ਇੱਕ ਭਾਜ ਸੰਖਿਆ (composite number) ਨੂੰ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ (prime numbers) ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇਹ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਤੱਥ ਅੰਕਗਣਿਤ ਦੀ ਮੂਲਭੂਤ ਥਿਊਰਮ ਹੈ। ਫਿਰ ਤੋਂ ਇਹ ਪਰਿਣਾਮ (ਸਿੱਟਾ) ਕਹਿਣ ਅਤੇ ਸਮਝਣ ਵਿੱਚ ਬਹੁਤ ਸਰਲ ਹੈ, ਪ੍ਰੰਤੂ ਗਣਿਤ ਦੇ ਖੇਤਰ ਵਿੱਚ ਇਸ ਦੀਆਂ ਬਹੁਤ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾਵਾਂ ਹਨ ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ ਅੰਕਗਣਿਤ ਦੀ ਮੂਲਭੂਤ ਥਿਊਰਮ ਦੀਆਂ ਦੋ ਮੁੱਖ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾਵਾਂ ਦੇਖਾਂਗੇ। ਇੱਕ ਤਾਂ ਅਸੀ

ਇਸਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਜਮਾਤ IX ਵਿੱਚ ਪੜੀਆਂ ਗਈਆਂ ਕੁਝ ਸੰਖਿਆਵਾਂ, ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ ਅਤੇ $\sqrt{5}$ ਆਦਿ ਦੀ ਅਪਰਿਮੇਯਤਾ ਸਿੱਧ ਕਰਨ ਲਈ ਕਰਾਂਗੇ। ਦੂਸਰਾ, ਅਸੀਂ ਇਸਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਇਹ ਲੱਭਣ ਵਿੱਚ ਕਰਾਂਗੇ ਕਿ ਕਿਸੇ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ, ਮੰਨ ਲਉ $\frac{p}{q} (q \neq 0)$ ਦਾ ਦਸ਼ਮਲਵ ਵਿਸਤਾਰ ਕਦੋਂ ਸ਼ਾਂਤ (terminating) ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਕਦੋਂ ਅਸ਼ਾਂਤ ਆਵਰਤੀ (non-terminating repeating) ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਹ ਅਸੀਂ $\frac{p}{q}$ ਦੇ ਹਰ, q ਦੇ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡਣ ਨੂੰ ਦੇਖ ਕੇ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਤੁਸੀਂ ਦੇਖੋਗੇ ਕਿ q ਦੇ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡਣ ਤੋਂ $\frac{p}{q}$ ਦੇ ਦਸ਼ਮਲਵ ਰੂਪ ਦੀ ਪ੍ਰਕਿਰਤੀ ਦਾ ਪੂਰੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪਤਾ ਲੱਗ ਜਾਵੇਗਾ।

ਇਸ ਲਈ, ਆਓ ਆਪਣੀ ਖੋਜ ਸ਼ੁਰੂ ਕਰੀਏ।

1.2 ਯੂਕਲਿਡ ਵੰਡ ਪ੍ਰਮੇਯਿਕਾ (Euclid's division Lemma)

ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀ ਲੋਕ ਬੁਝਾਰਤ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ:*

ਇੱਕ ਵਿਕਰੇਤਾ ਸੜਕ 'ਤੇ ਜਾਂਦਾ ਹੋਇਆ ਆਂਡੇ ਵੇਚ ਰਿਹਾ ਸੀ। ਇੱਕ ਆਲਸੀ ਆਦਮੀ ਜਿਸਦੇ ਕੋਲ ਕੋਈ ਕੰਮ ਨਹੀਂ ਸੀ, ਨੇ ਉਸ ਵਿਕਰੇਤਾ ਨਾਲ ਸ਼ਬਦੀ ਜੰਗ (ਝਗੜਾ) ਚਾਲੂ ਕਰ ਦਿੱਤਾ। ਇਸ ਨਾਲ ਗੱਲ ਅੱਗੇ ਵੱਧ ਗਈ ਅਤੇ ਉਸਨੇ ਅੰਡਿਆਂ ਦੀ ਟੋਕਰੀ ਖੋਹ ਕੇ ਸੜਕ 'ਤੇ ਸੁੱਟ ਦਿੱਤੀ। ਆਂਡੇ ਟੁੱਟ ਗਏ। ਵਿਕਰੇਤਾ ਨੇ ਪੰਚਾਇਤ ਨੂੰ ਕਿਹਾ ਕਿ ਉਸ ਵਿਅਕਤੀ ਨੂੰ ਟੁੱਟੇ ਹੋਏ ਅੰਡਿਆਂ ਦੇ ਪੈਸੇ ਦੇਣ ਨੂੰ ਕਹੇ। ਪੰਚਾਇਤ ਨੇ ਵਿਕਰੇਤਾ ਨੂੰ ਪੁੱਛਿਆ ਕਿ ਕਿੰਨੇ ਅੰਡੇ ਟੁੱਟੇ ਸਨ। ਉਸਨੇ ਹੇਠਾਂ ਅਨੁਸਾਰ ਉੱਤਰ ਦਿੱਤਾ:

ਦੋ-ਦੋ ਗਿਨਣ ਨਾਲ ਇੱਕ ਬਚੇਗਾ;
ਤਿੰਨ-ਤਿੰਨ ਗਿਨਣ ਨਾਲ ਦੋ ਬਚਣਗੇ;
ਚਾਰ-ਚਾਰ ਗਿਨਣ ਨਾਲ ਤਿੰਨ ਬਚਣਗੇ;
ਪੰਜ-ਪੰਜ ਗਿਨਣ ਨਾਲ ਚਾਰ ਬਚਣਗੇ;
ਛੇ-ਛੇ ਗਿਨਣ ਨਾਲ ਪੰਜ ਬਚਣਗੇ;
ਸੱਤ-ਸੱਤ ਗਿਨਣ ਨਾਲ ਕੁਝ ਨਹੀਂ ਬਚੇਗਾ;
ਮੇਰੀ ਟੋਕਰੀ ਵਿੱਚ 150 ਤੋਂ ਵੱਧ ਆਂਡੇ ਨਹੀਂ ਆ ਸਕਦੇ।

ਇਸ ਲਈ ਕਿੰਨੇ ਅੰਡੇ ਸਨ? ਆਓ ਇਸ ਬੁਝਾਰਤ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਦਾ ਯਤਨ ਕਰੀਏ। ਮੰਨ ਲਓ ਆਂਡਿਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ a ਹੈ। ਹੁਣ ਉਲਟੇ ਕ੍ਰਮ ਤੋਂ ਸ਼ੁਰੂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ, ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ a ਸੰਖਿਆ 150 ਤੋਂ ਛੋਟੀ ਹੈ ਜਾਂ ਇਸਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ।

* ਇਹ ਲੇਖਕ ਦੇ, ਗਮਪਾਲ ਅਤੇ ਹੋਰ ਦੁਆਰਾ ਲਿਖੀ ਕਿਤਾਬ ਨਿਊਮੇਰੇਸੀ ਕਾਊਂਟਸ ਵਿੱਚ ਲਿਖੀ ਬੁਝਾਰਤ ਦਾ ਪ੍ਰਵਰਤਿਤ (ਬਦਲਵਾਂ) ਰੂਪ ਹੈ।

ਜੇਕਰ ਸੱਤ-ਸੱਤ ਗਿਣੀਏ ਤਾਂ ਕੁਝ ਨਹੀਂ ਬਚੇਗਾ। ਇਹ $a = 7p + 0$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਵਰਤਿਤ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ p ਕੋਈ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਿਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਜੇਕਰ ਛੇ-ਛੇ ਗਿਣੀਏ ਤਾਂ 5 ਬਚਣਗੇ। ਇਹ $a = 6q + 5$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਵਰਤਿਤ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ q ਕੋਈ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਿਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਪੰਜ-ਪੰਜ ਗਿਣਨ ਨਾਲ, 4 ਬਚਦਾ ਹੈ। ਇਹ $a = 5s + 4$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਵਰਤਿਤ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ s ਕੋਈ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਿਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਚਾਰ-ਚਾਰ ਗਿਣਨ ਨਾਲ, 3 ਬਚਦਾ ਹੈ। ਇਹ $a = 4t + 3$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਵਰਤਿਤ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ..., ...ਥੇ t ਕੋਈ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਿਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਤਿੰਨ-ਤਿੰਨ ਗਿਣਨ ਨਾਲ, 2 ਬਚਦਾ ਹੈ। ਇਹ $a = 3u + 2$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਵਰਤਿਤ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ u ਕੋਈ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਿਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਦੋ-ਦੋ ਗਿਣਨ ਨਾਲ, 1 ਬਚੇਗਾ। ਇਹ $a = 2v + 1$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਵਰਤਿਤ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ ... ਕੋਈ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਿਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਭਾਵ, ਉਪਰੋਕਤ ਹਰ ਇਕ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ, ਸਾਡੇ ਕੋਲ ਦੋ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ a ਅਤੇ b ਹਨ (ਲਏ ਗਏ ਉਦਾਹਰਣ ਵਿੱਚ b ਦੇ ਮੁੱਲ ਕ੍ਰਮਵਾਰ 7, 6, 5, 4, 3 ਅਤੇ 2 ਹਨ)। ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚ a ਨੂੰ b ਨਾਲ ਭਾਗ ਦੇਣ 'ਤੇ r ਬਾਕੀ ਬਚਦਾ ਹੈ (ਉਪਰੋਕਤ ਵਿੱਚ r ਦੇ ਮੁੱਲ ਕ੍ਰਮਵਾਰ 0, 5, 4, 3, 2 ਅਤੇ 1 ਹਨ) ਭਾਵ r ਭਾਜਕ b ਤੋਂ ਛੋਟਾ ਹੈ। ਜਿਵੇਂ ਹੀ ਅਸੀਂ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਸਮੀਕਰਣ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ, ਅਸੀਂ ਯੂਕਲਿਡ ਵੰਡ ਪ੍ਰਮੇਯਕਾ (Euclid's division lemma) ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰ ਰਹੇ ਹਾਂ, ਇਸ ਨੂੰ ਪ੍ਰਮੇਯ 1.1 ਵਿੱਚ ਦਿੱਤਾ ਜਾ ਰਿਹਾ ਹੈ।

ਹੁਣ, ਅਸੀਂ ਬੁਝਾਰਤ 'ਤੇ ਵਾਪਿਸ ਆਉਂਦੇ ਹੋਏ, ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਸੋਚ ਕੇ ਦੱਸ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ ਇਸ ਬੁਝਾਰਤ ਨੂੰ ਕਿਵੇਂ ਹੱਲ ਕਰਾਂਗੇ? ਹਾਂ, ਤੁਸੀਂ 7 ਦੇ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਸਾਰੇ ਗੁਣਜਾਂ ਦਾ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੋ ਉਪਰੋਕਤ ਸਾਰੇ ਸੰਬੰਧਾਂ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦੇ ਹੋਣ। ਜਾਂਚ ਅਤੇ ਭੁੱਲ ਵਿਧੀ ਨਾਲ LCM ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਤੁਸੀਂ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ,ਹੋ ਕਿ ਆਂਡਿਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ 119 ਸੀ।

ਇਸ ਗੱਲ ਦਾ ਅਨੁਭਵ ਕਰਨ ਲਈ ਕਿ ਯੁਕਲਿਡ ਵੰਡ ਪ੍ਰਮੇਯਿਕਾ ਕੀ ਹੈ, ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਜੋੜਿਆਂ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ:

(i) 17, 6 (ii) 5, 12 (iii) 20, 4

ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਿ ਅਸੀਂ ਬੁਝਾਰਤ ਵਾਲੀ ਉਦਾਹਰਣ ਵਿੱਚ ਕੀਤਾ ਸੀ, ਇੱਥੇ ਵੀ ਅਸੀਂ ਹਰ ਇੱਕ ਜੋੜੇ ਲਈ ਸੰਬੰਧ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਿ ਹੇਠਾਂ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਰਿਹਾ ਹੈ।

(i) $17 = 6 \times 2 + 5$ (17 ਵਿੱਚੋਂ 6 ਦੋ ਵਾਰ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ 5 ਬਾਕੀ ਬੱਚਦਾ ਹੈ)

(ii) $5 = 12 \times 0 + 5$ (ਇਹ ਸੰਬੰਧ ਇਸ ਲਈ ਸਹੀ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ 12, 5 ਤੋਂ ਵੱਡਾ ਹੈ)

(iii) $20 = 4 \times 5 + 0$ (20 ਵਿੱਚੋਂ 4 ਪੰਜ ਵਾਰ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਬਾਕੀ ਕੁਝ ਨਹੀਂ ਬੱਚਦਾ)

ਭਾਵ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ a ਅਤੇ b ਦੇ ਹਰ ਇੱਕ ਜੋੜੇ ਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ q ਅਤੇ r ਪਤਾ ਕਰ ਚੁੱਕੇ ਹਾਂ ਕਿ

$a = bq + r, 0 \leq r < b$ ਹੈ।

ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ q ਅਤੇ r ਸਿਫ਼ਰ ਵੀ ਹੋ ਸਕਦੇ ਹਨ।

ਹੁਣ ਤੁਸੀਂ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ a ਅਤੇ b ਦੇ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਜੋੜਿਆਂ ਦੇ ਲਈ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ q ਅਤੇ r ਪਤਾ ਕਰਨ ਦਾ ਯਤਨ ਕਰੋ:

(i) 10, 3 (ii) 4, 19 (iii) 81, 3

ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਧਿਆਨ ਦਿੱਤਾ ਕਿ q ਅਤੇ r ਵਿਲੱਖਣ ਹਨ? ਇਹ ਹੀ ਕੇਵਲ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ ਜੋ ਸੰਬੰਧ $a = bq + r, 0 \le r < b$ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦੀਆਂ ਹਨ। ਤੁਸੀਂ ਇਹ ਵੀ ਦੇਖ ਲਿਆ ਹੋਵੇਗਾ ਕਿ ਇਹ ਲੰਬੀ ਵੰਡ ਵਿਧੀ ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ ਕੁਝ ਵੀ ਨਹੀਂ ਹੈ, ਜਿਸ ਨੂੰ ਤੁਸੀਂ ਕਾਫੀ ਸਾਲਾਂ ਤੋਂ ਕਰਦੇ ਆ ਰਹੇ ਹੋ ਅਤੇ q ਅਤੇ r ਨੂੰ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਭਾਗਫਲ *(quotient)* ਅਤੇ ਬਾਕੀ *(remainder)* ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਨਤੀਜੇ ਨੂੰ ਉਪਚਾਰਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ *(formal)* ਅਸੀਂ ਹੇਠਾਂ ਦੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ:

ਪ੍ਰਮੇਯ (ਥਿਊਰਮ) 1.1 ਯੂਕਲਿਡ ਵੰਡ ਪ੍ਰਮੇਯਿਕਾ *(Euclid's division lemma)* ਦਿੱਤੀਆਂ ਹੋਈਆਂ ਦੋ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ a ਅਤੇ b ਲਈ ਦੋ ਵਿਲੱਖਣ ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ q ਅਤੇ r ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ ਕਿ $a = bq + r,\ 0 \le r < b$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਨਤੀਜੇ ਦੀ ਜਾਣਕਾਰੀ ਬਹੁਤ ਪਹਿਲਾਂ ਤੋਂ ਹੀ ਸੀ, ਪ੍ਰੰਤੂ ਲਿਖਤੀ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਇਸਦਾ ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਉਲੇਖ ਯੂਕਲਿਡ ਐਲੀਮੈਂਟਸ (Euclid's Elements) ਦੀ ਪੁਸਤਕ VII ਵਿੱਚ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ।

ਯੂਕਲਿਡ ਵੰਡ ਐਲਗੋਰਿਥਮ (ਕਲਨ ਵਿਧੀ) ਇਸੇ ਹੀ ਪ੍ਰਮੇਯਕਾ (Lemma) 'ਤੇ ਅਧਾਰਿਤ ਹੈ।

ਐਲਗੋਰਿਥਮ ਪੂਰੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਨਾਲ ਪ੍ਰਭਾਸ਼ਿਤ ਪਗਾਂ ਦੀ ਇੱਕ ਲੜੀ ਹੁੰਦੀ ਹੈ, ਜੋ ਇੱਕ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੀ ਸਮੱਸਿਆ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਦੀ ਇੱਕ ਪ੍ਰਕਿਰਿਆ ਜਾਂ ਵਿਧੀ ਦਸਦੀ ਹੈ।

ਸ਼ਬਦ ''ਐਲਗੋਰਿਥਮ'' 9ਵੀਂ ਸਦੀ ਦੇ ਇੱਕ ਫਾਰਸੀ ਗਣਿਤ ਵਿਗਿਆਨੀ ਅਲ-ਖੁਆਰਿਜ਼ਮੀ ਦੇ ਨਾਮ ਤੋਂ ਲਿਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਸ਼ਬਦ 'ਅਲਜਬਰਾ'(Algebra) ਵੀ ਇਹਨਾਂ ਦੁਆਰਾ ਲਿਖੀ ਪੁਸਤਕ 'ਹਿਸਾਬ ਅਲ ਜ਼ਬਰ ਵੀ ਅਲ ਮੁਕਾਬਲਾ' ਤੋਂ ਲਿਆ ਗਿਆ ਹੈ।

ਪ੍ਰਮੇਯਕਾ ਇੱਕ ਸਿੱਧ ਕੀਤਾ ਹੋਇਆ ਕਥਨ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸਨੂੰ ਕਿਸੇ ਹੋਰ ਕਥਨ ਨੂੰ ਸਿੱਧ ਕਰਨ ਲਈ ਵਰਤਦੇ ਹਨ।

ਮੁਹੰਮਦ ਇਬਨ ਮੂਸਾ ਅਲ ਖੁਆਰਿਜ਼ਮੀ
(780 – 850 ਈ.)

ਯੂਕਲਿਡ ਵੰਡ ਐਲਗੋਰਿਥਮ ਦੋ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਮ.ਸ.ਵ *(H.C.F)* ਗਣਨਾ ਕਰਨ ਦਾ ਇੱਕ ਤਰੀਕਾ ਹੈ। ਤੁਹਾਨੂੰ ਯਾਦ ਹੋਵੇਗਾ ਕਿ ਦੋ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ a ਅਤੇ b ਦਾ ਮ.ਸ.ਵ *(H.C.F)* ਉਹ ਸਭ ਤੋਂ ਵੱਡੀ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ d ਹੈ, ਜੋ a ਅਤੇ b ਦੋਵਾਂ ਨੂੰ ਪੂਰੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਭਾਗ ਕਰਦੀ ਹੈ।

ਆਓ ਸਾਰਿਆਂ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਇੱਕ ਉਦਾਹਰਣ ਲੈ ਕੇ ਦੇਖੀਏ ਕਿ ਇਹ ਐਲਗੋਰਿਥਮ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕੰਮ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਮੰਨ ਲਉ ਅਸੀਂ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ 455 ਅਤੇ 42 ਦਾ ਮ.ਸ.ਵ *(H.C.F)* ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਵੱਡੀ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ 455 ਤੋਂ ਸ਼ੁਰੂ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਹੁਣ ਯੂਕਲਿਡ ਪ੍ਰਮੇਯਕਾ ਤੋਂ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ:

$$455 = 42 \times 10 + 35$$

ਹੁਣ ਭਾਜਕ 42 ਅਤੇ ਬਾਕੀ 35 ਨੂੰ ਲੈ ਕੇ, ਯੂਕਲਿਡ ਪ੍ਰਮੇਯਕਾ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹੋਏ, ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ:

$$42 = 35 \times 1 + 7$$

ਹੁਣ ਭਾਜਕ 35 ਅਤੇ ਬਾਕੀ 7 ਨੂੰ ਲੈ ਕੇ, ਯੂਕਲਿਡ ਪ੍ਰਮੇਯਕਾ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨ ਤੋਂ, ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ:

$$35 = 7 \times 5 + 0$$

ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ਇੱਥੇ ਬਾਕੀ ਸਿਫ਼ਰ (ਜ਼ੀਰੋ) ਆ ਗਿਆ ਹੈ ਅਤੇ ਅਸੀਂ ਅੱਗੇ ਕੁਝ ਨਹੀਂ ਕਰ ਸਕਦੇ। ਅਸੀਂ ਆਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਾਲਾ ਭਾਜਕ ਭਾਵ 7 ਹੀ 455 ਅਤੇ 42 ਦਾ ਮ.ਸ.ਵ *(H.C.F)* ਹੈ। ਤੁਸੀਂ ਇਸ ਦੀ ਜਾਂਚ 455 ਅਤੇ 42 ਦੇ ਸਾਰੇ ਗੁਣਨਖੰਡਾਂ ਨੂੰ ਲਿਖ ਕੇ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ। ਇਹ ਵਿਧੀ ਕਿਸ ਕਾਰਣ ਕੰਮ ਕਰ ਜਾਂਦੀ ਹੈ?

ਇਸ ਦਾ ਕਾਰਣ **ਯੂਕਲਿਡ ਵੰਡ ਐਲਗੋਰਿਥਮ ਹੈ**, ਇਸਦੇ ਪਗਾਂ ਨੂੰ ਹੇਠਾਂ ਸਪਸ਼ਟ ਕੀਤਾ ਜਾ ਰਿਹਾ ਹੈ:

ਦੋ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਮੰਨ ਲਉ c ਅਤੇ d $(c>d)$ ਦਾ ਮ.ਸ.ਵ *(H.C.F)* ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਪਗਾਂ ਅਨੁਸਾਰ ਕੰਮ ਕਰੋ:

ਪਗ 1: c ਅਤੇ d ਦੇ ਲਈ ਯੂਕਲਿਡ ਵੰਡ ਪ੍ਰਮੇਯਕਾ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰੋ। ਇਸ ਲਈ, ਅਸੀਂ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ q ਅਤੇ r ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $c = dq + r$, $0 \leq r < d$ ਹੋਵੇ।

ਪਗ 2: ਜੇਕਰ $r = 0$ ਹੈ, ਤਾਂ d ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ c ਅਤੇ d ਦਾ ਮ.ਸ.ਵ *(H.C.F)* ਹੈ। ਜੇਕਰ $r \neq 0$ ਹੈ, ਤਾਂ d ਅਤੇ r ਦੇ ਲਈ, ਯੂਕਲਿਡ ਵੰਡ ਪ੍ਰਮੇਯਕਾ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰੋ।

ਪਗ 3: ਇਸ ਪ੍ਰਕਿਰਿਆ ਨੂੰ ਉਦੋਂ ਤਕ ਜਾਰੀ ਰੱਖੋ, ਜਦੋਂ ਤੱਕ ਬਾਕੀ ਸਿਫ਼ਰ (ਜ਼ੀਰੋ) ਪ੍ਰਾਪਤ ਨਾ ਹੋ ਜਾਵੇ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਭਾਜਕ ਹੀ ਲੋੜੀਂਦਾ ਮ.ਸ.ਵ *(H.C.F)* ਹੈ।

ਇਹ ਐਲਗੋਰਿਥਮ ਇਸ ਲਈ ਪ੍ਰਭਾਵਸ਼ਾਲੀ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ HCF (c, d) = HCF (d, r) ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇੱਥੇ ਸੰਕੇਤ HCF (c, d) ਦਾ ਮਤਲਬ ਹੈ c ਅਤੇ d ਦਾ HCF।

ਉਦਾਹਰਣ: 4052 ਅਤੇ 12576 ਦਾ ਮ.ਸ.ਵ *(H.C.F)* ਯੂਕਲਿਡ ਵੰਡ ਐਲਗੋਰਿਥਮ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ:

ਪਗ 1: ਇੱਥੇ $12576 > 4052$ ਹੈ। 12576 ਅਤੇ 4052 ਉੱਪਰ ਯੂਕਲਿਡ ਪ੍ਰਮੇਯਕਾ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ:

$$12576 = 4052 \times 3 + 420$$

ਪਗ 2: ਕਿਉਂਕਿ ਬਾਕੀ $420 \neq 0$ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ 4052 ਅਤੇ 420 ਦੇ ਲਈ ਯੂਕਲਿਡ ਪ੍ਰਮੇਯਕਾ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ:

$$4052 = 420 \times 9 + 272$$

ਪਗ 3: ਅਸੀਂ ਨਵੇਂ ਭਾਜਕ 420 ਅਤੇ ਨਵੇਂ ਬਾਕੀ 272 ਨੂੰ ਲੈ ਕੇ ਯੂਕਲਿਡ ਪ੍ਰਮੇਯਕਾ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ, ਹੇਠਾਂ ਅਨੁਸਾਰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ:

$$420 = 272 \times 1 + 148$$

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਨਵੇਂ ਭਾਜਕ 272 ਅਤੇ ਨਵੇਂ ਬਾਕੀ 148 'ਤੇ ਯੂਕਲਿਡ ਪ੍ਰਮੇਯਕਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ:

$$272 = 148 \times 1 + 124$$

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਨਵੇਂ ਭਾਜਕ 148 ਅਤੇ ਨਵੇਂ ਬਾਕੀ 124 'ਤੇ ਯੂਕਲਿਡ ਪ੍ਰਮੇਯਕਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ:

$$148 = 124 \times 1 + 24$$

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਨਵੇਂ ਭਾਜਕ 124 ਅਤੇ ਨਵੇਂ ਬਾਕੀ 24 'ਤੇ ਯੂਕਲਿਡ ਪ੍ਰਮੇਯਕਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ:

$$124 = 24 \times 5 + 4$$

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਨਵੇਂ ਭਾਜਕ 24 ਅਤੇ ਨਵੇਂ ਬਾਕੀ 4 'ਤੇ ਯੂਕਲਿਡ ਪ੍ਰਮੇਯਕਾ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ:

$$24 = 4 \times 6 + 0$$

ਇੱਥੇ ਬਾਕੀ ਸਿਫ਼ਰ (0) ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋ ਗਿਆ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਪ੍ਰਕਿਰਿਆ ਇੱਥੇ ਖਤਮ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਕਿਉਂਕਿ ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਭਾਜਕ 4 ਹੈ। ਇਸ ਲਈ 12576 ਅਤੇ 4052 ਦਾ *H.C.F* 4 ਹੈ।

ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ HCF (24, 4) = HCF (124, 24) = HCF (148, 124) = HCF (272, 148) = HCF (420, 272) = HCF (4052, 420) = HCF (12576, 4052) ਹੈ।

ਯੂਕਲਿਡ ਵੰਡ ਐਲਗੋਰਿਥਮ ਨਾ ਸਿਰਫ਼ ਵੱਡੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਮ.ਸ.ਵ *(H.C.F)* ਪਤਾ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਉਪਯੋਗੀ ਹੈ, ਬਲਕਿ ਇਹ ਇਸ ਲਈ ਵੀ ਮਹੱਤਵਪੂਰਣ ਹੈ ਕਿ ਇਹ ਉਹਨਾਂ ਐਲਗੋਰਿਥਮ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਹੈ, ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਦਾ ਕੰਪਿਊਟਰ ਦੇ ਇੱਕ ਪ੍ਰੋਗ੍ਰਾਮ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤਾ ਗਿਆ।

ਟਿੱਪਣੀ:

1. ਯੂਕਲਿਡ ਵੰਡ ਪ੍ਰਮੇਯਕਾ ਅਤੇ ਯੂਕਲਿਡ ਵੰਡ ਐਲਗੋਰਿਥਮ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਜੁੜੇ ਹੋਏ ਹਨ ਕਿ ਲੋਕ ਆਮ ਤੌਰ ਤੇ ਯੂਕਲਿਡ ਵੰਡ ਪ੍ਰਮੇਯਕਾ ਨੂੰ ਹੀ ਯੂਕਲਿਡ ਵੰਡ ਐਲਗੋਰਿਥਮ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।
2. ਭਾਵੇਂ ਯੂਕਲਿਡ ਵੰਡ ਪ੍ਰਮੇਯਕਾ/ਐਲਗੋਰਿਥਮ ਨੂੰ ਸਿਰਫ਼ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਲਈ ਹੀ ਲਿਖਿਆ ਗਿਆ ਹੈ, ਪ੍ਰੰਤੂ ਇਹ ਸਾਰੀਆਂ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ (ਸਿਫ਼ਰ ਨੂੰ ਛੱਡ ਕੇ ਭਾਵ $b \neq 0$)

ਦੇ ਲਈ ਲਾਗੂ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਭਾਵੇਂ, ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ ਇਸ ਤੱਥ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਨਹੀਂ ਕਰਾਂਗੇ।

ਯੂਕਲਿਡ ਵੰਡ ਪ੍ਰਮੇਯਕਾ/ਐਲਗੋਰਿਥਮ ਦੇ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਗੁਣਾਂ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਬਹੁਤ ਸਾਰੀਆਂ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾਵਾਂ ਹਨ। ਅਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾਵਾਂ ਦੇ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਣ ਹੇਠਾਂ ਦੇ ਰਹੇ ਹਾਂ:

ਉਦਾਹਰਣ 2 : ਦਿਖਾਉ ਕਿ ਹਰ ਇੱਕ ਧਨਾਤਮਕ ਜਿਸਤ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ $2q$ ਦੇ ਰੂਪ ਦੀ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਹਰ ਇੱਕ ਧਨਾਤਮਕ ਟਾਂਕ ਸੰਪੂਰਨ $2q+1$ ਦੇ ਰੂਪ ਦੀ ਹੁੰਦੀ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ q ਕੋਈ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਹੱਲ: ਮੰਨ ਲਉ a ਕੋਈ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਅਤੇ $b = 2$ ਹੈ। ਹੁਣ ਯੂਕਲਿਡ ਵੰਡ ਐਲਗੋਰਿਥਮ ਤੋਂ, ਕਿਸੇ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ $q \geq 0$ ਦੇ ਲਈ $a = 2q + r$ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ $r = 0$ ਹੈ ਜਾਂ $r = 1$ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ $0 \leq r < 2$ ਇਸ ਲਈ $a = 2q$ ਜਾਂ $a = 2q + 1$ ਹੈ।

ਜੇਕਰ $a = 2q$ ਹੈ ਤਾਂ ਇਹ ਇੱਕ ਜਿਸਤ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ। ਨਾਲ ਹੀ ਇੱਕ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਜਾਂ ਤਾਂ ਜਿਸਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਾਂ ਟਾਂਕ। ਇਸ ਲਈ ਕੋਈ ਵੀ ਧਨਾਤਮਕ ਟਾਂਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ $2q + 1$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਹੋਵੇਗੀ।

ਉਦਾਹਰਣ 3 : ਦਿਖਾਉ ਕਿ ਇੱਕ ਧਨਾਤਮਕ ਟਾਂਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ $4q + 1$ ਜਾਂ $4q + 3$ ਦੇ ਰੂਪ ਦੀ ਹੁੰਦੀ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ q ਇੱਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਹੱਲ: ਆਉ ਇੱਕ ਧਨਾਤਮਕ ਟਾਂਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ a ਨੂੰ ਲੈ ਕੇ ਸਵਾਲ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨਾ ਸ਼ੁਰੂ ਕਰੀਏ। ਅਸੀਂ a ਅਤੇ $b = 4$ 'ਤੇ ਵੰਡ ਐਲਗੋਰਿਥਮ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਕਿਉਂਕਿ $0 \leq r < 4$ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਸੰਭਾਵਿਤ ਬਾਕੀ 0, 1, 2 ਅਤੇ 3 ਹਨ।

ਭਾਵ a ਸੰਖਿਆਵਾਂ $4q$, $4q + 1$, $4q + 2$ ਜਾਂ $4q + 3$ ਦੇ ਰੂਪ ਦਾ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ ਜਿੱਥੇ q ਭਾਗਫਲ ਹੈ। ਕਿਉਂਕਿ a ਇੱਕ ਟਾਂਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਇਹ $4q$ ਅਤੇ $4q + 2$ ਦੇ ਰੂਪ ਦਾ ਨਹੀਂ ਹੋ ਸਕਦਾ (ਕਿਉਂਕਿ ਦੋਵੇਂ 2 'ਤੇ ਵੰਡੇ ਜਾ ਸਕਦੇ ਹਨ)।

ਇਸ ਲਈ, ਕੋਈ ਵੀ ਧਨਾਤਮਕ ਟਾਂਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ $4q + 1$ ਜਾਂ $4q + 3$ ਦੇ ਰੂਪ ਦੀ ਹੋਵੇਗੀ।

ਉਦਾਹਰਣ 4: ਇੱਕ ਮਠਿਆਈ ਵਿਕ੍ਰੇਤਾ ਕੋਲ 420 ਕਾਜੂ ਦੀਆਂ ਬਰਫੀਆਂ ਅਤੇ 130 ਬਦਾਮ ਦੀਆਂ ਬਰਫੀਆਂ ਹਨ। ਉਹ ਉਹਨਾਂ ਦੀਆਂ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਢੇਰੀਆਂ ਬਣਾਉਣਾ ਚਾਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ ਹਰ ਇੱਕ ਢੇਰੀ ਵਿੱਚ ਬਰਫੀਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਬਰਾਬਰ ਰਹੇ ਅਤੇ ਇਹ ਢੇਰੀਆਂ ਬਰਫੀ ਦੀ ਪਰਾਤ ਵਿੱਚ ਘੱਟ ਤੋਂ ਘੱਟ ਸਥਾਨ ਘੇਰਨ। ਇਸ ਕੰਮ ਲਈ ਹਰ ਇੱਕ ਢੇਰੀ ਵਿੱਚ ਕਿੰਨੀਆਂ ਬਰਫੀਆਂ ਰੱਖੀਆਂ ਜਾ ਸਕਦੀਆਂ ਹਨ?

ਹੱਲ: ਇਹ ਕੰਮ ਜਾਂਚ ਅਤੇ ਭੁੱਲ ਵਿਧੀ ਨਾਲ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਪ੍ਰੰਤੂ ਇਸ ਨੂੰ ਲੜੀਬੱਧ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ HCF (420, 130) ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਫਿਰ, ਇਸ ਮ.ਸ.ਵ (H.C.F) ਤੋਂ ਹਰ ਇੱਕ ਢੇਰੀ ਵਿੱਚ ਰੱਖੀਆਂ ਜਾ ਸਕਣ ਵਾਲੀਆਂ ਬਰਫੀਆਂ ਦੀ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਗਿਣਤੀ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਵੇਗੀ। ਜਿਸ ਨਾਲ ਢੇਰੀਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਘੱਟ ਤੋਂ ਘੱਟ ਹੋਵੇਗੀ ਅਤੇ ਪਰਾਤ ਵਿੱਚ ਇਹ ਬਰਫੀਆਂ ਘੱਟ ਤੋਂ ਘੱਟ ਸਥਾਨ ਘੇਰਣਗੀਆਂ।

ਆਉ ਹੁਣ ਯੂਕਲਿਡ ਐਲਗੋਰਿਥਮ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ 420 ਅਤੇ 130 ਦਾ ਮ.ਸ.ਵ (H.C.F) ਪਤਾ ਕਰੀਏ।

$$420 = 130 \times 3 + 30$$
$$130 = 30 \times 4 + 10$$
$$30 = 10 \times 3 + 0$$

ਇਸ ਲਈ, 420 ਅਤੇ 130 ਦਾ HCF 10 ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ, ਹਰ ਇੱਕ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੀ ਬਰਫੀ ਦੇ ਲਈ ਮਠਿਆਈ ਵਿਕ੍ਰੇਤਾ ਦਸ-ਦਸ ਦੀਆਂ ਢੇਰੀਆਂ ਬਣਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 1.1

1. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਮ.ਸ.ਵ (H.C.F) ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਯੂਕਲਿਡ ਵੰਡ ਐਲਗੋਰਿਥਮ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰੋ:
   (i) 135 ਅਤੇ 225 (ii) 196 ਅਤੇ 38220 (iii) 867 ਅਤੇ 255
2. ਦਿਖਾਉ ਕਿ ਕੋਈ ਵੀ ਧਨਾਤਮਕ ਟਾਂਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ $6q + 1$ ਜਾਂ $6q + 3$ ਜਾਂ $6q + 5$ ਦੇ ਰੂਪ ਦੀ ਹੁੰਦੀ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ q ਕੋਈ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।
3. ਕਿਸੇ ਪਰੇਡ ਵਿੱਚ 616 ਆਦਮੀਆਂ ਵਾਲੀ ਇੱਕ ਸੈਨਾ (ਆਰਮੀ) ਦੀ ਟੁੱਕੜੀ ਨੇ 32 ਆਦਮੀਆਂ ਵਾਲੇ ਇੱਕ ਸੈਨਾ ਬੈਂਡ ਦੇ ਪਿੱਛੇ ਮਾਰਚ ਕਰਨਾ ਹੈ। ਦੋਹਾਂ ਸਮੂਹਾਂ ਨੇ ਬਰਾਬਰ ਗਿਣਤੀ ਵਾਲੇ ਸਤੰਭਾਂ (Columns) ਵਿੱਚ ਮਾਰਚ ਕਰਨਾ ਹੈ। ਇਹਨਾਂ ਸਤੰਭਾਂ (Columns) ਦੀ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਗਿਣਤੀ ਕਿੰਨੀ ਹੈ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਇਹ ਮਾਰਚ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਨ?
4. ਯੂਕਲਿਡ ਵੰਡ ਪ੍ਰਮੇਯਕਾ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ ਦਿਖਾਉ ਕਿ ਕਿਸੇ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਵਰਗ, ਕਿਸੇ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ m ਦੇ ਲਈ $3m$ ਜਾਂ $3m + 1$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

   [ਸੰਕੇਤ : ਮੰਨ ਲਉ x ਕੋਈ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ। ਹੁਣ ਇਹ $3q$, $3q + 1$ ਜਾਂ $3q + 2$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ। ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰ ਇੱਕ ਦਾ ਵਰਗ ਕਰੋ ਅਤੇ ਦਿਖਾਉ ਕਿ ਇਹਨਾਂ ਵਰਗਾਂ ਨੂੰ $3m$ ਜਾਂ $3m + 1$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।]
5. ਯੂਕਲਿਡ ਵੰਡ ਪ੍ਰਮੇਯਕਾ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ ਦਿਖਾਉ ਕਿ ਕਿਸੇ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਘਣ $9m$, $9m + 1$ ਜਾਂ $9m + 8$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

1.3 ਅੰਕਗਣਿਤ ਦੀ ਮੂਲਭੂਤ ਪ੍ਰਮੇਯ (Fundamental Theorem of Arithmetic)

ਤੁਸੀਂ ਪਿਛਲੀਆਂ ਜਮਾਤਾਂ ਵਿੱਚ ਦੇਖ ਚੁੱਕੇ ਹੋ ਕਿ ਕਿਸੇ ਵੀ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਿਕ ਸੰਖਿਆ ਨੂੰ ਉਸਦੇ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ 'ਤੇ $2 = 2$, $4 = 2 \times 2$, $253 = 11 \times 23$ ਆਦਿ। ਆਉ ਹੁਣ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਉੱਤੇ ਇੱਕ ਹੋਰ ਦ੍ਰਿਸ਼ਟੀਕੋਣ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ। ਭਾਵ ਇਹ ਦੇਖੀਏ ਕਿ ਕੀ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਗੁਣਾ ਕਰਕੇ ਇੱਕ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਿਕ ਸੰਖਿਆ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ? ਆਉ ਇਸ ਦੀ ਜਾਂਚ ਕਰੀਏ।

ਕੁਝ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ, ਮੰਨ ਲਉ 2, 3, 7, 11 ਅਤੇ 23 ਦਾ ਇੱਕ ਸੰਗ੍ਰਿਹ ਲਉ। ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕੁਝ ਜਾਂ ਸਾਰੀਆਂ ਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਗੁਣਾ ਕਰੀਏ (ਅਸੀਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਜਿੰਨੀ ਵਾਰ ਚਾਹੀਏ ਲੈ ਸਕਦੇ ਹਾਂ) ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਇੱਕ ਵੱਡਾ ਸਾਰਾ ਸੰਗ੍ਰਿਹ ਬਣਾ ਸਕਦੇ

ਹਾਂ (ਅਸਲ ਵਿੱਚ, ਅਸੀਮਿਤ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਅਨੇਕ)। ਆਉ ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕੁਝ ਦੀ ਸੂਚੀ ਬਣਾਈਏ :

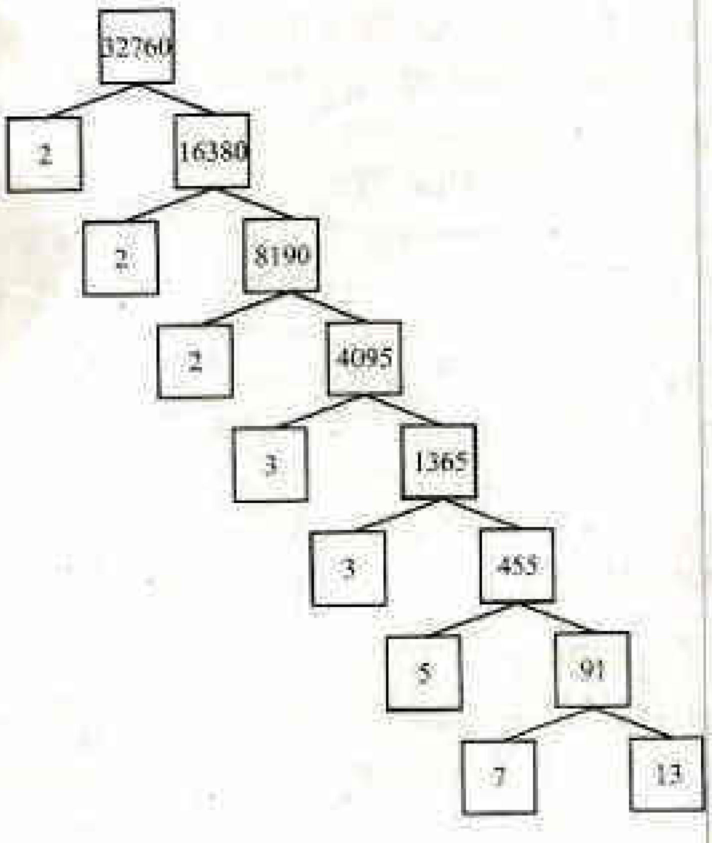
$7 \times 11 \times 23 = 1771$, $3 \times 7 \times 11 \times 23 = 5313$,

$2 \times 3 \times 7 \times 11 \times 23 = 10626$, $2^3 \times 3 \times 7^3 = 8232$,

$2^2 \times 3 \times 7 \times 11 \times 23 = 21252$ ਆਦਿ।

ਹੁਣ ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਤੁਹਾਡੇ ਸੰਗ੍ਰਿਹ ਵਿੱਚ, ਸਾਰੀਆਂ ਸੰਭਵ ਅਭਾਜ (prime) ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਸ਼ਾਮਿਲ ਹਨ। ਇਸ ਸੰਗ੍ਰਿਹ ਦੇ ਮਾਪ (size) ਬਾਰੇ ਤੁਸੀਂ ਕੀ ਅੰਦਾਜਾ ਲਗਾ ਸਕਦੇ ਹੋ? ਕੀ ਇਸ ਵਿੱਚ ਸੀਮਿਤ (finites) ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ ਜਾਂ ਅਸੀਮਿਤ (Infinite)? ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਅਣਗਿਣਤ (Infinites) ਹਨ। ਸੋ ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਸਾਰੀਆਂ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਸਾਰੇ ਸੰਭਵ ਤਰੀਕਿਆਂ ਨਾਲ ਇਕੱਠਾ ਕਰੀਏ ਤਾਂ ਸਾਨੂੰ ਅਣਗਿਣਤ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਅਤੇ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲਾਂ ਦਾ ਅਣਗਿਣਤ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਸੰਗ੍ਰਿਹ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋ ਜਾਵੇਗਾ। ਹੁਣ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਇਹ ਹੈ ਕਿ ਕੀ ਅਸੀਂ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸਾਰੀਆਂ ਭਾਜ (composite) ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ? ਤੁਸੀਂ ਕੀ ਸੋਚਦੇ ਹੋ? ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਇਹ ਸੋਚਦੇ ਹੋ ਕਿ ਕੋਈ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਭਾਜ ਸੰਖਿਆ ਹੋ ਸਕਦੀ ਹੈ ਜੋ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀਆਂ ਘਾਤਾਂ (powers) ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ ਨਾ ਹੋਵੇ ? ਇਸਦਾ ਉੱਤਰ ਦੇਣ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਆਉ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨਖੰਡਨ ਕਰੀਏ, ਭਾਵ ਅਸੀਂ ਹੁਣ ਤੱਕ ਜੋ ਕੀਤਾ ਹੈ ਉਸਦਾ ਉਲਟਾ ਕਰੀਏ।

ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਗੁਣਨਖੰਡ ਰੁੱਖ (factor tree) ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਾਂਗੇ ਜਿਸ ਤੋਂ ਤੁਸੀਂ ਪਹਿਲਾਂ ਤੋਂ ਹੀ ਜਾਣੂੰ ਹੋ। ਆਉ ਇੱਕ ਵੱਡੀ ਸੰਖਿਆ ਮੰਨ ਲਉ 32760 ਲਈਏ ਅਤੇ ਇਸਦੇ ਗੁਣਨਖੰਡ ਹੇਠਾਂ ਦਿਖਾਏ ਅਨੁਸਾਰ ਕਰੀਏ :



ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ, ਅਸੀਂ 32760 ਨੂੰ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਗੁਣਨਖੰਡਿਤ ਕਰ ਲਿਆ ਹੈ ਜੋ $2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7 \times 13$ ਹੈ। ਭਾਵ $32760 = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7 \times 13$ ਹੈ, ਜੋ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀਆਂ ਘਾਤਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਹੈ। ਆਉ ਇੱਕ ਹੋਰ ਸੰਖਿਆ ਮੰਨ ਲਉ 123456789 ਲੈ ਕੇ ਇਸ ਦੇ ਗੁਣਨਖੰਡ ਲਿਖੀਏ। ਇਸ ਨੂੰ $3^2 \times 3803 \times 3607$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਬੇਸ਼ਕ ਤੁਹਾਨੂੰ ਇਸਦੀ ਜਾਂਚ ਕਰਨੀ ਹੋਵੇਗੀ ਕਿ 3803 ਅਤੇ 3607 ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ (ਕੁਝ ਹੋਰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਲੈ ਕੇ ਤੁਸੀਂ ਆਪ ਵੀ ਕਰਨ ਦੀ ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰੋ) ਇਸ ਤੋਂ ਸਾਨੂੰ ਇਹ ਅਨੁਮਾਨ (conjecture) ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ ਹਰ ਇੱਕ ਭਾਜ ਸੰਖਿਆ ਨੂੰ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀਆਂ ਘਾਤਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਇਹ ਕਥਨ ਸੱਚ ਹੈ ਅਤੇ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਅਧਿਐਨ ਵਿੱਚ ਇਹ ਮੂਲਰੂਪ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਮਹੱਤਵਪੂਰਣ ਸਥਾਨ ਰੱਖਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਕਾਰਣ ਇਹ ਕਥਨ **ਅੰਕਗਣਿਤ ਦੀ ਮੂਲਭੂਤ ਪ੍ਰਮੇਯ (Fundamental Theorem of Arithmetic)** ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਆਉ ਇਸ ਪਰਿਮੇਯ ਨੂੰ ਉਪਚਾਰਿਕ (formal) ਤੌਰ 'ਤੇ ਪ੍ਰਕਾਸ਼ਿਤ ਕਰੀਏ।

ਪ੍ਰਮੇਯ 1.12 (ਅੰਕਗਣਿਤ ਦੀ ਮੂਲਭੂਤ ਪ੍ਰਮੇਯ) ਹਰ ਇੱਕ ਭਾਜ ਸੰਖਿਆ (composite number) ਨੂੰ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ (prime numbers) ਦੇ ਇੱਕ ਗੁਣਨਫਲ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ (ਦਰਸਾਇਆ) ਗੁਣਨਖੰਡਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਹ ਗੁਣਨਖੰਡਨ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡਾਂ ਦੇ ਆਉਣ ਵਾਲੇ ਤਰਤੀਬ (ਕ੍ਰਮ) (order) ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ ਵਿਲੱਖਣ (unique) ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਅੰਕਗਣਿਤ ਦੀ ਮੂਲ ਭੂਤ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਸਿੱਧ ਹੋਣ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਪ੍ਰਮੇਯ 1.2 ਦਾ ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਵਰਨਣ ਯੁਕਲਿਡ ਦੇ ਐਲੀਮੈਂਟਸ ਦੀ ਪੁਸਤਕ IX ਵਿੱਚ ਸਾਧਯ (proposition) 14 ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਹੋਇਆ ਸੀ। ਪ੍ਰੰਤੂ ਇਸਦਾ ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਸਬੂਤ ਕਾਰਲ ਫ੍ਰੈਡਰਿਕ ਗਾੱਸ *(Carl Friedrich Guass)* ਦੀ ਆਪਣੀ ਲਿਖਤ ਡਿਸਕਿਊਸ਼ਸ ਅਰਥਮੇਟਿਕੀ *(Disquisitions Arithmeticae)* ਵਿੱਚ ਸੀ।

ਕਾਰਲ ਫ੍ਰੈਡਰਿਕ ਗਾੱਸ ਨੂੰ ਆਮ ਤੌਰ 'ਤੇ "ਗਣਿਤ ਵਿਗਿਆਨੀਆਂ ਦੇ ਰਾਜ ਕੁਮਾਰ" ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਜਾਣਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸਦਾ ਨਾਮ ਹਰ ਸਮੇਂ ਪ੍ਰਸਿੱਧ ਰਹੇ ਤਿੰਨ ਮਹਾਨਤਮ ਗਣਿਤ ਵਿਗਿਆਨੀਆਂ ਵਿੱਚ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਆਰਕੀਮੀਡਿਜ (Archimedes) ਅਤੇ ਨਿਊਟਨ (Newton) ਵੀ ਸ਼ਾਮਿਲ ਹਨ। ਇਹਨਾਂ ਦਾ ਗਣਿਤ ਅਤੇ ਵਿਗਿਆਨ ਦੋਹਾਂ ਵਿੱਚ ਹੀ ਮੌਲਿਕ ਯੋਗਦਾਨ ਹੈ।

ਕਾਰਲ ਫ੍ਰੈਡਰਿਕ ਗਾੱਸ
(1777 – 1855)

ਅੰਕਗਣਿਤ ਦੀ ਮੂਲਭੂਤ ਪ੍ਰਮੇਯ ਕਹਿੰਦੀ ਹੈ ਕਿ ਹਰ ਇੱਕ ਭਾਜ ਸੰਖਿਆ ਨੂੰ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਗੁਣਨਖੰਡਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਇਹ ਹੋਰ ਵੀ ਕੁਝ ਕਹਿੰਦੀ ਹੈ। ਇਹ ਕਹਿੰਦੀ ਹੈ ਕਿ ਇੱਕ ਭਾਜ ਸੰਖਿਆ ਨੂੰ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ, ਇੱਕ ਬਿਨਾਂ ਇਹ ਧਿਆਨ ਦਿੱਤਿਆਂ ਕਿ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਕਿਸ ਤਰਤੀਬ (ਕ੍ਰਮ)

(order) ਵਿੱਚ ਹਨ, ਇੱਕ ਵਿਲੱਖਣ ਤਰੀਕੇ (unique way) ਨਾਲ ਗੁਣਨਖੰਡਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਭਾਵ ਜੇਕਰ ਕੋਈ ਭਾਜ ਸੰਖਿਆ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਹੈ ਤਾਂ ਉਸ ਨੂੰ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਣ ਦਾ ਸਿਰਫ਼ ਇੱਕ ਹੀ ਤਰੀਕਾ ਹੈ, ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਆਉਣ ਵਾਲੇ ਕ੍ਰਮ 'ਤੇ ਕੋਈ ਵਿਚਾਰ ਨਹੀਂ ਕਰਦੇ। ਇਸ ਲਈ ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ 'ਤੇ ਅਸੀਂ $2 \times 3 \times 5 \times 7$ ਨੂੰ ਉਹ ਹੀ ਮੰਨਦੇ ਹਾਂ ਜੋ $3 \times 5 \times 7 \times 2$, ਨੂੰ ਮੰਨਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ, ਇਹਨਾਂ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਦੇ ਕਿਸੇ ਹੋਰ ਕ੍ਰਮ ਨੂੰ ਵੀ ਅਸੀਂ $2 \times 3 \times 5 \times 7$ ਵਰਗਾ ਹੀ ਮੰਨਾਂਗੇ। ਇਸ ਤੱਥ ਨੂੰ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਅਨੁਸਾਰ ਲਿਖਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ :

ਇੱਕ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਿਕ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡਨ, ਉਸਦੇ ਗੁਣਨਖੰਡਾਂ ਦੀ ਤਰਤੀਬ (ਕ੍ਰਮ) ਨੂੰ ਛੱਡਦੇ ਹੋਏ ਵਿਲੱਖਣ (unique) ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਵਿਆਪਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ, ਜਦੋਂ ਸਾਨੂੰ ਇੱਕ ਭਾਜ ਸੰਖਿਆ x ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਉਸਨੂੰ $x = p_1 p_2 \dots p_n$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਗੁਣਨਖੰਡਿਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ, ਜਿੱਥੇ $p_1, p_2, \dots, p_n$ ਆਦਿ ਵੱਧਦੇ ਕ੍ਰਮ ਵਿੱਚ ਲਿਖੀਆਂ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ। ਭਾਵ $p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_n$ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਇੱਕੋ ਜਿਹੀਆਂ (ਬਰਾਬਰ) ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਇਕੱਠਾ ਕਰ ਲਈਏ, ਤਾਂ ਸਾਨੂੰ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀਆਂ ਘਾਤਾਂ (powers) ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋ ਜਾਂਦੀਆਂ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ 'ਤੇ, $32760 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7 \times 13 = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7 \times 13$

ਇੱਕ ਵਾਰ ਇਹ ਨਿਰਣਾ ਲੈਣ ਤੋਂ ਬਾਦ ਕਿ ਗੁਣਨਖੰਡਾਂ ਦੀ ਇਹ ਤਰਤੀਬ ਵਧਦੇ ਕ੍ਰਮ ਅਨੁਸਾਰ ਹੋਵੇਗੀ ਤਾਂ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡ ਵਿਲੱਖਣ (unique) ਹੋਣਗੇ।

ਅੰਕਗਣਿਤ ਦੀ ਮੂਲਭੂਤ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦੇ ਗਣਿਤ ਅਤੇ ਹੋਰ ਖੇਤਰਾਂ ਵਿੱਚ ਹੀ ਅਨੇਕਾਂ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾਵਾਂ ਹਨ। ਆਉ ਇਹਨਾਂ ਦੀਆਂ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰੀਏ।

ਉਦਾਹਰਣ 5 : ਸੰਖਿਆਵਾਂ 4^n 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ, ਜਿੱਥੇ n ਇੱਕ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਿਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ। ਜਾਂਚ ਕਰੋ ਕਿ ਕੀ n ਦਾ ਕੋਈ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦਾ ਮੁੱਲ ਹੈ ਜਿਸ ਨਾਲ 4^n ਅੰਕ ਸਿਫ਼ਰ (0) 'ਤੇ ਸਮਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ n ਦੇ ਲਈ ਸੰਖਿਆ 4^n ਸਿਫ਼ਰ 'ਤੇ ਸਮਾਪਤ ਹੋਵੇਗੀ ਤਾਂ ਇਹ 5 ਨਾਲ ਭਾਜਯੋਗ ਹੋਵੇਗੀ। ਭਾਵ 4^n ਦੇ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡਣ ਵਿੱਚ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆ 5 ਆਉਣੀ ਚਾਹੀਦੀ ਹੈ। ਇਹ ਸੰਭਵ ਨਹੀਂ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ $4^n = (2)^{2n}$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ 4^n ਦੇ ਗੁਣਨਖੰਡਣ ਵਿੱਚ ਕੇਵਲ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆ 2 ਹੀ ਆ ਸਕਦੀ ਹੈ। ਅੰਕਗਣਿਤ ਦੀ ਮੂਲਭੂਤ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦੀ ਵਿੱਲਖਣਤਾ ਸਾਨੂੰ ਇਹ ਯਕੀਨ ਦਿਵਾਉਂਦੀ ਹੈ ਕਿ 4^n ਦੇ ਗੁਣਨਖੰਡਣ ਵਿੱਚ 2 ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ ਹੋਰ ਕੋਈ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਕੋਈ ਸੰਖਿਆ n ਨਹੀਂ ਹੈ, ਜਿਸਦੇ ਲਈ 4^n ਅੰਕ ਸਿਫ਼ਰ 0 'ਤੇ ਸਮਾਪਤ ਹੋਵੇਗੀ।

ਤੁਸੀਂ ਪਿਛਲੀਆਂ ਜਮਾਤਾਂ ਵਿੱਚ, ਇਹ ਪੜ੍ਹ ਚੁੱਕੇ ਹੋ ਕਿ ਦੋ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਮ.ਸ.ਵ (H.C.F) ਅਤੇ ਲ.ਸ.ਵ (L.C.M) ਅੰਕਗਣਿਤ ਦੀ ਮੂਲਭੂਤ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪਤਾ ਕੀਤੇ ਜਾਂਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਰਦੇ ਸਮੇਂ, ਇਸ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦੇ ਨਾਮ ਦਾ ਜ਼ਿਕਰ ਨਹੀਂ ਕੀਤਾ

ਗਿਆ ਸੀ। ਇਸ ਤਰੀਕੇ ਨੂੰ *ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡਨ ਵਿਧੀ (prime factorisation method)* ਵੀ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਆਉ ਇੱਕ ਉਦਾਹਰਣ ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਨਾਲ ਇਸ ਵਿਧੀ ਨੂੰ ਫਿਰ ਤੋਂ ਯਾਦ ਕਰੀਏ।

ਉਦਾਹਰਣ 6 : ਸੰਖਿਆਵਾਂ 6 ਅਤੇ 20 ਦਾ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡਣ ਵਿਧੀ ਨਾਲ ਮ.ਸ.ਵ (H.C.F) ਅਤੇ ਲ.ਸ.ਵ (L.C.M) ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ $6 = 2^1 \times 3^1$ ਅਤੇ $20 = 2 \times 2 \times 5 = 2^2 \times 5^1$ ਹੈ।

ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਿ ਤੁਸੀਂ ਪਿਛਲੀਆਂ ਜਮਾਤਾਂ ਵਿੱਚ ਕਰ ਚੁੱਕੇ ਹੋ ਤੁਸੀਂ ਮ.ਸ.ਵ. (H.C.F) (6, 20) = 2 ਅਤੇ ਲ.ਸ.ਵ. (L.C.M.) (6, 20) = $2 \times 2 \times 3 \times 5 = 60$ ਕੱਢ ਸਕਦੇ ਹੋ।

ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ HCF (6, 20) = 2^1 = **ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਹਰ ਇੱਕ ਸਾਂਝੇ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡ ਦੀ ਸਭ ਤੋਂ ਛੋਟੀ ਘਾਤ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ ਅਤੇ**

LCM (6, 20) = $2^2 \times 3^1 \times 5^1$ = **ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਵਿੱਚ ਆਏ ਹਰ ਇੱਕ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡ ਦੀ ਸਭ ਤੋਂ ਵੱਡੀਆਂ ਘਾਤਾਂ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ**

ਉਪਰੋਕਤ ਉਦਾਹਰਣ ਵਿੱਚੋਂ ਤੁਸੀਂ ਇਹ ਦੇਖ ਲਿਆ ਹੋਵੇਗਾ ਕਿ HCF (6, 20) × LCM (6, 20) = 6 × 20 ਹੈ। ਅਸਲ ਵਿੱਚ, ਅੰਕਗਣਿਤ ਦੀ ਮੂਲਭੂਤ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ ਅਸੀਂ ਇਸਦੀ ਜਾਂਚ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਕਿਸੇ ਦੋ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ a ਅਤੇ b ਦੇ ਲਈ **HCF (a, b) × LCM $(a, b) = a \times b$** ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਸਿੱਟੇ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ ਅਸੀਂ ਦੋ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ *LCM* ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ, ਜੇਕਰ ਉਹਨਾਂ ਦਾ ਮ.ਸ.ਵ *(H.C.F)* ਪਹਿਲਾਂ ਤੋਂ ਹੀ ਪਤਾ ਹੋਵੇ।

ਉਦਾਹਰਣ 7 : ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡਣ ਵਿਧੀ ਦੁਆਰਾ 96 ਅਤੇ 404 ਦਾ HCF ਪਤਾ ਕਰੋ ਅਤੇ ਫਿਰ ਇਸ ਦਾ LCM ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ: 96 ਅਤੇ 404 ਦੇ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡਣ ਤੋਂ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ

$$96 = 2^5 \times 3,\ 404 = 2^2 \times 101$$

ਇਸ ਲਈ, ਇਹਨਾਂ ਦੋਹਾਂ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਮ.ਸ.ਵ ਭਾਵ HCF (96,404) = $2^2 = 4$

ਨਾਲ ਹੀ
$$\text{LCM}(96, 404) = \frac{96 \times 404}{\text{HCF}(96, 404)} = \frac{96 \times 404}{4} = 9696$$

ਉਦਾਹਰਣ 8 : ਸੰਖਿਆਵਾਂ 6, 72 ਅਤੇ 120 ਦਾ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡਣ ਵਿਧੀ ਨਾਲ ਮ.ਸ.ਵ (H.C.F) ਅਤੇ ਲ.ਸ.ਵ (L.C.M) ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਹੈ :

$$6 = 2 \times 3,\ 72 = 2^3 \times 3^2 \text{ ਅਤੇ } 120 = 2^3 \times 3 \times 5$$

2^1 ਅਤੇ 3^1 ਹਰ ਇੱਕ ਸਾਂਝੇ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡਾਂ ਦੀਆਂ ਸਭ ਤੋਂ ਛੋਟੀਆਂ ਘਾਤਾਂ ਹਨ।

ਇਸ ਲਈ, HCF (6, 72, 120) = $2^1 \times 3^1 = 2 \times 3 = 6$

2^3, 3^2 ਅਤੇ 5^1 ਹਰ ਇੱਕ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡ ਦੀ ਸਭ ਤੋਂ ਵੱਡੀ ਘਾਤ ਹੈ, ਜੋ ਤਿੰਨਾਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ, LCM $(6, 72, 120) = 2^3 \times 3^2 \times 5^1 = 360$

ਟਿੱਪਣੀ : ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ $6 \times 72 \times 120 \neq$ HCF $(6, 72, 120) \times$ LCM $(6, 72, 120)$, ਭਾਵ ਤਿੰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ ਉਹਨਾਂ ਦੇ HCF ਅਤੇ LCM ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ।

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 1.2

1. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖੋ:

   (i) 140 (ii) 156 (iii) 3825 (iv) 5005 (v) 7429

2. ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖਿਆਂ ਜੋੜਿਆਂ ਦਾ HCF ਅਤੇ LCM ਪਤਾ ਕਰੋ ਅਤੇ ਇਸ ਦੀ ਜਾਂਚ ਕਰੋ ਕਿ ਦੋ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ = HCF $\times$ LCM ਹੈ।

   (i) 26 ਅਤੇ 91 (ii) 510 ਅਤੇ 92 (iii) 336 ਅਤੇ 54

3. ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡਣ ਵਿਧੀ ਨਾਲ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ HCF ਅਤੇ LCM ਪਤਾ ਕਰੋ :

   (i) 12, 15 ਅਤੇ 21 (ii) 17, 23 ਅਤੇ 29 (iii) 8, 9 ਅਤੇ 25

4. HCF $(306, 657) = 9$ ਦਿੱਤਾ ਹੈ। LCM $(306, 657)$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

5. ਜਾਂਚ ਕਰੋ ਕਿ ਕੀ ਕਿਸੇ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਿਕ ਸੰਖਿਆ n ਦੇ ਲਈ ਸੰਖਿਆ 6^n ਅੰਕ ਜ਼ਿਫਰ (0) 'ਤੇ ਸਮਾਪਤ ਹੋ ਸਕਦੀ ਹੈ।

6. ਵਿਆਖਿਆ ਕਰੋ ਕਿ $7 \times 11 \times 13 + 13$ ਅਤੇ $7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 + 5$ ਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਕਿਉਂ ਹਨ।

7. ਕਿਸੇ ਖੇਡ ਦੇ ਮੈਦਾਨ ਦੇ ਚਾਰੇ ਪਾਸੇ ਇੱਕ ਚੱਕਰਾਕਾਰ ਰਸਤਾ ਹੈ। ਇਸ ਮੈਦਾਨ ਦਾ ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਲਗਾਉਣ ਲਈ ਸਿੰਪੀ ਨੂੰ 18 ਮਿੰਟ ਲਗਦੇ ਹਨ, ਜਦ ਕਿ ਇਸ ਮੈਦਾਨ ਦਾ ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਲਗਾਉਣ ਲਈ ਰਵੀ ਨੂੰ 12 ਮਿੰਟ ਲੱਗਦੇ ਹਨ। ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਉਹ ਦੋਨੋਂ ਇੱਕ ਹੀ ਸਥਾਨ ਅਤੇ ਇੱਕੋ ਹੀ ਸਮੇਂ 'ਤੇ ਚਲਣਾ ਸ਼ੁਰੂ ਕਰਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਇੱਕ ਹੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਜਾਂਦੇ ਹਨ। ਕਿੰਨੇ ਸਮੇਂ ਬਾਅਦ ਉਹ ਦੋਵੇਂ ਸ਼ੁਰੂ ਵਾਲੇ ਸਥਾਨ 'ਤੇ ਦੁਬਾਰਾ ਮਿਲਣਗੇ।

1.4 ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਦੁਹਰਾਈ

IX ਜਮਾਤ ਵਿੱਚ ਤੁਹਾਨੂੰ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਬਹੁਤ ਸਾਰੇ ਗੁਣਾਂ ਤੋਂ ਜਾਣੂ ਕਰਵਾਇਆ ਗਿਆ ਸੀ। ਤੁਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਦੀ ਹੋਂਦ ਬਾਰੇ ਪੜ੍ਹਿਆ ਸੀ ਅਤੇ ਦੇਖਿਆ ਕਿ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪਰਿਮੇਯ ਅਤੇ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਮਿਲਕੇ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ (real numbers) ਬਣਾਉਂਦੀਆਂ ਹਨ। ਤੁਸੀਂ ਇਹ ਵੀ ਸਿੱਖਿਆ ਸੀ ਕਿ ਸੰਖਿਆ ਰੇਖਾ 'ਤੇ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਸਥਾਨ ਨਿਰਧਾਰਤ ਕਰਦੇ ਹਨ। ਫਿਰ ਵੀ ਅਸੀਂ ਇਹ ਸਿੱਧ ਨਹੀਂ ਸੀ ਕੀਤਾ ਕੀ ਇਹ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਅਪਰਿਮੇਯ ਹਨ। ਇਸ ਭਾਗ ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ ਇਹ ਸਿੱਧ ਕਰਾਂਗੇ ਕਿ $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ ਅਤੇ ਆਮ ਰੂਪ ਵਿੱਚ, $\sqrt{p}$

ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ, ਜਿੱਥੇ p ਇਕ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆ ਹੈ। ਆਪਣੇ ਸਬੂਤ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਪ੍ਰਮੇਯਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਾਂਗੇ, ਉਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋ ਇੱਕ ਹੈ ਅੰਕਗਣਿਤ ਦੀ ਮੂਲਭੂਤ ਪ੍ਰਮੇਯ।

ਯਾਦ ਕਰੋ ਕਿ ਇਹ ਸੰਖਿਆ 's' ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਕਹਾਉਂਦੀ ਹੈ, ਜੇਕਰ ਉਸ ਨੂੰ $\frac{p}{q}$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਨਾ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੋਵੇ, ਜਿੱਥੇ p ਅਤੇ q ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ ਅਤੇ $q \neq 0$ ਹੈ। ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਣ, ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਤੋਂ ਤੁਸੀਂ ਜਾਣੂ ਹੋ, ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੇ ਹਨ:

$$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{15}, \pi, -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, 0.10110111011110\ldots, \text{ ਆਦਿ ।}$$

ਇਸ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਕਿ ਅਸੀਂ $\sqrt{2}$ ਨੂੰ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਸਿੱਧ ਕਰੀਏ, ਸਾਨੂੰ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦੀ ਜਰੂਰਤ ਪਵੇਗੀ, ਇਸਦਾ ਸਬੂਤ ਅੰਕਗਣਿਤ ਦੀ ਮੂਲਭੂਤ ਪਰਿਮੇਯ 'ਤੇ ਅਧਾਰਿਤ ਹੈ।

ਪ੍ਰਮੇਯ 1.3 : ਮੰਨ ਲਉ p ਇੱਕ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆ ਹੈ। ਜੇਕਰ p, a^2 ਨੂੰ ਭਾਗ (ਵੰਡਦੀ) ਕਰਦੀ ਹੈ, ਤਾਂ p, a ਨੂੰ ਵੀ ਭਾਗ ਕਰੇਗੀ। ਇੱਥੇ a ਇੱਕ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

***ਸਬੂਤ :** ਮੰਨ ਲਉ a ਦੇ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡਣ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੇ ਰੂਪ ਦੇ ਹਨ: $a = p_1p_2 \cdots p_n$ ਜਿੱਥੇ $p_1, p_2, \cdots p_n$ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ। ਪਰੰਤੂ ਜਰੂਰੀ ਨਹੀਂ ਕਿ ਇਹ ਅੱਲਗ-ਅੱਲਗ ਹੋਣ।

ਇਸ ਲਈ $a^2 = (p_1p_2 \cdots p_n)(p_1p_2 \cdots p_n) = p_1^2p_2^2 \cdots p_n^2$

ਹੁਣ, ਸਾਨੂੰ ਦਿੱਤਾ ਹੈ ਕਿ p, a^2 ਨੂੰ ਭਾਗ (ਵੰਡਦੀ) ਕਰਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਅੰਕਗਣਿਤ ਦੀ ਮੂਲਭੂਤ ਪ੍ਰਮੇਯ (ਥਿਊਰਮ) ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ p, a^2 ਦਾ ਇੱਕ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡ ਹੈ। ਪ੍ਰੰਤੂ ਅੰਕਗਣਿਤ ਦੀ ਮੂਲਭੂਤ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦੀ ਵਿਲੱਖਣਤਾ ਦੇ ਗੁਣ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨ ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਵੇਗਾ ਕਿ a^2 ਦਾ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡਣ ਕੇਵਲ $p_1, p_2, \ldots, p_n$ ਹੀ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ p ਨੂੰ $p_1, p_2, \ldots, p_n$ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਹੋਣਾ ਹੋਵੇਗਾ। ਹੁਣ, ਕਿਉਂਕਿ $a = p_1 p_2 \cdots p_n$ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ p, a ਨੂੰ ਜ਼ਰੂਰ ਭਾਗ ਕਰੇਗਾ।

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਇਸਦਾ ਸਬੂਤ ਦੇ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $\sqrt{2}$ ਇੱਕ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਇਹ ਸਬੂਤ ਉਸ ਤਕਨੀਕ 'ਤੇ ਅਧਾਰਿਤ ਹੈ ਜਿਸਨੂੰ 'ਸਵੈਵਿਰੋਧ ਰਾਹੀਂ ਸਬੂਤ' (proof by contradiction) ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। (ਇਸ ਤਕਨੀਕ ਦੀ ਵਿਸਥਾਰਿਤ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਚਰਚਾ ਅੰਤਿਕਾ – 1 ਵਿੱਚ ਕੀਤੀ ਗਈ ਹੈ)।

ਪ੍ਰਮੇਯ (ਥਿਊਰਮ) 1.4 : $\sqrt{2}$ ਇੱਕ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਸਬੂਤ : ਅਸੀਂ ਇਸਦੇ ਉਲਟ ਇਹ ਮੰਨ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $\sqrt{2}$ ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ , ਅਸੀਂ ਦੋ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ r ਅਤੇ s ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

* ਇਹ ਪ੍ਰੀਖਿਆ ਦੀ ਦ੍ਰਿਸ਼ਟੀ ਤੋਂ ਨਹੀਂ ਹੈ।

$\sqrt{2} = \frac{r}{s}$ ਹੋਵੇ ਅਤੇ $s\ (\neq 0)$ ਹੋਵੇ। ਮੰਨ ਲਉ r ਅਤੇ s ਵਿੱਚ, 1 ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ ਕੋਈ ਹੋਰ ਸਾਂਝਾ ਗੁਣਨਖੰਡ ਹੈ। ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਇਸ ਸਾਂਝੇ ਗੁਣਨਖੰਡ ਨੂੰ r ਅਤੇ s ਨਾਲ ਭਾਗ ਕਰਕੇ $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ, ਜਿੱਥੇ a ਅਤੇ b ਸਹਿ ਅਭਾਜ (co-prime) ਹਨ।

ਇਸ ਲਈ : $b\sqrt{2} = a$ ਹੋਇਆ।

ਦੋਹਾਂ ਪਾਸਿਆਂ ਦਾ ਵਰਗ ਕਰਨ 'ਤੇ, ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :

$$2b^2 = a^2$$

ਇਸ ਲਈ : 2, a^2 ਨੂੰ ਵੰਡਦਾ (ਭਾਗ ਕਰਦਾ) ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ ਪ੍ਰਮੇਯ 1.3 ਦੁਆਰਾ 2, a ਨੂੰ ਵੀ ਵੰਡੇਗਾ।

ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ $a = 2c$ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ, ਜਿੱਥੇ c ਕੋਈ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

a ਦਾ ਮੁੱਲ ਰੱਖਣ 'ਤੇ ਸਾਨੂੰ $2b^2 = 4c^2$,ਭਾਵ $b^2 = 2c^2$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸਦਾ ਭਾਵ ਹੈ ਕਿ 2, b^2 ਨੂੰ ਵੰਡਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਲਈ 2, b ਨੂੰ ਵੀ ਵੰਡੇਗਾ (ਪ੍ਰਮੇਯ ੧.੩ ਵਿੱਚ $p = 2$ ਲੈਣ 'ਤੇ)।

ਇਸ ਲਈ a ਅਤੇ b ਵਿੱਚ ਘੱਟ ਤੋਂ ਘੱਟ ਇੱਕ ਸਾਂਝਾ ਗੁਣਨਖੰਡ 2 ਹੈ।

ਪ੍ਰੰਤੂ ਇਹ ਇਸਦੇ ਉਲਟ ਹੈ ਕਿ a ਅਤੇ b ਵਿੱਚ 1 ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ ਕੋਈ ਸਾਂਝਾ ਗੁਣਨਖੰਡ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਇਹ ਉਲਟ ਸਾਨੂੰ ਇਸ ਲਈ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਇਆ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਤਰੁੱਟੀ ਵਾਲੀ ਗੱਲ ਮੰਨੀ ਸੀ ਕਿ $\sqrt{2}$ ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ, ਅਸੀਂ ਇਹ ਸਿੱਟਾ ਕੱਢਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $\sqrt{2}$ ਇੱਕ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 9 : $\sqrt{3}$ ਇੱਕ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਹੱਲ: ਆਉ ਅਸੀਂ ਇਸਦੇ ਉਲਟ ਇਹ ਮੰਨ ਲਈਏ ਕਿ $\sqrt{3}$ ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੋ ਦੋ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ a ਅਤੇ $b\ (\neq 0)$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $\sqrt{3} = \frac{a}{b}$ ਹੈ।

ਜੇਕਰ a ਅਤੇ b ਵਿੱਚ, 1 ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ ਕੋਈ ਸਾਂਝਾ ਗੁਣਨਖੰਡ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਉਸ ਸਾਂਝੇ ਗੁਣਨਖੰਡ ਨਾਲ ਭਾਗ ਦੇ ਕੇ a ਅਤੇ b ਨੂੰ ਸਹਿ ਅਭਾਜ ਬਣਾ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

ਇਸ ਲਈ $b\sqrt{3} = a$ ਹੈ।

ਦੋਵੇਂ ਪਾਸੇ ਵਰਗ ਕਰਨ 'ਤੇ ਸਾਨੂੰ $3b^2 = a^2$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ a^2, 3 ਨਾਲ ਭਾਗ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਪ੍ਰਮੇਯ 1.3 ਦੁਆਰਾ 3, a ਨੂੰ ਵੀ ਭਾਗ ਕਰੇਗਾ।

ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ $a = 3c$ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ, ਜਿੱਥੇ c ਇੱਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

a ਦੇ ਇਸ ਮੁੱਲ ਨੂੰ $3b^2 = a^2$ ਵਿੱਚ ਰੱਖਣ 'ਤੇ ਸਾਨੂੰ

$3b^2 = 9c^2$ ਭਾਵ $b^2 = 3c^2$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਦਾ ਭਾਵ ਹੈ ਕਿ b^2, 3 ਨਾਲ ਭਾਗ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਪ੍ਰਮੇਯ 1.3 ਦੁਆਰਾ b ਵੀ 3 ਨਾਲ ਭਾਗ ਹੋਵੇਗਾ।

ਇਸ ਲਈ a ਅਤੇ b ਵਿੱਚ ਘੱਟ ਤੋਂ ਘੱਟ ਇੱਕ ਸਾਝਾ ਗੁਣਨਖੰਡ 3 ਹੈ।

ਪ੍ਰੰਤੂ ਇਹ ਇਸਦੇ ਉਲਟ ਹੈ ਕਿ a ਅਤੇ b ਸਹਿ ਅਭਾਜ ਹਨ। ਸਾਨੂੰ ਇਹ ਉਲਟ ਇਸ ਲਈ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਇਆ ਕਿਉਂਕਿ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਤਰੁੱਟੀ ਵਾਲੀ ਗੱਲ ਮੰਨੀ ਸੀ ਕਿ $\sqrt{3}$ ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ਇਹ ਸਿੱਟਾ ਕੱਢਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $\sqrt{3}$ ਇੱਕ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਜਮਾਤ IX ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਦੱਸਿਆ ਸੀ ਕਿ:

- ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਅਤੇ ਇੱਕ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਜੋੜ ਅਤੇ ਘਟਾਉ ਇੱਕ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਅਤੇ
- ਇੱਕ ਸਿਫਰ ਤੋਂ ਬਿਨਾਂ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਅਤੇ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ ਜਾਂ ਭਾਗਫਲ ਇੱਕ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ, ਉਪਰੋਕਤ ਦੀਆਂ ਕੁਝ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰਾਂਗੇ।

ਉਦਾਹਰਣ 10 : ਦਿਖਾਉ ਕਿ $5 - \sqrt{3}$ ਇੱਕ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਹੱਲ: ਆਉ ਅਸੀਂ ਇਸਦੇ ਉਲਟ ਮੰਨ ਲਈਏ ਕਿ $5 - \sqrt{3}$ ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਭਾਵ ਅਸੀਂ ਦੋ ਸਹਿ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ a ਅਤੇ b $(b \neq 0)$ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $5 - \sqrt{3} = \frac{a}{b}$ ਹੋਵੇ।

ਇਸ ਲਈ $5 - \frac{a}{b} = \sqrt{3}$ ਹੈ।

ਜਾਂ $\sqrt{3} = 5 - \frac{a}{b}$ ਹੈ।

ਕਿਉਂਕਿ a ਅਤੇ b ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ, ਇਸ ਲਈ $5 - \frac{a}{b}$ ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ, ਭਾਵ $\sqrt{3}$ ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ। ਪ੍ਰੰਤੂ ਇਹ ਇਸਦੇ ਉਲਟ ਹੈ ਕਿ $\sqrt{3}$ ਇੱਕ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਇਹ ਉਲਟ ਸਾਨੂੰ ਸਾਡੇ ਗਲਤ ਮੰਨਣ ਕਰਕੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਇਆ ਹੈ ਕਿ $5 - \sqrt{3}$ ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ, ਅਸੀਂ ਇਹ ਸਿੱਟਾ ਕੱਢਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $5-\sqrt{3}$ ਇੱਕ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 11 : ਦਿਖਾਉ ਕਿ $3\sqrt{2}$ ਇੱਕ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਆਓ ਇਸਦੇ ਉਲਟ ਮੰਨ ਲਈਏ ਕਿ $3\sqrt{2}$ ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਭਾਵ ਅਸੀਂ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਸਹਿ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ a ਅਤੇ b $(b \neq 0)$ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $3\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ ਹੋਵੇ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $\sqrt{2} = \frac{a}{3b}$ ਹੋਵੇ।

ਕਿਉਂਕਿ 3, a ਅਤੇ b ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ, ਇਸ ਲਈ $\frac{a}{3b}$ ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੋਵੇਗੀ। ਇਸ ਲਈ $\sqrt{2}$ ਵੀ ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਪ੍ਰੰਤੂ ਇਹ ਇਸਦੇ ਉਲਟ ਹੈ ਕਿ $\sqrt{2}$ ਇੱਕ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ, ਅਸੀਂ ਇਹ ਸਿੱਟਾ ਕੱਢਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $3\sqrt{2}$ ਇੱਕ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 1.3

1. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $\sqrt{5}$ ਇੱਕ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।
2. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $3 + 2\sqrt{5}$ ਇੱਕ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।
3. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਅਪਰਿਮੇਯ ਹਨ :

   (i) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (ii) $7\sqrt{5}$ (iii) $6 + \sqrt{2}$

1.5 ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਦਸ਼ਮਲਵ ਰੂਪ ਦੀ ਦੁਹਰਾਈ

IX ਜਮਾਤ ਵਿੱਚ, ਤੁਸੀਂ ਪੜ੍ਹਿਆ ਹੈ ਕਿ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਜਾਂ ਤਾਂ ਸ਼ਾਂਤ ਦਸ਼ਮਲਵ ਪ੍ਰਸਾਰ (terminating decimal expansions) ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਾਂ ਫਿਰ ਅਸ਼ਾਂਤ ਆਵਰਤੀ (non-terminating repeating) ਦਸ਼ਮਲਵ ਪ੍ਰਸਾਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਭਾਗ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਮੰਨ ਲਉ $\frac{p}{q}(q \neq 0)$ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰਾਂਗੇ ਅਤੇ ਇਸ ਦੀ ਪੂਰੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਖੋਜ ਕਰਾਂਗੇ ਕਿ $\frac{p}{q}$ ਦਾ ਦਸ਼ਮਲਵ ਪ੍ਰਸਾਰ (ਰੂਪ) ਕਦੋਂ ਸ਼ਾਂਤ ਅਤੇ ਕਦੋਂ ਅਸ਼ਾਂਤ ਆਵਰਤੀ ਹੋਵੇਗੀ। ਅਸੀਂ ਇਹ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਦੁਆਰਾ ਕਰਾਂਗੇ।

ਆਓ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ

(i) 0.375 (ii) 0.104 (iii) 0.0875 (iv) 23.3408

ਹੁਣ (i) $0.375 = \frac{375}{1000} = \frac{375}{10^3}$ (ii) $0.104 = \frac{104}{1000} = \frac{104}{10^3}$

(iii) $0.0875 = \frac{875}{10000} = \frac{875}{10^4}$ (iv) $23.3408 = \frac{233408}{10000} = \frac{233408}{10^4}$

ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਿ ਕੋਈ ਉਮੀਦ ਕਰੇਗਾ, ਇਹਨਾਂ ਸਾਰਿਆਂ ਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਵਿਅਕਤ ਕੀਤਾ (ਲਿਖਿਆ) ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ, ਜਿੰਨਾਂ ਦਾ ਹਰ 10 ਦੀ ਕੋਈ ਘਾਤ ਹੋਵੇਗਾ। ਆਉ ਅੰਸ਼ ਅਤੇ ਹਰ ਦੇ ਸਾਂਝੇ ਗੁਣਨਖੰਡਾਂ ਨੂੰ ਕੱਟ ਕੇ, ਇਹ ਦੇਖੀਏ ਕਿ ਸਾਨੂੰ ਕੀ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

(i) $0.375 = \frac{375}{10^3} = \frac{3 \times 5^3}{2^3 \times 5^3} = \frac{3}{2^3}$ (ii) $0.104 = \frac{104}{10^3} = \frac{13 \times 2^3}{2^3 \times 5^3} = \frac{13}{5^3}$

(iii) $0.0875 = \frac{875}{10^4} = \frac{7}{2^4 \times 5}$ (iv) $23.3408 = \frac{233408}{10^4} = \frac{2^2 \times 7 \times 521}{5^4}$

ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਇੱਥੇ ਕੋਈ ਨਮੂਨਾ (Pattern) ਦੇਖ ਰਹੇ ਹੋ? ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲੱਗਦਾ ਹੈ ਕਿ ਅਸੀਂ ਉਸ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਨੂੰ ਜਿਸਦਾ ਦਸ਼ਮਲਵ ਵਿਸਤਾਰ ਇੱਕ ਸ਼ਾਂਤ ਦਸ਼ਮਲਵ ਹੈ, ਇੱਕ $\frac{p}{q}$ ਦੇ ਰੂਪ ਦੀ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਵਿੱਚ ਬਦਲ ਲਿਆ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ p ਅਤੇ q ਸਹਿ ਅਭਾਜ ਹਨ ਅਤੇ ਹਰ (ਭਾਵ q) ਵਿੱਚ ਕੇਵਲ 2 ਦੀਆਂ ਘਾਤਾਂ ਜਾਂ 5 ਦੀਆਂ ਘਾਤਾਂ ਜਾਂ ਦੋਹਾਂ ਦੀਆਂ ਘਾਤਾਂ ਹਨ। ਸਾਨੂੰ ਹਰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦਾ ਹੀ ਦਿਸਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ 10 ਦੀਆਂ ਘਾਤਾਂ ਵਿੱਚ ਕੇਵਲ 2 ਅਤੇ 5 ਦੀਆਂ ਘਾਤਾਂ ਹੀ ਗੁਣਨਖੰਡ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਹੋਣਗੀਆਂ।

ਭਾਵੇਂ ਅਸੀਂ ਕੁਝ ਘੱਟ ਹੀ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਹੱਲ ਕਰਕੇ ਦੇਖੀਆਂ ਹਨ, ਫਿਰ ਵੀ ਤੁਸੀਂ ਦੇਖ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ ਕੋਈ ਵੀ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਜਿਸਦਾ ਦਸ਼ਮਲਵ ਵਿਸਤਾਰ ਸ਼ਾਂਤ ਹੈ, ਇੱਕ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ ਜਿਸਦਾ ਹਰ 10 ਦੀ ਕੋਈ ਘਾਤ ਹੈ। ਨਾਲ ਹੀ 10 ਦੇ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡ ਕੇਵਲ 2 ਅਤੇ 5 ਹੀ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ, ਅੰਸ਼ ਅਤੇ ਹਰ ਦੇ ਸਾਂਝੇ ਗੁਣਨਖੰਡਾਂ ਨੂੰ ਕੱਟਕੇ ਅਸੀਂ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਇਹ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ $\frac{p}{q}$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ q ਦਾ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡਣ 2^n5^m ਦੇ ਰੂਪ ਦਾ ਹੈ ਅਤੇ n ਅਤੇ m ਕੋਈ ਗੈਰ ਰਿਣਾਤਮਕ (non negative) ਸੰਪੂਰਣ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ।

ਆਉ ਆਪਣੇ ਨਤੀਜੇ ਨੂੰ ਉਪਚਾਰਕ ਤੌਰ 'ਤੇ ਲਿਖੀਏ :

ਪ੍ਰਮੇਯ 1.5 ਮੰਨ ਲਉ x ਇੱਕ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਜਿਸਦਾ ਦਸ਼ਮਲਵ ਪ੍ਰਸਾਰ (ਰੂਪ) ਸ਼ਾਂਤ ਹੈ। ਹੁਣ x ਨੂੰ $\frac{p}{q}$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ p ਅਤੇ q ਸਹਿ ਅਭਾਜ ਹਨ ਅਤੇ q ਦਾ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡਣ 2^n5^m ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ, ਜਿੱਥੇ n, m ਕੋਈ ਗੈਰ ਰਿਣਾਤਮਕ (non negative) ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ।

ਸੰਭਵ ਹੈ ਕਿ ਤੁਸੀਂ ਹੈਰਾਨ ਹੋ ਰਹੇ ਹੋਵੋਗੇ ਕਿ ਪ੍ਰਮੇਯ 1.5 ਦਾ ਉਲਟ ਕੀ ਹੋਵੇਗਾ? ਭਾਵ

ਜੇਕਰ ਸਾਡੇ ਕੋਲ ਕੋਈ ਪ੍ਰਮੇਯ ਸੰਖਿਆ $\frac{p}{q}$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਹੈ ਅਤੇ q ਦਾ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡਣ 2^n5^m ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ n ਅਤੇ m ਗੈਰ ਰਿਣਾਤਮਕ (non negative) ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ, ਤਾਂ ਕੀ $\frac{p}{q}$ ਦਾ ਦਸ਼ਮਲਵ ਵਿਸਤਾਰ ਸ਼ਾਂਤ ਹੋਵੇਗਾ?

ਆਉ ਹੁਣ ਦੇਖੀਏ ਕਿ ਕੀ ਉਪਰੋਕਤ ਕਥਨ ਦੇ ਸੱਚ ਹੋਣ ਦੇ ਕੋਈ ਸਪਸ਼ਟ ਕਾਰਣ ਹਨ। ਤੁਸੀਂ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਹੀ ਇਸ ਗੱਲ ਨਾਲ ਸਹਿਮਤ ਹੋਵੋਗੇ ਕਿ $\frac{a}{b}$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਕਿਸੇ ਵੀ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ, ਜਿੱਥੇ b, 10 ਦੀ ਕੋਈ ਘਾਤ ਹੈ, ਦਾ ਦਸ਼ਮਲਵ ਵਿਸਤਾਰ ਸ਼ਾਂਤ ਹੋਵੇਗਾ। ਇਸ ਲਈ, ਇਹ ਅਰਥਪੂਰਣ ਲੱਗਦਾ ਹੈ ਕਿ $\frac{p}{q}$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ, ਜਿੱਥੇ q, 2^n5^m ਦੇ ਰੂਪ ਦਾ ਹੈ, ਨੂੰ $\frac{a}{b}$ ਦੇ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਤੁਲ (equivalent) ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਜਾਵੇ, ਜਿੱਥੇ b, 10 ਦੀ ਕੋਈ ਘਾਤ ਹੋਵੇ। ਆਉ ਆਪਣੇ ਉੱਪਰ ਦੇ ਉਦਾਹਰਣਾਂ 'ਤੇ ਵਾਪਸ ਆਈਏ ਅਤੇ ਉਲਟ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਕੰਮ ਕਰਨਾ ਸ਼ੁਰੂ ਕਰੀਏ।

(i) $\frac{3}{8}=\frac{3}{2^3}=\frac{3\times 5^3}{2^3\times 5^3}=\frac{375}{10^3}=0.375$

(ii) $\frac{13}{125}=\frac{13}{5^3}=\frac{13\times 2^3}{5^3\times 2^3}=\frac{104}{10^3}=0.104$

(iii) $\frac{7}{80}=\frac{7}{2^4\times 5}=\frac{7\times 5^3}{2^4\times 5^4}=\frac{875}{10^4}=0.0875$

(iv) $\frac{14588}{625}=\frac{2^2\times 7\times 521}{5^4}=\frac{2^6\times 7\times 521}{2^4\times 5^4}=\frac{233408}{10^4}=23.3408$

ਇਸ ਲਈ, ਇਹ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਇਹ ਦਰਸਾਉਂਦੀਆਂ ਹਨ ਕਿ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $\frac{p}{q}$ ਦੇ ਰੂਪ ਦੀ ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਜਿੱਥੇ q, 2^n5^m ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਹੈ, ਨੂੰ $\frac{a}{b}$ ਦੇ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਤੁੱਲ (equivalent) ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਵਿੱਚ ਬਦਲਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ b, 10 ਦੀ ਕੋਈ ਘਾਤ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ, ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਇੱਕ ਸ਼ਾਂਤ ਦਸ਼ਮਲਵ ਵਿਸਤਾਰ ਹੋਵੇਗਾ। ਆਉ ਇਸ ਪਰਿਣਾਮ ਨੂੰ ਉਪਚਾਰਕ ਤੌਰ 'ਤੇ ਲਿਖੀਏ।

ਪ੍ਰਮੇਯ 1.6 : ਮੰਨ ਲਉ $x=\frac{p}{q}$ ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਹੈ ਕਿ q, 2^n5^m ਦੇ ਰੂਪ ਦਾ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ n ਅਤੇ m ਗੈਰ ਰਿਣਾਤਮਕ (non negative) ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ ਤਾਂ x ਦਾ ਦਸ਼ਮਲਵ ਵਿਸਤਾਰ ਸ਼ਾਂਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਉਹਨਾਂ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਵੱਲ ਵੱਧਣ ਲੱਗੇ ਹਾਂ ਜਿੰਨਾਂ ਦਾ ਦਸ਼ਮਲਵ ਪ੍ਰਸਾਰ ਅਸ਼ਾਂਤ ਆਵਰਤੀ (non terminating) ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇੱਕ ਵਾਰ ਫਿਰ, ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਉਦਾਹਰਣ ਲੈ ਕੇ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚ ਕੀ ਹੋ ਰਿਹਾ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਜਮਾਤ IX ਦੀ ਪਾਠ ਪੁਸਤਕ ਦੇ ਪਾਠ 1 ਦੀ ਉਦਾਹਰਣ 5 ਨੂੰ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ $\frac{1}{7}$ ਦਾ ਦਸ਼ਮਲਵ ਪ੍ਰਸਾਰ ਪਤਾ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਸੀ।

$$
\begin{array}{r|l}
 & 0.1428571 \\
7 & 10 \\
 & 7 \\
\hline
 & 30 \\
 & 28 \\
\hline
 & 20 \\
 & 14 \\
\hline
 & 60 \\
 & 56 \\
\hline
 & 40 \\
 & 35 \\
\hline
 & 50 \\
 & 49 \\
\hline
 & 10 \\
 & 7 \\
\hline
 & 30
\end{array}
$$

ਇੱਥੇ ਬਾਕੀ 3, 2, 6, 4, 5, 1, 3, 2, 6, 4, 5, 1, . . . ਹਨ ਅਤੇ ਭਾਜਕ 7 ਹੈ।

ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ਸਪਸ਼ਟ ਰੂਪ ਵਿਚ ਹਰ 7, 2^n5^m ਦੇ ਰੂਪ ਦਾ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਪ੍ਰਮੇਯ 1.5 ਅਤੇ 1.6 ਤੋਂ, $\frac{1}{7}$ ਦਾ ਦਸ਼ਮਲਵ ਪ੍ਰਸਾਰ ਸ਼ਾਂਤ ਨਹੀਂ ਹੋਵੇਗਾ। ਇੱਥੇ 0 ਬਾਕੀ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਨਹੀਂ ਆਵੇਗਾ (ਕਿਉਂ?) ਅਤੇ ਇੱਕ ਸਥਿਤੀ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਬਾਕੀ ਬਚਣ ਵਾਲੇ ਅੰਕ ਫਿਰ ਤੋਂ ਆਉਣੇ ਸ਼ੁਰੂ ਹੋ ਜਾਣਗੇ। ਇਸ ਲਈ $\frac{1}{7}$ ਦੇ ਭਾਗਫਲ ਵਿੱਚ ਅੰਕਾਂ ਦਾ ਇੱਕ ਬਲਾਕ ਭਾਵ 142857 ਫਿਰ ਤੋਂ ਆਵੇਗਾ।

ਅਸੀਂ $\frac{1}{7}$ ਦੇ ਦਸ਼ਮਲਵ ਵਿਸਤਾਰ ਵਿੱਚ ਜੋ ਦੇਖਿਆ ਹੈ ਉਹ ਉਹਨਾਂ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਲਈ ਸੱਚ ਹੈ ਜੋ ਪ੍ਰਮੇਯਾਂ 1.5 ਅਤੇ 1.6 ਦੇ ਅੰਤਰਗਤ ਨਹੀਂ ਆਉਂਦੀ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਲਈ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

ਪ੍ਰਮੇਯ 1.7 ਮੰਨ ਲਉ $x = \frac{p}{q}$ ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਹੈ ਕਿ q ਦਾ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡਣ 2^n5^m ਦੇ ਰੂਪ ਦਾ ਨਹੀਂ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ n ਅਤੇ m ਗੈਰ ਰਿਣਾਤਮਕ (non negative) ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ। ਤਾਂ x ਦਾ ਦਸ਼ਮਲਵ ਪ੍ਰਸਾਰ ਅਸ਼ਾਂਤ ਆਵਰਤੀ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਉਪਰੋਕਤ ਚਰਚਾ ਤੋਂ, ਅਸੀਂ ਇਹ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਕਿਸੇ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਦਸ਼ਮਲਵ ਪ੍ਰਸਾਰ ਜਾਂ ਤਾਂ ਸ਼ਾਂਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਜਾਂ ਅਸ਼ਾਂਤ ਆਵਰਤੀ ਹੈ।

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 1.4

1. ਬਿਨਾਂ ਲੰਬੀ ਵੰਡ ਪ੍ਰਕਿਰਿਆ ਕਰਦਿਆਂ ਦੱਸੋ ਕਿ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਦਸ਼ਮਲਵ ਪ੍ਰਸਾਰ ਸ਼ਾਂਤ ਹਨ ਜਾਂ ਅਸ਼ਾਂਤ ਆਵਰਤੀ ਹਨ :

   (i) $\frac{13}{3125}$ (ii) $\frac{17}{8}$ (iii) $\frac{64}{455}$

(iv) $\frac{15}{1600}$ (v) $\frac{29}{343}$ (vi) $\frac{23}{2^3 5^2}$

(vii) $\frac{129}{2^2 5^7 7^5}$ (viii) $\frac{6}{15}$ (ix) $\frac{35}{50}$ (x) $\frac{77}{210}$

2. ਉੱਪਰ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਦੇ ਉਹਨਾਂ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਦਸ਼ਮਲਵ ਵਿਸਤਾਰ ਲਿਖੋ ਜੋ ਸ਼ਾਂਤ ਹਨ।

3. ਕੁਝ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਦਸ਼ਮਲਵ ਵਿਸਤਾਰ ਹੇਠਾਂ ਦਰਸਾਏ ਗਏ ਹਨ। ਹਰ ਇੱਕ ਸਥਿਤੀ ਲਈ ਨਿਰਧਾਰਿਤ ਕਰੋ ਕਿ ਇਹ ਸੰਖਿਆ ਪਰਿਮੇਯ ਹੈ ਜਾਂ ਨਹੀਂ। ਜੇਕਰ ਇਹ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਅਤੇ $\frac{p}{q}$ ਦੇ ਰੂਪ ਦੀ ਹੈ ਤਾਂ q ਦੇ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡਾਂ ਦੇ ਬਾਰੇ ਵਿੱਚ ਤੁਸੀਂ ਕੀ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹੋ?

(i) 43.123456789 (ii) 0.120120012000120000. . . (iii) $43.\overline{123456789}$

1.6 ਸਾਰ-ਅੰਸ਼

ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ ਤੁਸੀਂ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਨੁਕਤਿਆਂ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕੀਤਾ ਹੈ:

1. ਯੂਕਲਿਡ ਵੰਡ ਪ੍ਰਮੇਯਕਾ :

   ਦੋ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ a ਅਤੇ b ਲਈ ਅਸੀਂ $a = bq + r, 0 \le r < b$ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਨ ਵਾਲੀਆਂ ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ q ਅਤੇ r ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਭਾਵ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ।

2. ਯੁਕਲਿਡ ਵੰਡ ਐਲਗੋਰਿਥਮ : ਇਹ ਯੁਕਲਿਡ ਵੰਡ ਪ੍ਰਮੇਯਕਾ ਤੇ ਅਧਾਰਿਤ ਹੈ। ਇਸ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ ਦੋ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ a ਅਤੇ $b, (a > b)$ ਦਾ ਮ.ਸ.ਵ (H.C.F) ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀ ਵਿਧੀ ਦੁਆਰਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ :

   ਪਗ 1 : q ਅਤੇ r ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਯੁਕਲਡ ਵੰਡ ਪ੍ਰਮੇਯਕਾ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰੋ, ਜਿੱਥੇ $a = bq + r, 0 \le r < b$ ਹੈ।

   ਪਗ 2 : ਜੇਕਰ $r = 0$ ਹੈ ਤਾਂ HCF $= b$ ਹੈ। ਜੇਕਰ $r \ne 0$ ਹੈ ਤਾਂ b ਅਤੇ r ਉੱਪਰ ਯੁਕਲਿਡ ਵੰਡ ਪ੍ਰਮੇਯਕਾ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰੋ।

   ਪਗ 3 : ਇਸ ਪ੍ਰਕਿਰਿਆ ਨੂੰ ਉਦੋਂ ਤੱਕ ਜਾਰੀ ਰੱਖੋ ਜਦ ਤੱਕ ਬਾਕੀ ਸਿਫ਼ਰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਨਾ ਹੋ ਜਾਵੇ। ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਾਲਾ ਭਾਜਕ ਹੀ HCF (a, b) ਹੈ। ਨਾਲ ਹੀ HCF (a, b) = HCF (b, r)

3. ਅੰਕਗਣਿਤ ਦੀ ਮੂਲਭੂਤ ਪ੍ਰਮੇਯ :

   ਹਰ ਇੱਕ ਭਾਜ ਸੰਖਿਆ ਨੂੰ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ

(ਗੁਣਨਖੰਡਿਤ ਕੀਤਾ) ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਹ ਗੁਣਨਖੰਡਣ ਵਿਲੱਖਣ (unique) ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਉੱਪਰ ਕੋਈ ਧਿਆਨ ਦਿੱਤੇ ਬਿਨਾਂ ਕਿ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡ ਕਿਸ ਤਰਤੀਬ ਵਿੱਚ ਆ ਰਹੇ ਹਨ।

4. ਜੇਕਰ p ਕੋਈ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਅਤੇ p, a^2 ਨੂੰ ਵੰਡਦਾ (ਭਾਗ) ਹੈ ਤਾਂ p, a ਨੂੰ ਵੀ ਵੰਡੇਗਾ। ਇੱਥੇ a ਇੱਕ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।
5. ਸਬੂਤ ਕਿ $\sqrt{2}, \sqrt{3}$ ਆਦਿ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ।
6. ਮੰਨ ਲਉ x ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਜਿਸਦਾ ਦਸ਼ਮਲਵ ਵਿਸਤਾਰ ਸ਼ਾਂਤ ਹੈ ਤਾਂ ਅਸੀਂ x ਨੂੰ $\frac{p}{q}$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ, ਜਿੱਥੇ p ਅਤੇ q ਸਹਿ ਅਭਾਜ ਹਨ ਅਤੇ q ਦਾ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡਣ 2^n5^m ਦੇ ਰੂਪ ਦਾ ਹੈ। ਜਿੱਥੇ n, m ਗੈਰ ਰਿਣਾਤਮਕ (non negative) ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ।
7. ਮੰਨ ਲਉ $x = \frac{p}{q}$ ਇੱਕ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਕਿ q ਦਾ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡਣ 2^n5^m ਦੇ ਰੂਪ ਦਾ ਹੈ। ਜਿੱਥੇ n, m ਗੈਰ ਰਿਣਾਤਮਕ (non negative) ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ ਤਾਂ x ਦਾ ਦਸ਼ਮਲਵ ਵਿਸਤਾਰ ਸ਼ਾਂਤ ਹੋਵੇਗਾ।
8. ਮੰਨ ਲਉ $x = \frac{p}{q}$ ਇੱਕ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਕਿ q ਦਾ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡਣ 2^n5^m ਦੇ ਰੂਪ ਦਾ ਨਹੀਂ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ n, m ਗੈਰ ਰਿਣਾਤਮਕ (non negative) ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ ਤਾਂ x ਦਾ ਦਸ਼ਮਲਵ ਵਿਸਤਾਰ ਅਸ਼ਾਂਤ ਆਵਰਤੀ ਹੋਵੇਗਾ।

ਪਾਠਕਾਂ ਦੇ ਲਈ ਵਿਸ਼ੇਸ਼

ਤੁਸੀਂ ਦੇਖਿਆ ਹੈ:

HCF $(p, q, r) \times$ LCM $(p, q, r) \neq p \times q \times r$, ਜਿਥੇ p, q, r ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ (ਉਦਾਹਰਣ 8 ਦੇਖੋ)। ਜਦੋਂ ਕਿ ਤਿੰਨ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ p, q ਅਤੇ r ਲਈ ਹੇਠਾਂ ਦਿਤੇ ਪਰਿਣਾਮ ਲਾਗੂ ਹੁੰਦੇ ਹਨ:

$$\text{LCM}(p, q, r) = \frac{p \cdot q \cdot r \cdot \text{HCF}(p, q, r)}{\text{HCF}(p, q) \cdot \text{HCF}(q, r) \cdot \text{HCF}(p, r)}$$

$$\text{HCF}(p, q, r) = \frac{p \cdot q \cdot r \cdot \text{LCM}(p, q, r)}{\text{LCM}(p, q) \cdot \text{LCM}(q, r) \cdot \text{LCM}(p, r)}$$

ਬਹੁਪਦ (Polynomials) 2

2.1 ਭੂਮਿਕਾ

IX ਜਮਾਤ ਵਿੱਚ ਤੁਸੀਂ ਇੱਕ ਚਲ ਵਾਲੇ ਬਹੁਪਦਾਂ (polynomials) ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਦੀਆਂ ਘਾਤਾਂ (degree) ਦੇ ਬਾਰੇ ਪੜ੍ਹਿਆ ਹੈ। ਯਾਦ ਕਰੋ ਕਿ ਚਲ x ਦੇ ਬਹੁਪਦ $p(x)$ ਵਿੱਚ x ਦੀ ਵੱਡੀ ਤੋਂ ਵੱਡੀ ਘਾਤ (power) ਨੂੰ **ਬਹੁਪਦ ਦੀ ਘਾਤ (degree)** ਆਖਦੇ ਹਾਂ।

ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ, $4x+2$ ਦੇ x ਵਿੱਚ ਚਲ 1 ਦਾ ਬਹੁਪਦ ਹੈ, $2y^2-3y+4$ ਚਲ y ਵਿੱਚ ਘਾਤ 2 ਦਾ ਬਹੁਪਦ ਹੈ, $5x^3-4x^2+x-\sqrt{2}$ ਚਲ x ਵਿੱਚ ਘਾਤ 3 ਦਾ ਬਹੁਪਦ ਹੈ ਅਤੇ $7u^6-\frac{3}{2}u^4+4u^2+u-8$ ਚਲ u ਵਿੱਚ ਘਾਤ 6 ਦਾ ਬਹੁਪਦ ਹੈ। ਵਿਅੰਜਕ $\frac{1}{x-1}$, $\sqrt{x}+2$, $\frac{1}{x^2+2x+3}$ ਆਦਿ ਬਹੁਪਦ ਨਹੀਂ ਹਨ।

ਘਾਤ 1 ਦੇ ਬਹੁਪਦ ਨੂੰ **ਰੇਖੀ ਬਹੁਪਦ (Linear polynomial)** ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ, $2x-3$, $\sqrt{3}x+5$, $y+\sqrt{2}$, $x-\frac{2}{11}$, $3z+4$, $\frac{2}{3}u+1$ ਆਦਿ ਸਾਰੇ ਰੇਖੀ ਬਹੁਪਦ ਹਨ। ਜਦੋਂ ਕਿ $2x+5-x^2$, x^3+1 ਆਦਿ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਬਹੁਪਦ ਰੇਖੀ ਬਹੁਪਦ ਨਹੀਂ ਹਨ।

ਘਾਤ 2 ਦੇ ਬਹੁਪਦ ਨੂੰ **ਦੋ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ (quadratic polynomial)** ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਦੋ ਘਾਤ (quadratic) ਸ਼ਬਦ ਕਵਾਡਰੇਟ (quadrate) ਸ਼ਬਦ ਤੋਂ ਬਣਿਆ ਹੈ, ਜਿਸਦਾ ਅਰਥ ਹੈ ਵਰਗ। $2x^2+3x-\frac{2}{5}$, y^2-2, $2-x^2+\sqrt{3}x$, $\frac{u}{3}-2u^2+5$, $\sqrt{5}v^2-\frac{2}{3}v$, $4z^2+\frac{1}{7}$, ਦੋ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦਾਂ ਦੀਆਂ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਹਨ (ਜਿਹਨਾਂ ਦੇ ਗੁਣਾਂਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ)। ਵਿਆਪਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ, x ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਦੋ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ ax^2+bx+c, ਜਿੱਥੇ a,b,c ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ ਅਤੇ $a \neq 0$ ਹੈ, ਦੇ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਘਾਤ 3 ਦਾ ਬਹੁਪਦ **ਤਿੰਨ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ (cubic polynomial)** ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਤਿੰਨ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ ਦੇ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਣ ਹਨ :

$$2-x^2, x^3, \sqrt{2}x^3, 3-x^2+x^3, 3x^3-2x^2+x-1$$

ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਤਿੰਨ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ ਦਾ ਵਿਆਪਕ ਰੂਪ ਹੈ :

$$ax^3+bx^2+cx+d,$$

ਜਿੱਥੇ a, b, c, d ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ ਅਤੇ $a \neq 0$ ਹੈ।

ਹੁਣ ਬਹੁਪਦ $p(x)=x^2-3x-4$ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ। ਇਸ ਬਹੁਪਦ ਵਿੱਚ $x=2$ ਰੱਖਣ ਤੇ ਸਾਨੂੰ $p(2)=2^2-3\times 2-4=-6$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। x^2-3x-4 ਵਿੱਚ, x ਨੂੰ 2 ਰੱਖਣ ਨਾਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਮੁੱਲ -6; x^2-3x-4 ਦਾ $x=2$ ਤੇ ਮੁੱਲ ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $p(0)$, $p(x)$ ਦਾ $x=0$ 'ਤੇ ਮੁੱਲ ਹੈ, ਜੋ -4 ਹੈ।

ਜੇਕਰ $p(x)$, x ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਬਹੁਪਦ ਹੈ ਅਤੇ k ਕੋਈ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਤਾਂ $p(x)$ ਵਿੱਚ x ਨੂੰ k ਰੱਖਣ ਤੇ ਕੋਈ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ **$p(x)$ ਦਾ $x=k$ 'ਤੇ ਮੁੱਲ ਕਹਾਉਂਦੀ ਹੈ** ਅਤੇ ਇਸ ਨੂੰ $p(k)$ ਨਾਲ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਨ।

$p(x)=x^2-3x-4$ ਦਾ $x=-1$ 'ਤੇ ਮੁੱਲ ਕੀ ਹੈ? ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

$p(-1)=(-1)^2-\{3\times(-1)\}-4=0$

ਨਾਲ ਹੀ ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ $p(4)=4^2-(3\times 4)-4=0$ ਹੈ।

ਕਿਉਂਕਿ $p(-1)=0$ ਅਤੇ $p(4)=0$, ਇਸ ਲਈ -1 ਅਤੇ 4 ਦੋ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ x^2-3x-4 ਦੇ ਸਿਫ਼ਰ (zeroes) ਕਹਾਉਂਦੇ ਹਨ। ਵਿਆਪਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ, ਇੱਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ k ਬਹੁਪਦ $p(x)$ ਦਾ ਸਿਫ਼ਰ ਅਖਵਾਉਂਦੀ ਹੈ, ਜੇਕਰ $p(k)=0$ ਹੋਵੇ।

ਤੁਸੀਂ ਜਮਾਤ IX ਵਿੱਚ ਪੜ੍ਹ ਚੁੱਕੇ ਹੋ ਕਿ ਕਿਸੇ ਰੇਖੀ ਬਹੁਪਦ ਦਾ ਸਿਫ਼ਰ ਕਿਵੇਂ ਪਤਾ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ, ਜੇਕਰ $p(x)=2x+3$ ਦਾ ਸਿਫ਼ਰ k ਹੈ, ਤਾਂ $p(k)=0$ ਤੋਂ ਸਾਨੂੰ $2k+3=0$ ਭਾਵ $k=-\frac{3}{2}$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਵਿਆਪਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ, ਜੇਕਰ $p(x)=ax+b$ ਦਾ ਇੱਕ ਸਿਫ਼ਰ k ਹੈ ਤਾਂ $p(k)=ak+b=0$ ਭਾਵ $k=\frac{-b}{a}$ ਹੋਵੇਗਾ। ਇਸ ਲਈ, ਰੇਖੀ ਬਹੁਪਦ $ax+b$ ਦਾ ਸਿਫ਼ਰ $\frac{-b}{a}$, $\frac{-(\text{ਅਚਲ ਪਦ})}{x \text{ ਦਾ ਗੁਣਾਂਕ}}$ ਹੈ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ, ਰੇਖੀ ਬਹੁਪਦ ਦਾ ਸਿਫ਼ਰ ਉਸਦੇ ਗੁਣਾਂਕਾਂ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਹੈ। ਕੀ ਇਹ ਹੋਰ ਬਹੁਪਦਾਂ ਵਿੱਚ ਵੀ ਹੁੰਦਾ ਹੈ? ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ, ਕੀ ਦੋ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦਾਂ ਦੇ ਸਿਫ਼ਰ ਵੀ ਉਸਦੇ ਗੁਣਾਂਕਾਂ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਹੁੰਦੇ ਹਨ?

ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਦਾ ਉੱਤਰ ਦੇਣ ਦਾ ਜਤਨ ਕਰਾਂਗੇ। ਅਸੀਂ ਬਹੁਪਦਾਂ ਦੇ ਲਈ ਵੰਡ ਵਿਧੀ (division algorithm) ਦਾ ਵੀ ਅਧਿਐਨ ਕਰਾਂਗੇ।

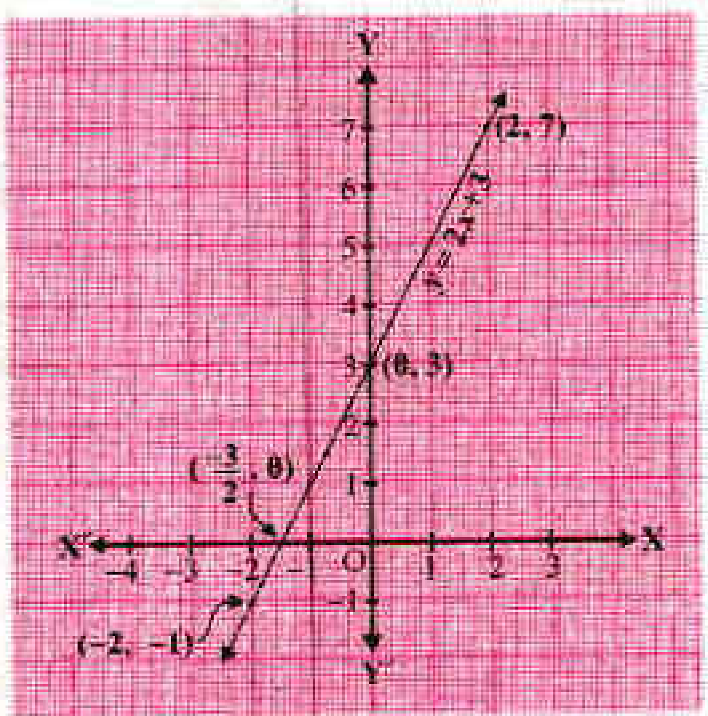
2.2 ਬਹੁਪਦਾਂ ਦੇ ਸਿਫ਼ਰਾਂ ਦਾ ਜਿਮਾਇਤੀ ਅਰਥ (Geometrical Meaning of the Zeroes of a Polynomial)

ਤੁਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹੋ ਕਿ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ k ਬਹੁਪਦਾਂ $p(x)$ ਦਾ ਇੱਕ ਸਿਫ਼ਰ ਹੈ, ਜੇਕਰ $p(k) = 0$ ਹੈ। ਪ੍ਰੰਤੂ ਕਿਸੇ ਬਹੁਪਦ ਦੇ ਸਿਫ਼ਰ ਇੰਨੇ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਕਿਉਂ ਹਨ? ਇਸਦਾ ਉੱਤਰ ਦੇਣ ਲਈ ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਅਸੀਂ ਰੇਖੀ ਅਤੇ ਦੋ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦਾਂ ਦੇ ਆਲੇਖੀ **(graphical)** ਨਿਰੂਪਣ ਦੇਖਾਂਗੇ ਅਤੇ ਫਿਰ ਉਸਦੀਆਂ ਸਿਫ਼ਰਾਂ ਦਾ ਜਿਮਾਇਤੀ ਅਰਥ ਦੇਖਾਂਗੇ।

ਪਹਿਲਾਂ ਇੱਕ ਰੇਖੀ ਬਹੁਪਦ $ax + b, \neq 0$ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਤੁਸੀਂ ਜਮਾਤ IX ਵਿੱਚ ਪੜ੍ਹਿਆ ਹੈ ਕਿ $y = ax + b$ ਦਾ ਆਲੇਖ (graph) ਇੱਕ ਸਰਲ ਰੇਖਾ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ $y = 2x + 3$ ਦਾ ਗ੍ਰਾਫ ਬਿੰਦੂਆਂ $(-2, -1)$ ਅਤੇ $(2, 7)$ ਤੋਂ ਨਿਕਲਣ ਵਾਲੀ ਇੱਕ ਸਰਲ ਰੇਖਾ ਹੈ।

x	-2	2
$y = 2x + 3$	-1	7

ਚਿੱਤਰ 2.1 ਵਿੱਚ ਤੁਸੀਂ ਦੇਖ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ $y = 2x + 3$ ਦਾ ਗ੍ਰਾਫ x-ਧੁਰੇ *(axis)* ਨੂੰ $x = -1$ ਅਤੇ $x = -2$ ਦੇ ਵਿੱਚਕਾਰ ਭਾਵ $\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$ 'ਤੇ ਕੱਟਦਾ ਹੈ। ਤੁਸੀਂ ਇਹ ਵੀ ਜਾਣਦੇ ਹੋ ਕਿ $2x + 3$ ਦਾ ਸਿਫ਼ਰ $-\frac{3}{2}$ ਹੈ। ਭਾਵ ਬਹੁਪਦ $2x + 3$ ਦਾ ਸਿਫ਼ਰ ਉਸ ਬਿੰਦੂ ਦਾ x-ਨਿਰਦੇਸ ਅੰਕ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ $y = 2x + 3$ ਦਾ ਗ੍ਰਾਫ x-ਧੁਰੇ ਨੂੰ ਕੱਟਦਾ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 2.1

ਵਿਆਪਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ, ਇੱਕ ਰੇਖੀ ਬਹੁਪਦ $ax + b, a \neq 0$ ਦੇ ਲਈ $y = ax + b$ ਦਾ ਗਰਾਫ਼ ਇੱਕ ਸਰਲ ਰੇਖਾ ਹੈ ਜੋ x-ਧੁਰੇ ਨੂੰ ਠੀਕ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ $\left(\frac{-b}{a}, 0\right)$ 'ਤੇ ਕੱਟਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ, ਰੇਖੀ ਬਹੁਪਦ $ax + b, a \neq 0$ ਦਾ ਕੇਵਲ ਇੱਕ ਸਿਫ਼ਰ ਹੈ, ਜੋ ਉਸ ਬਿੰਦੂ ਦਾ x–ਨਿਰਦੇਸ ਅੰਕ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ $y = ax + b$ ਦਾ ਗ੍ਰਾਫ x-ਧੁਰੇ ਨੂੰ ਕੱਟਦਾ ਹੈ। ਹੁਣ ਆਉ ਅਸੀਂ ਦੋ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ ਦੇ ਕਿਸੇ ਸਿਫ਼ਰ ਦੇ ਜਿਮਾਇਤੀ ਅਰਥ ਨੂੰ ਸਮਝੀਏ। ਦੋ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ $x^2 - 3x - 4$ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ। ਆਉ ਦੇਖੀਏ ਕਿ $y = x^2 - 3x - 4$ ਦਾ ਗ੍ਰਾਫ ਕਿਸ *ਤਰ੍ਹਾਂ ਦਾ ਦਿਖਾਈ

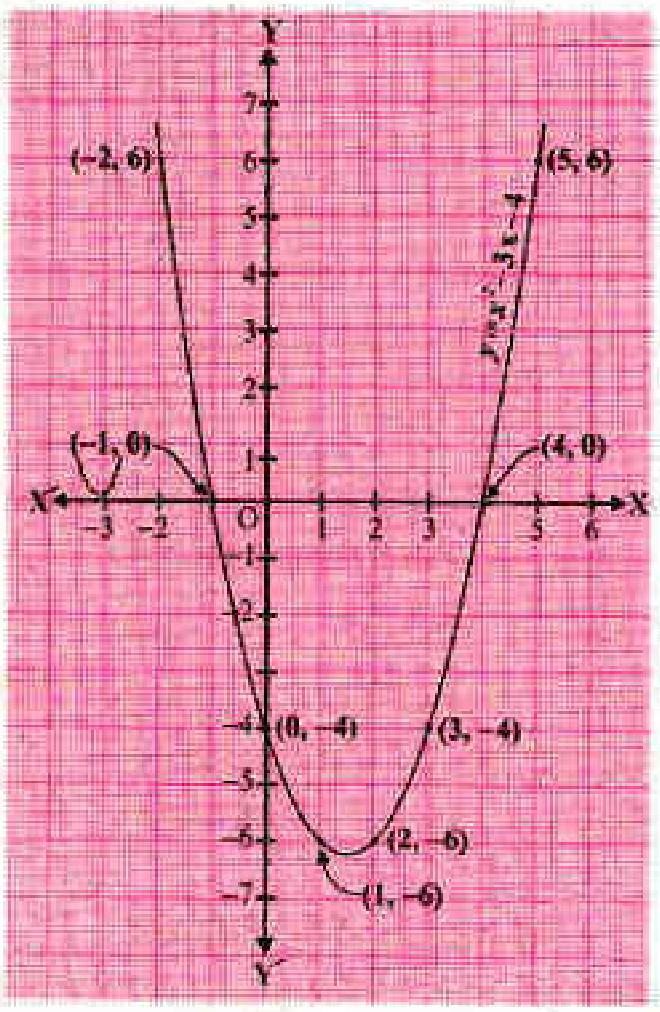
* ਦੋ ਘਾਤੀ ਅਤੇ ਤਿੰਨ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦਾਂ ਦਾ ਗ੍ਰਾਫ ਖਿੱਚਣਾ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਲਈ ਜ਼ਰੂਰੀ ਨਹੀਂ ਹੈ ਅਤੇ ਨਾ ਹੀ ਇਸਦਾ ਮੁਲਾਂਕਣ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧ ਹੈ।

ਦਿੰਦਾ ਹੈ। ਅਸੀਂ x ਦੇ ਕੁਝ ਮੁੱਲਾਂ ਦੇ ਸੰਗਤ $y = x^2 - 3x - 4$ ਦੇ ਕੁਝ ਮੁੱਲ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ, ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸਾਰਣੀ 2.1 ਵਿੱਚ ਦਿੱਤਾ ਹੈ।

ਸਾਰਣੀ 2.1

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$y = x^2 - 3x - 4$	6	0	-4	-6	-6	-4	0	6

ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਉਪਰੋਕਤ ਬਿੰਦੂਆਂ ਨੂੰ ਇੱਕ ਗ੍ਰਾਫ਼ ਪੇਪਰ 'ਤੇ ਅੰਕਿਤ ਕਰੀਏ ਅਤੇ ਗ੍ਰਾਫ਼ ਖਿੱਚੀਏ ਤਾਂ ਇਹ ਚਿੱਤਰ 2.2 ਵਿੱਚ ਦਿਖਾਏ ਗਏ ਵਰਗਾ ਹੋਵੇਗਾ।



ਚਿੱਤਰ 2.2

ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਕਿਸੇ ਦੋ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ $ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ ਦੇ ਲਈ ਸੰਗਤ ਸਮੀਕਰਣ $y = ax^2 + bx + c$ ਦੇ ਗ੍ਰਾਫ਼ ਦਾ ਅਕਾਰ ਜਾਂ ਤਾਂ ਉੱਪਰ ਵੱਲ ਖੁੱਲਾ $\bigcup$ ਵਰਗਾ ਜਾਂ ਹੇਠਲੇ ਪਾਸੇ ਖੁੱਲਾ $\bigcap$ ਵਰਗਾ ਹੋਵੇਗਾ। ਜੋ ਇਸ 'ਤੇ ਨਿਰਭਰ ਕਰੇਗਾ ਕਿ $a > 0$ ਹੈ ਜਾਂ $a < 0$ ਹੈ (ਇਹਨਾਂ ਵਕਰਾਂ ਨੂੰ **ਪੈਰਾਬੋਲਾ (parabola)** ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ)।

ਸਾਰਣੀ 2.1 ਵਿੱਚ ਤੁਸੀਂ ਦੇਖ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ ਦੋ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ ਦੇ ਸਿਫ਼ਰ -1 ਅਤੇ 4 ਹਨ। ਇਸ ਉੱਪਰ ਵੀ ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ -1 ਅਤੇ 4 ਉਹਨਾਂ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੇ x-ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਹਨ ਜਿੱਥੇ $y = x^2 - 3x - 4$ ਦਾ ਗ੍ਰਾਫ਼ x–ਧੁਰੇ ਨੂੰ ਕੱਟਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੋ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ $x^2 - 3x - 4$ ਦੇ ਸਿਫ਼ਰ ਉਹਨਾਂ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੇ x-ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਹਨ, ਜਿੱਥੇ $y = x^2 - 3x - 4$ ਦਾ ਗ੍ਰਾਫ਼ x-ਧੁਰੇ ਨੂੰ ਕੱਟਦਾ ਹੈ।

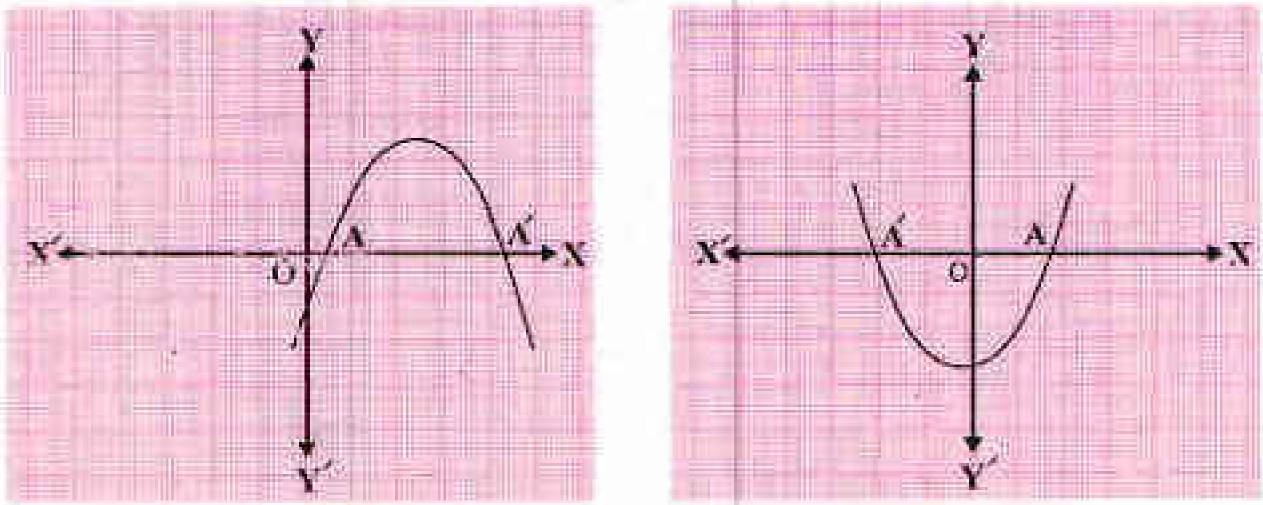
ਇਹ ਤੱਥ ਸਾਰੀਆਂ ਦੋ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦਾਂ ਲਈ ਸੱਚ ਹੈ, ਭਾਵ ਦੋ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ $ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ ਦੇ ਸਿਫ਼ਰ ਉਹਨਾਂ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੇ x – ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਹਨ, ਜਿੱਥੇ $y = ax^2 + bx + c$ ਨੂੰ ਨਿਰੂਪਿਤ ਕਰਨ ਵਾਲਾ ਪੈਰਾਬੋਲਾ (parabola) x-ਧੁਰੇ ਨੂੰ ਕੱਟਦਾ ਹੈ।

$y = ax^2 + bx + c$ ਦੇ ਆਲੇਖ ਦੇ ਅਕਾਰ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰਨ 'ਤੇ ਤਿੰਨ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੀਆਂ ਸਥਿਤੀਆਂ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ।

ਸਥਿਤੀ

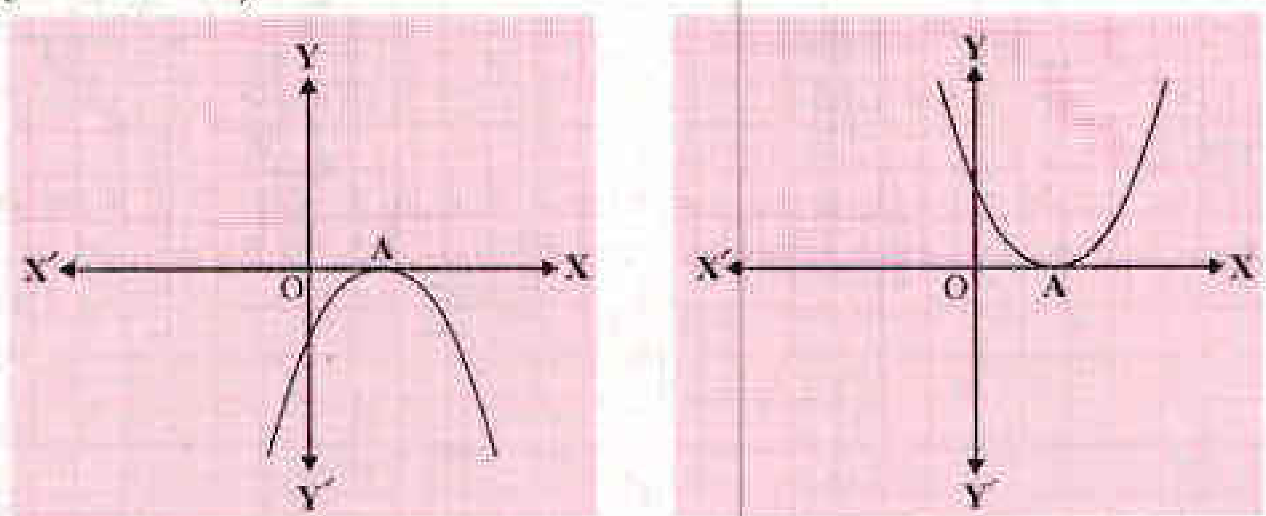
(i) : ਜਿੱਥੇ ਆਲੇਖ x-ਧੁਰੇ ਨੂੰ ਅੱਲਗ-ਅੱਲਗ ਬਿੰਦੂਆਂ A ਅਤੇ A′ ਤੇ ਕੱਟਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ A ਅਤੇ A′ ਦੇ x-ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਦੋ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ $ax^2 + bx + c$ ਦੇ ਦੋ **ਸਿਫ਼ਰ** ਹਨ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 2.3)।



ਚਿੱਤਰ 2.3

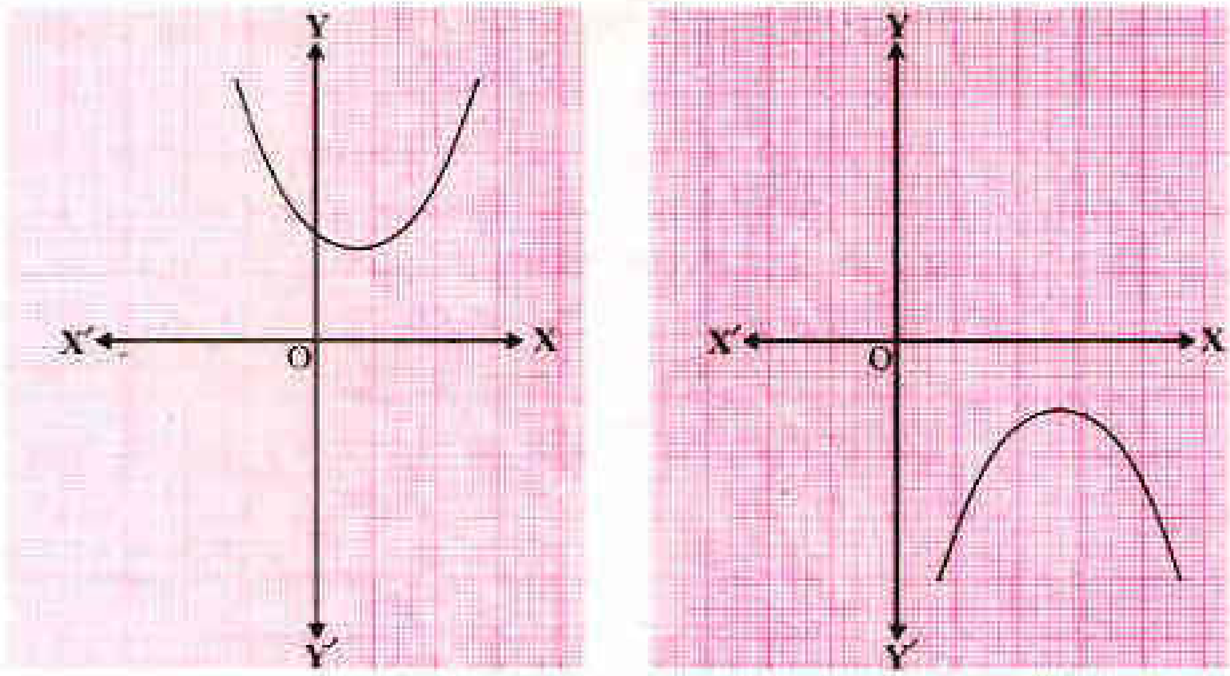
ਸਥਿਤੀ (ii) : ਇੱਥੇ ਆਲੇਖ x-ਧੁਰੇ ਨੂੰ ਕੇਵਲ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ 'ਤੇ ਭਾਵ ਦੋ ਸੰਪਾਤੀ ਬਿੰਦੂਆਂ 'ਤੇ ਕੱਟਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਸਥਿਤੀ (i) ਦੇ ਦੋ ਬਿੰਦੂ A ਅਤੇ A′ ਇੱਥੇ ਸੰਪਾਤੀ ਹੋ ਕੇ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ A ਹੋ ਜਾਂਦੇ ਹਨ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 2.4)।



ਚਿੱਤਰ 2.4

ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ, A ਦਾ x-ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਦੋ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ $ax^2 + bx + c$ ਦਾ ਕੇਵਲ ਇੱਕ ਸਿਫ਼ਰ ਹੈ।

ਸਥਿਤੀ (iii) : ਇੱਥੇ ਆਲੇਖ ਜਾਂ ਤਾਂ ਪੂਰਨ ਰੂਪ ਵਿੱਚ x-ਧੁਰੇ ਤੋਂ ਉੱਪਰ ਜਾਂ ਤਾਂ ਪੂਰਨ ਰੂਪ ਵਿੱਚ x-ਧੁਰੇ ਤੋਂ ਹੇਠਾਂ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ, ਇਹ x-ਧੁਰੇ ਨੂੰ ਕਿਤੇ ਵੀ ਨਹੀਂ ਕੱਟਦਾ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 2.5)।



ਚਿੱਤਰ 2.5

ਇਸ ਲਈ, ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਦੋ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ $ax^2 + bx + c$ ਦਾ **ਕੋਈ ਸਿਫ਼ਰ ਨਹੀਂ** ਹੈ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਤੁਸੀਂ ਜਿਮਾਇਤੀ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦੇਖ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ ਕਿਸੇ ਦੋ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ ਦੇ ਦੋ ਅੱਲਗ-ਅੱਲਗ ਸਿਫ਼ਰ ਜਾਂ ਦੋ ਬਰਾਬਰ ਸਿਫ਼ਰ (ਭਾਵ ਇੱਕ ਸਿਫ਼ਰ) ਜਾਂ ਕੋਈ ਵੀ ਸਿਫ਼ਰ ਨਹੀਂ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇਸਦਾ ਇਹ ਵੀ ਅਰਥ ਹੈ ਕਿ ਘਾਤ 2 ਦੇ ਕਿਸੇ ਬਹੁਪਦ ਦੇ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਦੋ ਸਿਫ਼ਰ ਹੋ ਸਕਦੇ ਹਨ।

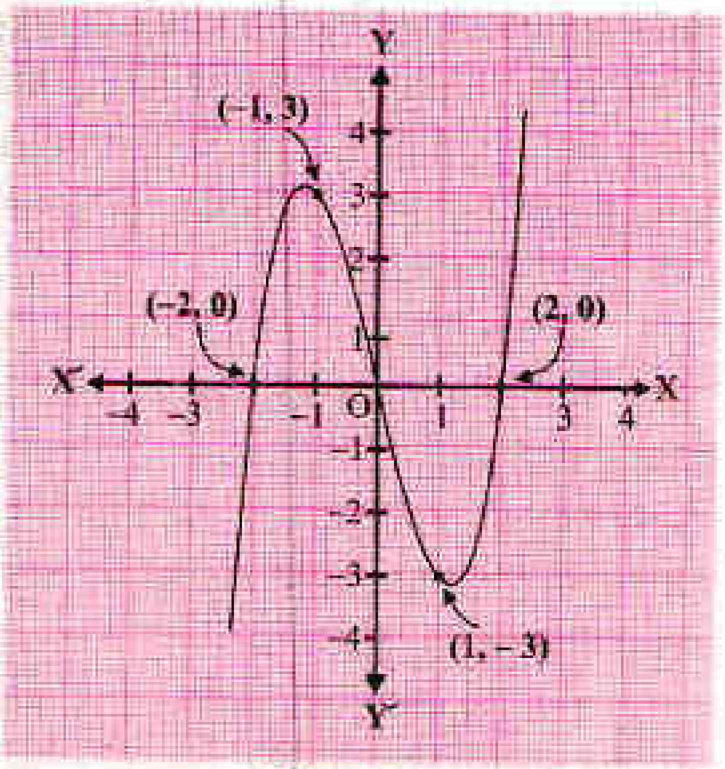
ਹੁਣ ਤੁਸੀਂ ਇੱਕ ਤਿੰਨ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ ਦੇ ਸਿਫ਼ਰਾਂ ਦੇ ਜਿਮਾਇਤੀ ਅਰਥ ਬਾਰੇ ਕੀ ਉਮੀਦ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ? ਆਉ ਇਸਦਾ ਪਤਾ ਕਰੀਏ। ਤਿੰਨ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ $x^3 - 4x$ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ। ਇਹ ਦੇਖਣ ਦੇ ਲਈ ਕਿ $y = x^3 - 4x$ ਦਾ ਆਲੇਖ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲੱਗਦਾ ਹੈ, ਆਉ x ਦੇ ਕੁਝ ਮੁੱਲਾਂ ਦੇ ਸੰਗਤ y ਦੇ ਕੁਝ ਮੁੱਲਾਂ ਨੂੰ ਸਾਰਣੀ 2.2 ਵਿੱਚ ਸੂਚੀ ਬੱਧ ਕਰੀਏ।

ਸਾਰਣੀ 2.2

x	-2	-1	0	1	2
$y = x^3 - 4x$	0	3	0	-3	0

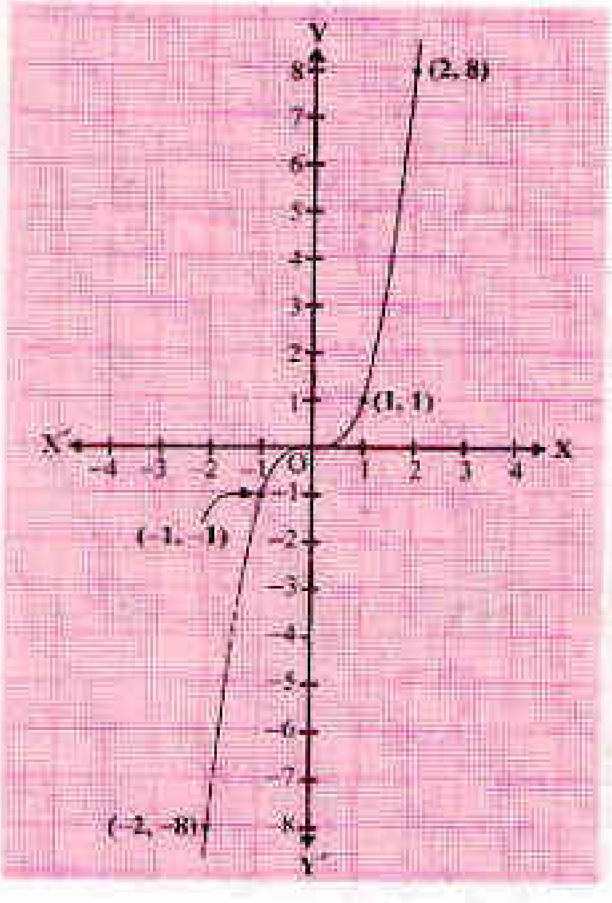
ਸਾਰਣੀ ਦੇ ਬਿੰਦੂਆਂ ਨੂੰ ਗ੍ਰਾਫ਼ ਪੇਪਰ 'ਤੇ ਅੰਕਿਤ ਕਰਨ ਅਤੇ ਆਲੇਖ ਖਿੱਚਣ ਨਾਲ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $y = x^3 - 4x$ ਦਾ ਆਲੇਖ ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਚਿੱਤਰ 2.6 ਵਰਗਾ ਦਿਖਦਾ ਹੈ।

ਉਪਰੋਕਤ ਸਾਰਣੀ ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਤਿੰਨ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ $x^3 - 4x$ ਦੇ ਸਿਫ਼ਰ $-2, 0$ ਅਤੇ 2 ਹਨ। ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ $-2, 0$ ਅਤੇ 2 ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਉਹਨਾਂ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੇ x– ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਹਨ, ਜਿੱਥੇ $y = x^3 - 4x$ ਦਾ ਆਲੇਖ x-ਧੁਰੇ ਨੂੰ ਕੱਟਦਾ ਹੈ। ਕਿਉਂਕਿ ਵਕਰ x-ਧੁਰੇ ਨੂੰ ਕੇਵਲ ਇਹਨਾਂ ਹੀ ਤਿੰਨ ਬਿੰਦੂਆਂ ਤੇ ਕਟਦਾ ਹੈ ਇਸ ਲਈ ਬਹੁਪਦ ਦੇ ਸਿਫ਼ਰ ਕੇਵਲ ਇਹਨਾਂ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੇ x-ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਹਨ।

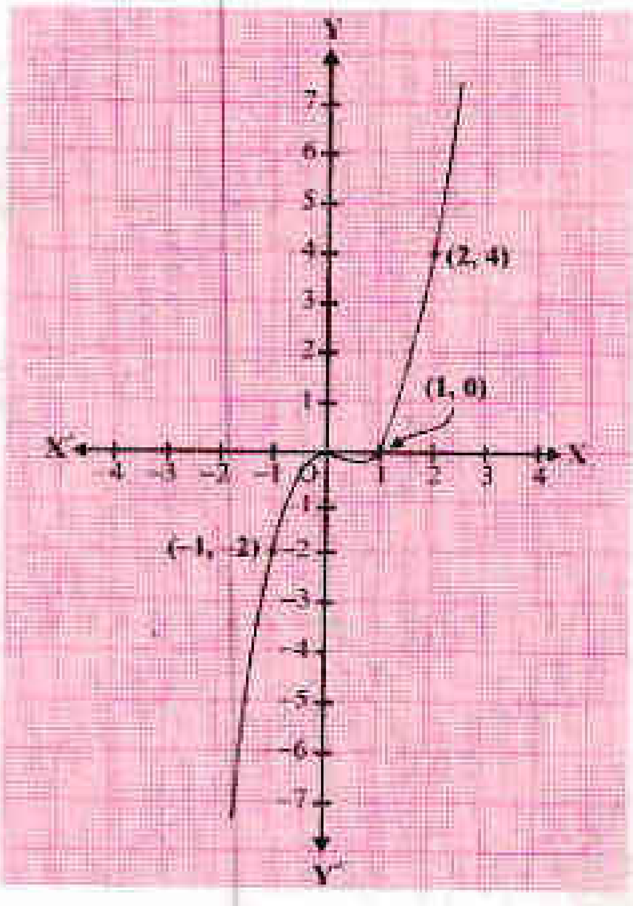


ਚਿੱਤਰ 2.6

ਆਉ ਅਸੀਂ ਹੁਣ ਕੁਝ ਹੋਰ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ। ਤਿੰਨ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ x^3 ਅਤੇ $x^3 - x^2$ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ। ਅਸੀਂ $y = x^3$ ਅਤੇ $y = x^3 - x^2$ ਦੇ ਆਲੇਖ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਚਿੱਤਰ 2.7 ਅਤੇ 2.8 ਵਿੱਚ ਖਿੱਚਦੇ ਹਾਂ।



ਚਿੱਤਰ 2.7



ਚਿੱਤਰ 2.8

ਗਣਿਤ

(ਦਸਵੀਂ ਸ਼੍ਰੇਣੀ ਲਈ)

ਪੰਜਾਬ ਸਕੂਲ ਸਿੱਖਿਆ ਬੋਰਡ
ਸਾਹਿਬਜ਼ਾਦਾ ਅਜੀਤ ਸਿੰਘ ਨਗਰ

ਪਹਿਲਾ ਐਡੀਸ਼ਨ : 2014 .... 1,55,000 ਕਾਪੀਆਂ
Revised ਐਡੀਸ਼ਨ : 2017 .... 81,000 ਕਾਪੀਆਂ

[This book has been adopted with the kind permission of the National Council of Educational Research and Training, New Delhi]

ਅਨੁਵਾਦਕ — ਸ. ਪਰਵਿੰਦਰ ਸਿੰਘ ਲੈਕ.
ਸ. ਸੀ. ਸੈ. ਸਕੂਲ (ਲੜਕੇ) ਅਬੋਹਰ

ਸੰਯੋਜਕ — ਸ. ਪ੍ਰਿਤਪਾਲ ਸਿੰਘ ਕਥੂਰੀਆ
ਵਿਸ਼ਾ ਮਾਹਿਰ ਪ. ਸ. ਸ. ਬ.

ਚਿੱਤਰਕਾਰ — ਸ. ਮਨਜੀਤ ਸਿੰਘ ਢਿੱਲੋਂ
ਆਰਟ ਸੈਲ ਪੰਜਾਬ ਸਕੂਲ ਸਿੱਖਿਆ ਬੋਰਡ (ਮੋਹਾਲੀ)

ਚੇਤਾਵਨੀ

1. ਕੋਈ ਵੀ ਏਜੰਸੀ-ਹੋਲਡਰ ਵਾਧੂ ਪੈਸੇ ਵਸੂਲਣ ਦੇ ਮੰਤਵ ਨਾਲ ਪਾਠ-ਪੁਸਤਕਾਂ 'ਤੇ ਜਿਲਦ-ਸਾਜ਼ੀ ਨਹੀਂ ਕਰ ਸਕਦਾ। (ਏਜੰਸੀ-ਹੋਲਡਰਾਂ ਨਾਲ ਹੋਏ ਸਮਝੌਤੇ ਦੀ ਧਾਰਾ ਨੰ. 7 ਅਨੁਸਾਰ)
2. ਪੰਜਾਬ ਸਕੂਲ ਸਿੱਖਿਆ ਬੋਰਡ ਦੁਆਰਾ ਛਪਵਾਈਆਂ ਅਤੇ ਪ੍ਰਕਾਸ਼ਿਤ ਪਾਠ-ਪੁਸਤਕਾਂ ਦੇ ਜਾਅਲੀ ਨਕਲੀ ਪ੍ਰਕਾਸ਼ਨਾਂ (ਪਾਠ-ਪੁਸਤਕਾਂ) ਦੀ ਛਪਾਈ, ਪ੍ਰਕਾਸ਼ਨ, ਸਟਾਕ ਕਰਨਾ, ਜਮ੍ਹਾਂ-ਖੋਰੀ ਜਾਂ ਵਿਕਰੀ ਆਦਿ ਕਰਨਾ ਭਾਰਤੀ ਦੰਡ ਪ੍ਰਨਾਲੀ ਦੇ ਅੰਤਰਗਤ ਫ਼ੌਜਦਾਰੀ ਜੁਰਮ ਹੈ।

(ਪੰਜਾਬ ਸਕੂਲ ਸਿੱਖਿਆ ਬੋਰਡ ਦੀਆਂ ਪਾਠ-ਪੁਸਤਕਾਂ ਬੋਰਡ ਦੇ 'ਵਾਟਰ ਮਾਰਕ' ਵਾਲੇ ਕਾਗਜ਼ ਉੱਪਰ ਹੀ ਛਪਵਾਈਆਂ ਜਾਂਦੀਆਂ ਹਨ।)

ਮੁੱਲ : ₹ 154/-

ਸਕੱਤਰ, ਪੰਜਾਬ ਸਕੂਲ ਸਿੱਖਿਆ ਬੋਰਡ, ਵਿੱਦਿਆ ਭਵਨ, ਫੇਜ਼-8 ਸਾਹਿਬਜ਼ਾਦਾ ਅਜੀਤ ਸਿੰਘ ਨਗਰ 160062 ਰਾਹੀਂ ਪ੍ਰਕਾਸ਼ਿਤ ਅਤੇ ਮੈਸ : ਨਾਰਦਨ ਸਟੇਸ਼ਨਰੀ ਮਾਰਟ, ਜਲੰਧਰ ਦੁਆਰਾ ਛਾਪੀ ਗਈ।

ਦੋ ਸ਼ਬਦ

ਪੰਜਾਬ ਸਕੂਲ ਸਿੱਖਿਆ ਬੋਰਡ ਪਾਠ-ਕ੍ਰਮਾਂ ਅਤੇ ਪਾਠ-ਪੁਸਤਕਾਂ ਨੂੰ ਸੋਧਣ ਅਤੇ ਤਿਆਰ ਕਰਨ ਦੇ ਕੰਮ ਵਿੱਚ ਜੁਟਿਆ ਹੋਇਆ ਹੈ। ਅੱਜ ਜਿਸ ਦੌਰ ਵਿੱਚੋਂ ਅਸੀਂ ਲੰਘ ਰਹੇ ਹਾਂ ਉਸ ਵਿੱਚ ਬੱਚਿਆਂ ਨੂੰ ਸਹੀ ਵਿੱਦਿਆ ਦੇਣਾ ਮਾਪਿਆਂ ਅਤੇ ਅਧਿਆਪਕਾਂ ਦੋਹਾਂ ਦੀ ਸਾਂਝੀ ਜ਼ਿੰਮੇਵਾਰੀ ਬਣਦੀ ਹੈ। ਇਸੇ ਜ਼ਿੰਮੇਵਾਰੀ ਅਤੇ ਵਿੱਦਿਅਕ ਜ਼ਰੂਰਤਾਂ ਨੂੰ ਸਮਝਦਿਆਂ ਹੋਇਆਂ ਗਣਿਤ ਵਿਸ਼ੇ ਦੇ ਪਾਠ-ਕ੍ਰਮਾਂ ਅਤੇ ਪਾਠ-ਪੁਸਤਕਾਂ ਵਿੱਚ ਨੈਸ਼ਨਲ ਕਰੀਕੁਲਮ ਫਰੇਮਵਰਕ-2005 ਅਨੁਸਾਰ ਕੁਝ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਪਰਿਵਰਤਨ ਕੀਤੇ ਜਾ ਰਹੇ ਹਨ।

ਸਕੂਲ ਕਰੀਕੁਲਮ ਵਿੱਚ ਗਣਿਤ ਵਿਸ਼ੇ ਦਾ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਯੋਗਦਾਨ ਹੈ ਅਤੇ ਲੋੜੀਂਦੇ ਸਿੱਖਿਅਕ ਨਤੀਜੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਲਈ ਚੰਗੀ ਪਾਠ-ਪੁਸਤਕ ਦਾ ਹੋਣਾ ਪਹਿਲੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਇਸ ਪਾਠ-ਪੁਸਤਕ ਵਿੱਚ ਵਿਸ਼ਾ ਸਾਮੱਗਰੀ ਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸਥਾਪਿਤ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ ਜਿਸ ਨਾਲ਼ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੀ ਤਰਕ ਸ਼ਕਤੀ ਪ੍ਰਫੁਲਿਤ ਹੋਣ ਦੇ ਨਾਲ਼-ਨਾਲ਼ ਵਿਸ਼ੇ ਨੂੰ ਸਮਝਣ ਦੀ ਯੋਗਤਾ ਵਿੱਚ ਵੀ ਵਾਧਾ ਹੋਵੇਗਾ। ਅਭਿਆਸਾਂ ਦੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੇ ਮਾਨਸਿਕ ਪੱਧਰ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਤਿਆਰ ਕੀਤੇ ਗਏ ਹਨ। ਇਹ ਪੁਸਤਕ ਰਾਸ਼ਟਰੀ ਵਿੱਦਿਆ ਖੋਜ ਅਤੇ ਸਿਖਲਾਈ ਸੰਸਥਾ ਵੱਲੋਂ ਦਸਵੀਂ ਸ਼੍ਰੇਣੀ ਲਈ ਤਿਆਰ ਕੀਤੀ ਗਈ ਗਣਿਤ ਵਿਸ਼ੇ ਦੀ ਪੁਸਤਕ ਦੀ ਅਨੁਸਾਰਤਾ ਕਰਦੀ ਹੈ। ਇਹ ਪੁਸਤਕ ਐਨ.ਸੀ.ਈ.ਆਰ.ਟੀ. ਤੋਂ ਪ੍ਰਵਾਨਗੀ ਲੈਣ ਉਪਰੰਤ ਪੰਜਾਬ ਸਕੂਲ ਸਿੱਖਿਆ ਬੋਰਡ ਦੁਆਰਾ ਪ੍ਰਕਾਸ਼ਿਤ ਕੀਤੀ ਗਈ ਹੈ।

ਇਸ ਪਾਠ-ਪੁਸਤਕ ਨੂੰ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਅਤੇ ਅਧਿਆਪਕਾਂ ਦੇ ਲਈ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਉਪਯੋਗੀ ਬਣਾਉਣ ਦਾ ਭਰਪੂਰ ਯਤਨ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ। ਫਿਰ ਵੀ, ਪੁਸਤਕ ਨੂੰ ਹੋਰ ਚੰਗੇਰਾ ਬਣਾਉਣ ਲਈ ਖੇਤਰ ਵਿੱਚੋਂ ਆਏ ਸੁਝਾਵਾਂ ਦਾ ਸਤਿਕਾਰ ਕੀਤਾ ਜਾਵੇਗਾ।

ਚੇਅਰਮੈਨ
ਪੰਜਾਬ ਸਕੂਲ ਸਿੱਖਿਆ ਬੋਰਡ

NCERT ਦੀ ਪਾਠ-ਪੁਸਤਕ ਤਿਆਰ ਕਰਨ ਵਾਲੀ ਕਮੇਟੀ

ਵਿਗਿਆਨ ਅਤੇ ਗਣਿਤ ਦੇ ਸਲਾਹਕਾਰ ਸਮੂਹ ਦੇ ਚੇਅਰਮੈਨ

ਜਯੰਤ ਵਿਸ਼ਨੂੰ ਨਾਰਲੀਕਰ, ਇਮੀਰਿਟਸ ਪ੍ਰੋਫ਼ੈਸਰ, ਚੇਅਰਮੈਨ, ਆਈ.ਯੂ.ਸੀ.ਏ.ਏ., ਗਣੇਸ਼ਖਿੰਡ, ਪੂਨਾ ਯੂਨਿਵਰਸਿਟੀ, ਪੂਨਾ

ਮੁੱਖ ਸਲਾਹਕਾਰ

ਪੀ.ਸਿੰਕਲੇਅਰ, ਪ੍ਰੋਫ਼ੈਸਰ, ਵਿਗਿਆਨ ਵਿਦਿਆਪੀਠ, ਇ.ਗਾ.ਰਾ.ਮੁ.ਵਿ., ਨਵੀਂ ਦਿੱਲੀ

ਮੁੱਖ ਕੋਆਰਡੀਨੇਟਰ

ਹੁਕੁਮ ਸਿੰਘ, ਪ੍ਰੋਫ਼ੈਸਰ, ਡੀ.ਈ.ਐਸ.ਐਮ., ਰਾ.ਸ਼ੈ.ਅ.ਪ੍ਰ.ਪ., ਨਵੀਂ ਦਿੱਲੀ

ਮੈਂਬਰ

ਅੰਜਲੀ ਲਾਲ, ਪੀ.ਜੀ.ਟੀ. (ਗਣਿਤ), ਡੀ.ਏ.ਵੀ. ਪਬਲਿਕ ਸਕੂਲ, ਸੈਕਟਰ-14, ਗੁੜਗਾਵਾਂ
ਅੰਜੂ ਨਿਰੂਲਾ, ਪੀ.ਜੀ.ਟੀ. (ਗਣਿਤ) ਡੀ.ਏ.ਵੀ. ਪਬਲਿਕ ਸਕੂਲ, ਪੁਸ਼ਪਾਂਜਲੀ ਇੰਨਕਲੇਵ, ਪੀਤਮ ਪੁਰਾ, ਦਿੱਲੀ
ਉਦੇ ਸਿੰਘ, ਲੈਕਚਰਾਰ, ਡੀ.ਈ.ਐਸ.ਐਮ., ਰਾ.ਸ਼ੈ.ਅ.ਪ੍ਰ.ਪ., ਨਵੀਂ ਦਿੱਲੀ
ਏ.ਕੇ.ਵਜਲਵਾਰ, ਰੀਡਰ, ਡੀ.ਈ.ਐਸ.ਐਮ., ਰਾ.ਸ਼ੈ.ਅ.ਪ੍ਰ.ਪ., ਨਵੀਂ ਦਿੱਲੀ
ਐਸ.ਵੈਂਕਟਰਮਨ, ਲੈਕਚਰਾਰ, ਵਿਗਿਆਨ ਵਿਦਿਆਪੀਠ, ਇ.ਗਾ.ਰਾ.ਮੁ.ਵਿ., ਨਵੀਂ ਦਿੱਲੀ
ਜੀ.ਪੀ.ਦੀਕਸ਼ਿਤ, ਪ੍ਰੋਫ਼ੈਸਰ, ਗਣਿਤ ਅਤੇ ਖਗੋਲਿਕੀ ਵਿਭਾਗ, ਲਖਨਊ ਯੂਨੀਵਰਸਿਟੀ, ਲਖਨਊ
ਕੇ.ਏ.ਐਸ.ਐਸ.ਵੀ.ਕਾਮੇਸ਼ਵਰ ਰਾਵ, ਲੈਕਚਰਾਰ, ਖੇਤਰੀ ਸਿੱਖਿਆ ਸੰਸਥਾਨ, ਭੁਵਨੇਸ਼ਵਰ
ਮਹਿੰਦਰ ਆਰ.ਗਜਰੇ, ਪੀ.ਜੀ.ਟੀ., ਅਤੁਲ ਸਕੂਲ, ਅਤੁਲ, ਜ਼ਿਲ੍ਹਾ ਵਲਸਾਦ
ਮਹਿੰਦਰ ਸ਼ੰਕਰ, ਲੈਕਚਰਾਰ (ਐਸ.ਜੀ.) (ਰਿਟਾ.), ਰਾ.ਸ਼ੈ.ਅ.ਪ੍ਰ.ਪ., ਨਵੀਂ ਦਿੱਲੀ
ਰਮਾ ਬਾਲਾਜੀ, ਟੀ.ਜੀ.ਟੀ. (ਗਣਿਤ), ਕੇ.ਵੀ.ਮੇਗ ਅਤੇ ਕੇਂਦਰ, ਸੇਂਟ ਜੋਹਨਜ਼ ਰੋਡ, ਬੰਗਲੂਰੂ
ਵੇਦ ਡੂਡੇਜਾ, ਉਪ-ਪ੍ਰਿੰਸੀਪਲ (ਰਿਟਾ.), ਗੌ.ਗ.ਮਿਡਲ ਸਕੂਲ, ਸੈਨਿਕ ਵਿਹਾਰ, ਦਿੱਲੀ
ਸੰਜੇ ਮੁਦਗੱਲ, ਲੈਕਚਰਾਰ, ਸੀ.ਆਈ.ਈ.ਟੀ., ਰਾ.ਸ਼ੈ.ਅ.ਪ੍ਰ.ਪ. ਨਵੀਂ ਦਿੱਲੀ
ਸ਼ਸ਼ੀਧਰ ਜਗਦੀਸ਼ਨ, ਅਧਿਆਪਕ ਅਤੇ ਮੈਂਬਰ, ਗਵਰਨਿੰਗ ਕਾਉਂਸਿਲ, ਸੈਂਟਰ ਫ਼ਾਰ ਲਰਨਿੰਗ, ਬੰਗਲੂਰੂ

ਹਿੰਦੀ ਅਨੁਵਾਦਕ :

ਜੀ.ਪੀ. ਦੀਕਸ਼ਿਤ, ਪ੍ਰੋਫ਼ੈਸਰ, ਗਣਿਤ ਅਤੇ ਖਗੋਲਿਕੀ ਵਿਭਾਗ, ਲਖਨਊ ਯੂਨੀਵਰਸਿਟੀ, ਲਖਨਊ
ਮਹਿੰਦਰ ਸ਼ੰਕਰ, ਲੈਕਚਰਾਰ (ਐਸ.ਜੀ.) (ਰਿਟਾ.), ਰਾ.ਸ਼ੈ.ਅ.ਪ੍ਰ.ਪ., ਨਵੀਂ ਦਿੱਲੀ
ਹਰੀਸ਼ਵਰ ਪ੍ਰਸਾਦ ਸਿੰਨਹਾ, ਸੀ-210, ਰਾਜਾਜੀ ਪੁਰਮ, ਲਖਨਊ

ਮੈਂਬਰ ਕੋਆਰਡੀਨੇਟਰ

ਰਾਮ ਅਵਤਾਰ, ਪ੍ਰੋਫ਼ੈਸਰ, ਡੀ.ਈ.ਐਸ.ਐਮ., ਰਾ.ਸ਼ੈ.ਅ.ਪ੍ਰ.ਪ., ਨਵੀਂ ਦਿੱਲੀ (ਦਿਸੰਬਰ 2005 ਤੱਕ)
ਆਰ.ਪੀ.ਮੌਰੀਆ, ਰੀਡਰ, ਡੀ.ਈ.ਐਸ.ਐਮ., ਰਾ.ਸ਼ੈ.ਅ.ਪ੍ਰ.ਪ., ਨਵੀਂ ਦਿੱਲੀ (ਜਨਵਰੀ 2006 ਤੋਂ)

ਵਿਸ਼ਾ-ਸੂਚੀ

1 ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ REAL NUMBERS

1.1 ਭੂਮਿਕਾ

ਨੌਵੀਂ ਜਮਾਤ ਵਿੱਚ ਤੁਸੀਂ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਖੋਜ ਸ਼ੁਰੂ ਕੀਤੀ ਅਤੇ ਇਸ ਪ੍ਰੀਕਿਰਿਅ ਦੌਰਾਨ ਤੁਹਾਨੂੰ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਬਾਰੇ ਜਾਣਕਾਰੀ ਮਿਲੀ। ਇਸ ਪਾਠ ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਬਾਰੇ ਆਪਣੀ ਚਰਚਾ ਜਾਰੀ ਰੱਖਾਂਗੇ। ਇਹ ਚਰਚਾ ਅਸੀਂ ਭਾਗ 1.2 ਅਤੇ 1.3 ਵਿੱਚ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ (integers) ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਦੋ ਬਹੁਤ ਹੀ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਗੁਣਾਂ ਤੋਂ ਸ਼ੁਰੂ ਕਰਾਂਗੇ ਇਹ ਗੁਣ ਹਨ : ਯੂਕਲਿਡ ਵੰਡ ਐਲਗੋਰਿਥਮ (ਕਲਨ ਵਿਧੀ) (Euclid's division algorithm ਅਤੇ ਅੰਕਗਣਿਤ ਦੀ ਮੂਲਭੂਤ ਪ੍ਰਮੇਯ (ਥਿਊਰਮ) (Fundamental Theorem Arithmetic)।

ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਿ ਨਾਮ ਤੋਂ ਪਤਾ ਲੱਗਦਾ ਹੈ, ਯੂਕਲਿਡ ਵੰਡ ਐਲਗੋਰਿਥਮ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵ (integers) ਦੀ ਵੰਡ ਨਾਲ ਕਿਸੇ ਨਾ ਕਿਸੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਸੰਬੰਧਿਤ ਹੈ। ਸਧਾਰਨ ਭਾਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਕਿਹਾ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਐਲਗੋਰਿਥਮ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ, ਇੱਕ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ a ਨੂੰ ਕਿਸੇ ਦੂਸਰੀ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ b ਨਾਲ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਵੰਡਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਕਿ ਬਾਕੀ r ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਵੇ, ਜੋ b ਤੋਂ ਛੋਟਾ (ਘੱਟ ਹੋਵੇ। ਤੁਹਾਡੇ ਵਿੱਚੋਂ ਜ਼ਿਆਦਾਤਰ ਲੋਕ ਸ਼ਾਇਦ ਇਸਨੂੰ ਸਧਾਰਨ ਲੰਬੀ ਵੰਡ ਪ੍ਰੀਕਿਰਿਆ (long divisio process) ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਜਾਣਦੇ ਹਨ। ਭਾਵੇਂ ਕਿ ਇਹ ਪਰਿਣਾਮ (ਸਿੱਟਾ) ਕਹਿਣ ਅਤੇ (ਸਮਝਣ) ਵਿੱਚ ਬਹੁਤ ਸਰਲ ਹੈ, ਪਰੰਤੂ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਵੰਡ ਦੇ ਗੁਣਾਂ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਇਸ ਦੀਆਂ ਬਹੁਤ ਸਾਰੀਆਂ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾਵਾਂ ਹਨ। ਅਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚ ਕੁਝ 'ਤੇ ਰੌਸ਼ਨੀ ਪਾਵਾਂਗੇ ਅਤੇ ਮੁੱਖ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਇਸ ਦ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦੋ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਮਹੱਤਮ ਸਮਾਪਵਰਤਕ (HCF) ਕੱਢਣ ਦੇ ਬਾਰੇ ਕਰਾਂਗੇ।

ਦੂਸਰੇ ਪਾਸੇ ਅੰਕਗਣਿਤ ਦੀ ਮੂਲਭੂਤ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦਾ ਸੰਬੰਧ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਗੁਣਾ ਤੋਂ ਹੈ। ਤੁਸੀਂ ਪਹਿਲਾਂ ਤੋਂ ਹੀ ਜਾਣਦੇ ਹੋ ਕਿ ਹਰ ਇੱਕ ਭਾਜ ਸੰਖਿਆ (composite number) ਨੂੰ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ (prime numbers) ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇਹ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਤੱਥ ਅੰਕਗਣਿਤ ਦੀ ਮੂਲਭੂਤ ਥਿਊਰਮ ਹੈ। ਫਿਰ ਤੋਂ ਇਹ ਪਰਿਣਾਮ (ਸਿੱਟਾ) ਕਹਿਣ ਅਤੇ ਸਮਝਣ ਵਿੱਚ ਬਹੁਤ ਸਰਲ ਹੈ, ਪ੍ਰੰਤੂ ਗਣਿਤ ਦੇ ਖੇਤਰ ਵਿੱਚ ਇਸ ਦੀਆਂ ਬਹੁਤ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾਵਾਂ ਹਨ ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ ਅੰਕਗਣਿਤ ਦੀ ਮੂਲਭੂਤ ਥਿਊਰਮ ਦੀਆਂ ਦੋ ਮੁੱਖ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾਵਾਂ ਦੇਖਾਂਗੇ। ਇੱਕ ਤਾਂ ਅਸੀ

ਇਸਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਜਮਾਤ IX ਵਿੱਚ ਪੜੀਆਂ ਗਈਆਂ ਕੁਝ ਸੰਖਿਆਵਾਂ, ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ ਅਤੇ $\sqrt{5}$ ਆਦਿ ਦੀ ਅਪਰਿਮੇਯਤਾ ਸਿੱਧ ਕਰਨ ਲਈ ਕਰਾਂਗੇ। ਦੂਸਰਾ, ਅਸੀਂ ਇਸਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਇਹ ਲੱਭਣ ਵਿੱਚ ਕਰਾਂਗੇ ਕਿ ਕਿਸੇ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ, ਮੰਨ ਲਓ $\frac{p}{q} (q \neq 0)$ ਦਾ ਦਸ਼ਮਲਵ ਵਿਸਤਾਰ ਕਦੋਂ ਸ਼ਾਂਤ (terminating) ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਕਦੋਂ ਅਸ਼ਾਂਤ ਆਵਰਤੀ (non-terminating repeating) ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਹ ਅਸੀਂ $\frac{p}{q}$ ਦੇ ਹਰ, q ਦੇ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡਣ ਨੂੰ ਦੇਖ ਕੇ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਤੁਸੀਂ ਦੇਖੋਗੇ ਕਿ q ਦੇ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡਣ ਤੋਂ $\frac{p}{q}$ ਦੇ ਦਸ਼ਮਲਵ ਰੂਪ ਦੀ ਪ੍ਰਕਿਰਤੀ ਦਾ ਪੂਰੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪਤਾ ਲੱਗ ਜਾਵੇਗਾ।

ਇਸ ਲਈ, ਆਓ ਆਪਣੀ ਖੋਜ ਸ਼ੁਰੂ ਕਰੀਏ।

1.2 ਯੂਕਲਿਡ ਵੰਡ ਪ੍ਰਮੇਯਿਕਾ (Euclid's division Lemma)

ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀ ਲੋਕ ਬੁਝਾਰਤ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ:*

ਇੱਕ ਵਿਕਰੇਤਾ ਸੜਕ 'ਤੇ ਜਾਂਦਾ ਹੋਇਆ ਆਂਡੇ ਵੇਚ ਰਿਹਾ ਸੀ। ਇੱਕ ਆਲਸੀ ਆਦਮੀ ਜਿਸਦੇ ਕੋਲ ਕੋਈ ਕੰਮ ਨਹੀਂ ਸੀ, ਨੇ ਉਸ ਵਿਕਰੇਤਾ ਨਾਲ ਸ਼ਬਦੀ ਜੰਗ (ਝਗੜਾ) ਚਾਲੂ ਕਰ ਦਿੱਤਾ। ਇਸ ਨਾਲ ਗੱਲ ਅੱਗੇ ਵੱਧ ਗਈ ਅਤੇ ਉਸਨੇ ਆਂਡਿਆਂ ਦੀ ਟੋਕਰੀ ਖੋਹ ਕੇ ਸੜਕ 'ਤੇ ਸੁੱਟ ਦਿੱਤੀ। ਆਂਡੇ ਟੁੱਟ ਗਏ। ਵਿਕਰੇਤਾ ਨੇ ਪੰਚਾਇਤ ਨੂੰ ਕਿਹਾ ਕਿ ਉਸ ਵਿਅਕਤੀ ਨੂੰ ਟੁੱਟੇ ਹੋਏ ਆਂਡਿਆਂ ਦੇ ਪੈਸੇ ਦੇਣ ਨੂੰ ਕਹੇ। ਪੰਚਾਇਤ ਨੇ ਵਿਕਰੇਤਾ ਨੂੰ ਪੁੱਛਿਆ ਕਿ ਕਿੰਨੇ ਆਂਡੇ ਟੁੱਟੇ ਸਨ। ਉਸਨੇ ਹੇਠਾਂ ਅਨੁਸਾਰ ਉੱਤਰ ਦਿੱਤਾ:

ਦੋ-ਦੋ ਗਿਨਣ ਨਾਲ ਇੱਕ ਬਚੇਗਾ;
ਤਿੰਨ-ਤਿੰਨ ਗਿਨਣ ਨਾਲ ਦੋ ਬਚਣਗੇ;
ਚਾਰ-ਚਾਰ ਗਿਨਣ ਨਾਲ ਤਿੰਨ ਬਚਣਗੇ;
ਪੰਜ-ਪੰਜ ਗਿਨਣ ਨਾਲ ਚਾਰ ਬਚਣਗੇ;
ਛੇ-ਛੇ ਗਿਨਣ ਨਾਲ ਪੰਜ ਬਚਣਗੇ;
ਸੱਤ-ਸੱਤ ਗਿਨਣ ਨਾਲ ਕੁਝ ਨਹੀਂ ਬਚੇਗਾ;
ਮੇਰੀ ਟੋਕਰੀ ਵਿੱਚ 150 ਤੋਂ ਵੱਧ ਆਂਡੇ ਨਹੀਂ ਆ ਸਕਦੇ।

ਇਸ ਲਈ ਕਿੰਨੇ ਆਂਡੇ ਸਨ? ਆਓ ਇਸ ਬੁਝਾਰਤ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਦਾ ਯਤਨ ਕਰੀਏ। ਮੰਨ ਲਓ ਆਂਡਿਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ a ਹੈ। ਹੁਣ ਉਲਟੇ ਕ੍ਰਮ ਤੋਂ ਸ਼ੁਰੂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ, ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ a ਸੰਖਿਆ 150 ਤੋਂ ਛੋਟੀ ਹੈ ਜਾਂ ਇਸਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ।

* ਇਹ ਲੇਖਕ ਦੇ, ਗਾਮਪਾਲ ਅਤੇ ਹੋਰ ਦੁਆਰਾ ਲਿਖੀ ਕਿਤਾਬ ਨਿਊਮੇਰੇਸੀ ਕਾਊਂਟਸ ਵਿੱਚ ਲਿਖੀ ਬੁਝਾਰਤ ਦਾ ਪ੍ਰਵਰਤਿਤ (ਬਦਲਵਾਂ) ਰੂਪ ਹੈ।

ਜੇਕਰ ਸੱਤ-ਸੱਤ ਗਿਣੀਏ ਤਾਂ ਕੁਝ ਨਹੀਂ ਬਚੇਗਾ। ਇਹ $a = 7p + 0$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਵਰਤਿਤ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ p ਕੋਈ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਿਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਜੇਕਰ ਛੇ-ਛੇ ਗਿਣੀਏ ਤਾਂ 5 ਬਚਣਗੇ। ਇਹ $a = 6q + 5$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਵਰਤਿਤ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ q ਕੋਈ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਿਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਪੰਜ-ਪੰਜ ਗਿਣਨ ਨਾਲ, 4 ਬਚਦਾ ਹੈ। ਇਹ $a = 5s + 4$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਵਰਤਿਤ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ s ਕੋਈ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਿਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਚਾਰ-ਚਾਰ ਗਿਣਨ ਨਾਲ, 3 ਬਚਦਾ ਹੈ। ਇਹ $a = 4t + 3$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਵਰਤਿਤ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ..., ..ਥੇ t ਕੋਈ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਿਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਤਿੰਨ-ਤਿੰਨ ਗਿਣਨ ਨਾਲ, 2 ਬਚਦਾ ਹੈ। ਇਹ $a = 3u + 2$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਵਰਤਿਤ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ੈ, ਜਿੱਥੇ u ਕੋਈ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਿਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਦੋ-ਦੋ ਗਿਣਨ ਨਾਲ, 1 ਬਚੇਗਾ। ਇਹ $a = 2v + 1$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਵਰਤਿਤ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ ਕੋਈ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਿਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਭਾਵ, ਉਪਰੋਕਤ ਹਰ ਇਕ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ, ਸਾਡੇ ਕੋਲ ਦੋ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ a ਅਤੇ b ਹਨ (ਲਏ ਗਏ ਉਦਾਹਰਣ ਵਿੱਚ b ਦੇ ਮੁੱਲ ਕ੍ਰਮਵਾਰ 7, 6, 5, 4, 3 ਅਤੇ 2 ਹਨ)। ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚ a ਨੂੰ b ਨਾਲ ਭਾਗ ਦੇਣ 'ਤੇ r ਬਾਕੀ ਬਚਦਾ ਹੈ (ਉਪਰੋਕਤ ਵਿੱਚ r ਦੇ ਮੁੱਲ ਕ੍ਰਮਵਾਰ 0, 5, 4, 3, 2 ਅਤੇ 1 ਹਨ) ਭਾਵ r ਭਾਜਕ b ਤੋਂ ਛੋਟਾ ਹੈ। ਜਿਵੇਂ ਹੀ ਅਸੀਂ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਸਮੀਕਰਣ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ, ਅਸੀਂ ਯੂਕਲਿਡ ਵੰਡ ਪ੍ਰਮੇਯਕਾ (Euclid's division lemma) ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰ ਰਹੇ ਹਾਂ, ਇਸ ਨੂੰ ਪ੍ਰਮੇਯ 1.1 ਵਿੱਚ ਦਿੱਤਾ ਜਾ ਰਿਹਾ ਹੈ।

ਹੁਣ, ਅਸੀਂ ਬੁਝਾਰਤ 'ਤੇ ਵਾਪਿਸ ਆਉਂਦੇ ਹੋਏ, ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਸੋਚ ਕੇ ਦੱਸ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ ਇਸ ਬੁਝਾਰਤ ਨੂੰ ਕਿਵੇਂ ਹੱਲ ਕਰਾਂਗੇ? ਹਾਂ, ਤੁਸੀਂ 7 ਦੇ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਸਾਰੇ ਗੁਣਜਾਂ ਦਾ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੋ ਉਪਰੋਕਤ ਸਾਰੇ ਸੰਬੰਧਾਂ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦੇ ਹੋਣ। ਜਾਂਚ ਅਤੇ ਭੁੱਲ ਵਿਧੀ ਨਾਲ LCM ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਤੁਸੀਂ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ,ਹੋ ਕਿ ਆਂਡਿਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ 119 ਸੀ।

ਇਸ ਗੱਲ ਦਾ ਅਨੁਭਵ ਕਰਨ ਲਈ ਕਿ ਯੁਕਲਿਡ ਵੰਡ ਪ੍ਰਮੇਯਿਕਾ ਕੀ ਹੈ, ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਜੋੜਿਆਂ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ:

(i) 17, 6 (ii) 5, 12 (iii) 20, 4

ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਿ ਅਸੀਂ ਬੁਝਾਰਤ ਵਾਲੀ ਉਦਾਹਰਣ ਵਿੱਚ ਕੀਤਾ ਸੀ, ਇੱਥੇ ਵੀ ਅਸੀਂ ਹਰ ਇੱਕ ਜੋੜੇ ਲਈ ਸੰਬੰਧ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਿ ਹੇਠਾਂ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਰਿਹਾ ਹੈ।

(i) $17 = 6 \times 2 + 5$ (17 ਵਿੱਚੋਂ 6 ਦੋ ਵਾਰ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ 5 ਬਾਕੀ ਬੱਚਦਾ ਹੈ)

(ii) $5 = 12 \times 0 + 5$ (ਇਹ ਸੰਬੰਧ ਇਸ ਲਈ ਸਹੀ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ 12, 5 ਤੋਂ ਵੱਡਾ ਹੈ)

(iii) $20 = 4 \times 5 + 0$ (20 ਵਿੱਚੋਂ 4 ਪੰਜ ਵਾਰ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਬਾਕੀ ਕੁਝ ਨਹੀਂ ਬੱਚਦਾ)

ਭਾਵ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ a ਅਤੇ b ਦੇ ਹਰ ਇੱਕ ਜੋੜੇ ਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ q ਅਤੇ r ਪਤਾ ਕਰ ਚੁੱਕੇ ਹਾਂ ਕਿ

$a = bq + r, 0 \le r < b$ ਹੈ।

ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ q ਅਤੇ r ਸਿਫ਼ਰ ਵੀ ਹੋ ਸਕਦੇ ਹਨ।

ਹੁਣ ਤੁਸੀਂ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ a ਅਤੇ b ਦੇ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਜੋੜਿਆਂ ਦੇ ਲਈ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ q ਅਤੇ r ਪਤਾ ਕਰਨ ਦਾ ਯਤਨ ਕਰੋ:

(i) 10, 3 (ii) 4, 19 (iii) 81, 3

ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਧਿਆਨ ਦਿੱਤਾ ਕਿ q ਅਤੇ r ਵਿਲੱਖਣ ਹਨ? ਇਹ ਹੀ ਕੇਵਲ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ ਜੋ ਸੰਬੰਧ $a = bq + r, 0 \le r < b$ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦੀਆਂ ਹਨ। ਤੁਸੀਂ ਇਹ ਵੀ ਦੇਖ ਲਿਆ ਹੋਵੇਗਾ ਕਿ ਇਹ ਲੰਬੀ ਵੰਡ ਵਿਧੀ ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ ਕੁਝ ਵੀ ਨਹੀਂ ਹੈ, ਜਿਸ ਨੂੰ ਤੁਸੀਂ ਕਾਫੀ ਸਾਲਾਂ ਤੋਂ ਕਰਦੇ ਆ ਰਹੇ ਹੋ ਅਤੇ q ਅਤੇ r ਨੂੰ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਭਾਗਫਲ *(quotient)* ਅਤੇ ਬਾਕੀ *(remainder)* ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਨਤੀਜੇ ਨੂੰ ਉਪਚਾਰਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ *(formal)* ਅਸੀਂ ਹੇਠਾਂ ਦੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ:

ਪ੍ਰਮੇਯ (ਥਿਊਰਮ) 1.1 ਯੂਕਲਿਡ ਵੰਡ ਪ੍ਰਮੇਯਿਕਾ *(Euclid's division lemma)* ਦਿੱਤੀਆਂ ਹੋਈਆਂ ਦੋ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ a ਅਤੇ b ਲਈ ਦੋ ਵਿਲੱਖਣ ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ q ਅਤੇ r ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ ਕਿ $a = bq + r,\ 0 \le r < b$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਨਤੀਜੇ ਦੀ ਜਾਣਕਾਰੀ ਬਹੁਤ ਪਹਿਲਾਂ ਤੋਂ ਹੀ ਸੀ, ਪ੍ਰੰਤੂ ਲਿਖਤੀ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਇਸਦਾ ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਉਲੇਖ ਯੂਕਲਿਡ ਐਲੀਮੈਂਟਸ (Euclid's Elements) ਦੀ ਪੁਸਤਕ VII ਵਿੱਚ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ।

ਯੂਕਲਿਡ ਵੰਡ ਐਲਗੋਰਿਥਮ (ਕਲਨ ਵਿਧੀ) ਇਸੇ ਹੀ ਪ੍ਰਮੇਯਕਾ (Lemma) 'ਤੇ ਅਧਾਰਿਤ ਹੈ।

ਐਲਗੋਰਿਥਮ ਪੂਰੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਨਾਲ ਪ੍ਰਭਾਸ਼ਿਤ ਪਗਾਂ ਦੀ ਇੱਕ ਲੜੀ ਹੁੰਦੀ ਹੈ, ਜੋ ਇੱਕ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੀ ਸਮੱਸਿਆ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਦੀ ਇੱਕ ਪ੍ਰਕਿਰਿਆ ਜਾਂ ਵਿਧੀ ਦਸਦੀ ਹੈ।

ਸ਼ਬਦ ''ਐਲਗੋਰਿਥਮ'' 9ਵੀਂ ਸਦੀ ਦੇ ਇੱਕ ਫਾਰਸੀ ਗਣਿਤ ਵਿਗਿਆਨੀ ਅਲ-ਖੁਆਰਿਜ਼ਮੀ ਦੇ ਨਾਮ ਤੋਂ ਲਿਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਸ਼ਬਦ 'ਅਲਜਬਰਾ'(Algebra) ਵੀ ਇਹਨਾਂ ਦੁਆਰਾ ਲਿਖੀ ਪੁਸਤਕ 'ਹਿਸਾਬ ਅਲ ਜ਼ਬਰ ਵੀ ਅਲ ਮੁਕਾਬਲਾ' ਤੋਂ ਲਿਆ ਗਿਆ ਹੈ।

ਪ੍ਰਮੇਯਕਾ ਇੱਕ ਸਿੱਧ ਕੀਤਾ ਹੋਇਆ ਕਥਨ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸਨੂੰ ਕਿਸੇ ਹੋਰ ਕਥਨ ਨੂੰ ਸਿੱਧ ਕਰਨ ਲਈ ਵਰਤਦੇ ਹਨ।

ਮੁਹੰਮਦ ਇਬਨ ਮੂਸਾ ਅਲ ਖੁਆਰਿਜ਼ਮੀ
(780 – 850 ਈ.)

ਯੂਕਲਿਡ ਵੰਡ ਐਲਗੋਰਿਥਮ ਦੋ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਮ.ਸ.ਵ *(H.C.F)* ਗਣਨਾ ਕਰਨ ਦਾ ਇੱਕ ਤਰੀਕਾ ਹੈ। ਤੁਹਾਨੂੰ ਯਾਦ ਹੋਵੇਗਾ ਕਿ ਦੋ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ a ਅਤੇ b ਦਾ ਮ.ਸ.ਵ *(H.C.F)* ਉਹ ਸਭ ਤੋਂ ਵੱਡੀ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ d ਹੈ, ਜੋ a ਅਤੇ b ਦੋਵਾਂ ਨੂੰ ਪੂਰੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਭਾਗ ਕਰਦੀ ਹੈ।

ਆਓ ਸਾਰਿਆਂ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਇੱਕ ਉਦਾਹਰਣ ਲੈ ਕੇ ਦੇਖੀਏ ਕਿ ਇਹ ਐਲਗੋਰਿਥਮ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕੰਮ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਮੰਨ ਲਉ ਅਸੀਂ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ 455 ਅਤੇ 42 ਦਾ ਮ.ਸ.ਵ *(H.C.F)* ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਵੱਡੀ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ 455 ਤੋਂ ਸ਼ੁਰੂ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਹੁਣ ਯੁਕਲਿਡ ਪ੍ਰਮੇਯਕਾ ਤੋਂ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ:

$$455 = 42 \times 10 + 35$$

ਹੁਣ ਭਾਜਕ 42 ਅਤੇ ਬਾਕੀ 35 ਨੂੰ ਲੈ ਕੇ, ਯੁਕਲਿਡ ਪ੍ਰਮੇਯਕਾ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹੋਏ, ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ:

$$42 = 35 \times 1 + 7$$

ਹੁਣ ਭਾਜਕ 35 ਅਤੇ ਬਾਕੀ 7 ਨੂੰ ਲੈ ਕੇ, ਯੁਕਲਿਡ ਪ੍ਰਮੇਯਕਾ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨ ਤੋਂ, ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ:

$$35 = 7 \times 5 + 0$$

ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ਇੱਥੇ ਬਾਕੀ ਸਿਫ਼ਰ (ਜ਼ੀਰੋ) ਆ ਗਿਆ ਹੈ ਅਤੇ ਅਸੀਂ ਅੱਗੇ ਕੁਝ ਨਹੀਂ ਕਰ ਸਕਦੇ। ਅਸੀਂ ਆਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਾਲਾ ਭਾਜਕ ਭਾਵ 7 ਹੀ 455 ਅਤੇ 42 ਦਾ ਮ.ਸ.ਵ *(H.C.F)* ਹੈ। ਤੁਸੀਂ ਇਸ ਦੀ ਜਾਂਚ 455 ਅਤੇ 42 ਦੇ ਸਾਰੇ ਗੁਣਨਖੰਡਾਂ ਨੂੰ ਲਿਖ ਕੇ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ। ਇਹ ਵਿਧੀ ਕਿਸ ਕਾਰਣ ਕੰਮ ਕਰ ਜਾਂਦੀ ਹੈ?

ਇਸ ਦਾ ਕਾਰਣ **ਯੁਕਲਿਡ ਵੰਡ ਐਲਗੋਰਿਥਮ** ਹੈ, ਇਸਦੇ ਪਗਾਂ ਨੂੰ ਹੇਠਾਂ ਸਪਸ਼ਟ ਕੀਤਾ ਜਾ ਰਿਹਾ ਹੈ:

ਦੋ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਮੰਨ ਲਉ c ਅਤੇ d $(c>d)$ ਦਾ ਮ.ਸ.ਵ *(H.C.F)* ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਪਗਾਂ ਅਨੁਸਾਰ ਕੰਮ ਕਰੋ:

ਪਗ 1: c ਅਤੇ d ਦੇ ਲਈ ਯੁਕਲਿਡ ਵੰਡ ਪ੍ਰਮੇਯਕਾ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰੋ। ਇਸ ਲਈ, ਅਸੀਂ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ q ਅਤੇ r ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $c = dq + r$, $0 \leq r < d$ ਹੋਵੇ।

ਪਗ 2: ਜੇਕਰ $r = 0$ ਹੈ, ਤਾਂ d ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ c ਅਤੇ d ਦਾ ਮ.ਸ.ਵ *(H.C.F)* ਹੈ। ਜੇਕਰ $r \neq 0$ ਹੈ, ਤਾਂ d ਅਤੇ r ਦੇ ਲਈ, ਯੁਕਲਿਡ ਵੰਡ ਪ੍ਰਮੇਯਕਾ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰੋ।

ਪਗ 3: ਇਸ ਪ੍ਰਕਿਰਿਆ ਨੂੰ ਉਦੋਂ ਤਕ ਜਾਰੀ ਰੱਖੋ, ਜਦੋਂ ਤੱਕ ਬਾਕੀ ਸਿਫ਼ਰ (ਜ਼ੀਰੋ) ਪ੍ਰਾਪਤ ਨਾ ਹੋ ਜਾਵੇ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਭਾਜਕ ਹੀ ਲੋੜੀਂਦਾ ਮ.ਸ.ਵ *(H.C.F)* ਹੈ।

ਇਹ ਐਲਗੋਰਿਥਮ ਇਸ ਲਈ ਪ੍ਰਭਾਵਸ਼ਾਲੀ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ HCF (c, d) = HCF (d, r) ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇੱਥੇ ਸੰਕੇਤ HCF (c, d) ਦਾ ਮਤਲਬ ਹੈ c ਅਤੇ d ਦਾ HCF।

ਉਦਾਹਰਣ: 4052 ਅਤੇ 12576 ਦਾ ਮ.ਸ.ਵ *(H.C.F)* ਯੁਕਲਿਡ ਵੰਡ ਐਲਗੋਰਿਥਮ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ:

ਪਗ 1: ਇੱਥੇ 12576 > 4052 ਹੈ। 12576 ਅਤੇ 4052 ਉੱਪਰ ਯੁਕਲਿਡ ਪ੍ਰਮੇਯਕਾ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ:

$$12576 = 4052 \times 3 + 420$$

ਪਗ 2: ਕਿਉਂਕਿ ਬਾਕੀ $420 \neq 0$ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ 4052 ਅਤੇ 420 ਦੇ ਲਈ ਯੁਕਲਿਡ ਪ੍ਰਮੇਯਕਾ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ:

$$4052 = 420 \times 9 + 272$$

ਪਗ 3: ਅਸੀਂ ਨਵੇਂ ਭਾਜਕ 420 ਅਤੇ ਨਵੇਂ ਬਾਕੀ 272 ਨੂੰ ਲੈ ਕੇ ਯੁਕਲਿਡ ਪ੍ਰਮੇਯਕਾ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ, ਹੇਠਾਂ ਅਨੁਸਾਰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ:

$$420 = 272 \times 1 + 148$$

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਨਵੇਂ ਭਾਜਕ 272 ਅਤੇ ਨਵੇਂ ਬਾਕੀ 148 'ਤੇ ਯੁਕਲਿਡ ਪ੍ਰਮੇਯਕਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ:

$$272 = 148 \times 1 + 124$$

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਨਵੇਂ ਭਾਜਕ 148 ਅਤੇ ਨਵੇਂ ਬਾਕੀ 124 'ਤੇ ਯੁਕਲਿਡ ਪ੍ਰਮੇਯਕਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ:

$$148 = 124 \times 1 + 24$$

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਨਵੇਂ ਭਾਜਕ 124 ਅਤੇ ਨਵੇਂ ਬਾਕੀ 24 'ਤੇ ਯੁਕਲਿਡ ਪ੍ਰਮੇਯਕਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ:

$$124 = 24 \times 5 + 4$$

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਨਵੇਂ ਭਾਜਕ 24 ਅਤੇ ਨਵੇਂ ਬਾਕੀ 4 'ਤੇ ਯੁਕਲਿਡ ਪ੍ਰਮੇਯਕਾ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ:

$$24 = 4 \times 6 + 0$$

ਇੱਥੇ ਬਾਕੀ ਸਿਫ਼ਰ (0) ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋ ਗਿਆ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਪ੍ਰਕਿਰਿਆ ਇੱਥੇ ਖਤਮ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਕਿਉਂਕਿ ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਭਾਜਕ 4 ਹੈ। ਇਸ ਲਈ 12576 ਅਤੇ 4052 ਦਾ *H.C.F* 4 ਹੈ।

ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ HCF (24, 4) = HCF (124, 24) = HCF (148, 124) = HCF (272, 148) = HCF (420, 272) = HCF (4052, 420) = HCF (12576, 4052) ਹੈ।

ਯੁਕਲਿਡ ਵੰਡ ਐਲਗੋਰਿਥਮ ਨਾ ਸਿਰਫ ਵੱਡੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਮ.ਸ.ਵ *(H.C.F)* ਪਤਾ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਉਪਯੋਗੀ ਹੈ, ਬਲਕਿ ਇਹ ਇਸ ਲਈ ਵੀ ਮਹੱਤਵਪੂਰਣ ਹੈ ਕਿ ਇਹ ਉਹਨਾਂ ਐਲਗੋਰਿਥਮ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਹੈ, ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਦਾ ਕੰਪਿਊਟਰ ਦੇ ਇੱਕ ਪ੍ਰੋਗ੍ਰਾਮ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤਾ ਗਿਆ।

ਟਿੱਪਣੀ:

1. ਯੁਕਲਿਡ ਵੰਡ ਪ੍ਰਮੇਯਕਾ ਅਤੇ ਯੁਕਲਿਡ ਵੰਡ ਐਲਗੋਰਿਥਮ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਜੁੜੇ ਹੋਏ ਹਨ ਕਿ ਲੋਕ ਆਮ ਤੌਰ ਤੇ ਯੁਕਲਿਡ ਵੰਡ ਪ੍ਰਮੇਯਕਾ ਨੂੰ ਹੀ ਯੁਕਲਿਡ ਵੰਡ ਐਲਗੋਰਿਥਮ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।
2. ਭਾਵੇਂ ਯੁਕਲਿਡ ਵੰਡ ਪ੍ਰਮੇਯਕਾ/ਐਲਗੋਰਿਥਮ ਨੂੰ ਸਿਰਫ਼ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਲਈ ਹੀ ਲਿਖਿਆ ਗਿਆ ਹੈ, ਪ੍ਰੰਤੂ ਇਹ ਸਾਰੀਆਂ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ (ਸਿਫ਼ਰ ਨੂੰ ਛੱਡ ਕੇ ਭਾਵ $b \neq 0$)

ਦੇ ਲਈ ਲਾਗੂ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਭਾਵੇਂ, ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ ਇਸ ਤੱਥ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਨਹੀਂ ਕਰਾਂਗੇ।

ਯੁਕਲਿਡ ਵੰਡ ਪ੍ਰਮੇਯਕਾ/ਐਲਗੋਰਿਥਮ ਦੇ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਗੁਣਾਂ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਬਹੁਤ ਸਾਰੀਆਂ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾਵਾਂ ਹਨ। ਅਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾਵਾਂ ਦੇ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਣ ਹੇਠਾਂ ਦੇ ਰਹੇ ਹਾਂ:

ਉਦਾਹਰਣ 2 : ਦਿਖਾਉ ਕਿ ਹਰ ਇੱਕ ਧਨਾਤਮਕ ਜਿਸਤ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ $2q$ ਦੇ ਰੂਪ ਦੀ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਹਰ ਇੱਕ ਧਨਾਤਮਕ ਟਾਂਕ ਸੰਪੂਰਨ $2q + 1$ ਦੇ ਰੂਪ ਦੀ ਹੁੰਦੀ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ q ਕੋਈ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਹੱਲ: ਮੰਨ ਲਉ a ਕੋਈ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਅਤੇ $b = 2$ ਹੈ। ਹੁਣ ਯੁਕਲਿਡ ਵੰਡ ਐਲਗੋਰਿਥਮ ਤੋਂ, ਕਿਸੇ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ $q \geq 0$ ਦੇ ਲਈ $a = 2q + r$ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ $r = 0$ ਹੈ ਜਾਂ $r = 1$ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ $0 \leq r < 2$ ਇਸ ਲਈ $a = 2q$ ਜਾਂ $a = 2q + 1$ ਹੈ।

ਜੇਕਰ $a = 2q$ ਹੈ ਤਾਂ ਇਹ ਇੱਕ ਜਿਸਤ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ। ਨਾਲ ਹੀ ਇੱਕ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਜਾਂ ਤਾਂ ਜਿਸਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਾਂ ਟਾਂਕ। ਇਸ ਲਈ ਕੋਈ ਵੀ ਧਨਾਤਮਕ ਟਾਂਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ $2q + 1$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਹੋਵੇਗੀ।

ਉਦਾਹਰਣ 3 : ਦਿਖਾਉ ਕਿ ਇੱਕ ਧਨਾਤਮਕ ਟਾਂਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ $4q + 1$ ਜਾਂ $4q + 3$ ਦੇ ਰੂਪ ਦੀ ਹੁੰਦੀ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ q ਇੱਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਹੱਲ: ਆਉ ਇੱਕ ਧਨਾਤਮਕ ਟਾਂਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ a ਨੂੰ ਲੈ ਕੇ ਸਵਾਲ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨਾ ਸ਼ੁਰੂ ਕਰੀਏ। ਅਸੀਂ a ਅਤੇ $b = 4$ 'ਤੇ ਵੰਡ ਐਲਗੋਰਿਥਮ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਕਿਉਂਕਿ $0 \leq r < 4$ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਸੰਭਾਵਿਤ ਬਾਕੀ 0, 1, 2 ਅਤੇ 3 ਹਨ।

ਭਾਵ a ਸੰਖਿਆਵਾਂ $4q$, $4q + 1$, $4q + 2$ ਜਾਂ $4q + 3$ ਦੇ ਰੂਪ ਦਾ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ ਜਿੱਥੇ q ਭਾਗਫਲ ਹੈ। ਕਿਉਂਕਿ a ਇੱਕ ਟਾਂਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਇਹ $4q$ ਅਤੇ $4q + 2$ ਦੇ ਰੂਪ ਦਾ ਨਹੀਂ ਹੋ ਸਕਦਾ (ਕਿਉਂਕਿ ਦੋਵੇਂ 2 'ਤੇ ਵੰਡੇ ਜਾ ਸਕਦੇ ਹਨ)।

ਇਸ ਲਈ, ਕੋਈ ਵੀ ਧਨਾਤਮਕ ਟਾਂਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ $4q + 1$ ਜਾਂ $4q + 3$ ਦੇ ਰੂਪ ਦੀ ਹੋਵੇਗੀ।

ਉਦਾਹਰਣ 4: ਇੱਕ ਮਠਿਆਈ ਵਿਕ੍ਰੇਤਾ ਕੋਲ 420 ਕਾਜੂ ਦੀਆਂ ਬਰਫੀਆਂ ਅਤੇ 130 ਬਦਾਮ ਦੀਆਂ ਬਰਫੀਆਂ ਹਨ। ਉਹ ਉਹਨਾਂ ਦੀਆਂ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਢੇਰੀਆਂ ਬਣਾਉਣਾ ਚਾਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ ਹਰ ਇੱਕ ਢੇਰੀ ਵਿੱਚ ਬਰਫੀਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਬਰਾਬਰ ਰਹੇ ਅਤੇ ਇਹ ਢੇਰੀਆਂ ਬਰਫੀ ਦੀ ਪਰਾਤ ਵਿੱਚ ਘੱਟ ਤੋਂ ਘੱਟ ਸਥਾਨ ਘੇਰਨ। ਇਸ ਕੰਮ ਲਈ ਹਰ ਇੱਕ ਢੇਰੀ ਵਿੱਚ ਕਿੰਨੀਆਂ ਬਰਫੀਆਂ ਰੱਖੀਆਂ ਜਾ ਸਕਦੀਆਂ ਹਨ?

ਹੱਲ: ਇਹ ਕੰਮ ਜਾਂਚ ਅਤੇ ਭੁੱਲ ਵਿਧੀ ਨਾਲ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਪ੍ਰੰਤੂ ਇਸ ਨੂੰ ਲੜੀਬੱਧ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ HCF (420, 130) ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਫਿਰ, ਇਸ ਮ.ਸ.ਵ (H.C.F) ਤੋਂ ਹਰ ਇੱਕ ਢੇਰੀ ਵਿੱਚ ਰੱਖੀਆਂ ਜਾ ਸਕਣ ਵਾਲੀਆਂ ਬਰਫੀਆਂ ਦੀ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਗਿਣਤੀ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਵੇਗੀ। ਜਿਸ ਨਾਲ ਢੇਰੀਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਘੱਟ ਤੋਂ ਘੱਟ ਹੋਵੇਗੀ ਅਤੇ ਪਰਾਤ ਵਿੱਚ ਇਹ ਬਰਫੀਆਂ ਘੱਟ ਤੋਂ ਘੱਟ ਸਥਾਨ ਘੇਰਣਗੀਆਂ।

ਆਉ ਹੁਣ ਯੁਕਲਿਡ ਐਲਗੋਰਿਥਮ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ 420 ਅਤੇ 130 ਦਾ ਮ.ਸ.ਵ (H.C.F) ਪਤਾ ਕਰੀਏ।

$$420 = 130 \times 3 + 30$$
$$130 = 30 \times 4 + 10$$
$$30 = 10 \times 3 + 0$$

ਇਸ ਲਈ, 420 ਅਤੇ 130 ਦਾ HCF 10 ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ, ਹਰ ਇੱਕ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੀ ਬਰਫੀ ਦੇ ਲਈ ਮਠਿਆਈ ਵਿਕ੍ਰੇਤਾ ਦਸ-ਦਸ ਦੀਆਂ ਢੇਰੀਆਂ ਬਣਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 1.1

1. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਮ.ਸ.ਵ (H.C.F) ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਯੂਕਲਿਡ ਵੰਡ ਐਲਗੋਰਿਥਮ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰੋ:
   (i) 135 ਅਤੇ 225 (ii) 196 ਅਤੇ 38220 (iii) 867 ਅਤੇ 255
2. ਦਿਖਾਉ ਕਿ ਕੋਈ ਵੀ ਧਨਾਤਮਕ ਟਾਂਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ $6q + 1$ ਜਾਂ $6q + 3$ ਜਾਂ $6q + 5$ ਦੇ ਰੂਪ ਦੀ ਹੁੰਦੀ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ q ਕੋਈ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।
3. ਕਿਸੇ ਪਰੇਡ ਵਿੱਚ 616 ਆਦਮੀਆਂ ਵਾਲੀ ਇੱਕ ਸੈਨਾ (ਆਰਮੀ) ਦੀ ਟੁੱਕੜੀ ਨੇ 32 ਆਦਮੀਆਂ ਵਾਲੇ ਇੱਕ ਸੈਨਾ ਬੈਂਡ ਦੇ ਪਿੱਛੇ ਮਾਰਚ ਕਰਨਾ ਹੈ। ਦੋਹਾਂ ਸਮੂਹਾਂ ਨੇ ਬਰਾਬਰ ਗਿਣਤੀ ਵਾਲੇ ਸਤੰਭਾਂ (Columns) ਵਿੱਚ ਮਾਰਚ ਕਰਨਾ ਹੈ। ਇਹਨਾਂ ਸਤੰਭਾਂ (Columns) ਦੀ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਗਿਣਤੀ ਕਿੰਨੀ ਹੈ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਇਹ ਮਾਰਚ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਨ?
4. ਯੂਕਲਿਡ ਵੰਡ ਪ੍ਰਮੇਯਕਾ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ ਦਿਖਾਉ ਕਿ ਕਿਸੇ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਵਰਗ, ਕਿਸੇ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ m ਦੇ ਲਈ $3m$ ਜਾਂ $3m + 1$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।
   [ਸੰਕੇਤ : ਮੰਨ ਲਉ x ਕੋਈ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ। ਹੁਣ ਇਹ $3q$, $3q + 1$ ਜਾਂ $3q + 2$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ। ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰ ਇੱਕ ਦਾ ਵਰਗ ਕਰੋ ਅਤੇ ਦਿਖਾਉ ਕਿ ਇਹਨਾਂ ਵਰਗਾਂ ਨੂੰ $3m$ ਜਾਂ $3m + 1$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।]
5. ਯੂਕਲਿਡ ਵੰਡ ਪ੍ਰਮੇਯਕਾ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ ਦਿਖਾਉ ਕਿ ਕਿਸੇ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਘਣ $9m$, $9m + 1$ ਜਾਂ $9m + 8$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

1.3 ਅੰਕਗਣਿਤ ਦੀ ਮੂਲਭੂਤ ਪ੍ਰਮੇਯ (Fundamental Theorem of Arithmetic)

ਤੁਸੀਂ ਪਿਛਲੀਆਂ ਜਮਾਤਾਂ ਵਿੱਚ ਦੇਖ ਚੁੱਕੇ ਹੋ ਕਿ ਕਿਸੇ ਵੀ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਿਕ ਸੰਖਿਆ ਨੂੰ ਉਸਦੇ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ 'ਤੇ $2 = 2$, $4 = 2 \times 2$, $253 = 11 \times 23$ ਆਦਿ। ਆਉ ਹੁਣ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਉੱਤੇ ਇੱਕ ਹੋਰ ਦ੍ਰਿਸ਼ਟੀਕੋਣ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ। ਭਾਵ ਇਹ ਦੇਖੀਏ ਕਿ ਕੀ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਗੁਣਾ ਕਰਕੇ ਇੱਕ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਿਕ ਸੰਖਿਆ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ? ਆਉ ਇਸ ਦੀ ਜਾਂਚ ਕਰੀਏ।

ਕੁਝ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ, ਮੰਨ ਲਉ 2, 3, 7, 11 ਅਤੇ 23 ਦਾ ਇੱਕ ਸੰਗ੍ਰਹਿ ਲਉ। ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕੁਝ ਜਾਂ ਸਾਰੀਆਂ ਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਗੁਣਾ ਕਰੀਏ (ਅਸੀਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਜਿੰਨੀ ਵਾਰ ਚਾਹੀਏ ਲੈ ਸਕਦੇ ਹਾਂ) ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਇੱਕ ਵੱਡਾ ਸਾਰਾ ਸੰਗ੍ਰਹਿ ਬਣਾ ਸਕਦੇ

ਹਾਂ (ਅਸਲ ਵਿੱਚ, ਅਸੀਮਿਤ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਅਨੇਕ)। ਆਉ ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕੁਝ ਦੀ ਸੂਚੀ ਬਣਾਈਏ :

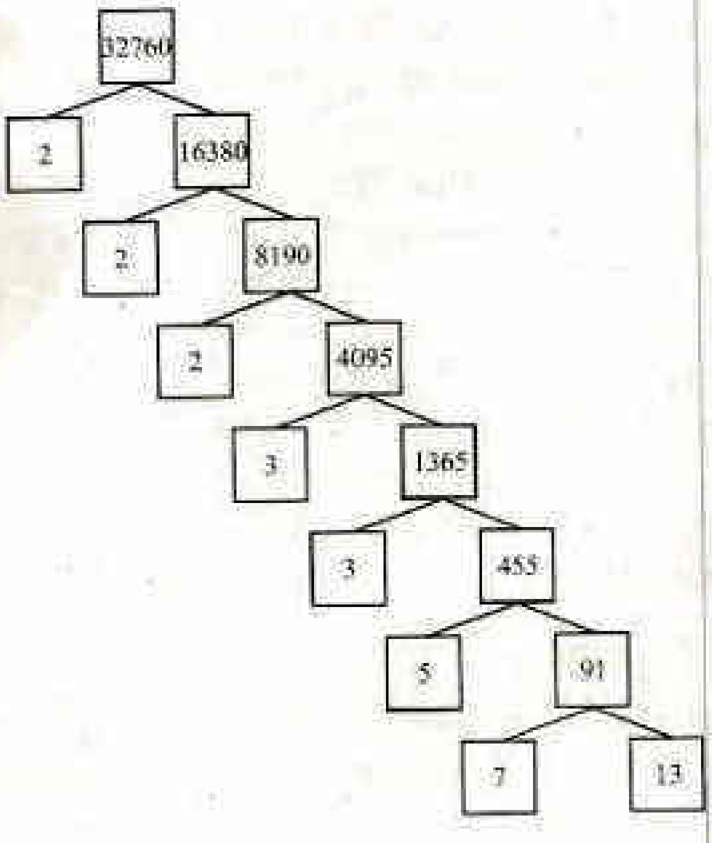
$7 \times 11 \times 23 = 1771$, $3 \times 7 \times 11 \times 23 = 5313$,

$2 \times 3 \times 7 \times 11 \times 23 = 10626$, $2^3 \times 3 \times 7^3 = 8232$,

$2^2 \times 3 \times 7 \times 11 \times 23 = 21252$ ਆਦਿ।

ਹੁਣ ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਤੁਹਾਡੇ ਸੰਗ੍ਰਿਹ ਵਿੱਚ, ਸਾਰੀਆਂ ਸੰਭਵ ਅਭਾਜ (prime) ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਸ਼ਾਮਿਲ ਹਨ। ਇਸ ਸੰਗ੍ਰਿਹ ਦੇ ਮਾਪ (size) ਬਾਰੇ ਤੁਸੀਂ ਕੀ ਅੰਦਾਜ਼ਾ ਲਗਾ ਸਕਦੇ ਹੋ? ਕੀ ਇਸ ਵਿੱਚ ਸੀਮਿਤ (finites) ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ ਜਾਂ ਅਸੀਮਿਤ (Infinite)? ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਅਣਗਿਣਤ (Infinites) ਹਨ। ਸੋ ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਸਾਰੀਆਂ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਸਾਰੇ ਸੰਭਵ ਤਰੀਕਿਆਂ ਨਾਲ ਇਕੱਠਾ ਕਰੀਏ ਤਾਂ ਸਾਨੂੰ ਅਣਗਿਣਤ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਅਤੇ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲਾਂ ਦਾ ਅਣਗਿਣਤ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਸੰਗ੍ਰਿਹ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋ ਜਾਵੇਗਾ। ਹੁਣ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਇਹ ਹੈ ਕਿ ਕੀ ਅਸੀਂ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸਾਰੀਆਂ ਭਾਜ (composite) ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ? ਤੁਸੀਂ ਕੀ ਸੋਚਦੇ ਹੋ? ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਇਹ ਸੋਚਦੇ ਹੋ ਕਿ ਕੋਈ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਭਾਜ ਸੰਖਿਆ ਹੋ ਸਕਦੀ ਹੈ ਜੋ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀਆਂ ਘਾਤਾਂ (powers) ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ ਨਾ ਹੋਵੇ ? ਇਸਦਾ ਉੱਤਰ ਦੇਣ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਆਉ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨਖੰਡਨ ਕਰੀਏ, ਭਾਵ ਅਸੀਂ ਹੁਣ ਤੱਕ ਜੋ ਕੀਤਾ ਹੈ ਉਸਦਾ ਉਲਟਾ ਕਰੀਏ।

ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਗੁਣਨਖੰਡ ਰੁੱਖ (factor tree) ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਾਂਗੇ ਜਿਸ ਤੋਂ ਤੁਸੀਂ ਪਹਿਲਾਂ ਤੋਂ ਹੀ ਜਾਣੂ ਹੋ। ਆਉ ਇੱਕ ਵੱਡੀ ਸੰਖਿਆ ਮੰਨ ਲਉ 32760 ਲਈਏ ਅਤੇ ਇਸਦੇ ਗੁਣਨਖੰਡ ਹੇਠਾਂ ਦਿਖਾਏ ਅਨੁਸਾਰ ਕਰੀਏ :



ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ, ਅਸੀਂ 32760 ਨੂੰ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਗੁਣਨਖੰਡਿਤ ਕਰ ਲਿਆ ਹੈ ਜੋ $2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7 \times 13$ ਹੈ। ਭਾਵ $32760 = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7 \times 13$ ਹੈ, ਜੋ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀਆਂ ਘਾਤਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਹੈ। ਆਉ ਇੱਕ ਹੋਰ ਸੰਖਿਆ ਮੰਨ ਲਉ 123456789 ਲੈ ਕੇ ਇਸ ਦੇ ਗੁਣਨਖੰਡ ਲਿਖੀਏ। ਇਸ ਨੂੰ $3^2 \times 3803 \times 3607$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਬੇਸ਼ਕ ਤੁਹਾਨੂੰ ਇਸਦੀ ਜਾਂਚ ਕਰਨੀ ਹੋਵੇਗੀ ਕਿ 3803 ਅਤੇ 3607 ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ (ਕੁਝ ਹੋਰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਲੈ ਕੇ ਤੁਸੀਂ ਆਪ ਵੀ ਕਰਨ ਦੀ ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰੋ) ਇਸ ਤੋਂ ਸਾਨੂੰ ਇਹ ਅਨੁਮਾਨ (conjecture) ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ ਹਰ ਇੱਕ ਭਾਜ ਸੰਖਿਆ ਨੂੰ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀਆਂ ਘਾਤਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਇਹ ਕਥਨ ਸੱਚ ਹੈ ਅਤੇ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਅਧਿਐਨ ਵਿੱਚ ਇਹ ਮੂਲਰੂਪ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਮਹੱਤਵਪੂਰਣ ਸਥਾਨ ਰੱਖਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਕਾਰਣ ਇਹ ਕਥਨ **ਅੰਕਗਣਿਤ ਦੀ ਮੂਲਭੂਤ ਪ੍ਰਮੇਯ (Fundamental Theorem of Arithmetic)** ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਆਉ ਇਸ ਪਰਿਮੇਯ ਨੂੰ ਉਪਚਾਰਿਕ (formal) ਤੌਰ 'ਤੇ ਪ੍ਰਕਾਸ਼ਿਤ ਕਰੀਏ।

ਪ੍ਰਮੇਯ 1.12 (ਅੰਕਗਣਿਤ ਦੀ ਮੂਲਭੂਤ ਪ੍ਰਮੇਯ) ਹਰ ਇੱਕ ਭਾਜ ਸੰਖਿਆ (composite number) ਨੂੰ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ (prime numbers) ਦੇ ਇੱਕ ਗੁਣਨਫਲ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ (ਦਰਸਾਇਆ) ਗੁਣਨਖੰਡਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਹ ਗੁਣਨਖੰਡਨ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡਾਂ ਦੇ ਆਉਣ ਵਾਲੇ ਤਰਤੀਬ (ਕ੍ਰਮ) (order) ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ ਵਿਲੱਖਣ (unique) ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਅੰਕਗਣਿਤ ਦੀ ਮੂਲ ਭੂਤ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਸਿੱਧ ਹੋਣ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਪ੍ਰਮੇਯ 1.2 ਦਾ ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਵਰਨਣ ਯੁਕਲਿਡ ਦੇ ਐਲੀਮੈਂਟਸ ਦੀ ਪੁਸਤਕ IX ਵਿੱਚ ਸਾਧਯ (proposition) 14 ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਹੋਇਆ ਸੀ। ਪ੍ਰੰਤੂ ਇਸਦਾ ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਸਬੂਤ ਕਾਰਲ ਫ੍ਰੈਡਰਿਕ ਗਾੱਸ *(Carl Friedrich Guass)* ਦੀ ਆਪਣੀ ਲਿਖਤ ਡਿਸਕਿਉਸ਼ਸ ਅਰਥਮੇਟਿਕੀ *(Disquisitions Arithmeticae)* ਵਿੱਚ ਸੀ।

ਕਾਰਲ ਫ੍ਰੈਡਰਿਕ ਗਾੱਸ ਨੂੰ ਆਮ ਤੌਰ 'ਤੇ 'ਗਣਿਤ ਵਿਗਿਆਨੀਆਂ ਦੇ ਰਾਜ ਕੁਮਾਰ' ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਜਾਣਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸਦਾ ਨਾਮ ਹਰ ਸਮੇਂ ਪ੍ਰਸਿੱਧ ਰਹੇ ਤਿੰਨ ਮਹਾਨਤਮ ਗਣਿਤ ਵਿਗਿਆਨੀਆਂ ਵਿੱਚ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਆਰਕੀਮੀਡਿਜ (Archimedes) ਅਤੇ ਨਿਊਟਨ (Newton) ਵੀ ਸ਼ਾਮਿਲ ਹਨ। ਇਹਨਾਂ ਦਾ ਗਣਿਤ ਅਤੇ ਵਿਗਿਆਨ ਦੋਹਾਂ ਵਿੱਚ ਹੀ ਮੌਲਿਕ ਯੋਗਦਾਨ ਹੈ।

ਕਾਰਲ ਫ੍ਰੈਡਰਿਕ ਗਾੱਸ
(1777 – 1855)

ਅੰਕਗਣਿਤ ਦੀ ਮੂਲਭੂਤ ਪ੍ਰਮੇਯ ਕਹਿੰਦੀ ਹੈ ਕਿ ਹਰ ਇੱਕ ਭਾਜ ਸੰਖਿਆ ਨੂੰ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਗੁਣਨਖੰਡਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਇਹ ਹੋਰ ਵੀ ਕੁਝ ਕਹਿੰਦੀ ਹੈ। ਇਹ ਕਹਿੰਦੀ ਹੈ ਕਿ ਇੱਕ ਭਾਜ ਸੰਖਿਆ ਨੂੰ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ, ਇੱਕ ਬਿਨਾਂ ਇਹ ਧਿਆਨ ਦਿੱਤਿਆਂ ਕਿ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਕਿਸ ਤਰਤੀਬ (ਕ੍ਰਮ)

(order) ਵਿੱਚ ਹਨ, ਇੱਕ ਵਿਲੱਖਣ ਤਰੀਕੇ (unique way) ਨਾਲ ਗੁਣਨਖੰਡਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਭਾਵ ਜੇਕਰ ਕੋਈ ਭਾਜ ਸੰਖਿਆ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਹੈ ਤਾਂ ਉਸ ਨੂੰ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਣ ਦਾ ਸਿਰਫ਼ ਇੱਕ ਹੀ ਤਰੀਕਾ ਹੈ, ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਆਉਣ ਵਾਲੇ ਕ੍ਰਮ 'ਤੇ ਕੋਈ ਵਿਚਾਰ ਨਹੀਂ ਕਰਦੇ। ਇਸ ਲਈ ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ 'ਤੇ ਅਸੀਂ $2 \times 3 \times 5 \times 7$ ਨੂੰ ਉਹ ਹੀ ਮੰਨਦੇ ਹਾਂ ਜੋ $3 \times 5 \times 7 \times 2$, ਨੂੰ ਮੰਨਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ, ਇਹਨਾਂ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਦੇ ਕਿਸੇ ਹੋਰ ਕ੍ਰਮ ਨੂੰ ਵੀ ਅਸੀਂ $2 \times 3 \times 5 \times 7$ ਵਰਗਾ ਹੀ ਮੰਨਾਂਗੇ। ਇਸ ਤੱਥ ਨੂੰ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਅਨੁਸਾਰ ਲਿਖਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ :

ਇੱਕ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਿਕ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡਣ, ਉਸਦੇ ਗੁਣਨਖੰਡਾਂ ਦੀ ਤਰਤੀਬ (ਕ੍ਰਮ) ਨੂੰ ਛੱਡਦੇ ਹੋਏ ਵਿਲੱਖਣ (unique) ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਵਿਆਪਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ, ਜਦੋਂ ਸਾਨੂੰ ਇੱਕ ਭਾਜ ਸੰਖਿਆ x ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਉਸਨੂੰ $x = p_1 p_2 \ldots p_n$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਗੁਣਨਖੰਡਿਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ, ਜਿੱਥੇ $p_1, p_2, \ldots, p_n$ ਆਦਿ ਵੱਧਦੇ ਕ੍ਰਮ ਵਿੱਚ ਲਿਖੀਆਂ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ। ਭਾਵ $p_1 \leq p_2 \leq \ldots \leq p_n$ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਇੱਕੋ ਜਿਹੀਆਂ (ਬਰਾਬਰ) ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਇਕੱਠਾ ਕਰ ਲਈਏ, ਤਾਂ ਸਾਨੂੰ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀਆਂ ਘਾਤਾਂ (powers) ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋ ਜਾਂਦੀਆਂ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ 'ਤੇ, $32760 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7 \times 13 = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7 \times 13$

ਇੱਕ ਵਾਰ ਇਹ ਨਿਰਣਾ ਲੈਣ ਤੋਂ ਬਾਦ ਕਿ ਗੁਣਨਖੰਡਾਂ ਦੀ ਇਹ ਤਰਤੀਬ ਵਧਦੇ ਕ੍ਰਮ ਅਨੁਸਾਰ ਹੋਵੇਗੀ ਤਾਂ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡ ਵਿਲੱਖਣ (unique) ਹੋਣਗੇ।

ਅੰਕਗਣਿਤ ਦੀ ਮੂਲਭੂਤ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦੇ ਗਣਿਤ ਅਤੇ ਹੋਰ ਖੇਤਰਾਂ ਵਿੱਚ ਹੀ ਅਨੇਕਾਂ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾਵਾਂ ਹਨ। ਆਉ ਇਹਨਾਂ ਦੀਆਂ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰੀਏ।

ਉਦਾਹਰਣ 5 : ਸੰਖਿਆਵਾਂ 4^n 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ, ਜਿੱਥੇ n ਇੱਕ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਿਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ। ਜਾਂਚ ਕਰੋ ਕਿ ਕੀ n ਦਾ ਕੋਈ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦਾ ਮੁੱਲ ਹੈ ਜਿਸ ਨਾਲ 4^n ਅੰਕ ਸਿਫ਼ਰ (0) 'ਤੇ ਸਮਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ n ਦੇ ਲਈ ਸੰਖਿਆ 4^n ਸਿਫ਼ਰ 'ਤੇ ਸਮਾਪਤ ਹੋਵੇਗੀ ਤਾਂ ਇਹ 5 ਨਾਲ ਭਾਜਯੋਗ ਹੋਵੇਗੀ। ਭਾਵ 4^n ਦੇ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡਣ ਵਿੱਚ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆ 5 ਆਉਣੀ ਚਾਹੀਦੀ ਹੈ। ਇਹ ਸੰਭਵ ਨਹੀਂ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ $4^n = (2)^{2n}$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ 4^n ਦੇ ਗੁਣਨਖੰਡਣ ਵਿੱਚ ਕੇਵਲ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆ 2 ਹੀ ਆ ਸਕਦੀ ਹੈ। ਅੰਕਗਣਿਤ ਦੀ ਮੂਲਭੂਤ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦੀ ਵਿਲੱਖਣਤਾ ਸਾਨੂੰ ਇਹ ਯਕੀਨ ਦਿਵਾਉਂਦੀ ਹੈ ਕਿ 4^n ਦੇ ਗੁਣਨਖੰਡਣ ਵਿੱਚ 2 ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ ਹੋਰ ਕੋਈ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਕੋਈ ਸੰਖਿਆ n ਨਹੀਂ ਹੈ, ਜਿਸਦੇ ਲਈ 4^n ਅੰਕ ਸਿਫ਼ਰ 0 'ਤੇ ਸਮਾਪਤ ਹੋਵੇਗੀ।

ਤੁਸੀਂ ਪਿਛਲੀਆਂ ਜਮਾਤਾਂ ਵਿੱਚ, ਇਹ ਪੜ੍ਹ ਚੁੱਕੇ ਹੋ ਕਿ ਦੋ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਮ.ਸ.ਵ (H.C.F) ਅਤੇ ਲ.ਸ.ਵ (L.C.M) ਅੰਕਗਣਿਤ ਦੀ ਮੂਲਭੂਤ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪਤਾ ਕੀਤੇ ਜਾਂਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਰਦੇ ਸਮੇਂ, ਇਸ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦੇ ਨਾਮ ਦਾ ਜ਼ਿਕਰ ਨਹੀਂ ਕੀਤਾ

ਗਿਆ ਸੀ। ਇਸ ਤਰੀਕੇ ਨੂੰ *ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡਨ ਵਿਧੀ (prime factorisation method)* ਵੀ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਆਉ ਇੱਕ ਉਦਾਹਰਣ ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਨਾਲ ਇਸ ਵਿਧੀ ਨੂੰ ਫਿਰ ਤੋਂ ਯਾਦ ਕਰੀਏ।

ਉਦਾਹਰਣ 6 : ਸੰਖਿਆਵਾਂ 6 ਅਤੇ 20 ਦਾ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡਣ ਵਿਧੀ ਨਾਲ ਮ.ਸ.ਵ (H.C.F) ਅਤੇ ਲ.ਸ.ਵ (L.C.M) ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ $6 = 2^1 \times 3^1$ ਅਤੇ $20 = 2 \times 2 \times 5 = 2^2 \times 5^1$ ਹੈ।

ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਿ ਤੁਸੀਂ ਪਿਛਲੀਆਂ ਜਮਾਤਾਂ ਵਿੱਚ ਕਰ ਚੁੱਕੇ ਹੋ ਤੁਸੀਂ ਮ.ਸ.ਵ. (H.C.F) (6, 20) = 2 ਅਤੇ ਲ.ਸ.ਵ. (L.C.M.) (6, 20) = $2 \times 2 \times 3 \times 5 = 60$ ਕੱਢ ਸਕਦੇ ਹੋ।

ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ HCF (6, 20) = 2^1 = **ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਹਰ ਇੱਕ ਸਾਂਝੇ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡ ਦੀ ਸਭ ਤੋਂ ਛੋਟੀ ਘਾਤ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ ਅਤੇ**

LCM (6, 20) = $2^2 \times 3^1 \times 5^1$ = **ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਵਿੱਚ ਆਏ ਹਰ ਇੱਕ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡ ਦੀ ਸਭ ਤੋਂ ਵੱਡੀਆਂ ਘਾਤਾਂ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ**

ਉਪਰੋਕਤ ਉਦਾਹਰਣ ਵਿੱਚੋਂ ਤੁਸੀਂ ਇਹ ਦੇਖ ਲਿਆ ਹੋਵੇਗਾ ਕਿ HCF (6, 20) × LCM (6, 20) = 6 × 20 ਹੈ। ਅਸਲ ਵਿੱਚ, ਅੰਕਗਣਿਤ ਦੀ ਮੂਲਭੂਤ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ ਅਸੀਂ ਇਸਦੀ ਜਾਂਚ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਕਿਸੇ ਦੋ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ a ਅਤੇ b ਦੇ ਲਈ **HCF (a, b) × LCM $(a, b) = a \times b$** ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਸਿੱਟੇ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ ਅਸੀਂ ਦੋ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ *LCM* ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ, ਜੇਕਰ ਉਹਨਾਂ ਦਾ ਮ.ਸ.ਵ *(H.C.F)* ਪਹਿਲਾਂ ਤੋਂ ਹੀ ਪਤਾ ਹੋਵੇ।

ਉਦਾਹਰਣ 7 : ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡਣ ਵਿਧੀ ਦੁਆਰਾ 96 ਅਤੇ 404 ਦਾ HCF ਪਤਾ ਕਰੋ ਅਤੇ ਫਿਰ ਇਸ ਦਾ LCM ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ: 96 ਅਤੇ 404 ਦੇ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡਣ ਤੋਂ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ

$$96 = 2^5 \times 3,\ 404 = 2^2 \times 101$$

ਇਸ ਲਈ, ਇਹਨਾਂ ਦੋਹਾਂ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਮ.ਸ.ਵ ਭਾਵ HCF (96,404) = $2^2 = 4$

ਨਾਲ ਹੀ
$$\text{LCM}(96, 404) = \frac{96 \times 404}{\text{HCF}(96, 404)} = \frac{96 \times 404}{4} = 9696$$

ਉਦਾਹਰਣ 8 : ਸੰਖਿਆਵਾਂ 6, 72 ਅਤੇ 120 ਦਾ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡਣ ਵਿਧੀ ਨਾਲ ਮ.ਸ.ਵ (H.C.F) ਅਤੇ ਲ.ਸ.ਵ (L.C.M) ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਹੈ :

$$6 = 2 \times 3,\ 72 = 2^3 \times 3^2 \text{ ਅਤੇ } 120 = 2^3 \times 3 \times 5$$

2^1 ਅਤੇ 3^1 ਹਰ ਇੱਕ ਸਾਂਝੇ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡਾਂ ਦੀਆਂ ਸਭ ਤੋਂ ਛੋਟੀਆਂ ਘਾਤਾਂ ਹਨ।

ਇਸ ਲਈ, HCF (6, 72, 120) = $2^1 \times 3^1 = 2 \times 3 = 6$

2^3, 3^2 ਅਤੇ 5^1 ਹਰ ਇੱਕ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡ ਦੀ ਸਭ ਤੋਂ ਵੱਡੀ ਘਾਤ ਹੈ, ਜੋ ਤਿੰਨਾਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ, $LCM\ (6, 72, 120) = 2^3 \times 3^2 \times 5^1 = 360$

ਟਿੱਪਣੀ : ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ $6 \times 72 \times 120 \neq HCF\ (6, 72, 120) \times LCM\ (6, 72, 120)$, ਭਾਵ ਤਿੰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ ਉਹਨਾਂ ਦੇ HCF ਅਤੇ LCM ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ।

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 1.2

1. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖੋ:

   (i) 140 (ii) 156 (iii) 3825 (iv) 5005 (v) 7429

2. ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖਿਆਂ ਜੋੜਿਆਂ ਦਾ HCF ਅਤੇ LCM ਪਤਾ ਕਰੋ ਅਤੇ ਇਸ ਦੀ ਜਾਂਚ ਕਰੋ ਕਿ ਦੋ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ $= HCF \times LCM$ ਹੈ।

   (i) 26 ਅਤੇ 91 (ii) 510 ਅਤੇ 92 (iii) 336 ਅਤੇ 54

3. ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡਣ ਵਿਧੀ ਨਾਲ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ HCF ਅਤੇ LCM ਪਤਾ ਕਰੋ :

   (i) 12, 15 ਅਤੇ 21 (ii) 17, 23 ਅਤੇ 29 (iii) 8, 9 ਅਤੇ 25

4. $HCF\ (306, 657) = 9$ ਦਿੱਤਾ ਹੈ। $LCM\ (306, 657)$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

5. ਜਾਂਚ ਕਰੋ ਕਿ ਕੀ ਕਿਸੇ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਿਕ ਸੰਖਿਆ n ਦੇ ਲਈ ਸੰਖਿਆ 6^n ਅੰਕ ਜ਼ਿਫ਼ਰ (0) 'ਤੇ ਸਮਾਪਤ ਹੋ ਸਕਦੀ ਹੈ।

6. ਵਿਆਖਿਆ ਕਰੋ ਕਿ $7 \times 11 \times 13 + 13$ ਅਤੇ $7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 + 5$ ਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਕਿਉਂ ਹਨ।

7. ਕਿਸੇ ਖੇਡ ਦੇ ਮੈਦਾਨ ਦੇ ਚਾਰੇ ਪਾਸੇ ਇੱਕ ਚੱਕਰਾਕਾਰ ਰਸਤਾ ਹੈ। ਇਸ ਮੈਦਾਨ ਦਾ ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਲਗਾਉਣ ਲਈ ਰਿੰਪੀ ਨੂੰ 18 ਮਿੰਟ ਲਗਦੇ ਹਨ, ਜਦ ਕਿ ਇਸ ਮੈਦਾਨ ਦਾ ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਲਗਾਉਣ ਲਈ ਰਵੀ ਨੂੰ 12 ਮਿੰਟ ਲੱਗਦੇ ਹਨ। ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਉਹ ਦੋਨੋਂ ਇੱਕ ਹੀ ਸਥਾਨ ਅਤੇ ਇੱਕੋ ਹੀ ਸਮੇਂ 'ਤੇ ਚਲਣਾ ਸ਼ੁਰੂ ਕਰਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਇੱਕ ਹੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਜਾਂਦੇ ਹਨ। ਕਿੰਨੇ ਸਮੇਂ ਬਾਅਦ ਉਹ ਦੋਵੇਂ ਸ਼ੁਰੂ ਵਾਲੇ ਸਥਾਨ 'ਤੇ ਦੁਬਾਰਾ ਮਿਲਣਗੇ।

1.4 ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਦੁਹਰਾਈ

IX ਜਮਾਤ ਵਿੱਚ ਤੁਹਾਨੂੰ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਬਹੁਤ ਸਾਰੇ ਗੁਣਾਂ ਤੋਂ ਜਾਣੂ ਕਰਵਾਇਆ ਗਿਆ ਸੀ। ਤੁਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਦੀ ਹੋਂਦ ਬਾਰੇ ਪੜ੍ਹਿਆ ਸੀ ਅਤੇ ਦੇਖਿਆ ਕਿ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪਰਿਮੇਯ ਅਤੇ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਮਿਲਕੇ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ (real numbers) ਬਣਾਉਂਦੀਆਂ ਹਨ। ਤੁਸੀਂ ਇਹ ਵੀ ਸਿੱਖਿਆ ਸੀ ਕਿ ਸੰਖਿਆ ਰੇਖਾ 'ਤੇ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਸਥਾਨ ਨਿਰਧਾਰਤ ਕਰਦੇ ਹਨ। ਫਿਰ ਵੀ ਅਸੀਂ ਇਹ ਸਿੱਧ ਨਹੀਂ ਸੀ ਕੀਤਾ ਕੀ ਇਹ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਅਪਰਿਮੇਯ ਹਨ। ਇਸ ਭਾਗ ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ ਇਹ ਸਿੱਧ ਕਰਾਂਗੇ ਕਿ $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ ਅਤੇ ਆਮ ਰੂਪ ਵਿੱਚ, $\sqrt{p}$

ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ, ਜਿੱਥੇ p ਇਕ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆ ਹੈ। ਆਪਣੇ ਸਬੂਤ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਪ੍ਰਮੇਯਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਾਂਗੇ, ਉਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਹੈ ਅੰਕਗਣਿਤ ਦੀ ਮੂਲਭੂਤ ਪ੍ਰਮੇਯ।

ਯਾਦ ਕਰੋ ਕਿ ਇਹ ਸੰਖਿਆ 's' ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਕਹਾਉਂਦੀ ਹੈ, ਜੇਕਰ ਉਸ ਨੂੰ $\frac{p}{q}$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਨਾ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੋਵੇ, ਜਿੱਥੇ p ਅਤੇ q ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ ਅਤੇ $q \neq 0$ ਹੈ। ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਣ, ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਤੋਂ ਤੁਸੀਂ ਜਾਣੂ ਹੋ, ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੇ ਹਨ:

$$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{15}, \pi, -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, 0.10110111011110\ldots, \text{ ਆਦਿ ।}$$

ਇਸ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਕਿ ਅਸੀਂ $\sqrt{2}$ ਨੂੰ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਸਿੱਧ ਕਰੀਏ, ਸਾਨੂੰ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦੀ ਜਰੂਰਤ ਪਵੇਗੀ, ਇਸਦਾ ਸਬੂਤ ਅੰਕਗਣਿਤ ਦੀ ਮੂਲਭੂਤ ਪਰਿਮੇਯ 'ਤੇ ਅਧਾਰਿਤ ਹੈ।

ਪ੍ਰਮੇਯ 1.3 : ਮੰਨ ਲਉ p ਇੱਕ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆ ਹੈ। ਜੇਕਰ p, a^2 ਨੂੰ ਭਾਗ (ਵੰਡਦੀ) ਕਰਦੀ ਹੈ, ਤਾਂ p, a ਨੂੰ ਵੀ ਭਾਗ ਕਰੇਗੀ। ਇੱਥੇ a ਇੱਕ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

***ਸਬੂਤ :** ਮੰਨ ਲਉ a ਦੇ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡਣ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੇ ਰੂਪ ਦੇ ਹਨ: $a = p_1p_2 \ldots p_n$ ਜਿੱਥੇ $p_1, p_2, \ldots p_n$ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ। ਪਰੰਤੂ ਜਰੂਰੀ ਨਹੀਂ ਕਿ ਇਹ ਅੱਲਗ-ਅੱਲਗ ਹੋਣ।
ਇਸ ਲਈ $a^2 = (p_1p_2 \ldots p_n)(p_1p_2 \ldots p_n) = p_1^2p_2^2 \ldots p_n^2$

ਹੁਣ, ਸਾਨੂੰ ਦਿੱਤਾ ਹੈ ਕਿ p, a^2 ਨੂੰ ਭਾਗ (ਵੰਡਦੀ) ਕਰਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਅੰਕਗਣਿਤ ਦੀ ਮੂਲਭੂਤ ਪ੍ਰਮੇਯ (ਥਿਊਰਮ) ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ p, a^2 ਦਾ ਇੱਕ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡ ਹੈ। ਪ੍ਰੰਤੂ ਅੰਕਗਣਿਤ ਦੀ ਮੂਲਭੂਤ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦੀ ਵਿਲੱਖਣਤਾ ਦੇ ਗੁਣ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨ ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਵੇਗਾ ਕਿ a^2 ਦਾ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡਣ ਕੇਵਲ $p_1, p_2, \ldots, p_n$ ਹੀ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ p ਨੂੰ $p_1, p_2, \ldots, p_n$ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਹੋਣਾ ਹੋਵੇਗਾ। ਹੁਣ, ਕਿਉਂਕਿ $a = p_1 p_2 \ldots p_n$ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ p, a ਨੂੰ ਜ਼ਰੂਰ ਭਾਗ ਕਰੇਗਾ।

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਇਸਦਾ ਸਬੂਤ ਦੇ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $\sqrt{2}$ ਇੱਕ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਇਹ ਸਬੂਤ ਉਸ ਤਕਨੀਕ 'ਤੇ ਅਧਾਰਿਤ ਹੈ ਜਿਸਨੂੰ 'ਸਵੈਵਿਰੋਧ ਰਾਹੀਂ ਸਬੂਤ' (proof by contradiction) ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। (ਇਸ ਤਕਨੀਕ ਦੀ ਵਿਸਥਾਰਿਤ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਚਰਚਾ ਅੰਤਿਕਾ – 1 ਵਿੱਚ ਕੀਤੀ ਗਈ ਹੈ)।

ਪ੍ਰਮੇਯ (ਥਿਊਰਮ) 1.4 : $\sqrt{2}$ ਇੱਕ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਸਬੂਤ : ਅਸੀਂ ਇਸਦੇ ਉਲਟ ਇਹ ਮੰਨ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $\sqrt{2}$ ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ, ਅਸੀਂ ਦੋ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ r ਅਤੇ s ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

* ਇਹ ਪ੍ਰੀਖਿਆ ਦੀ ਦ੍ਰਿਸ਼ਟੀ ਤੋਂ ਨਹੀਂ ਹੈ।

$\sqrt{2} = \frac{r}{s}$ ਹੋਵੇ ਅਤੇ $s\ (\neq 0)$ ਹੋਵੇ। ਮੰਨ ਲਉ r ਅਤੇ s ਵਿੱਚ, 1 ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ ਕੋਈ ਹੋਰ ਸਾਂਝਾ ਗੁਣਨਖੰਡ ਹੈ। ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਇਸ ਸਾਂਝੇ ਗੁਣਨਖੰਡ ਨੂੰ r ਅਤੇ s ਨਾਲ ਭਾਗ ਕਰਕੇ $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ, ਜਿੱਥੇ a ਅਤੇ b ਸਹਿ ਅਭਾਜ (co-prime) ਹਨ।

ਇਸ ਲਈ : $b\sqrt{2} = a$ ਹੋਇਆ।

ਦੋਹਾਂ ਪਾਸਿਆਂ ਦਾ ਵਰਗ ਕਰਨ 'ਤੇ, ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :

$$2b^2 = a^2$$

ਇਸ ਲਈ : 2, a^2 ਨੂੰ ਵੰਡਦਾ (ਭਾਗ ਕਰਦਾ) ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ ਪ੍ਰਮੇਯ 1.3 ਦੁਆਰਾ 2, a ਨੂੰ ਵੀ ਵੰਡੇਗਾ।

ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ $a = 2c$ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ, ਜਿੱਥੇ c ਕੋਈ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

a ਦਾ ਮੁੱਲ ਰੱਖਣ 'ਤੇ ਸਾਨੂੰ $2b^2 = 4c^2$,ਭਾਵ $b^2 = 2c^2$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸਦਾ ਭਾਵ ਹੈ ਕਿ 2, b^2 ਨੂੰ ਵੰਡਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਲਈ 2, b ਨੂੰ ਵੀ ਵੰਡੇਗਾ (ਪ੍ਰਮੇਯ ੧.੩ ਵਿੱਚ $p = 2$ ਲੈਣ 'ਤੇ)।

ਇਸ ਲਈ a ਅਤੇ b ਵਿੱਚ ਘੱਟ ਤੋਂ ਘੱਟ ਇੱਕ ਸਾਂਝਾ ਗੁਣਨਖੰਡ 2 ਹੈ।

ਪ੍ਰੰਤੂ ਇਹ ਇਸਦੇ ਉਲਟ ਹੈ ਕਿ a ਅਤੇ b ਵਿੱਚ 1 ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ ਕੋਈ ਸਾਂਝਾ ਗੁਣਨਖੰਡ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਇਹ ਉਲਟ ਸਾਨੂੰ ਇਸ ਲਈ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਇਆ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਤਰੁੱਟੀ ਵਾਲੀ ਗੱਲ ਮੰਨੀ ਸੀ ਕਿ $\sqrt{2}$ ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ, ਅਸੀਂ ਇਹ ਸਿੱਟਾ ਕੱਢਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $\sqrt{2}$ ਇੱਕ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 9 : $\sqrt{3}$ ਇੱਕ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਹੱਲ: ਆਉ ਅਸੀਂ ਇਸਦੇ ਉਲਟ ਇਹ ਮੰਨ ਲਈਏ ਕਿ $\sqrt{3}$ ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੋ ਦੋ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ a ਅਤੇ $b\ (\neq 0)$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $\sqrt{3} = \frac{a}{b}$ ਹੈ।

ਜੇਕਰ a ਅਤੇ b ਵਿੱਚ, 1 ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ ਕੋਈ ਸਾਂਝਾ ਗੁਣਨਖੰਡ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਉਸ ਸਾਝੇ ਗੁਣਨਖੰਡ ਨਾਲ ਭਾਗ ਦੇ ਕੇ a ਅਤੇ b ਨੂੰ ਸਹਿ ਅਭਾਜ ਬਣਾ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

ਇਸ ਲਈ $b\sqrt{3} = a$ ਹੈ।

ਦੋਵੇਂ ਪਾਸੇ ਵਰਗ ਕਰਨ 'ਤੇ ਸਾਨੂੰ $3b^2 = a^2$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ a^2, 3 ਨਾਲ ਭਾਗ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਪ੍ਰਮੇਯ 1.3 ਦੁਆਰਾ 3, a ਨੂੰ ਵੀ ਭਾਗ ਕਰੇਗਾ।

ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ $a = 3c$ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ, ਜਿੱਥੇ c ਇੱਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

a ਦੇ ਇਸ ਮੁੱਲ ਨੂੰ $3b^2 = a^2$ ਵਿੱਚ ਰੱਖਣ 'ਤੇ ਸਾਨੂੰ

$3b^2 = 9c^2$ ਭਾਵ $b^2 = 3c^2$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਦਾ ਭਾਵ ਹੈ ਕਿ b^2, 3 ਨਾਲ ਭਾਗ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਪ੍ਰਮੇਯ 1.3 ਦੁਆਰਾ b ਵੀ 3 ਨਾਲ ਭਾਗ ਹੋਵੇਗਾ।

ਇਸ ਲਈ a ਅਤੇ b ਵਿੱਚ ਘੱਟ ਤੋਂ ਘੱਟ ਇੱਕ ਸਾਂਝਾ ਗੁਣਨਖੰਡ 3 ਹੈ।

ਪ੍ਰੰਤੂ ਇਹ ਇਸਦੇ ਉਲਟ ਹੈ ਕਿ a ਅਤੇ b ਸਹਿ ਅਭਾਜ ਹਨ। ਸਾਨੂੰ ਇਹ ਉਲਟ ਇਸ ਲਈ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਇਆ ਕਿਉਂਕਿ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਤਰੁੱਟੀ ਵਾਲੀ ਗੱਲ ਮੰਨੀ ਸੀ ਕਿ $\sqrt{3}$ ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ਇਹ ਸਿੱਟਾ ਕੱਢਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $\sqrt{3}$ ਇੱਕ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਜਮਾਤ IX ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਦੱਸਿਆ ਸੀ ਕਿ:

- ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਅਤੇ ਇੱਕ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਜੋੜ ਅਤੇ ਘਟਾਉ ਇੱਕ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਅਤੇ
- ਇੱਕ ਸਿਫ਼ਰ ਤੋਂ ਭਿੰਨ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਅਤੇ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ ਜਾਂ ਭਾਗਫਲ ਇੱਕ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ, ਉਪਰੋਕਤ ਦੀਆਂ ਕੁਝ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰਾਂਗੇ।

ਉਦਾਹਰਣ 10 : ਦਿਖਾਉ ਕਿ $5-\sqrt{3}$ ਇੱਕ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਹੱਲ: ਆਉ ਅਸੀਂ ਇਸਦੇ ਉਲਟ ਮੰਨ ਲਈਏ ਕਿ $5-\sqrt{3}$ ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਭਾਵ ਅਸੀਂ ਦੋ ਸਹਿ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ a ਅਤੇ b $(b \neq 0)$ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $5-\sqrt{3}=\frac{a}{b}$ ਹੋਵੇ।

ਇਸ ਲਈ $\qquad 5-\frac{a}{b}=\sqrt{3}$ ਹੈ।

ਜਾਂ $\qquad \sqrt{3}=5-\frac{a}{b}$ ਹੈ।

ਕਿਉਂਕਿ a ਅਤੇ b ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ, ਇਸ ਲਈ $5-\frac{a}{b}$ ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ, ਭਾਵ $\sqrt{3}$ ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ। ਪ੍ਰੰਤੂ ਇਹ ਇਸਦੇ ਉਲਟ ਹੈ ਕਿ $\sqrt{3}$ ਇੱਕ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਇਹ ਉਲਟ ਸਾਨੂੰ ਸਾਡੇ ਗਲਤ ਮੰਨਣ ਕਰਕੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਇਆ ਹੈ ਕਿ $5-\sqrt{3}$ ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ, ਅਸੀਂ ਇਹ ਸਿੱਟਾ ਕੱਢਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $5-\sqrt{3}$ ਇੱਕ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 11 : ਦਿਖਾਉ ਕਿ $3\sqrt{2}$ ਇੱਕ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਆਉ ਇਸਦੇ ਉਲਟ ਮੰਨ ਲਈਏ ਕਿ $3\sqrt{2}$ ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਭਾਵ ਅਸੀਂ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਸਹਿ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ a ਅਤੇ b $(b \neq 0)$ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $3\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ ਹੋਵੇ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $\sqrt{2} = \frac{a}{3b}$ ਹੋਵੇ।

ਕਿਉਂਕਿ 3, a ਅਤੇ b ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ, ਇਸ ਲਈ $\frac{a}{3b}$ ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੋਵੇਗੀ। ਇਸ ਲਈ $\sqrt{2}$ ਵੀ ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਪ੍ਰੰਤੂ ਇਹ ਇਸਦੇ ਉਲਟ ਹੈ ਕਿ $\sqrt{2}$ ਇੱਕ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ, ਅਸੀਂ ਇਹ ਸਿੱਟਾ ਕੱਢਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $3\sqrt{2}$ ਇੱਕ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 1.3

1. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $\sqrt{5}$ ਇੱਕ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।
2. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $3 + 2\sqrt{5}$ ਇੱਕ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।
3. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਅਪਰਿਮੇਯ ਹਨ :

   (i) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (ii) $7\sqrt{5}$ (iii) $6 + \sqrt{2}$

1.5 ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਦਸ਼ਮਲਵ ਰੂਪ ਦੀ ਦੁਹਰਾਈ

IX ਜਮਾਤ ਵਿੱਚ, ਤੁਸੀਂ ਪੜ੍ਹਿਆ ਹੈ ਕਿ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਜਾਂ ਤਾਂ ਸ਼ਾਂਤ ਦਸ਼ਮਲਵ ਪ੍ਰਸਾਰ (terminating decimal expansions) ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜਾਂ ਫਿਰ ਅਸ਼ਾਂਤ ਆਵਰਤੀ (non-terminating repeating) ਦਸ਼ਮਲਵ ਪ੍ਰਸਾਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਭਾਗ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਮੰਨ ਲਉ $\frac{p}{q} (q \neq 0)$ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰਾਂਗੇ ਅਤੇ ਇਸ ਦੀ ਪੂਰੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਖੋਜ ਕਰਾਂਗੇ ਕਿ $\frac{p}{q}$ ਦਾ ਦਸ਼ਮਲਵ ਪ੍ਰਸਾਰ (ਰੂਪ) ਕਦੋਂ ਸ਼ਾਂਤ ਅਤੇ ਕਦੋਂ ਅਸ਼ਾਂਤ ਆਵਰਤੀ ਹੋਵੇਗੀ। ਅਸੀਂ ਇਹ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਦੁਆਰਾ ਕਰਾਂਗੇ।

ਆਉ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ

(i) 0.375 (ii) 0.104 (iii) 0.0875 (iv) 23.3408

ਹੁਣ (i) $0.375 = \frac{375}{1000} = \frac{375}{10^3}$ (ii) $0.104 = \frac{104}{1000} = \frac{104}{10^3}$

(iii) $0.0875 = \frac{875}{10000} = \frac{875}{10^4}$ (iv) $23.3408 = \frac{233408}{10000} = \frac{233408}{10^4}$

ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਿ ਕੋਈ ਉਮੀਦ ਕਰੇਗਾ, ਇਹਨਾਂ ਸਾਰਿਆਂ ਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਵਿਅਕਤ ਕੀਤਾ (ਲਿਖਿਆ) ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ, ਜਿੰਨਾਂ ਦਾ ਹਰ 10 ਦੀ ਕੋਈ ਘਾਤ ਹੋਵੇਗਾ। ਆਉ ਅੰਸ਼ ਅਤੇ ਹਰ ਦੇ ਸਾਂਝੇ ਗੁਣਨਖੰਡਾਂ ਨੂੰ ਕੱਟ ਕੇ, ਇਹ ਦੇਖੀਏ ਕਿ ਸਾਨੂੰ ਕੀ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

(i) $0.375 = \frac{375}{10^3} = \frac{3 \times 5^3}{2^3 \times 5^3} = \frac{3}{2^3}$ (ii) $0.104 = \frac{104}{10^3} = \frac{13 \times 2^3}{2^3 \times 5^3} = \frac{13}{5^3}$

(iii) $0.0875 = \frac{875}{10^4} = \frac{7}{2^4 \times 5}$ (iv) $23.3408 = \frac{233408}{10^4} = \frac{2^2 \times 7 \times 521}{5^4}$

ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਇੱਥੇ ਕੋਈ ਨਮੂਨਾ (Pattern) ਦੇਖ ਰਹੇ ਹੋ? ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲੱਗਦਾ ਹੈ ਕਿ ਅਸੀਂ ਉਸ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਨੂੰ ਜਿਸਦਾ ਦਸ਼ਮਲਵ ਵਿਸਤਾਰ ਇੱਕ ਸ਼ਾਂਤ ਦਸ਼ਮਲਵ ਹੈ, ਇੱਕ $\frac{p}{q}$ ਦੇ ਰੂਪ ਦੀ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਵਿੱਚ ਬਦਲ ਲਿਆ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ p ਅਤੇ q ਸਹਿ ਅਭਾਜ ਹਨ ਅਤੇ ਹਰ (ਭਾਵ q) ਵਿੱਚ ਕੇਵਲ 2 ਦੀਆਂ ਘਾਤਾਂ ਜਾਂ 5 ਦੀਆਂ ਘਾਤਾਂ ਜਾਂ ਦੋਹਾਂ ਦੀਆਂ ਘਾਤਾਂ ਹਨ। ਸਾਨੂੰ ਹਰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦਾ ਹੀ ਦਿਸਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ 10 ਦੀਆਂ ਘਾਤਾਂ ਵਿੱਚ ਕੇਵਲ 2 ਅਤੇ 5 ਦੀਆਂ ਘਾਤਾਂ ਹੀ ਗੁਣਨਖੰਡ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਹੋਣਗੀਆਂ।

ਭਾਵੇਂ ਅਸੀਂ ਕੁਝ ਘੱਟ ਹੀ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਹੱਲ ਕਰਕੇ ਦੇਖੀਆਂ ਹਨ, ਫਿਰ ਵੀ ਤੁਸੀਂ ਦੇਖ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ ਕੋਈ ਵੀ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਜਿਸਦਾ ਦਸ਼ਮਲਵ ਵਿਸਤਾਰ ਸ਼ਾਂਤ ਹੈ, ਇੱਕ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ ਜਿਸਦਾ ਹਰ 10 ਦੀ ਕੋਈ ਘਾਤ ਹੈ। ਨਾਲ ਹੀ 10 ਦੇ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡ ਕੇਵਲ 2 ਅਤੇ 5 ਹੀ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ, ਅੰਸ਼ ਅਤੇ ਹਰ ਦੇ ਸਾਂਝੇ ਗੁਣਨਖੰਡਾਂ ਨੂੰ ਕੱਟਕੇ ਅਸੀਂ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਇਹ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ $\frac{p}{q}$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ q ਦਾ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡਣ 2^n5^m ਦੇ ਰੂਪ ਦਾ ਹੈ ਅਤੇ n ਅਤੇ m ਕੋਈ ਗੈਰ ਰਿਣਾਤਮਕ (non negative) ਸੰਪੂਰਣ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ।

ਆਉ ਆਪਣੇ ਨਤੀਜੇ ਨੂੰ ਉਪਚਾਰਕ ਤੌਰ 'ਤੇ ਲਿਖੀਏ :

ਪ੍ਰਮੇਯ 1.5 ਮੰਨ ਲਉ x ਇੱਕ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਜਿਸਦਾ ਦਸ਼ਮਲਵ ਪ੍ਰਸਾਰ (ਰੂਪ) ਸ਼ਾਂਤ ਹੈ। ਹੁਣ x ਨੂੰ $\frac{p}{q}$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ p ਅਤੇ q ਸਹਿ ਅਭਾਜ ਹਨ ਅਤੇ q ਦਾ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡਣ 2^n5^m ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ, ਜਿੱਥੇ n, m ਕੋਈ ਗੈਰ ਰਿਣਾਤਮਕ (non negative) ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ।

ਸੰਭਵ ਹੈ ਕਿ ਤੁਸੀਂ ਹੈਰਾਨ ਹੋ ਰਹੇ ਹੋਵੋਗੇ ਕਿ ਪ੍ਰਮੇਯ 1.5 ਦਾ ਉਲਟ ਕੀ ਹੋਵੇਗਾ? ਭਾਵ

ਜੇਕਰ ਸਾਡੇ ਕੋਲ ਕੋਈ ਪ੍ਰਮੇਯ ਸੰਖਿਆ $\frac{p}{q}$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਹੈ ਅਤੇ q ਦਾ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡਣ 2^n5^m ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ n ਅਤੇ m ਗੈਰ ਰਿਣਾਤਮਕ (non negative) ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ, ਤਾਂ ਕੀ $\frac{p}{q}$ ਦਾ ਦਸ਼ਮਲਵ ਵਿਸਤਾਰ ਸ਼ਾਂਤ ਹੋਵੇਗਾ?

ਆਉ ਹੁਣ ਦੇਖੀਏ ਕਿ ਕੀ ਉਪਰੋਕਤ ਕਥਨ ਦੇ ਸੱਚ ਹੋਣ ਦੇ ਕੋਈ ਸਪਸ਼ਟ ਕਾਰਣ ਹਨ। ਤੁਸੀਂ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਹੀ ਇਸ ਗੱਲ ਨਾਲ ਸਹਿਮਤ ਹੋਵੋਗੇ ਕਿ $\frac{a}{b}$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਕਿਸੇ ਵੀ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ, ਜਿੱਥੇ b, 10 ਦੀ ਕੋਈ ਘਾਤ ਹੈ, ਦਾ ਦਸ਼ਮਲਵ ਵਿਸਤਾਰ ਸ਼ਾਂਤ ਹੋਵੇਗਾ। ਇਸ ਲਈ, ਇਹ ਅਰਥਪੂਰਣ ਲੱਗਦਾ ਹੈ ਕਿ $\frac{p}{q}$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ, ਜਿੱਥੇ q, 2^n5^m ਦੇ ਰੂਪ ਦਾ ਹੈ, ਨੂੰ $\frac{a}{b}$ ਦੇ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਤੁਲ (equivalent) ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਜਾਵੇ, ਜਿੱਥੇ b, 10 ਦੀ ਕੋਈ ਘਾਤ ਹੋਵੇ। ਆਉ ਆਪਣੇ ਉੱਪਰ ਦੇ ਉਦਾਹਰਣਾਂ 'ਤੇ ਵਾਪਸ ਆਈਏ ਅਤੇ ਉਲਟ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਕੰਮ ਕਰਨਾ ਸ਼ੁਰੂ ਕਰੀਏ।

(i) $\frac{3}{8}=\frac{3}{2^3}=\frac{3\times5^3}{2^3\times5^3}=\frac{375}{10^3}=0.375$

(ii) $\frac{13}{125}=\frac{13}{5^3}=\frac{13\times2^3}{5^3\times2^3}=\frac{104}{10^3}=0.104$

(iii) $\frac{7}{80}=\frac{7}{2^4\times5}=\frac{7\times5^3}{2^4\times5^4}=\frac{875}{10^4}=0.0875$

(iv) $\frac{14588}{625}=\frac{2^2\times7\times521}{5^4}=\frac{2^6\times7\times521}{2^4\times5^4}=\frac{233408}{10^4}=23.3408$

ਇਸ ਲਈ, ਇਹ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਇਹ ਦਰਸਾਉਂਦੀਆਂ ਹਨ ਕਿ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $\frac{p}{q}$ ਦੇ ਰੂਪ ਦੀ ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਜਿੱਥੇ q, 2^n5^m ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਹੈ, ਨੂੰ $\frac{a}{b}$ ਦੇ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਤੁੱਲ (equivalent) ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਵਿੱਚ ਬਦਲਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ b, 10 ਦੀ ਕੋਈ ਘਾਤ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ, ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਇੱਕ ਸ਼ਾਂਤ ਦਸ਼ਮਲਵ ਵਿਸਤਾਰ ਹੋਵੇਗਾ। ਆਉ ਇਸ ਪਰਿਣਾਮ ਨੂੰ ਉਪਚਾਰਕ ਤੌਰ 'ਤੇ ਲਿਖੀਏ।

ਪ੍ਰਮੇਯ 1.6 : ਮੰਨ ਲਉ $x=\frac{p}{q}$ ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਹੈ ਕਿ q, 2^n5^m ਦੇ ਰੂਪ ਦਾ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ n ਅਤੇ m ਗੈਰ ਰਿਣਾਤਮਕ (non negative) ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ ਤਾਂ x ਦਾ ਦਸ਼ਮਲਵ ਵਿਸਤਾਰ ਸ਼ਾਂਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਉਹਨਾਂ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਵੱਲ ਵੱਧਣ ਲੱਗੇ ਹਾਂ ਜਿੰਨਾਂ ਦਾ ਦਸ਼ਮਲਵ ਪ੍ਰਸਾਰ ਅਸ਼ਾਂਤ ਆਵਰਤੀ (non terminating) ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇੱਕ ਵਾਰ ਫਿਰ, ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਉਦਾਹਰਣ ਲੈ ਕੇ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚ ਕੀ ਹੋ ਰਿਹਾ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਜਮਾਤ IX ਦੀ ਪਾਠ ਪੁਸਤਕ ਦੇ ਪਾਠ 1 ਦੀ ਉਦਾਹਰਣ 5 ਨੂੰ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ $\frac{1}{7}$ ਦਾ ਦਸ਼ਮਲਵ ਪ੍ਰਸਾਰ ਪਤਾ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਸੀ।

$$
\begin{array}{r|l}
 & 0.1428571 \\
\hline
7 & 10 \\
 & \underline{7} \\
 & 30 \\
 & \underline{28} \\
 & 20 \\
 & \underline{14} \\
 & 60 \\
 & \underline{56} \\
 & 40 \\
 & \underline{35} \\
 & 50 \\
 & \underline{49} \\
 & 10 \\
 & \underline{7} \\
 & 30
\end{array}
$$

ਇੱਥੇ ਬਾਕੀ 3, 2, 6, 4, 5, 1, 3, 2, 6, 4, 5, 1, . . . ਹਨ ਅਤੇ ਭਾਜਕ 7 ਹੈ।

ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ ਸਪਸ਼ਟ ਰੂਪ ਵਿਚ ਹਰ 7, 2^n5^m ਦੇ ਰੂਪ ਦਾ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਪ੍ਰਮੇਯ 1.5 ਅਤੇ 1.6 ਤੋਂ, $\frac{1}{7}$ ਦਾ ਦਸ਼ਮਲਵ ਪ੍ਰਸਾਰ ਸ਼ਾਂਤ ਨਹੀਂ ਹੋਵੇਗਾ। ਇੱਥੇ 0 ਬਾਕੀ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਨਹੀਂ ਆਵੇਗਾ (ਕਿਉਂ?) ਅਤੇ ਇੱਕ ਸਥਿਤੀ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਬਾਕੀ ਬਚਣ ਵਾਲੇ ਅੰਕ ਫਿਰ ਤੋਂ ਆਉਣੇ ਸ਼ੁਰੂ ਹੋ ਜਾਣਗੇ। ਇਸ ਲਈ $\frac{1}{7}$ ਦੇ ਭਾਗਫਲ ਵਿੱਚ ਅੰਕਾਂ ਦਾ ਇੱਕ ਬਲਾਕ ਭਾਵ 142857 ਫਿਰ ਤੋਂ ਆਵੇਗਾ।

ਅਸੀਂ $\frac{1}{7}$ ਦੇ ਦਸ਼ਮਲਵ ਵਿਸਤਾਰ ਵਿੱਚ ਜੋ ਦੇਖਿਆ ਹੈ ਉਹ ਉਹਨਾਂ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਲਈ ਸੱਚ ਹੈ ਜੋ ਪ੍ਰਮੇਯਾਂ 1.5 ਅਤੇ 1.6 ਦੇ ਅੰਤਰਗਤ ਨਹੀਂ ਆਉਂਦੀ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਲਈ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

ਪ੍ਰਮੇਯ 1.7 ਮੰਨ ਲਓ $x = \frac{p}{q}$ ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਹੈ ਕਿ q ਦਾ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡਣ 2^n5^m ਦੇ ਰੂਪ ਦਾ ਨਹੀਂ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ n ਅਤੇ m ਗੈਰ ਰਿਣਾਤਮਕ (non negative) ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ। ਤਾਂ x ਦਾ ਦਸ਼ਮਲਵ ਪ੍ਰਸਾਰ ਅਸ਼ਾਂਤ ਆਵਰਤੀ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਉਪਰੋਕਤ ਚਰਚਾ ਤੋਂ, ਅਸੀਂ ਇਹ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਕਿਸੇ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਦਸ਼ਮਲਵ ਪ੍ਰਸਾਰ ਜਾਂ ਤਾਂ ਸ਼ਾਂਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਜਾਂ ਅਸ਼ਾਂਤ ਆਵਰਤੀ ਹੈ।

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 1.4

1. ਬਿਨਾਂ ਲੰਬੀ ਵੰਡ ਪ੍ਰਕਿਰਿਆ ਕਰਦਿਆਂ ਦੱਸੋ ਕਿ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਦਸ਼ਮਲਵ ਪ੍ਰਸਾਰ ਸ਼ਾਂਤ ਹਨ ਜਾਂ ਅਸ਼ਾਂਤ ਆਵਰਤੀ ਹਨ :

(i) $\frac{13}{3125}$ (ii) $\frac{17}{8}$ (iii) $\frac{64}{455}$

(iv) $\frac{15}{1600}$ (v) $\frac{29}{343}$ (vi) $\frac{23}{2^3 5^2}$

(vii) $\frac{129}{2^2 5^7 7^5}$ (viii) $\frac{6}{15}$ (ix) $\frac{35}{50}$ (x) $\frac{77}{210}$

2. ਉੱਪਰ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਦੇ ਉਹਨਾ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਦਸ਼ਮਲਵ ਵਿਸਤਾਰ ਲਿਖੋ ਜੋ ਸ਼ਾਂਤ ਹਨ।

3. ਕੁਝ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਦਸ਼ਮਲਵ ਵਿਸਤਾਰ ਹੇਠਾਂ ਦਰਸਾਏ ਗਏ ਹਨ। ਹਰ ਇੱਕ ਸਥਿਤੀ ਲਈ ਨਿਰਧਾਰਿਤ ਕਰੋ ਕਿ ਇਹ ਸੰਖਿਆ ਪਰਿਮੇਯ ਹੈ ਜਾਂ ਨਹੀਂ। ਜੇਕਰ ਇਹ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਅਤੇ $\frac{p}{q}$ ਦੇ ਰੂਪ ਦੀ ਹੈ ਤਾਂ q ਦੇ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡਾਂ ਦੇ ਬਾਰੇ ਵਿੱਚ ਤੁਸੀਂ ਕੀ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹੋ?

(i) 43.123456789 (ii) 0.120120012000120000. . . (iii) $43.\overline{123456789}$

1.6 ਸਾਰ-ਅੰਸ਼

ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ ਤੁਸੀਂ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਨੁਕਤਿਆਂ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕੀਤਾ ਹੈ:

1. ਯੁਕਲਿਡ ਵੰਡ ਪ੍ਰਮੇਯਕਾ :

   ਦੋ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ a ਅਤੇ b ਲਈ ਅਸੀਂ $a = bq + r, 0 \leq r < b$ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਨ ਵਾਲੀਆਂ ਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ q ਅਤੇ r ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਭਾਵ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੈ।

2. ਯੁਕਲਿਡ ਵੰਡ ਐਲਗੋਰਿਥਮ : ਇਹ ਯੁਕਲਿਡ ਵੰਡ ਪ੍ਰਮੇਯਕਾ ਤੇ ਅਧਾਰਿਤ ਹੈ। ਇਸ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ ਦੋ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ a ਅਤੇ $b, (a > b)$ ਦਾ ਮ.ਸ.ਵ (H.C.F) ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀ ਵਿਧੀ ਦੁਆਰਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ :

   ਪਗ 1 : q ਅਤੇ r ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਯੁਕਲਡ ਵੰਡ ਪ੍ਰਮੇਯਕਾ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰੋ, ਜਿੱਥੇ $a = bq + r, 0 \leq r < b$ ਹੈ।

   ਪਗ 2 : ਜੇਕਰ $r = 0$ ਹੈ ਤਾਂ HCF = b ਹੈ। ਜੇਕਰ $r \neq 0$ ਹੈ ਤਾਂ b ਅਤੇ r ਉੱਪਰ ਯੁਕਲਿਡ ਵੰਡ ਪ੍ਰਮੇਯਕਾ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰੋ।

   ਪਗ 3 : ਇਸ ਪ੍ਰਕਿਰਿਆ ਨੂੰ ਉਦੋਂ ਤੱਕ ਜਾਰੀ ਰੱਖੋ ਜਦ ਤੱਕ ਬਾਕੀ ਸਿਫ਼ਰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਨਾ ਹੋ ਜਾਵੇ। ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਾਲਾ ਭਾਜਕ ਹੀ HCF (a, b) ਹੈ। ਨਾਲ ਹੀ HCF (a, b) = HCF (b, r)

3. ਅੰਕਗਣਿਤ ਦੀ ਮੂਲਭੂਤ ਪ੍ਰਮੇਯ :

   ਹਰ ਇੱਕ ਭਾਜ ਸੰਖਿਆ ਨੂੰ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ

(ਗੁਣਨਖੰਡਿਤ ਕੀਤਾ) ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਹ ਗੁਣਨਖੰਡਣ ਵਿਲੱਖਣ (unique) ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਉੱਪਰ ਕੋਈ ਧਿਆਨ ਦਿੱਤੇ ਬਿਨਾਂ ਕਿ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡ ਕਿਸ ਤਰਤੀਬ ਵਿੱਚ ਆ ਰਹੇ ਹਨ।

4. ਜੇਕਰ p ਕੋਈ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਅਤੇ p, a^2 ਨੂੰ ਵੰਡਦਾ (ਭਾਗ) ਹੈ ਤਾਂ p, a ਨੂੰ ਵੀ ਵੰਡੇਗਾ। ਇੱਥੇ a ਇੱਕ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।
5. ਸਬੂਤ ਕਿ $\sqrt{2}, \sqrt{3}$ ਆਦਿ ਅਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ।
6. ਮੰਨ ਲਉ x ਇੱਕ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਜਿਸਦਾ ਦਸ਼ਮਲਵ ਵਿਸਤਾਰ ਸ਼ਾਂਤ ਹੈ ਤਾਂ ਅਸੀਂ x ਨੂੰ $\frac{p}{q}$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ, ਜਿੱਥੇ p ਅਤੇ q ਸਹਿ ਅਭਾਜ ਹਨ ਅਤੇ q ਦਾ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡਣ 2^n5^m ਦੇ ਰੂਪ ਦਾ ਹੈ। ਜਿੱਥੇ n, m ਗੈਰ ਰਿਣਾਤਮਕ (non negative) ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ।
7. ਮੰਨ ਲਉ $x = \frac{p}{q}$ ਇੱਕ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਕਿ q ਦਾ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡਣ 2^n5^m ਦੇ ਰੂਪ ਦਾ ਹੈ। ਜਿੱਥੇ n, m ਗੈਰ ਰਿਣਾਤਮਕ (non negative) ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ ਤਾਂ x ਦਾ ਦਸ਼ਮਲਵ ਵਿਸਤਾਰ ਸ਼ਾਂਤ ਹੋਵੇਗਾ।
8. ਮੰਨ ਲਉ $x = \frac{p}{q}$ ਇੱਕ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਕਿ q ਦਾ ਅਭਾਜ ਗੁਣਨਖੰਡਣ 2^n5^m ਦੇ ਰੂਪ ਦਾ ਨਹੀਂ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ n, m ਗੈਰ ਰਿਣਾਤਮਕ (non negative) ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ ਤਾਂ x ਦਾ ਦਸ਼ਮਲਵ ਵਿਸਤਾਰ ਅਸ਼ਾਂਤ ਆਵਰਤੀ ਹੋਵੇਗਾ।

ਪਾਠਕਾਂ ਦੇ ਲਈ ਵਿਸ਼ੇਸ਼

ਤੁਸੀਂ ਦੇਖਿਆ ਹੈ:

HCF $(p, q, r) \times$ LCM $(p, q, r) \neq p \times q \times r$, ਜਿਥੇ p, q, r ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ (ਉਦਾਹਰਣ 8 ਦੇਖੋ)। ਜਦੋਂ ਕਿ ਤਿੰਨ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆਵਾਂ p, q ਅਤੇ r ਲਈ ਹੇਠਾਂ ਦਿਤੇ ਪਰਿਣਾਮ ਲਾਗੂ ਹੁੰਦੇ ਹਨ:

$$\text{LCM}(p, q, r) = \frac{p \cdot q \cdot r \cdot \text{HCF}(p, q, r)}{\text{HCF}(p, q) \cdot \text{HCF}(q, r) \cdot \text{HCF}(p, r)}$$

$$\text{HCF}(p, q, r) = \frac{p \cdot q \cdot r \cdot \text{LCM}(p, q, r)}{\text{LCM}(p, q) \cdot \text{LCM}(q, r) \cdot \text{LCM}(p, r)}$$

ਬਹੁਪਦ (Polynomials) 2

2.1 ਭੂਮਿਕਾ

IX ਜਮਾਤ ਵਿੱਚ ਤੁਸੀਂ ਇੱਕ ਚਲ ਵਾਲੇ ਬਹੁਪਦਾਂ (polynomials) ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਦੀਆਂ ਘਾਤਾਂ (degree) ਦੇ ਬਾਰੇ ਪੜ੍ਹਿਆ ਹੈ। ਯਾਦ ਕਰੋ ਕਿ ਚਲ x ਦੇ ਬਹੁਪਦ $p(x)$ ਵਿੱਚ x ਦੀ ਵੱਡੀ ਤੋਂ ਵੱਡੀ ਘਾਤ (power) ਨੂੰ **ਬਹੁਪਦ ਦੀ ਘਾਤ (degree)** ਆਖਦੇ ਹਾਂ।

ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ, $4x+2$ ਦੇ x ਵਿੱਚ ਚਲ 1 ਦਾ ਬਹੁਪਦ ਹੈ, $2y^2-3y+4$ ਚਲ y ਵਿੱਚ ਘਾਤ 2 ਦਾ ਬਹੁਪਦ ਹੈ, $5x^3-4x^2+x-\sqrt{2}$ ਚਲ x ਵਿੱਚ ਘਾਤ 3 ਦਾ ਬਹੁਪਦ ਹੈ ਅਤੇ $7u^6-\frac{3}{2}u^4+4u^2+u-8$ ਚਲ u ਵਿੱਚ ਘਾਤ 6 ਦਾ ਬਹੁਪਦ ਹੈ। ਵਿਅੰਜਕ $\frac{1}{x-1}$, $\sqrt{x}+2$, $\frac{1}{x^2+2x+3}$ ਆਦਿ ਬਹੁਪਦ ਨਹੀਂ ਹਨ।

ਘਾਤ 1 ਦੇ ਬਹੁਪਦ ਨੂੰ **ਰੇਖੀ ਬਹੁਪਦ (Linear polynomial)** ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ, $2x-3$, $\sqrt{3}x+5$, $y+\sqrt{2}$, $x-\frac{2}{11}$, $3z+4$, $\frac{2}{3}u+1$ ਆਦਿ ਸਾਰੇ ਰੇਖੀ ਬਹੁਪਦ ਹਨ। ਜਦੋਂ ਕਿ $2x+5-x^2$, x^3+1 ਆਦਿ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਬਹੁਪਦ ਰੇਖੀ ਬਹੁਪਦ ਨਹੀਂ ਹਨ।

ਘਾਤ 2 ਦੇ ਬਹੁਪਦ ਨੂੰ **ਦੋ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ (quadratic polynomial)** ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਦੋ ਘਾਤ (quadratic) ਸ਼ਬਦ ਕਵਾਡਰੇਟ (quadrate) ਸ਼ਬਦ ਤੋਂ ਬਣਿਆ ਹੈ, ਜਿਸਦਾ ਅਰਥ ਹੈ ਵਰਗ। $2x^2+3x-\frac{2}{5}$, y^2-2, $2-x^2+\sqrt{3}x$, $\frac{u}{3}-2u^2+5$, $\sqrt{5}v^2-\frac{2}{3}v$, $4z^2+\frac{1}{7}$, ਦੋ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦਾਂ ਦੀਆਂ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਹਨ (ਜਿਹਨਾਂ ਦੇ ਗੁਣਾਂਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ)। ਵਿਆਪਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ, x ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਦੋ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ ax^2+bx+c, ਜਿੱਥੇ a,b,c ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ ਅਤੇ $a \neq 0$ ਹੈ, ਦੇ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਘਾਤ 3 ਦਾ ਬਹੁਪਦ **ਤਿੰਨ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ (cubic polynomial)** ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਤਿੰਨ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ ਦੇ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਣ ਹਨ :

$$2-x^2, x^3, \sqrt{2}x^3, 3-x^2+x^3, 3x^3-2x^2+x-1$$

ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਤਿੰਨ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ ਦਾ ਵਿਆਪਕ ਰੂਪ ਹੈ :

$$ax^3+bx^2+cx+d,$$

ਜਿੱਥੇ a, b, c, d ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ ਅਤੇ $a \neq 0$ ਹੈ।

ਹੁਣ ਬਹੁਪਦ $p(x)=x^2-3x-4$ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ। ਇਸ ਬਹੁਪਦ ਵਿੱਚ $x=2$ ਰੱਖਣ ਤੇ ਸਾਨੂੰ $p(2)=2^2-3\times 2-4=-6$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। x^2-3x-4 ਵਿੱਚ, x ਨੂੰ 2 ਰੱਖਣ ਨਾਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਮੁੱਲ -6; x^2-3x-4 ਦਾ $x=2$ ਤੇ ਮੁੱਲ ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $p(0)$, $p(x)$ ਦਾ $x=0$ 'ਤੇ ਮੁੱਲ ਹੈ, ਜੋ -4 ਹੈ।

ਜੇਕਰ $p(x)$, x ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਬਹੁਪਦ ਹੈ ਅਤੇ k ਕੋਈ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਤਾਂ $p(x)$ ਵਿੱਚ x ਨੂੰ k ਰੱਖਣ ਤੇ ਕੋਈ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ **$p(x)$ ਦਾ $x=k$ 'ਤੇ ਮੁੱਲ ਕਹਾਉਂਦੀ ਹੈ** ਅਤੇ ਇਸ ਨੂੰ $p(k)$ ਨਾਲ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਨ।

$p(x)=x^2-3x-4$ ਦਾ $x=-1$ 'ਤੇ ਮੁੱਲ ਕੀ ਹੈ? ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

$p(-1)=(-1)^2-\{3\times(-1)\}-4=0$

ਨਾਲ ਹੀ ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ $p(4)=4^2-(3\times 4)-4=0$ ਹੈ।

ਕਿਉਂਕਿ $p(-1)=0$ ਅਤੇ $p(4)=0$, ਇਸ ਲਈ -1 ਅਤੇ 4 ਦੋ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ x^2-3x-4 ਦੇ ਸਿਫ਼ਰ (zeroes) ਕਹਾਉਂਦੇ ਹਨ। ਵਿਆਪਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ, ਇੱਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ k ਬਹੁਪਦ $p(x)$ ਦਾ ਸਿਫ਼ਰ ਅਖਵਾਉਂਦੀ ਹੈ, ਜੇਕਰ $p(k)=0$ ਹੋਵੇ।

ਤੁਸੀਂ ਜਮਾਤ IX ਵਿੱਚ ਪੜ੍ਹ ਚੁੱਕੇ ਹੋ ਕਿ ਕਿਸੇ ਰੇਖੀ ਬਹੁਪਦ ਦਾ ਸਿਫ਼ਰ ਕਿਵੇਂ ਪਤਾ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ, ਜੇਕਰ $p(x)=2x+3$ ਦਾ ਸਿਫ਼ਰ k ਹੈ, ਤਾਂ $p(k)=0$ ਤੋਂ ਸਾਨੂੰ $2k+3=0$ ਭਾਵ $k=-\frac{3}{2}$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਵਿਆਪਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ, ਜੇਕਰ $p(x)=ax+b$ ਦਾ ਇੱਕ ਸਿਫ਼ਰ k ਹੈ ਤਾਂ $p(k)=ak+b=0$ ਭਾਵ $k=\frac{-b}{a}$ ਹੋਵੇਗਾ। ਇਸ ਲਈ, ਰੇਖੀ ਬਹੁਪਦ $ax+b$ ਦਾ ਸਿਫ਼ਰ $\frac{-b}{a}=\frac{-(\text{ਅਚਲ ਪਦ})}{x \text{ ਦਾ ਗੁਣਾਂਕ}}$ ਹੈ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ, ਰੇਖੀ ਬਹੁਪਦ ਦਾ ਸਿਫ਼ਰ ਉਸਦੇ ਗੁਣਾਂਕਾਂ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਹੈ। ਕੀ ਇਹ ਹੋਰ ਬਹੁਪਦਾਂ ਵਿੱਚ ਵੀ ਹੁੰਦਾ ਹੈ? ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ, ਕੀ ਦੋ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦਾਂ ਦੇ ਸਿਫ਼ਰ ਵੀ ਉਸਦੇ ਗੁਣਾਂਕਾਂ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਿਤ ਹੁੰਦੇ ਹਨ?

ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਦਾ ਉੱਤਰ ਦੇਣ ਦਾ ਯਤਨ ਕਰਾਂਗੇ। ਅਸੀਂ ਬਹੁਪਦਾਂ ਦੇ ਲਈ ਵੰਡ ਵਿਧੀ (division algorithm) ਦਾ ਵੀ ਅਧਿਐਨ ਕਰਾਂਗੇ।

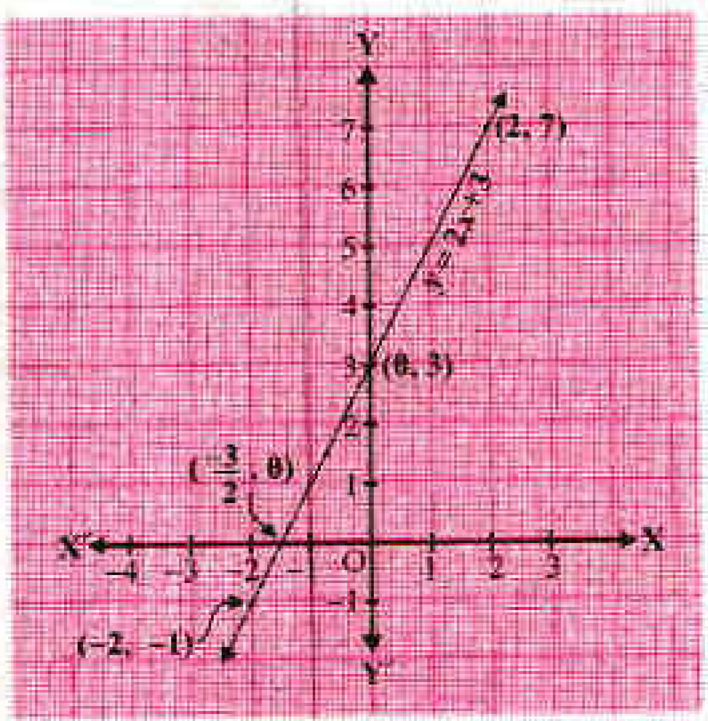
2.2 ਬਹੁਪਦਾਂ ਦੇ ਸਿਫ਼ਰਾਂ ਦਾ ਜਿਮਾਇਤੀ ਅਰਥ (Geometrical Meaning of the Zeroes of a Polynomial)

ਤੁਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹੋ ਕਿ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ k ਬਹੁਪਦਾਂ $p(x)$ ਦਾ ਇੱਕ ਸਿਫ਼ਰ ਹੈ, ਜੇਕਰ $p(k) = 0$ ਹੈ। ਪ੍ਰੰਤੂ ਕਿਸੇ ਬਹੁਪਦ ਦੇ ਸਿਫ਼ਰ ਇੰਨੇ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਕਿਉਂ ਹਨ? ਇਸਦਾ ਉੱਤਰ ਦੇਣ ਲਈ ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਅਸੀਂ ਰੇਖੀ ਅਤੇ ਦੋ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦਾਂ ਦੇ ਆਲੇਖੀ **(graphical)** ਨਿਰੂਪਣ ਦੇਖਾਂਗੇ ਅਤੇ ਫਿਰ ਉਸਦੀਆਂ ਸਿਫ਼ਰਾਂ ਦਾ ਜਿਮਾਇਤੀ ਅਰਥ ਦੇਖਾਂਗੇ।

ਪਹਿਲਾਂ ਇੱਕ ਰੇਖੀ ਬਹੁਪਦ $ax + b, \neq 0$ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਤੁਸੀਂ ਜਮਾਤ IX ਵਿੱਚ ਪੜ੍ਹਿਆ ਹੈ ਕਿ $y = ax + b$ ਦਾ ਆਲੇਖ (graph) ਇੱਕ ਸਰਲ ਰੇਖਾ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ $y = 2x + 3$ ਦਾ ਗ੍ਰਾਫ ਬਿੰਦੂਆਂ $(-2, -1)$ ਅਤੇ $(2, 7)$ ਤੋਂ ਨਿਕਲਣ ਵਾਲੀ ਇੱਕ ਸਰਲ ਰੇਖਾ ਹੈ।

x	-2	2
$y = 2x + 3$	-1	7

ਚਿੱਤਰ 2.1 ਵਿੱਚ ਤੁਸੀਂ ਦੇਖ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ $y = 2x + 3$ ਦਾ ਗ੍ਰਾਫ x-ਧੁਰੇ *(axis)* ਨੂੰ $x = -1$ ਅਤੇ $x = -2$ ਦੇ ਵਿੱਚਕਾਰ ਭਾਵ $\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$ 'ਤੇ ਕੱਟਦਾ ਹੈ। ਤੁਸੀਂ ਇਹ ਵੀ ਜਾਣਦੇ ਹੋ ਕਿ $2x + 3$ ਦਾ ਸਿਫ਼ਰ $-\frac{3}{2}$ ਹੈ। ਭਾਵ ਬਹੁਪਦ $2x + 3$ ਦਾ ਸਿਫ਼ਰ ਉਸ ਬਿੰਦੂ ਦਾ x-ਨਿਰਦੇਸ ਅੰਕ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ $y = 2x + 3$ ਦਾ ਗ੍ਰਾਫ x-ਧੁਰੇ ਨੂੰ ਕੱਟਦਾ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 2.1

ਵਿਆਪਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ, ਇੱਕ ਰੇਖੀ ਬਹੁਪਦ $ax + b, a \neq 0$ ਦੇ ਲਈ $y = ax + b$ ਦਾ ਗਰਾਫ਼ ਇੱਕ ਸਰਲ ਰੇਖਾ ਹੈ ਜੋ x-ਧੁਰੇ ਨੂੰ ਠੀਕ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ $\left(\frac{-b}{a}, 0\right)$ 'ਤੇ ਕੱਟਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ, ਰੇਖੀ ਬਹੁਪਦ $ax + b, a \neq 0$ ਦਾ ਕੇਵਲ ਇੱਕ ਸਿਫ਼ਰ ਹੈ, ਜੋ ਉਸ ਬਿੰਦੂ ਦਾ x–ਨਿਰਦੇਸ ਅੰਕ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ $y = ax + b$ ਦਾ ਗ੍ਰਾਫ x-ਧੁਰੇ ਨੂੰ ਕੱਟਦਾ ਹੈ। ਹੁਣ ਆਉ ਅਸੀਂ ਦੋ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ ਦੇ ਕਿਸੇ ਸਿਫ਼ਰ ਦੇ ਜਿਮਾਇਤੀ ਅਰਥ ਨੂੰ ਸਮਝੀਏ। ਦੋ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ $x^2 - 3x - 4$ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ। ਆਉ ਦੇਖੀਏ ਕਿ $y = x^2 - 3x - 4$ ਦਾ ਗ੍ਰਾਫ ਕਿਸ *ਤਰ੍ਹਾਂ ਦਾ ਦਿਖਾਈ

* ਦੋ ਘਾਤੀ ਅਤੇ ਤਿੰਨ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦਾਂ ਦਾ ਗ੍ਰਾਫ ਖਿੱਚਣਾ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਲਈ ਜ਼ਰੂਰੀ ਨਹੀਂ ਹੈ ਅਤੇ ਨਾ ਹੀ ਇਸਦਾ ਮੁਲਾਂਕਣ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧ ਹੈ।

ਦਿੰਦਾ ਹੈ। ਅਸੀਂ x ਦੇ ਕੁਝ ਮੁੱਲਾਂ ਦੇ ਸੰਗਤ $y = x^2 - 3x - 4$ ਦੇ ਕੁਝ ਮੁੱਲ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ, ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸਾਰਣੀ 2.1 ਵਿੱਚ ਦਿੱਤਾ ਹੈ।

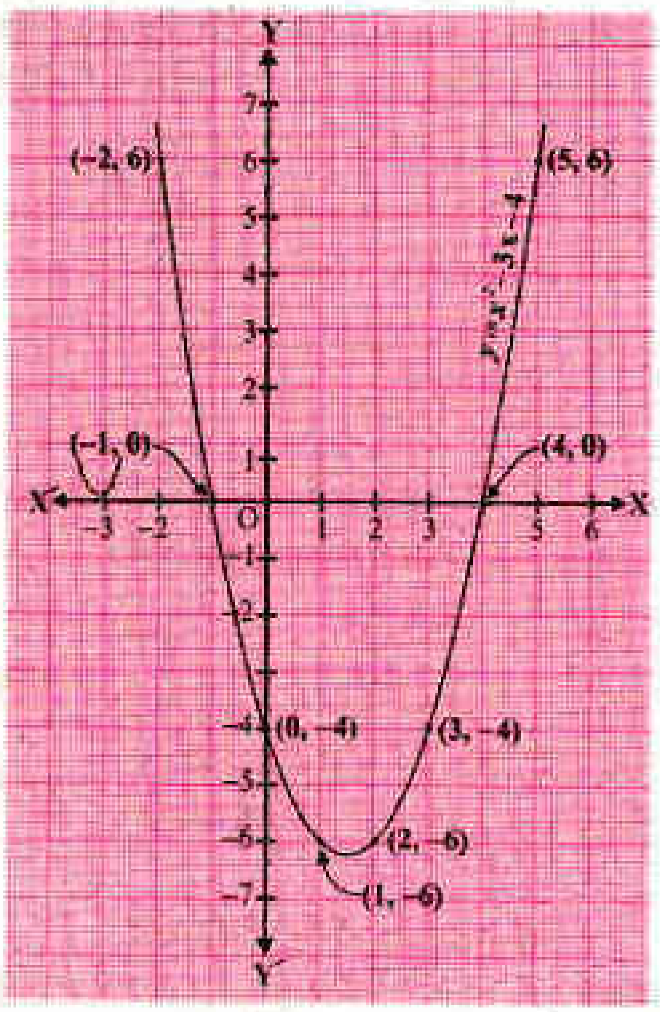
ਸਾਰਣੀ 2.1

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$y = x^2 - 3x - 4$	6	0	-4	-6	-6	-4	0	6

ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਉਪਰੋਕਤ ਬਿੰਦੂਆਂ ਨੂੰ ਇੱਕ ਗ੍ਰਾਫ਼ ਪੇਪਰ 'ਤੇ ਅੰਕਿਤ ਕਰੀਏ ਅਤੇ ਗ੍ਰਾਫ਼ ਖਿੱਚੀਏ ਤਾਂ ਇਹ ਚਿੱਤਰ 2.2 ਵਿੱਚ ਦਿਖਾਏ ਗਏ ਵਰਗਾ ਹੋਵੇਗਾ।

ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਕਿਸੇ ਦੋ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ $ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ ਦੇ ਲਈ ਸੰਗਤ ਸਮੀਕਰਣ $y = ax^2 + bx + c$ ਦੇ ਗ੍ਰਾਫ਼ ਦਾ ਅਕਾਰ ਜਾਂ ਤਾਂ ਉੱਪਰ ਵੱਲ ਖੁੱਲਾ $\bigcup$ ਵਰਗਾ ਜਾਂ ਹੇਠਲੇ ਪਾਸੇ ਖੁੱਲਾ $\bigcap$ ਵਰਗਾ ਹੋਵੇਗਾ। ਜੋ ਇਸ 'ਤੇ ਨਿਰਭਰ ਕਰੇਗਾ ਕਿ $a > 0$ ਹੈ ਜਾਂ $a < 0$ ਹੈ (ਇਹਨਾਂ ਵਕਰਾਂ ਨੂੰ **ਪੈਰਾਬੋਲਾ (parabola)** ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ)।

ਸਾਰਣੀ 2.1 ਵਿੱਚ ਤੁਸੀਂ ਦੇਖ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ ਦੋ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ ਦੇ ਸਿਫ਼ਰ -1 ਅਤੇ 4 ਹਨ। ਇਸ ਉੱਪਰ ਵੀ ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ -1 ਅਤੇ 4 ਉਹਨਾਂ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੇ x-ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਹਨ ਜਿੱਥੇ $y = x^2 - 3x - 4$ ਦਾ ਗ੍ਰਾਫ਼ x-ਧੁਰੇ ਨੂੰ ਕੱਟਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ



ਚਿੱਤਰ 2.2

ਦੋ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ $x^2 - 3x - 4$ ਦੇ ਸਿਫ਼ਰ ਉਹਨਾਂ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੇ x-ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਹਨ, ਜਿੱਥੇ $y = x^2 - 3x - 4$ ਦਾ ਗ੍ਰਾਫ਼ x-ਧੁਰੇ ਨੂੰ ਕੱਟਦਾ ਹੈ।

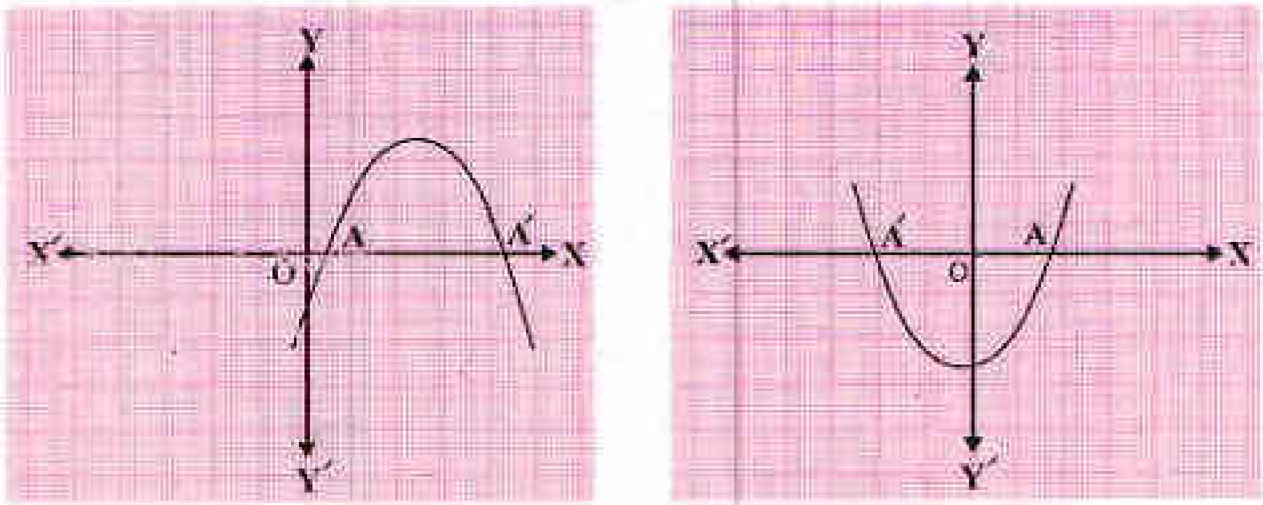
ਇਹ ਤੱਥ ਸਾਰੀਆਂ ਦੋ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦਾਂ ਲਈ ਸੱਚ ਹੈ, ਭਾਵ ਦੋ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ $ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ ਦੇ ਸਿਫ਼ਰ ਉਹਨਾਂ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੇ x – ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਹਨ, ਜਿੱਥੇ $y = ax^2 + bx + c$ ਨੂੰ ਨਿਰੂਪਿਤ ਕਰਨ ਵਾਲਾ ਪੈਰਾਬੋਲਾ (parabola) x-ਧੁਰੇ ਨੂੰ ਕੱਟਦਾ ਹੈ।

$y = ax^2 + bx + c$ ਦੇ ਆਲੇਖ ਦੇ ਅਕਾਰ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰਨ 'ਤੇ ਤਿੰਨ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੀਆਂ ਸਥਿਤੀਆਂ ਦੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੈ।

ਸਥਿਤੀ

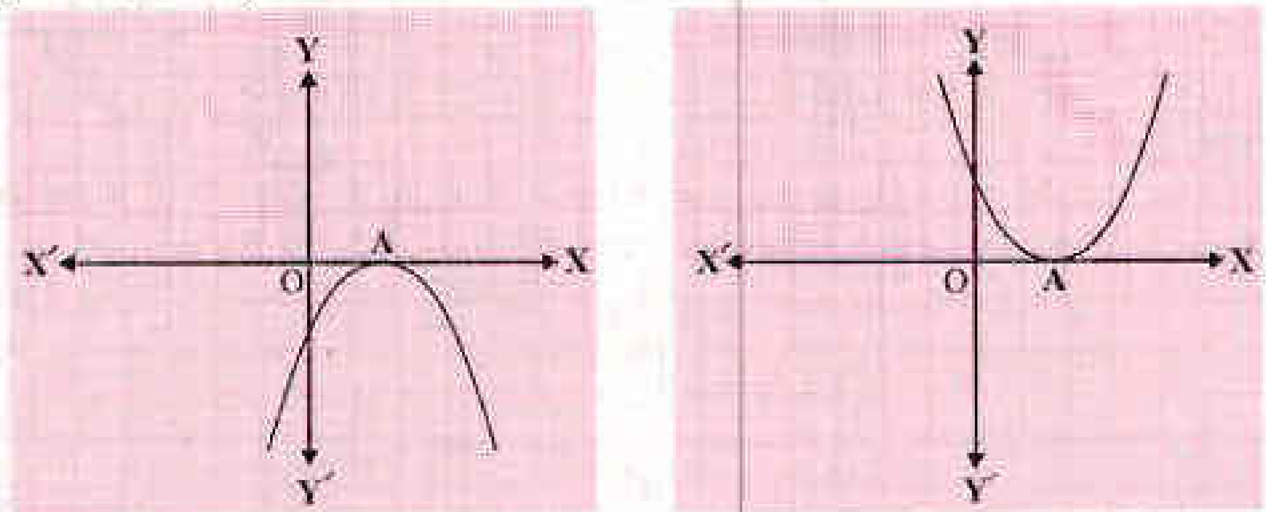
(i) : ਜਿੱਥੇ ਆਲੇਖ x-ਧੁਰੇ ਨੂੰ ਅੱਲਗ-ਅੱਲਗ ਬਿੰਦੂਆਂ A ਅਤੇ A′ ਤੇ ਕੱਟਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ A ਅਤੇ A′ ਦੇ x–ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਦੋ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ $ax^2 + bx + c$ ਦੇ **ਦੋ ਸਿਫ਼ਰ** ਹਨ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 2.3)।



ਚਿੱਤਰ 2.3

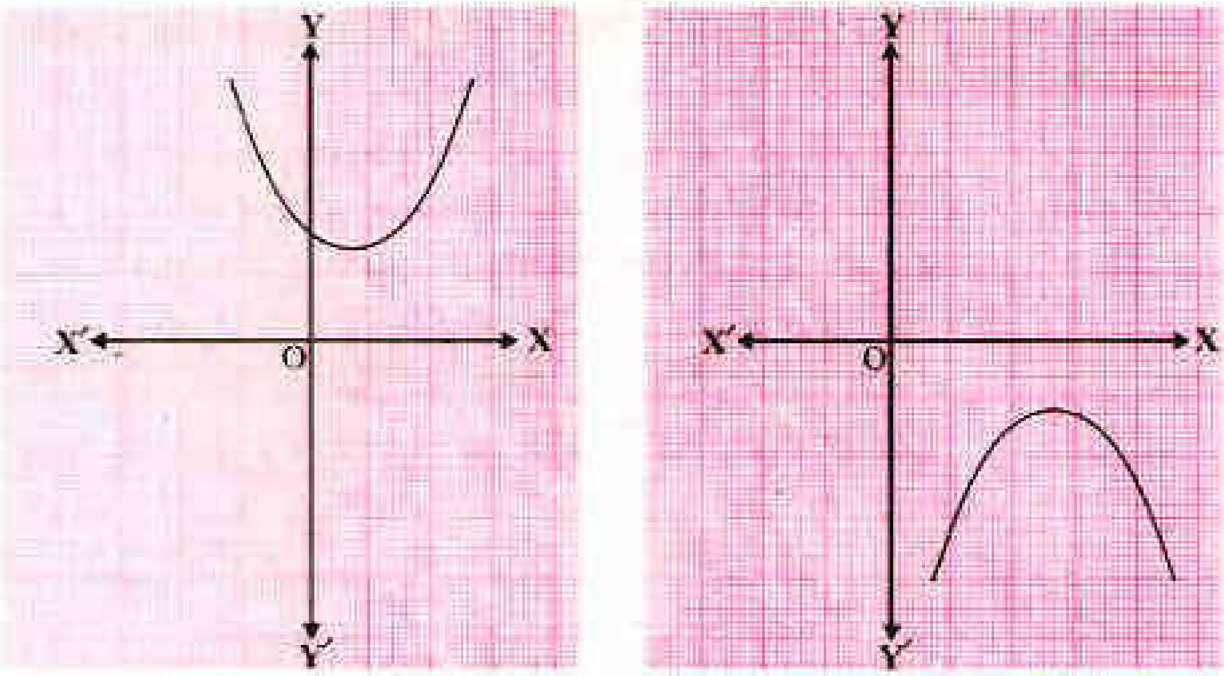
ਸਥਿਤੀ (ii) : ਇੱਥੇ ਆਲੇਖ x-ਧੁਰੇ ਨੂੰ ਕੇਵਲ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ 'ਤੇ ਭਾਵ ਦੋ ਸੰਪਾਤੀ ਬਿੰਦੂਆਂ 'ਤੇ ਕੱਟਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਸਥਿਤੀ (i) ਦੇ ਦੋ ਬਿੰਦੂ A ਅਤੇ A′ ਇੱਥੇ ਸੰਪਾਤੀ ਹੋ ਕੇ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ A ਹੋ ਜਾਂਦੇ ਹਨ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 2.4)।



ਚਿੱਤਰ 2.4

ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ, A ਦਾ x-ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਦੋ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ $ax^2 + bx + c$ ਦਾ **ਕੇਵਲ ਇੱਕ ਸਿਫ਼ਰ** ਹੈ।

ਸਥਿਤੀ (iii) : ਇੱਥੇ ਆਲੇਖ ਜਾਂ ਤਾਂ ਪੂਰਨ ਰੂਪ ਵਿੱਚ x–ਧੁਰੇ ਤੋਂ ਉੱਪਰ ਜਾਂ ਤਾਂ ਪੂਰਨ ਰੂਪ ਵਿੱਚ x–ਧੁਰੇ ਤੋਂ ਹੇਠਾਂ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ, ਇਹ x–ਧੁਰੇ ਨੂੰ ਕਿਤੇ ਵੀ ਨਹੀਂ ਕੱਟਦਾ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 2.5)।



ਚਿੱਤਰ 2.5

ਇਸ ਲਈ, ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਦੋ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ $ax^2 + bx + c$ **ਦਾ ਕੋਈ ਸਿਫ਼ਰ ਨਹੀਂ** ਹੈ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਤੁਸੀਂ ਜਿਮਾਇਤੀ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦੇਖ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ ਕਿਸੇ ਦੋ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ ਦੇ ਦੋ ਅੱਲਗ-ਅੱਲਗ ਸਿਫ਼ਰ ਜਾਂ ਦੋ ਬਰਾਬਰ ਸਿਫ਼ਰ (ਭਾਵ ਇੱਕ ਸਿਫ਼ਰ) ਜਾਂ ਕੋਈ ਵੀ ਸਿਫ਼ਰ ਨਹੀਂ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇਸਦਾ ਇਹ ਵੀ ਅਰਥ ਹੈ ਕਿ ਘਾਤ 2 ਦੇ ਕਿਸੇ ਬਹੁਪਦ ਦੇ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਦੋ ਸਿਫ਼ਰ ਹੋ ਸਕਦੇ ਹਨ।

ਹੁਣ ਤੁਸੀਂ ਇੱਕ ਤਿੰਨ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ ਦੇ ਸਿਫ਼ਰਾਂ ਦੇ ਜਿਮਾਇਤੀ ਅਰਥ ਬਾਰੇ ਕੀ ਉਮੀਦ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ? ਆਉ ਇਸਦਾ ਪਤਾ ਕਰੀਏ। ਤਿੰਨ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ $x^3 - 4x$ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ। ਇਹ ਦੇਖਣ ਦੇ ਲਈ ਕਿ $y = x^3 - 4x$ ਦਾ ਆਲੇਖ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲੱਗਦਾ ਹੈ, ਆਉ x ਦੇ ਕੁਝ ਮੁੱਲਾਂ ਦੇ ਸੰਗਤ y ਦੇ ਕੁਝ ਮੁੱਲਾਂ ਨੂੰ ਸਾਰਣੀ 2.2 ਵਿੱਚ ਸੂਚੀ ਬੱਧ ਕਰੀਏ।

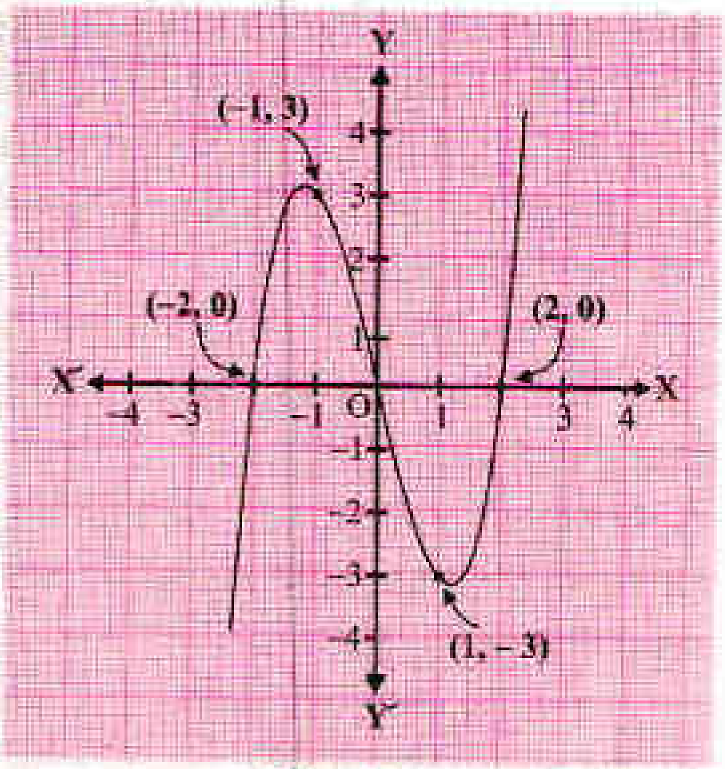
ਸਾਰਣੀ 2.2

x	–2	–1	0	1	2
$y = x^3 - 4x$	0	3	0	–3	0

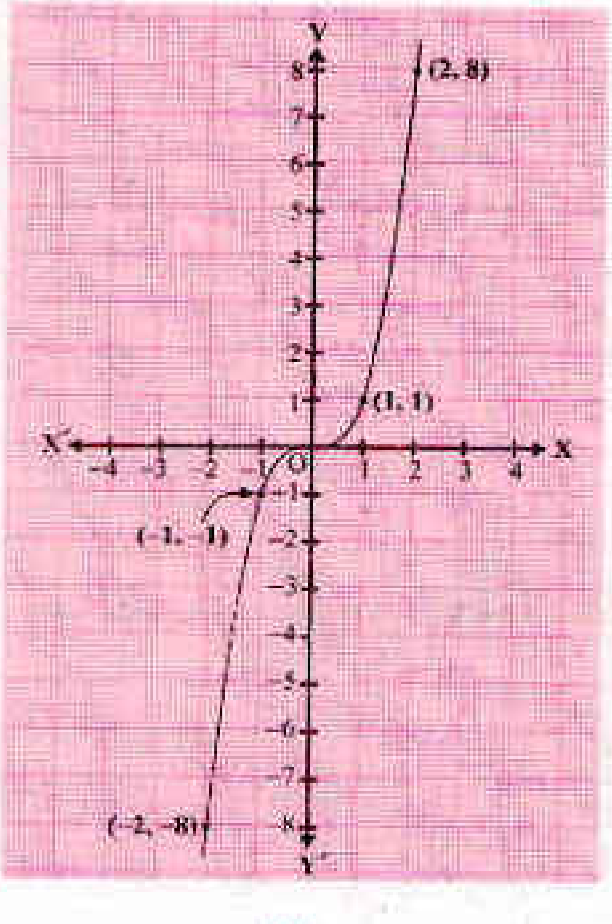
ਸਾਰਣੀ ਦੇ ਬਿੰਦੂਆਂ ਨੂੰ ਗ੍ਰਾਫ਼ ਪੇਪਰ 'ਤੇ ਅੰਕਿਤ ਕਰਨ ਅਤੇ ਆਲੇਖ ਖਿੱਚਣ ਨਾਲ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $y = x^3 - 4x$ ਦਾ ਆਲੇਖ ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਚਿੱਤਰ 2.6 ਵਰਗਾ ਦਿਖਦਾ ਹੈ।

ਉਪਰੋਕਤ ਸਾਰਣੀ ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਤਿੰਨ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ $x^3 - 4x$ ਦੇ ਸਿਫ਼ਰ $-2, 0$ ਅਤੇ 2 ਹਨ। ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ $-2, 0$ ਅਤੇ 2 ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਉਹਨਾਂ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੇ x– ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਹਨ, ਜਿੱਥੇ $y = x^3 - 4x$ ਦਾ ਆਲੇਖ x-ਧੁਰੇ ਨੂੰ ਕੱਟਦਾ ਹੈ। ਕਿਉਂਕਿ ਵਕਰ x-ਧੁਰੇ ਨੂੰ ਕੇਵਲ ਇਹਨਾਂ ਹੀ ਤਿੰਨ ਬਿੰਦੂਆਂ ਤੇ ਕਟਦਾ ਹੈ ਇਸ ਲਈ ਬਹੁਪਦ ਦੇ ਸਿਫ਼ਰ ਕੇਵਲ ਇਹਨਾਂ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੇ x-ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਹਨ।

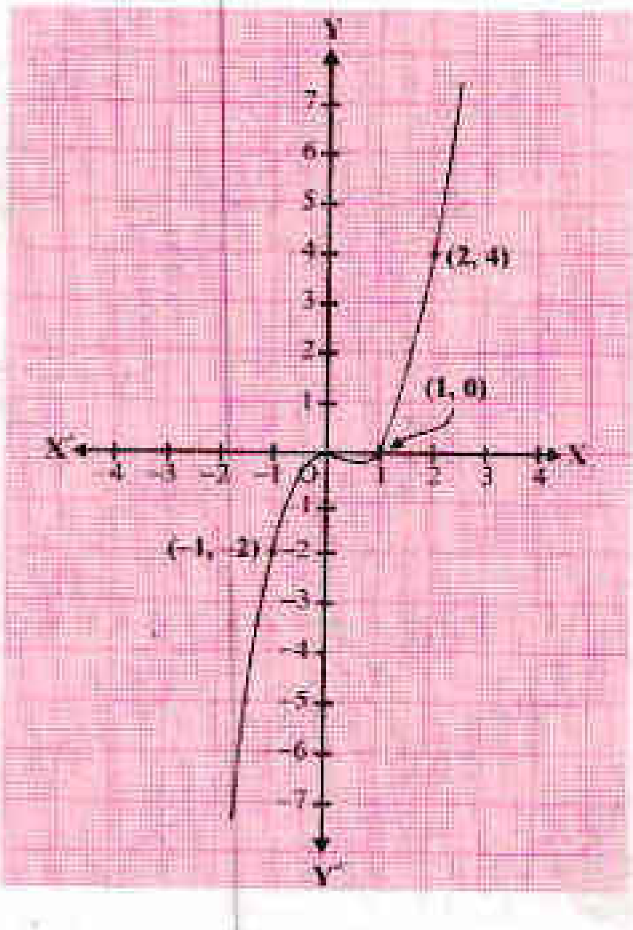
ਆਉ ਅਸੀਂ ਹੁਣ ਕੁਝ ਹੋਰ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ। ਤਿੰਨ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ x^3 ਅਤੇ $x^3 - x^2$ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ। ਅਸੀਂ $y = x^3$ ਅਤੇ $y = x^3 - x^2$ ਦੇ ਆਲੇਖ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਚਿੱਤਰ 2.7 ਅਤੇ 2.8 ਵਿੱਚ ਖਿੱਚਦੇ ਹਾਂ।



ਚਿੱਤਰ 2.6



ਚਿੱਤਰ 2.7



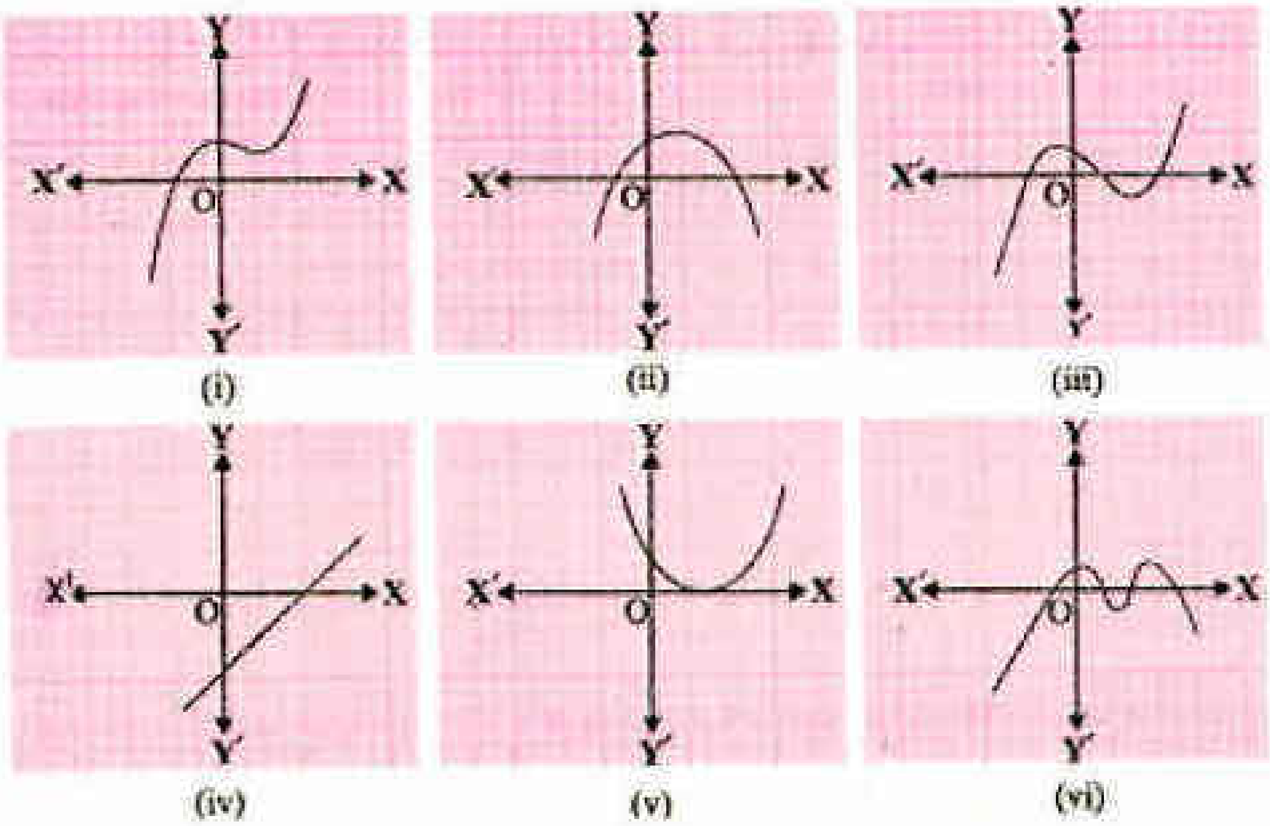
ਚਿੱਤਰ 2.8

ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ਬਹੁਪਦ x^3 ਦਾ ਕੇਵਲ ਇੱਕ ਸਿਫ਼ਰ 0 ਹੈ। ਚਿੱਤਰ 2.7 ਤੋਂ ਵੀ ਤੁਸੀਂ ਦੇਖ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ 0 ਕੇਵਲ ਉਸ ਬਿੰਦੂ ਦਾ x-ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ $y = x^3$ ਦਾ ਗ੍ਰਾਫ਼ x-ਧੁਰੇ ਨੂੰ ਕੱਟਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਿਉਂਕਿ $x^3 - x^2 = x^2(x-1)$ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਬਹੁਪਦ $x^3 - x^2$ ਦੇ ਸਿਫ਼ਰ ਕੇਵਲ 0 ਅਤੇ 1 ਹਨ। ਚਿੱਤਰ 2.8 ਵਿੱਚ ਵੀ ਇਹ ਮੁੱਲ ਕੇਵਲ ਉਹਨਾਂ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੇ x-ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਹਨ, ਜਿੱਥੇ $y = x^3 - x^2$ ਦਾ ਆਲੇਖ x-ਧੁਰੇ ਨੂੰ ਕੱਟਦਾ ਹੈ।

ਉਪਰੋਕਤ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਕਿਸੇ ਤਿੰਨ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ ਦੇ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਤਿੰਨ ਸਿਫ਼ਰ ਹੋ ਸਕਦੇ ਹਨ। ਦੂਸਰੇ ਸ਼ਬਦਾਂ ਵਿੱਚ, ਘਾਤ 3 ਦੇ ਕਿਸੇ ਬਹੁਪਦ ਦੇ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਤਿੰਨ ਸਿਫ਼ਰ ਹੋ ਸਕਦੇ ਹਨ।

ਟਿੱਪਣੀ : ਵਿਆਪਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ, ਘਾਤ n ਦੇ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਬਹੁਪਦ $p(x)$ ਦੇ ਲਈ $y = p(x)$ ਦਾ ਗ੍ਰਾਫ਼ x-ਧੁਰੇ ਨੂੰ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ n ਬਿੰਦੂਆਂ 'ਤੇ ਕੱਟਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ, ਘਾਤ n ਦੇ ਕਿਸੇ ਬਹੁਪਦ ਦੇ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ n ਸਿਫ਼ਰ ਹੋ ਸਕਦੇ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ 1 : ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਚਿੱਤਰ 2.9 ਦੇ ਆਲੇਖਾਂ ਨੂੰ ਦੇਖੋ। ਹਰੇਕ ਚਿੱਤਰ $y = p(x)$ ਜਿੱਥੇ $p(x)$ ਇੱਕ ਬਹੁਪਦ ਹੈ, ਦਾ ਆਲੇਖ ਹੈ। ਆਲੇਖਾਂ ਤੋਂ ਹਰ ਇੱਕ ਦੇ ਲਈ, $p(x)$ ਦੇ ਸਿਫ਼ਰਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।



ਚਿੱਤਰ 2.9

ਹੱਲ : (i) ਸਿਫ਼ਰਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ 1 ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ ਗ੍ਰਾਫ਼ x-ਧੁਰੇ ਨੂੰ ਕੇਵਲ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ 'ਤੇ ਕੱਟਦਾ ਹੈ।

(ii) ਸਿਫ਼ਰਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ 2 ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ ਗ੍ਰਾਫ਼ x-ਧੁਰੇ ਨੂੰ ਦੋ ਬਿੰਦੂਆਂ 'ਤੇ ਕੱਟਦਾ ਹੈ।

(iii) ਸਿਫ਼ਰਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ 3 ਹੈ। (ਕਿਉਂ?)

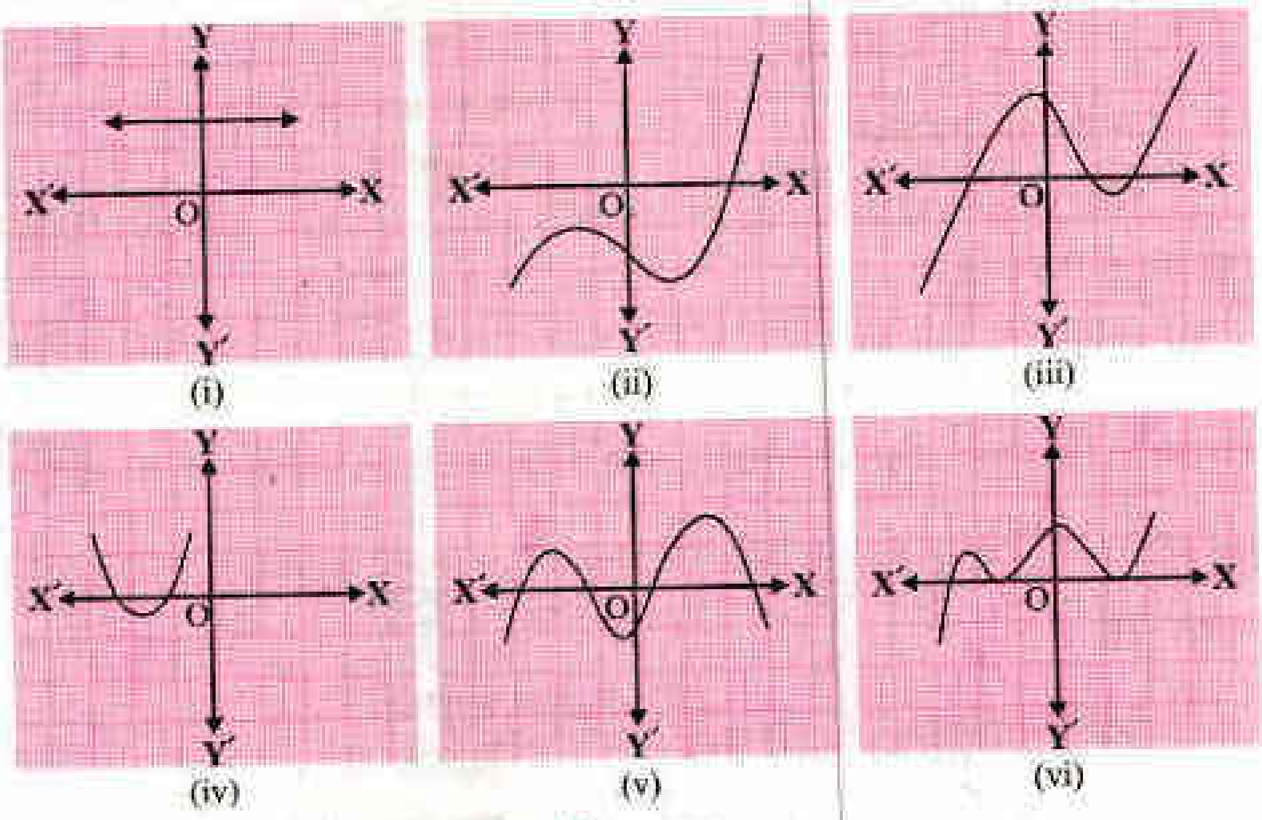
(iv) ਸਿਫ਼ਰਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ 1 ਹੈ। (ਕਿਉਂ?)

(v) ਸਿਫ਼ਰਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ 1 ਹੈ। (ਕਿਉਂ?)

(vi) ਸਿਫ਼ਰਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ 4 ਹੈ। (ਕਿਉਂ?)

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 2.1

1. ਕਿਸੇ ਬਹੁਪਦ $p(x)$ ਦੇ ਲਈ $y = p(x)$ ਦਾ ਆਲੇਖ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਚਿੱਤਰ 2.10 ਵਿੱਚ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਹੈ। ਹਰ ਇੱਕ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ $p(x)$ ਦੇ ਸਿਫ਼ਰਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।



ਚਿੱਤਰ 2.10

2.3 ਕਿਸੇ ਬਹੁਪਦ ਦੇ ਸਿਫ਼ਰਾਂ ਅਤੇ ਗੁਣਾਂਕਾਂ ਵਿੱਚ ਸੰਬੰਧ

ਤੁਸੀਂ ਪਹਿਲਾਂ ਹੀ ਦੇਖ ਚੁੱਕੇ ਹੋ ਕਿ ਰੇਖੀ ਬਹੁਪਦ $ax + b$ ਦਾ ਸਿਫ਼ਰ $-\frac{b}{a}$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਕਿਸੇ ਦੋ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ ਦੇ ਸਿਫ਼ਰਾਂ ਅਤੇ ਉਸਦੇ ਗੁਣਾਂਕਾਂ ਦੇ ਸੰਬੰਧ ਵਿੱਚ ਭਾਗ 2.1 ਵਿੱਚ ਪੁੱਛੇ ਗਏ

ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਦਾ ਉੱਤਰ ਦੇਣ ਦਾ ਯਤਨ ਕਰਾਂਗੇ। ਇਸਦੇ ਲਈ ਇੱਕ ਦੋ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ ਮੰਨ ਲਓ $p(x) = 2x^2 - 8x + 6$ ਲਓ। IX ਜਮਾਤ ਵਿੱਚ, ਤੁਸੀਂ ਸਿੱਖ ਚੁੱਕੇ ਹੋ ਕਿ ਵਿਚਕਾਰਲੇ ਪਦ ਨੂੰ ਤੋੜ ਕੇ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਿਸੇ ਦੋ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ ਦੇ ਗੁਣਨਖੰਡ ਬਣਾਏ ਜਾਂਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ, ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ ਵਿਚਕਾਰਲੇ ਪਦ '$-8x$' ਨੂੰ ਦੋ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਪਦਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਣਾ ਹੈ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ $6 \times 2x^2 = 12x^2$ ਹੋਵੇ।

ਇਸ ਲਈ, ਅਸੀਂ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ :

$$2x^2 - 8x + 6 = 2x^2 - 6x - 2x + 6 = 2x(x-3) - 2(x-3)$$
$$= (2x-2)(x-3) = 2(x-1)(x-3)$$

ਇਸ ਲਈ, $p(x) = 2x^2 - 8x + 6$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਸਿਫ਼ਰ ਹੈ, ਜਦੋਂ $x - 1 = 0$ ਜਾਂ $x - 3 = 0$ ਹੋਵੇ, ਭਾਵ $x = 1$ ਜਾਂ $x = 3$ ਹੋਵੇ। ਇਸ ਲਈ $2x^2 - 8x + 6$ ਦੇ ਸਿਫ਼ਰ 1 ਅਤੇ 3 ਹਨ। ਧਿਆਨ ਦਿਓ :

$$\text{ਸਿਫ਼ਰਾਂ ਦਾ ਜੋੜ} = 1 + 3 = 4 = \frac{-(-8)}{2} = \frac{-(x \text{ ਦਾ ਗੁਣਾਂਕ})}{x^2 \text{ ਦਾ ਗੁਣਾਂਕ}}$$

$$\text{ਸਿਫ਼ਰਾਂ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ} = 1 \times 3 = 3 = \frac{6}{2} = \frac{\text{ਅਚਲ ਪਦ}}{x^2 \text{ ਦਾ ਗੁਣਾਂਕ}}$$

ਆਓ ਇੱਕ ਹੋਰ ਦੋ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ, ਮੰਨ ਲਓ $p(x) = 3x^2 + 5x - 2$ ਲਓ। ਵਿਚਕਾਰ ਵਾਲੇ ਪਦ ਨੂੰ ਤੋੜਣ 'ਤੇ,

$$3x^2 + 5x - 2 = 3x^2 + 6x - x - 2 = 3x(x+2) - 1(x+2)$$
$$= (3x-1)(x+2)$$

ਇਸ ਲਈ, $3x^2 + 5x - 2$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਸਿਫ਼ਰ ਹੋਵੇਗਾ ਜੇਕਰ $3x - 1 = 0$ ਹੋਵੇ ਜਾਂ $x + 2 = 0$ ਹੋਵੇ, ਭਾਵ ਜਦੋਂ $x = \frac{1}{3}$ ਹੋਵੇ ਜਾਂ $x = -2$ ਹੋਵੇ। ਇਸ ਲਈ $3x^2 + 5x - 2$ ਦੇ ਸਿਫ਼ਰ $\frac{1}{3}$ ਅਤੇ -2 ਹਨ।

ਧਿਆਨ ਦਿਓ :

$$\text{ਸਿਫ਼ਰਾਂ ਦਾ ਜੋੜ} = \frac{1}{3} + (-2) = \frac{-5}{3} = \frac{-(x \text{ ਦਾ ਗੁਣਾਂਕ})}{x^2 \text{ ਦਾ ਗੁਣਾਂਕ}}$$

$$\text{ਸਿਫ਼ਰਾਂ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ} = \frac{1}{3} \times -2 = \frac{-2}{3} = \frac{\text{ਅਚਲ ਪਦ}}{x^2 \text{ ਦਾ ਗੁਣਾਂਕ}}$$

ਵਿਆਪਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ, ਜੇਕਰ * α, β ਦੋ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ $p(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$ ਦੇ ਸਿਫ਼ਰ ਹੋਣ, ਤਾਂ ਤੁਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹੋ ਕਿ $x - \alpha$ ਅਤੇ $x - \beta$, $p(x)$ ਦੇ ਗੁਣਨਖੰਡ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

* α, β ਯੂਨਾਨੀ ਭਾਸ਼ਾ ਦੇ ਅੱਖਰ ਹਨ, ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਅਲਫਾ, ਬੀਟਾ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਬਾਅਦ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਹੋਰ ਅੱਖਰ γ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਾਂਗੇ, ਜਿਸ ਨੂੰ ਗਾਮਾ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ,

$$ax^2 + bx + c = k(x - \alpha)(x - \beta), \text{ ਜਿੱਥੇ } k \text{ ਇੱਕ ਅਚਲ ਹੈ।}$$
$$= k[x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta]$$
$$= kx^2 - k(\alpha + \beta)x + k\alpha\beta$$

ਦੋਹਾਂ ਪਾਸਿਆਂ ਦੇ x^2, x ਦੇ ਗੁਣਾਂਕਾਂ ਅਤੇ ਅਚਲ ਪਦਾਂ ਦੀ ਤੁਲਨਾਂ ਕਰਨ 'ਤੇ, ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ :

$$a = k,\ b = -k(\alpha + \beta) \text{ ਅਤੇ } c = k\alpha\beta$$

ਇਸ ਤੋਂ ਮਿਲਦਾ ਹੈ $\alpha + \beta = \dfrac{-b}{a}$

$$\alpha\beta = \frac{c}{a}$$

ਭਾਵ ਸਿਫ਼ਰਾਂ ਦਾ ਜੋੜ $= \alpha + \beta = \dfrac{-b}{a} = \dfrac{-(x \text{ ਦਾ ਗੁਣਾਂਕ})}{x^2 \text{ ਦਾ ਗੁਣਾਂਕ}}$,

ਸਿਫ਼ਰਾਂ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ $= \alpha\beta = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\text{ਅਚਲ ਪਦ}}{x^2 \text{ ਦਾ ਗੁਣਾਂਕ}}$

ਆਉ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਣਾਂ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ।

ਉਦਾਹਰਣ 2 : ਦੋ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ $x^2 + 7x + 10$ ਦੇ ਸਿਫ਼ਰ ਪਤਾ ਕਰੋ ਅਤੇ ਸਿਫ਼ਰਾਂ ਅਤੇ ਗੁਣਾਂਕਾਂ ਦੇ ਵਿੱਚਕਾਰ ਸੰਬੰਧਾਂ ਦੀ ਸੱਚਾਈ ਦੀ ਜਾਂਚ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤਾ ਹੈ : $x^2 + 7x + 10 = (x + 2)(x + 5)$

ਇਸ ਲਈ $x^2 + 7x + 10$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਸਿਫ਼ਰ ਹੋਵੇਗਾ, ਜਦ $x + 2 = 0$ ਹੋਵੇਗਾ ਜਾਂ $x + 5 = 0$ ਹੋਵੇਗਾ ਭਾਵ $x = -2$ ਜਾਂ $x = -5$ ਹੋਵੇਗਾ। ਇਸ ਲਈ $x^2 + 7x + 10$ ਦੇ ਸਿਫ਼ਰ -2 ਅਤੇ -5 ਹਨ। ਹੁਣ

$$\text{ਸਿਫ਼ਰਾਂ ਦਾ ਜੋੜ} = -2 + (-5) = -7 = \frac{-(7)}{1} = \frac{-(x \text{ ਦਾ ਗੁਣਾਂਕ})}{x^2 \text{ ਦਾ ਗੁਣਾਂਕ}}$$

$$\text{ਸਿਫ਼ਰਾਂ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ} = -2 \times -5 = 10 = \frac{10}{1} = \frac{\text{ਅਚਲ ਪਦ}}{x^2 \text{ ਦਾ ਗੁਣਾਂਕ}}$$

ਉਦਾਹਰਣ 3 : ਬਹੁਪਦ $x^2 - 3$ ਦੇ ਸਿਫ਼ਰ ਪਤਾ ਕਰੋ ਅਤੇ ਸਿਫ਼ਰਾਂ ਅਤੇ ਗੁਣਾਂਕਾਂ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਸੰਬੰਧਾਂ ਦੀ ਸੱਚਾਈ ਦੀ ਜਾਂਚ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਸਰਬਸਮਤਾ $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ ਨੂੰ ਯਾਦ ਕਰੋ। ਇਸ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ, ਅਸੀਂ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ :

$$x^2-3=\left(x-\sqrt{3}\right)\left(x+\sqrt{3}\right)$$

ਇਸ ਲਈ, x^2-3 ਦਾ ਮੁੱਲ ਜ਼ਿਫ਼ਰ ਹੋਵੇਗਾ, ਜਦ $x=\sqrt{3}$ ਹੋਵੇ ਜਾਂ $x=-\sqrt{3}$

ਇਸ ਲਈ, x^2-3 ਦੇ ਜ਼ਿਫ਼ਰ $\sqrt{3}$ ਅਤੇ $-\sqrt{3}$ ਹਨ। ਹੁਣ

$$\text{ਜ਼ਿਫ਼ਰਾਂ ਦਾ ਜੋੜ} = \sqrt{3}-\sqrt{3}=0=\frac{-(x \text{ ਦਾ ਗੁਣਾਂਕ})}{x^2 \text{ ਦਾ ਗੁਣਾਂਕ}}$$

$$\text{ਜ਼ਿਫ਼ਰਾਂ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ} = \left(\sqrt{3}\right)\left(-\sqrt{3}\right)=-3=\frac{-3}{1}=\frac{\text{ਅਚਲ ਪਦ}}{x^2 \text{ ਦਾ ਗੁਣਾਂਕ}}$$

ਉਦਾਹਰਣ 4 : ਇੱਕ ਦੋ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ ਪਤਾ ਕਰੋ, ਜਿਸਦੇ ਜ਼ਿਫ਼ਰਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਅਤੇ ਗੁਣਨਫਲ ਕ੍ਰਮਵਾਰ – 3 ਅਤੇ 2 ਹੈ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਦੋ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ ax^2+bx+c ਹੈ ਅਤੇ ਇਸਦੇ ਜ਼ਿਫ਼ਰ α ਅਤੇ β ਹਨ।

$$\therefore \quad \alpha+\beta=-3=\frac{-b}{a}$$

$$\alpha\beta = 2 = \frac{c}{a}$$

ਜੇਕਰ $a=1$ ਹੈ ਤਾਂ $b=3$ ਅਤੇ $c=2$ ਹੋਵੇਗਾ।

ਇਸ ਲਈ, ਇੱਕ ਦੋ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੀਆਂ ਗਈਆਂ ਸ਼ਰਤਾਂ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ, x^2+3x+2 ਹੈ।

ਤੁਸੀਂ ਜਾਂਚ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ ਹੋਰ ਕੋਈ ਦੋ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ ਜੋ ਇਨ੍ਹਾਂ ਸ਼ਰਤਾਂ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦੀ ਹੈ, $k(x^2+3x+2)$ ਵਰਗੀ ਹੋਵੇਗੀ, ਜਿੱਥੇ k ਇੱਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਆਉ ਹੁਣ ਤਿੰਨ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ। ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਸੋਚਦੇ ਹੋ ਕਿ ਤਿੰਨ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ ਦੀਆਂ ਜ਼ਿਫ਼ਰਾਂ ਅਤੇ ਉਸਦੇ ਗੁਣਾਂਕਾਂ ਦੇ ਵਿੱਚ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦਾ ਸੰਬੰਧ ਹੁੰਦਾ ਹੈ?

ਆਉ $p(x)=2x^3-5x^2-14x+8$ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ।

ਤੁਸੀਂ ਇਸਦੀ ਪੜਤਾਲ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ $x=4$, -2 ਅਤੇ $\frac{1}{2}$ ਦੇ ਲਈ $p(x)=0$ ਹੈ। ਕਿਉਂਕਿ $p(x)$ ਦੇ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਤਿੰਨ ਜ਼ਿਫ਼ਰ ਹੋ ਸਕਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ $2x^3-5x^2-14x+8$ ਦੇ ਇਹ ਹੀ ਤਿੰਨ ਜ਼ਿਫ਼ਰ ਹਨ। ਹੁਣ ਜ਼ਿਫ਼ਰਾਂ ਦਾ ਜੋੜ $=4+(-2)+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}=\frac{-(-5)}{2}=\frac{-(x^2 \text{ ਦਾ ਗੁਣਾਂਕ})}{x^3 \text{ ਦਾ ਗੁਣਾਂਕ}}$

$$\text{ਜ਼ਿਫ਼ਰਾਂ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ} = 4\times-2\times\frac{1}{2}=-4=\frac{-8}{2}=\frac{-\text{ ਅਚਲ ਪਦ}}{x^3 \text{ ਦਾ ਗੁਣਾਂਕ}}$$

ਪ੍ਰੰਤੂ ਇੱਥੇ ਇੱਕ ਹੋਰ ਸੰਬੰਧ ਵੀ ਹੈ। ਦੋ ਸਿਫ਼ਰਾਂ ਨੂੰ ਇੱਕਠਾ ਲੈ ਕੇ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲਾਂ ਦੇ ਜੋੜ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ।

ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ : $\{4\times(-2)\}+\left\{(-2)\times\frac{1}{2}\right\}+\left\{\frac{1}{2}\times 4\right\}$

$$= -8-1+2=-7=\frac{-14}{2}=\frac{\text{x ਦਾ ਗੁਣਾਂਕ}}{\text{x}^3\text{ ਦਾ ਗੁਣਾਂਕ}}$$

ਵਿਆਪਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ, ਇਹ ਸਿੱਧ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਕਿ ਜੇਕਰ α, β, γ ਤਿੰਨ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ ax^3+bx^2+cx+d ਦੀਆਂ ਸਿਫ਼ਰਾਂ ਹੋਣ, ਤਾਂ

$$\alpha+\beta+\gamma=\frac{-b}{a}$$

$$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a}$$

$$\alpha\beta\gamma=\frac{-d}{a}$$

ਆਉ ਇੱਕ ਉਦਾਹਰਣ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ।

ਉਦਾਹਰਣ 5* : ਜਾਂਚ ਕਰੋ ਕਿ ਤਿੰਨ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ $p(x)=3x^3-5x^2-11x-3$ ਦੇ ਸਿਫ਼ਰ $3, -1$ ਅਤੇ $-\frac{1}{3}$ ਹਨ। ਇਸ ਤੋਂ ਉਪਰੰਤ ਸਿਫ਼ਰਾਂ ਅਤੇ ਗੁਣਾਂਕਾਂ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਸੰਬੰਧਾਂ ਦੀ ਸੱਚਾਈ ਦੀ ਪੜਤਾਲ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਬਹੁਪਦ ਦੀ ਤੁਲਨਾ ax^3+bx^2+cx+d ਨਾਲ ਕਰਨ 'ਤੇ ਸਾਨੂੰ, ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

$a=3, b=-5, c=-11, d=-3$ ਹੈ। ਦੁਬਾਰਾ,

$$p(3)=3\times 3^3-(5\times 3^2)-(11\times 3)-3=81-45-33-3=0$$

$$p(-1)=3\times(-1)^3-5\times(-1)^2-11\times(-1)-3=-3-5+11-3=0$$

$$p\left(-\frac{1}{3}\right)=3\times\left(-\frac{1}{3}\right)^3-5\times\left(-\frac{1}{3}\right)^2-11\times\left(-\frac{1}{3}\right)-3$$

$$=-\frac{1}{9}-\frac{5}{9}+\frac{11}{3}-3=-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}=0$$

* ਇਹ ਉਦਾਹਰਣ ਪ੍ਰੀਖਿਆ ਦੀ ਦ੍ਰਿਸ਼ਟੀ ਤੋਂ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ, $3x^3-5x^2-11x-3$ ਦੇ ਜ਼ਿਫ਼ਰ 3, −1 ਅਤੇ $-\frac{1}{3}$ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ, ਅਸੀਂ $\alpha=3, \beta=-1$ ਅਤੇ $\gamma=-\frac{1}{3}$ ਲਈ ਹਨ। ਹੁਣ

$$\alpha+\beta+\gamma=3+(-1)+\left(-\frac{1}{3}\right)=2-\frac{1}{3}=\frac{5}{3}=\frac{-(-5)}{3}=\frac{-b}{a}$$

$$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=3\times(-1)+(-1)\times\left(-\frac{1}{3}\right)+\left(-\frac{1}{3}\right)\times 3=-3+\frac{1}{3}-1=\frac{-11}{3}=\frac{c}{a}$$

ਅਤੇ $\alpha\beta\gamma=3\times(-1)\times\left(-\frac{1}{3}\right)=1=\frac{-(-3)}{3}=\frac{-d}{a}$ ਹੈ।

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 2.2

1. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਦੋ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦਾਂ ਦੇ ਜ਼ਿਫ਼ਰ ਪਤਾ ਕਰੋ ਅਤੇ ਜ਼ਿਫ਼ਰਾਂ ਅਤੇ ਗੁਣਾਂਕਾਂ ਦੇ ਵਿੱਚਕਾਰ ਸੰਬੰਧਾਂ ਦੀ ਸੱਚਾਈ ਦੀ ਜਾਂਚ ਕਰੋ :

   (i) x^2-2x-8 (ii) $4s^2-4s+1$ (iii) $6x^2-3-7x$

   (iv) $4u^2+8u$ (v) t^2-15 (vi) $3x^2-x-4$

2. ਇੱਕ ਦੋ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ ਪਤਾ ਕਰੋ, ਜਿਸਦੇ ਜ਼ਿਫ਼ਰਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਅਤੇ ਗੁਣਨਫਲ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਦਿੱਤੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ :

   (i) $\frac{1}{4}, -1$ (ii) $\sqrt{2}, \frac{1}{3}$ (iii) $0, \sqrt{5}$

   (iv) 1, 1 (v) $-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}$ (vi) 4, 1

2.4 ਬਹੁਪਦਾਂ ਦੇ ਲਈ ਵੰਡ ਐਲਗੋਰਿਥਮ

ਤੁਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹੋ ਕਿ ਇੱਕ ਤਿੰਨ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ ਦੀਆਂ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਤਿੰਨ ਜ਼ਿਫ਼ਰਾਂ ਹੋ ਸਕਦੀਆਂ ਹਨ। ਪ੍ਰੰਤੂ ਜੇਕਰ ਤੁਹਾਨੂੰ ਕੇਵਲ ਇੱਕ ਜ਼ਿਫ਼ਰ ਦਿੱਤੀ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਦੂਸਰੀਆਂ (ਦੋ) ਜ਼ਿਫ਼ਰਾਂ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ? ਇਸਦੇ ਲਈ, ਆਓ ਤਿੰਨ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ x^3-3x^2-x+3 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ। ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਤੁਹਾਨੂੰ ਦੱਸੀਏ ਕਿ ਇਸਦੀ ਇੱਕ ਜ਼ਿਫ਼ਰ 1 ਹੈ ਤਾਂ ਤੁਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹੋ ਕਿ x^3-3x^2-x+3 ਦਾ ਇੱਕ ਗੁਣਨਖੰਡ x-1 ਹੈ। ਇਸ ਲਈ x^3-3x^2-x+3 ਨੂੰ $x-1$ ਨਾਲ ਭਾਗ ਦੇਣ 'ਤੇ x^2-2x-3 ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਵਿਚਕਾਰਲੇ ਪਦ ਨੂੰ ਤੋੜ ਕੇ x^2-2x-3 ਦੇ ਗੁਣਨਖੰਡ $(x+1)(x-3)$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਭਾਵ

$$x^3-3x^2-x+3=(x-1)(x^2-2x-3)$$

$$= (x-1)(x+1)(x-3)$$

ਇਸ ਲਈ, ਤਿੰਨ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ ਦੇ ਸਾਰੇ ਸਿਫ਼ਰ 1, – 1 ਅਤੇ 3 ਹਨ।

ਆਓ ਹੁਣ ਇੱਕ ਬਹੁਪਦ ਨੂੰ ਦੂਸਰੇ ਬਹੁਪਦ ਨਾਲ ਭਾਗ ਦੇਣ (ਕਲਨ ਵਿਧੀ) ਦੀ ਵਿਧੀ ਦੀ ਵਿਸਥਾਰ ਨਾਲ ਚਰਚਾ ਕਰੀਏ। ਵਿਧੀ ਪੂਰਵਕ ਪਗਾਂ 'ਤੇ ਧਿਆਨ ਦੇਣ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾ, ਇੱਕ ਉਦਾਹਰਣ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ।

ਉਦਾਹਰਣ 6 : $2x^2+3x+1$ ਨੂੰ $x+2$ ਨਾਲ ਭਾਗ ਦਿਉ।

$$\begin{array}{r|l} & \quad 2x-1 \\ \hline x+2 & 2x^2+3x+1 \\ & \underline{\overset{-}{2x^2} \overset{-}{+} 4x} \\ & \quad -x+1 \\ & \quad \underline{\overset{+}{-}x \overset{+}{-} 2} \\ & \qquad\quad 3 \end{array}$$

ਹੱਲ : ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ਜਦੋਂ ਬਾਕੀ ਸਿਫ਼ਰ ਹੋ ਜਾਵੇ ਜਾਂ ਇਸਦੀ ਘਾਤ ਭਾਜਕ ਦੀ ਘਾਤ ਤੋਂ ਛੋਟੀ ਹੋ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਭਾਗ ਕਰਨੀ ਬੰਦ ਕਰ ਦਿੰਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਲਈ, ਇੱਥੇ ਭਾਗਫਲ $2x-1$ ਅਤੇ ਬਾਕੀ 3 ਹੈ। ਇਸ ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ,

$$(2x-1)(x+2)+3 = 2x^2+3x-2+3 = 2x^2+3x+1$$

ਭਾਵ $\quad 2x^2+3x+1 = (x+2)(2x-1)+3$

ਇਸ ਲਈ : ਭਾਜ = ਭਾਜਕ $\times$ ਭਾਗਫਲ + ਬਾਕੀ

ਆਓ ਹੁਣ ਇਸ ਪ੍ਰਕਿਰਿਆ ਨੂੰ ਕਿਸੇ ਬਹੁਪਦ ਨੂੰ ਕਿਸੇ ਦੋ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ ਨਾਲ ਭਾਗ ਦੇਣ ਲਈ ਅੱਗੇ ਵਧਾਈਏ।

ਉਦਾਹਰਣ 7 : $3x^3+x^2+2x+5$ ਨੂੰ $1+2x+x^2$ ਨਾਲ ਭਾਗ ਕਰੋ।

$$\begin{array}{r|l} & \qquad 3x-5 \\ \hline x^2+2x+1 & 3x^3+x^2+2x+5 \\ & \underline{\overset{-}{3x^3} + \overset{-}{6x^2} + \overset{-}{3x}} \\ & \quad -5x^2-x+5 \\ & \quad \underline{\overset{+}{-5x^2} \overset{+}{-} 10x \overset{+}{-} 5} \\ & \qquad\quad 9x+10 \end{array}$$

ਹੱਲ : ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਅਸੀਂ ਭਾਜਕ ਅਤੇ ਭਾਜ ਨੂੰ ਪਦਾਂ ਦੀਆਂ ਘਟਦੀਆਂ ਹੋਈਆਂ ਘਾਤਾਂ ਅਨੁਸਾਰ ਤਰਤੀਬ-ਬੱਧ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਯਾਦ ਕਰੋ ਕਿ ਬਹੁਪਦਾਂ ਦੇ ਪਦਾਂ ਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲਿਖਣ ਨੂੰ ਬਹੁਪਦਾਂ ਦੇ ਮਿਆਰੀ (standard) ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਣਾ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਉਦਾਹਰਣ ਵਿੱਚ, ਭਾਜਕ ਪਹਿਲਾਂ ਤੋਂ ਹੀ ਮਿਆਰੀ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਹੈ ਅਤੇ ਮਿਆਰੀ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਭਾਜਕ x^2+2x+1 ਹੈ।

ਪਗ 1 : ਭਾਗਫਲ ਦਾ ਪਹਿਲਾ ਪਦ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਲਈ (ਵੱਡੇ ਤੋਂ ਵੱਡੇ) ਘਾਤ ਵਾਲੇ ਪਦ (ਭਾਵ $3x^3$) ਨੂੰ ਭਾਜਕ ਦੇ ਵੱਡੇ ਤੋਂ ਵੱਡੇ ਘਾਤ ਵਾਲੇ ਪਦ (ਭਾਵ x^2) ਨਾਲ ਭਾਗ ਦਿਉ। ਇਹ $3x$ ਹੈ। ਹੁਣ ਭਾਗ ਦੇਣ ਦੀ ਪ੍ਰਕਿਰਿਆ ਕਰੋ। ਜੋ ਬਾਕੀ ਬਚਦਾ ਹੈ ਉਹ $-5x^2-x+5$ ਹੈ।

ਪਗ 2 : ਹੁਣ ਭਾਗਫਲ ਦਾ ਦੂਸਰਾ ਪਦ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਨਵੀਂ ਭਾਜ ਦੇ ਵੱਡੇ ਤੋਂ ਵੱਡੇ ਘਾਤ ਵਾਲੇ ਪਦ (ਭਾਵ $-5x^2$) ਨੂੰ ਭਾਜਕ ਦੇ ਵੱਡੇ ਤੋਂ ਵੱਡੇ ਘਾਤ ਵਾਲੇ ਪਦ (ਭਾਵ x^2) ਨਾਲ ਭਾਗ ਕਰੋ। ਇਸ ਨਾਲ -5 ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਫਿਰ ਤੋਂ $-5x^2-x+5$ ਨੂੰ ਭਾਗ ਦੇਣ ਦੀ ਪ੍ਰਕਿਰਿਆ ਕਰੋ।

ਪਗ 3 : ਹੁਣ ਬਾਕੀ ਬਚੇ $9x + 10$ ਦੀ ਘਾਤ ਭਾਜਕ $x^2 + 2x + 1$ ਦੀ ਘਾਤ ਤੋਂ ਘੱਟ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ਭਾਗ ਦੇਣ ਦੀ ਕਿਰਿਆ ਨੂੰ ਹੋਰ ਨਹੀਂ ਕਰ ਸਕਦੇ।

ਇਸ ਲਈ, ਭਾਗਫਲ $3x - 5$ ਹੈ ਅਤੇ ਬਾਕੀ $9x + 10$ ਹੈ। ਇਸਦੇ ਇਲਾਵਾ,

$$\begin{aligned}(x^2 + 2x + 1) \times (3x - 5) + (9x + 10) &= 3x^3 + 6x^2 + 3x - 5x^2 - 10x - 5 + 9x + 10 \\ &= 3x^3 + x^2 + 2x + 5\end{aligned}$$

ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ ਫਿਰ ਤੋਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਭਾਜ = ਭਾਜਕ $\times$ ਭਾਗਫਲ + ਬਾਕੀ

ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ ਜਿਸ ਐਲਗੋਰਿਥਮ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰ ਰਹੇ ਹਾਂ ਉਹ ਯੂਕਲਿਡ ਦੀ ਵੰਡ ਐਲਗੋਰਿਥਮ ਜਿਸ ਨੂੰ ਤੁਸੀਂ ਪਾਠ 1 ਵਿੱਚ ਪੜ੍ਹ ਚੁੱਕੇ ਹੋ, ਵਰਗੀ ਹੈ। ਇਸਦੇ ਅਨੁਸਾਰ,

ਜੇਕਰ $p(x)$ ਅਤੇ $g(x)$ ਕੋਈ ਦੋ ਬਹੁਪਦ ਹਨ ਜਿੱਥੇ $g(x) \neq 0$ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਬਹੁਪਦ $q(x)$ ਅਤੇ $r(x)$ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$p(x) = g(x) \times q(x) + r(x)$$

ਜਿੱਥੇ $r(x) = 0$ ਜਾਂ $r(x)$ ਦੀ ਘਾਤ $< g(x)$ ਦੀ ਘਾਤ ਹੈ।

ਇਹ ਸਿੱਟਾ ਬਹੁਪਦਾਂ ਦੇ ਲਈ **ਵੰਡ ਐਲਗੋਰਿਥਮ** ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਦੇ ਉਪਯੋਗ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਣ ਲਈ, ਆਉ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ।

ਉਦਾਹਰਣ 8 : $3x^2 - x^3 - 3x + 5$ ਨੂੰ $x - 1 - x^2$ ਨਾਲ ਭਾਗ ਦਿਉ ਅਤੇ ਵੰਡ ਐਲਗੋਰਿਥਮ ਦੀ ਸੱਚਾਈ ਦੀ ਜਾਂਚ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਬਹੁਪਦ ਮਿਆਰੀ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਨਹੀਂ ਹਨ। ਭਾਗ ਦੀ ਕਿਰਿਆ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਅਸੀਂ ਭਾਜ ਅਤੇ ਭਾਜਕ ਦੋਹਾਂ ਨੂੰ ਉਹਨਾਂ ਦੀਆਂ ਘਾਤਾਂ ਦੇ ਘਟਦੇ ਕ੍ਰਮ ਵਿੱਚ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ।

ਇਸ ਲਈ, ਭਾਜ $= -x^3 + 3x^2 - 3x + 5$ ਅਤੇ

ਭਾਜਕ $= -x^2 + x - 1$ ਹੈ।

$$\begin{array}{r|l} & x - 2 \\ \hline -x^2 + x - 1 & -x^3 + 3x^2 - 3x + 5 \\ & -x^3 + x^2 - x \\ & \;\;+ \quad\; - \quad\; + \\ \hline & 2x^2 - 2x + 5 \\ & 2x^2 - 2x + 2 \\ & \;\;- \quad\; + \quad\; - \\ \hline & 3 \end{array}$$

ਭਾਗ ਦੇਣ ਦੀ ਕਿਰਿਆ ਸੱਜੇ ਹੱਥ ਦਿਖਾਈ ਗਈ ਹੈ।

ਅਸੀਂ ਇੱਥੇ ਰੁਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿਉਂਕਿ 3 ਦੀ ਘਾਤ 0, $-x^2 + x - 1$ ਦੀ ਘਾਤ 2 ਤੋਂ ਘੱਟ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ ਭਾਗ ਦੀ ਕਿਰਿਆ ਕਰਕੇ ਬਾਕੀ 3 ਅਤੇ ਭਾਗਫਲ $x - 2$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਹੁਣ

ਭਾਜਕ $\times$ ਭਾਗਫਲ + ਬਾਕੀ

$$\begin{aligned} &= (-x^2 + x - 1)(x - 2) + 3 \\ &= -x^3 + x^2 - x + 2x^2 - 2x + 2 + 3 \\ &= -x^3 + 3x^2 - 3x + 5 \end{aligned}$$

= ਭਾਜ

ਇਸ ਲਈ, ਵੰਡ ਐਲਗੋਰਿਥਮ ਸੱਚ ਸਾਬਤ ਹੋ ਗਿਆ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 9 : $2x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 6x - 2$ ਦੀਆਂ ਸਾਰੀਆਂ ਸਿਫ਼ਰਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ, ਜੇਕਰ ਤੁਹਾਨੂੰ ਇਸ ਦੀਆਂ ਦੋ ਸਿਫ਼ਰਾਂ $\sqrt{2}$ ਅਤੇ $-\sqrt{2}$ ਪਤਾ ਹੋਣ।

ਹੱਲ : ਕਿਉਂਕਿ ਦੋ ਸਿਫ਼ਰਾਂ $\sqrt{2}$ ਅਤੇ $-\sqrt{2}$ ਹਨ, ਇਸ ਲਈ $\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{2}\right) = x^2 - 2$ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਬਹੁਪਦ ਦਾ ਇੱਕ ਗੁਣਨਖੰਡ ਹੈ। ਹੁਣ ਆਉ ਵੰਡ ਐਲਗੋਰਿਥਮ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਬਹੁਪਦ ਅਤੇ $x^2 - 2$ ਦੇ ਲਈ ਕਰਦੇ ਹਾਂ

$$
\begin{array}{r|l}
 & 2x^2 - 3x + 1 \\
\hline
x^2 - 2 & 2x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 6x - 2 \\
 & \underline{\underset{-}{2x^4} \qquad\quad \underset{+}{-4x^2}} \\
 & \quad -3x^3 + x^2 + 6x - 2 \\
 & \quad \underline{\underset{+}{-3x^3} \qquad\quad \underset{-}{+6x}} \\
 & \qquad\qquad x^2 \qquad -2 \\
 & \qquad\qquad \underline{\underset{-}{x^2} \qquad \underset{+}{-2}} \\
 & \qquad\qquad\qquad\quad \underline{0}
\end{array}
$$

ਭਾਗਫਲ ਦਾ ਪਹਿਲਾ ਪਦ $\frac{2x^4}{x^2} = 2x^2$ ਹੈ।

ਭਾਗਫਲ ਦਾ ਦੂਸਰਾ ਪਦ $\frac{-3x^3}{x^2} = -3x$ ਹੈ।

ਭਾਗਫਲ ਦਾ ਤੀਸਰਾ ਪਦ $\frac{x^2}{x^2} = 1$ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ, $2x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 6x - 2 = (x^2 - 2)(2x^2 - 3x + 1)$

ਹੁਣ $-3x$ ਨੂੰ ਤੋੜਦੇ ਹੋਏ $2x^2 - 3x + 1$ ਦੇ ਗੁਣਨਖੰਡ $(2x - 1)(x - 1)$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਇਸਦੇ ਸਿਫ਼ਰ $x = \frac{1}{2}$ ਅਤੇ $x = 1$ ਹੋਣਗੇ। ਇਸ ਲਈ, ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਬਹੁਪਦ ਦੇ ਸਿਫ਼ਰ $\sqrt{2}, -\sqrt{2}, \frac{1}{2}$ ਅਤੇ 1 ਹਨ।

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 2.3

1. ਵੰਡ ਐਲਗੋਰਿਥਮ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਕੇ, ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਵਿੱਚ ਬਹੁਪਦ $p(x)$ ਨੂੰ ਬਹੁਪਦ $g(x)$ ਨਾਲ ਭਾਗ ਕਰਕੇ ਭਾਗਫਲ ਅਤੇ ਬਾਕੀ ਪਤਾ ਕਰੋ :

   (i) $p(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 3$, $g(x) = x^2 - 2$

   (ii) $p(x) = x^4 - 3x^2 + 4x + 5$, $g(x) = x^2 + 1 - x$

   (iii) $p(x) = x^4 - 5x + 6$, $g(x) = 2 - x^2$

2. ਦੂਸਰੀ ਬਹੁਪਦ ਨੂੰ ਪਹਿਲੀ ਬਹੁਪਦ ਨਾਲ ਭਾਗ ਕਰਕੇ ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ ਕੀ ਪਹਿਲੀ ਬਹੁਪਦ, ਦੂਸਰੀ ਬਹੁਪਦ ਦਾ ਇੱਕ ਗੁਣਨਖੰਡ ਹੈ :

(i) $t^2 - 3,\ 2t^4 + 3t^3 - 2t^2 - 9t - 12$

(ii) $x^2 + 3x + 1,\ 3x^4 + 5x^3 - 7x^2 + 2x + 2$

(iii) $x^3 - 3x + 1,\ x^5 - 4x^3 + x^2 + 3x + 1$

3. ਜੇਕਰ $3x^4 + 6x^3 - 2x^2 - 10x - 5$ ਦੇ ਦੋ ਸਿਫ਼ਰ $\sqrt{\frac{5}{3}}$ ਅਤੇ $-\sqrt{\frac{5}{3}}$ ਹੋਣ ਤਾਂ ਬਾਕੀ ਦੀਆ ਸਿਫ਼ਰਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ।

4. ਬਹੁਪਦ $x^3 - 3x^2 + x + 2$ ਨੂੰ ਬਹੁਪਦ $g(x)$ ਨਾਲ ਭਾਗ ਦੇਣ 'ਤੇ ਭਾਗਫਲ $x - 2$ ਅਤੇ ਬਾਕੀ $-2x + 4$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਤਾਂ $g(x)$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

5. ਬਹੁਪਦ $p(x), g(x), q(x)$ ਅਤੇ $r(x)$ ਦੇ ਅਜਿਹੇ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਦਿਓ ਜੋ ਵੰਡ ਐਲਗੋਰਿਥਮ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦੇ ਹੋਣ ਅਤੇ

(i) ਘਾਤ $p(x)$ = ਘਾਤ $q(x)$ (ii) ਘਾਤ $q(x)$ = ਘਾਤ $r(x)$ (iii) ਘਾਤ $r(x) = 0$

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 2.4 (ਇੱਛਾ ਅਨੁਸਾਰ)*

1. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਤਿੰਨ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦਾਂ ਦੇ ਨਾਲ ਦਿੱਤੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਉਹਨਾ ਦੀਆਂ ਸਿਫ਼ਰਾਂ ਹਨ। ਹਰ ਇੱਕ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਸਿਫ਼ਰਾਂ ਅਤੇ ਗੁਣਾਂਕਾਂ ਵਿਚਕਾਰ ਸੰਬੰਧਾਂ ਦੀ ਵੀ ਜਾਂਚ ਕਰੋ :

(i) $2x^3 + x^2 - 5x + 2;\ \frac{1}{2}, 1, -2$ (ii) $x^3 - 4x^2 + 5x - 2;\ 2, 1, 1$

2. ਇੱਕ ਤਿੰਨ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਦੀਆਂ ਸਿਫ਼ਰਾਂ ਦਾ ਜੋੜ, ਦੋ ਸਿਫ਼ਰਾਂ ਨੂੰ ਇੱਕਠਾ ਲੇ ਕੇ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਅਤੇ ਤਿੰਨਾਂ ਸਿਫ਼ਰਾਂ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ ਕ੍ਰਮਵਾਰ 2, –7, –14 ਹੈ।

3. ਜੇਕਰ ਬਹੁਪਦ $x^3 - 3x^2 + x + 1$ ਦੀਆਂ ਸਿਫ਼ਰਾਂ $a - b, a, a + b$ ਹੋਣ ਤਾਂ a ਅਤੇ b ਪਤਾ ਕਰੋ।

* ਇਹ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ ਪ੍ਰੀਖਿਆ ਦੀ ਦ੍ਰਿਸ਼ਟੀ ਤੋਂ ਨਹੀਂ ਹੈ।

4. ਜੇਕਰ ਬਹੁਪਦ $x^4 - 6x^3 - 26x^2 + 138x - 35$ ਦੇ ਦੋ ਸਿਫ਼ਰ $2 \pm \sqrt{3}$ ਹੋਣ ਤਾਂ ਬਾਕੀ ਦੀਆਂ ਸਿਫ਼ਰਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ।

5. ਜੇਕਰ ਬਹੁਪਦ $x^4 - 6x^3 + 16x^2 - 25x + 10$ ਨੂੰ ਦੂਸਰੇ ਬਹੁਪਦ $x^2 - 2x + k$ ਨਾਲ ਭਾਗ ਕੀਤਾ ਜਾਵੇ ਅਤੇ ਬਾਕੀ $x + a$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਵੇ ਤਾਂ k ਅਤੇ a ਪਤਾ ਕਰੋ।

2.5 ਸਾਰ-ਅੰਸ਼

ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ, ਤੁਸੀਂ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਨੁਕਤਿਆਂ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕੀਤਾ ਹੈ :

1. ਘਾਤ 1, 2 ਅਤੇ 3 ਵਾਲੇ ਬਹੁਪਦਾਂ ਨੂੰ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਰੇਖੀ ਬਹੁਪਦ, ਦੋ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ ਅਤੇ ਤਿੰਨ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

2. ਇੱਕ ਦੋ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ $ax^2 + bx + c$,ਜਿੱਥੇ a, b, c ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ ਅਤੇ $a \neq 0$ ਹੈ, ਦੇ ਰੂਪ ਦਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

3. ਇੱਕ ਬਹੁਪਦ $p(x)$ ਦੇ ਸਿਫ਼ਰ ਉਹਨਾਂ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੇ x ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਹੁੰਦੇ ਹਨ ਜਿੱਥੇ $y = p(x)$ ਦਾ ਆਲੇਖ x–ਧੁਰੇ ਨੂੰ ਕੱਟਦਾ ਹੈ।

4. ਇੱਕ ਦੋ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ ਦੀਆਂ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਦੋ ਸਿਫ਼ਰਾਂ ਹੋ ਸਕਦੀਆਂ ਹਨ। ਇੱਕ ਤਿੰਨ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ ਦੀਆਂ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਤਿੰਨ ਸਿਫ਼ਰਾਂ ਹੋ ਸਕਦੀਆਂ ਹਨ।

5. ਜੇਕਰ ਦੋ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ $ax^2 + bx + c$ ਦੀਆਂ ਸਿਫ਼ਰਾਂ α ਅਤੇ β ਹੋਣ ਤਾਂ

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}, \quad \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

6. ਜੇਕਰ α, β, γ ਤਿੰਨ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ ਦੀਆਂ ਸਿਫ਼ਰਾਂ ਹੋਣ ਤਾਂ

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{-b}{a}$$

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a}$$

ਅਤੇ $$\alpha\beta\gamma = \frac{-d}{a}$$

7. ਵੰਡ ਐਲਗੋਰਿਥਮ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਬਹੁਪਦ $p(x)$ ਅਤੇ ਇੱਕ ਗੈਰ-ਸਿਫ਼ਰ ਬਹੁਪਦ $g(x)$ ਦੇ ਲਈ ਦੋ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਬਹੁਪਦ $q(x)$ ਅਤੇ $r(x)$ ਹੁੰਦੇ ਹਨ ਕਿ

$$p(x) = g(x)\, q(x) + r(x),$$

ਜਿੱਥੇ $r(x) = 0$ ਹੈ ਜਾਂ ਘਾਤ $r(x) <$ ਘਾਤ $g(x)$ ਹੈ।

ਦੋ ਚਲਾਂ ਵਿੱਚ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੇ ਜੋੜੇ
Pair of Linear Equations in two variables

3

3.1 ਭੂਮਿਕਾ

ਤੁਸੀਂ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਸਥਿਤੀ ਵਰਗੀ ਸਥਿਤੀ ਦਾ ਸਾਹਮਣਾ ਜ਼ਰੂਰ ਕੀਤਾ ਹੋਵੇਗਾ :

ਅਮਰਦੀਪ ਆਪਣੇ ਪਿੰਡ ਦੇ ਇੱਕ ਮੇਲੇ ਵਿੱਚ ਗਈ। ਉਹ ਇੱਕ ਝੂਲੇ (Giant wheel) ਦੀ ਸਵਾਰੀ ਕਰਨਾ ਚਾਹੁੰਦੀ ਸੀ ਅਤੇ ਹੂਪਲਾ (Hoopla) [ਇੱਕ ਖੇਡ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਤੁਸੀਂ ਇੱਕ ਸਟਾਲ 'ਤੇ ਰੱਖੀ ਕਿਸੇ ਵਸਤੂ 'ਤੇ ਇੱਕ ਛੱਲਾ (ring) ਸੁੱਟਦੇ ਹੋ ਅਤੇ ਜੇਕਰ ਉਹ ਵਸਤੂ ਪੂਰੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਛੱਲੇ ਦੇ ਵਿੱਚ ਆ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਤੁਹਾਨੂੰ ਉਹ ਵਸਤੂ ਮਿਲ ਜਾਂਦੀ ਹੈ] ਖੇਡਣਾ ਚਾਹੁੰਦੀ ਸੀ। ਜਿੰਨੀ ਵਾਰ ਉਸਨੇ ਝੂਲੇ ਦੀ ਸਵਾਰੀ ਕੀਤੀ ਉਸ ਤੋਂ ਅੱਧੀ ਵਾਰ ਉਸ ਨੇ ਹੂਪਲਾ ਖੇਡ ਖੇਡਿਆ। ਜੇਕਰ ਹਰ ਵਾਰ ਦੀ ਸਵਾਰੀ ਦੇ ਲਈ ਉਸ ਨੂੰ ₹ 3 ਅਤੇ ਹੂਪਲਾ ਖੇਡਣ ਦੇ ਲਈ ₹ 4 ਖਰਚ ਕਰਨੇ ਪਏ ਤਾਂ ਤੁਸੀਂ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋਗੇ ਕਿ ਉਸਨੇ ਕਿੰਨੀ ਵਾਰ ਝੂਲੇ ਦੀ ਸਵਾਰੀ ਕੀਤੀ ਅਤੇ ਕਿੰਨੇ ਵਾਰ ਹੂਪਲਾ ਖੇਡਿਆ, ਜਦ ਕਿ ਉਸਨੇ ਇਸਦੇ ਲਈ ਕੁੱਲ ₹ 20 ਖਰਚ ਕੀਤੇ?

ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ ਕਿ ਤੁਸੀਂ ਇਹ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਅਲਗ-ਅਲਗ ਸਥਿਤੀਆਂ ਲੈ ਕੇ ਚਲੋ। ਜੇਕਰ ਉਸਨੇ ਇੱਕ ਵਾਰ ਸਵਾਰੀ ਕੀਤੀ, ਕੀ ਇਹ ਸੰਭਵ ਹੈ? ਕੀ ਇਹ ਵੀ ਸੰਭਵ ਹੈ ਕਿ ਉਸਨੇ ਦੋ ਵਾਰ ਸਵਾਰੀ ਕੀਤੀ? ਆਦਿ ਜਾਂ ਜਮਾਤ IX ਦੇ ਗਿਆਨ ਨੂੰ ਵਰਤਦੇ ਹੋਏ ਤੁਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਸਥਿਤੀਆਂ ਨੂੰ ਦੋ ਚਲਾਂ ਵਾਲੇ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੁਆਰਾ ਦਰਸਾ ਸਕਦੇ ਹੋ।

ਆਓ ਇਸ ਪ੍ਰਕਿਰਿਆ ਨੂੰ ਸਮਝੀਏ।

ਅਮਰਦੀਪ ਦੁਆਰਾ ਸਵਾਰੀ ਕਰਨ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਨੂੰ x ਅਤੇ ਉਸਦੇ ਦੁਆਰਾ ਹੂਪਲਾ ਖੇਡਣ ਸੰਖਿਆ ਨੂੰ y ਨਾਲ ਦਰਸਾਉ। ਹੁਣ ਦਿੱਤੀਆਂ ਹੋਈਆਂ ਸਥਿਤੀਆਂ ਨੂੰ ਦੋ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੁਆਰਾ ਵਿਖਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

$$y = \frac{1}{2}x \qquad (1)$$

$$3x + 4y = 20 \qquad (2)$$

ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਇਸ ਸਮੀਕਰਣ ਜੋੜੇ ਦਾ ਹੱਲ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ? ਇਸਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੇ ਕਈ ਤਰੀਕੇ ਹਨ, ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਦਾ ਅਸੀਂ ਇਸ ਪਾਠ ਵਿੱਚ ਅਧਿਐਨ ਕਰਾਂਗੇ।

3.2 ਦੋ ਚਲਾਂ ਵਿੱਚ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣ ਜੋੜੇ

IX ਜਮਾਤ ਤੋਂ ਯਾਦ ਕਰੋ ਕਿ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਸਮੀਕਰਣ ਦੋ ਚਲਾਂ ਵਿੱਚ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੀਆਂ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਹਨ:

$$2x + 3y = 5$$

$$x - 2y - 3 = 0$$

ਅਤੇ $\quad x - 0y = 2$ ਭਾਵ $x = 2$

ਤੁਸੀਂ ਇਹ ਵੀ ਜਾਣਦੇ ਹੋ ਕਿ ਉਹ ਸਮੀਕਰਣ ਜਿਸਨੂੰ $ax + by + c = 0$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ a, b ਅਤੇ c ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ ਅਤੇ **a ਅਤੇ b ਦੋਨੋਂ ਸਿਫ਼ਰ ਨਹੀਂ ਹਨ,** ਦੋ ਚਲਾਂ x ਅਤੇ y ਵਾਲਾ ਇੱਕ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣ ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ। (ਆਮ ਤੌਰ 'ਤੇ a ਅਤੇ b ਦੋਵੇਂ ਸਿਫ਼ਰ ਨਹੀਂ ਹਨ, ਨੂੰ ਅਸੀਂ $a^2 + b^2 \neq 0$ ਨਾਲ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਾਂ) ਤੁਸੀਂ ਇਹ ਵੀ ਪੜ੍ਹਿਆ ਹੈ ਕਿ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦਾ ਹੱਲ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਮੁੱਲਾਂ ਦਾ ਇੱਕ ਜੋੜਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਇੱਕ x ਦੇ ਲਈ ਅਤੇ ਦੂਸਰਾ y ਦੇ ਲਈ ਜੋ ਸਮੀਕਰਣ ਦੇ ਦੋਹਾਂ ਪਾਸਿਆਂ ਨੂੰ ਬਰਾਬਰ ਕਰਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ ਆਓ ਸਮੀਕਰਣ $2x + 3y = 5$ ਦੇ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ (LHS) ਵਿੱਚ $x = 1$ ਅਤੇ $y = 1$ ਭਰੀਏ। ਹੁਣ

ਖੱਬਾ ਪਾਸਾ $= 2(1) + 3(1) = 2 + 3 = 5$,

ਜੋ ਸਮੀਕਰਣ ਦੇ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ (RHS) ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ $x = 1$ ਅਤੇ $y = 1$ ਸਮੀਕਰਣ $2x + 3y = 5$ ਦਾ ਇੱਕ ਹੱਲ ਹੈ।

ਹੁਣ ਆਓ ਸਮੀਕਰਣ $2x + 3y = 5$ ਵਿੱਚ $x = 1$ ਅਤੇ $y = 7$ ਭਰੀਏ।

ਹੁਣ ਖੱਬਾ ਪਾਸਾ $= 2(1) + 3(7) = 2 + 21 = 23$

ਜੋ ਸੱਜੇ ਪਾਸੇ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ $x = 1$ ਅਤੇ $y = 1$ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਹੱਲ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਜਿਮਾਇਤੀ ਦ੍ਰਿਸ਼ਟੀ ਤੋਂ ਇਸਦਾ ਕੀ ਅਰਥ ਹੈ? ਇਸਦਾ ਅਰਥ ਹੈ ਕਿ ਬਿੰਦੂ (1,1) ਸਮੀਕਰਣ $2x + 3y = 5$ ਦੁਆਰਾ ਦਰਸਾਈ ਰੇਖਾ ਉਪਰ ਸਥਿਤ ਹੈ ਅਤੇ ਬਿੰਦੂ (1,7) ਇਸ ਉੱਪਰ ਸਥਿਤ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ **ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਹਰੇਕ ਹੱਲ ਉਸਨੂੰ ਦਰਸਾਉਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਉੱਪਰ ਸਥਿਤ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।**

ਅਸਲ ਵਿੱਚ, ਇਹ ਕਿਸੇ ਵੀ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣ ਲਈ ਸੱਚ ਹੈ, ਭਾਵ ਦੋ ਚਲਾਂ ਵਾਲੇ ਰੇਖੀ **ਸਮੀਕਰਣ $ax + by + c = 0$ ਦਾ ਹਰੇਕ ਹੱਲ (x, y) ਇਸ ਸਮੀਕਰਣ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਦੇ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਸੰਗਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਅਤੇ ਇਸਦਾ ਉਲਟ ਵੀ ਸੱਚ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।**

ਹੁਣ ਉਪਰ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਸਮੀਕਰਣਾਂ (1) ਅਤੇ (2) ਨੂੰ ਲਓ। ਇਹਨਾਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਨੂੰ ਇੱਕਠਾ ਲੈ ਕੇ ਸਾਨੂੰ ਅਮਰਦੀਪ ਦੇ ਮੇਲੇ ਦੇ ਬਾਰੇ ਵਿੱਚ ਸੂਚਨਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

ਇਹ ਦੋ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣ, **ਉਹਨਾਂ ਦੋ ਚਲਾਂ x ਅਤੇ y** ਵਿੱਚ ਹਨ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਨੂੰ ਦੋ ਚਲਾਂ ਵਾਲੇ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦਾ ਇੱਕ ਜੋੜਾ (ਜਾਂ **ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣ ਪ੍ਰਣਾਲੀ**) ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

ਆਓ, ਦੇਖੀਏ ਕਿ ਬੀਜਗਣਿਤਿਕ ਦ੍ਰਿਸ਼ਟੀ ਤੋਂ ਇਹ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਜੋੜੇ ਹਨ।

ਦੋ ਚਲਾਂ x ਅਤੇ y ਦੇ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣ ਜੋੜੇ ਦਾ ਵਿਆਪਕ ਰੂਪ

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0$$

ਅਤੇ $$a_2x + b_2y + c_2 = 0 \text{ ਹੈ।}$$

ਇੱਥੇ $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ ਸਾਰੀਆਂ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ ਅਤੇ $a_1^2 + b_1^2 \neq 0, a_2^2 + b_2^2 \neq 0$ ਹੈ।

ਦੋ ਚਲਾਂ ਵਾਲੇ ਇੱਕ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣ ਜੋੜੇ ਦੇ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਣ ਹਨ :

$2x + 3y - 7 = 0$ ਅਤੇ $9x - 2y + 8 = 0$

$5x = y$ ਅਤੇ $-7x + 2y + 3 = 0$

$x + y = 7$ ਅਤੇ $17 = y$

ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹੋ ਕਿ ਇਹ ਜਿਮਾਇਤੀ ਦ੍ਰਿਸ਼ਟੀ ਤੋਂ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਜੋੜੇ ਹਨ?

ਜਮਾਤ IX ਤੋਂ ਯਾਦ ਕਰੋ ਕਿ ਦੋ ਚਲਾਂ ਵਾਲੇ ਇੱਕ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਜਿਮਾਇਤੀ (ਭਾਵ ਗ੍ਰਾਫ) ਨਿਰੂਪਣ ਇੱਕ ਸਰਲ ਰੇਖਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਹੁਣ ਦੱਸ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ ਦੋ ਚਲਾਂ ਵਿੱਚ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣ ਜੋੜਾ ਜਿਮਾਇਤੀ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦਿਸੇਗਾ? ਇਹ ਦੋ ਸਰਲ ਰੇਖਾਵਾਂ ਹੋਣਗੀਆਂ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਨੂੰ ਨਾਲ-ਨਾਲ ਲਿਆ ਜਾਵੇਗਾ।

ਤੁਸੀਂ IX ਜਮਾਤ ਵਿੱਚ ਇਹ ਵੀ ਪੜ੍ਹਿਆ ਹੈ ਕਿ ਇੱਕ ਤਲ 'ਤੇ ਜੇਕਰ ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਹੋਣ ਤਾਂ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤਿਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕੇਵਲ ਇੱਕ ਹੀ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੋ ਸਕਦੀ ਹੈ :

(i) ਦੋਵੇਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ 'ਤੇ ਕੱਟਦੀਆਂ ਹਨ।

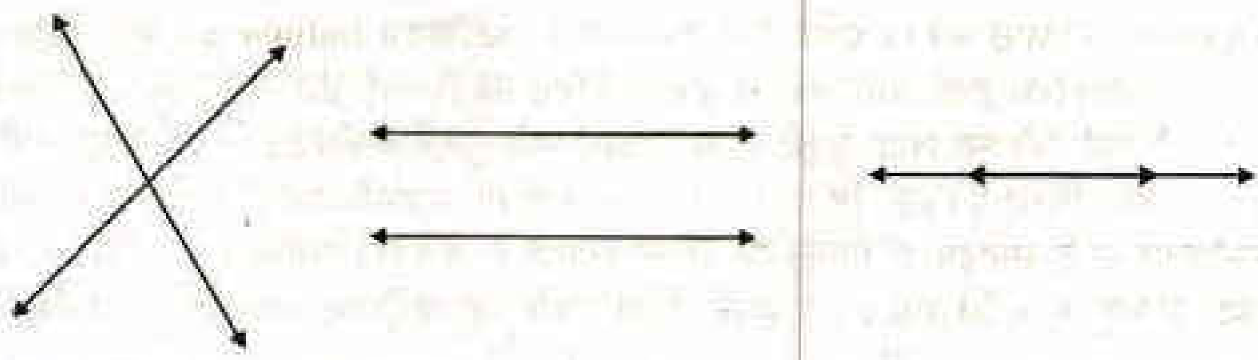
(ii) ਦੋਵੇਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਕੱਟਦੀਆਂ ਨਹੀਂ, ਭਾਵ ਉਹ ਸਮਾਂਤਰ ਹਨ।

(iii) ਦੋਵੇਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਸੰਪਾਤੀ ਹਨ।

ਇਹਨਾਂ ਸਾਰੀਆਂ ਸੰਭਾਵਨਾਵਾਂ ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਚਿੱਤਰ 3.1 ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਾਂ :

ਚਿੱਤਰ 3.1 (a) ਵਿੱਚ ਇਹ ਕੱਟਦੀਆਂ ਹਨ।

ਚਿੱਤਰ 3.2 (b) ਵਿੱਚ ਇਹ ਸਮਾਂਤਰ ਹਨ।



(a) (b) (c)

ਚਿੱਤਰ 3.1

ਚਿੱਤਰ 3.1 (c) ਵਿੱਚ ਇਹ ਸੰਪਾਤੀ ਹਨ।

ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣ ਪ੍ਰਣਾਲੀ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਣ ਵਾਲੀਆਂ ਦੋ ਵਿਧੀਆਂ ਬੀਜ ਗਣਿਤਕ ਅਤੇ ਜਿਮਾਇਤੀ ਨੂੰ ਨਾਲ-ਨਾਲ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਆਓ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਲਈਏ।

ਉਦਾਹਰਣ 1 : ਅਸੀਂ ਭਾਗ 3.1 ਵਿੱਚ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਉਦਾਹਰਣ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ। ਅਮਰਦੀਪ ਮੇਲੇ ਵਿੱਚ ₹ 20 ਲੈ ਕੇ ਜਾਂਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਉਹ ਝੂਲੇ ਦੀ ਸਵਾਰੀ ਕਰਨਾ ਅਤੇ ਹੂਪਲਾ ਖੇਡ ਖੇਡਣਾ ਚਾਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਇਹਨਾਂ ਸਥਿਤੀਆਂ ਨੂੰ ਬੀਜ ਗਣਿਤਕ ਅਤੇ ਆਲੇਖੀ (ਜਿਮਾਇਤੀ) ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਉ।

ਹੱਲ: ਬਣਾਇਆ ਗਿਆ ਸਮੀਕਰਣ ਜੋੜਾ ਹੈ :

$$y = \frac{1}{2}x$$

ਭਾਵ $x - 2y = 0$ (1)

ਅਤੇ $3x + 4y = 20$ (2)

ਆਓ ਇਹਨਾਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਨੂੰ ਗ੍ਰਾਫ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਈਏ। ਇਸਦੇ ਲਈ ਸਾਨੂੰ ਹਰ ਇੱਕ ਸਮੀਕਰਣ ਦੇ ਘੱਟ ਤੋਂ ਘੱਟ ਦੋ ਹੱਲ ਚਾਹੀਦੇ ਹਨ। ਅਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਹੱਲਾਂ ਨੂੰ ਸਾਰਣੀ 3.1 ਵਿੱਚ ਦੇ ਰਹੇ ਹਾਂ।

ਸਾਰਣੀ 3.1

x	0	2
$y = \frac{x}{2}$	0	1

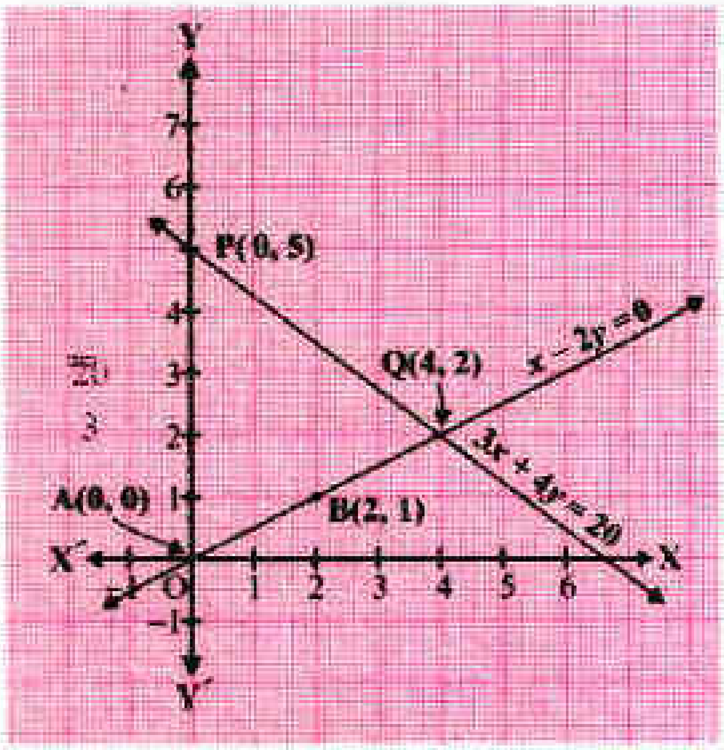
(i)

x	0	$\frac{20}{3}$	4
$y = \frac{20-3x}{4}$	5	0	2

(ii)

IX ਜਮਾਤ ਤੋਂ ਯਾਦ ਕਰੋ ਕਿ ਹਰੇਕ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣ ਦੇ ਅਣਗਿਣਤ (infinite ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਅਨੇਕਾਂ) ਹੱਲ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਕਰਕੇ ਤੁਸੀਂ ਕੋਈ ਦੋ ਮੁੱਲ ਸੋਚੋ ਇਹ ਜ਼ਰੂਰੀ ਨਹੀਂ ਉਹ ਹੀ ਹੋਣ ਜੋ ਅਸੀਂ ਲਿਖੇ ਹਨ। ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਅੰਦਾਜਾ ਲਗਾ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ ਪਹਿਲੀ ਅਤੇ ਦੂਸਰੀ ਸਮੀਕਰਣ ਦੇ ਹੱਲ ਲਈ ਅਸੀਂ $x = 0$ ਕਿਉਂ ਲਿਆ ਹੈ। ਜਦੋਂ ਇੱਕ ਚਲ ਸਿਫ਼ਰ ਹੋ ਜਾਵੇਗਾ ਤਾਂ ਸਮੀਕਰਣ ਇੱਕ ਚੱਲ ਵਾਲਾ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਹੋ ਜਾਵੇਗਾ ਤਾਂ ਜਿਸਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨਾ ਆਸਾਨ ਹੋ ਜਾਵੇਗਾ। ਸਮੀਕਰਣ (2) ਵਿੱਚ $x = 0$ ਲੈਣ 'ਤੇ ਸਾਨੂੰ $4y = 20$ ਭਾਵ $y = 5$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਵੇਗਾ। ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸਮੀਕਰਣ (2) ਵਿੱਚ $y = 0$ ਲੈਣ ਤੇ ਸਾਨੂੰ $3x = 20$ ਭਾਵ $x = \frac{20}{3}$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਵੇਗਾ। ਕਿਉਂਕਿ $\frac{20}{3}$ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਇਸਨੂੰ ਗ੍ਰਾਫ ਪੇਪਰ 'ਤੇ ਅੰਕਿਤ ਕਰਨਾ ਅਸਾਨ ਨਹੀਂ ਹੋਵੇਗਾ। ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ $y = 2$ ਚੁਣਦੇ ਹਾਂ ਜਿਸ ਤੋਂ ਸਾਨੂੰ $x = 4$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਵੇਗਾ ਜੋ ਇੱਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਸਾਰਣੀ 3.1 ਦੇ ਹੱਲਾਂ ਦੇ ਸੰਗਤ ਬਿੰਦੂਆਂ A(0,0), B (2,1) ਅਤੇ P (0,5), Q (4,2) ਨੂੰ ਗ੍ਰਾਫ ਪੇਪਰ 'ਤੇ ਲਗਾਉ। ਹੁਣ ਰੇਖਾਵਾਂ AB ਅਤੇ PQ ਨੂੰ ਖਿੱਚੋ ਜੋ ਕਿ ਕ੍ਰਮਵਾਰ $x - 2y = 0$ ਅਤੇ $3x + 4y = 20$ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੀਆਂ ਹਨ। ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਿ ਚਿੱਤਰ 3.2 ਵਿੱਚ ਦਿਖਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 3.2

ਚਿੱਤਰ 3.2 ਵਿੱਚ ਦੇਖੋ ਕਿ ਦੋਹਾਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੀਆਂ ਦੋਵੇਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਇੱਕ ਦੂਸਰੇ ਨੂੰ ਬਿੰਦੂ (4, 2) 'ਤੇ ਕੱਟਦੀਆਂ ਹਨ। ਇਸ ਦਾ ਕੀ ਭਾਵ ਹੈ। ਇਸ ਬਾਰੇ ਅਸੀਂ ਅਗਲੇ ਭਾਗ ਵਿੱਚ ਦੱਸਾਂਗੇ।

ਉਦਾਹਰਣ 2 : ਵਰਿੰਦਰ ਇੱਕ ਸਟੇਸ਼ਨਰੀ ਦੀ ਦੁਕਾਨ ਵਿੱਚ ਗਈ ਅਤੇ ਉਸਨੇ ₹ 9 ਵਿੱਚ 2 ਪੈਨਸਿਲਾਂ 'ਤੇ 3 ਰਬੜਾਂ ਖਰੀਦੀਆਂ। ਉਸਦੀ ਸਹੇਲੀ ਪਾਇਲ ਨੇ ਵਰਿੰਦਰ ਕੋਲ ਨਵੀਂ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਪੈਨਸਿਲਾਂ ਅਤੇ ਰਬੜਾਂ ਦੇਖੀਆਂ ਤਾਂ ਉਸਨੇ ਵੀ ₹ 18 ਵਿੱਚ ਉਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ 4 ਪੈਨਸਿਲਾਂ ਅਤੇ 6 ਰਬੜਾਂ ਖਰੀਦ ਲਈਆਂ। ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਨੂੰ ਬੀਜ ਗਣਿਤਿਕ ਅਤੇ ਆਲੇਖੀ (ਜਿਮਾਇਤੀ) ਰੂਪਾਂ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਉ।

ਹੱਲ : ਆਓ ਇੱਕ ਪੈਨਸਿਲ ਦਾ ਮੁੱਲ ₹ x ਅਤੇ ਇੱਕ ਰਬੜ ਦਾ ਮੁੱਲ ₹ y ਮੰਨ ਲਈਏ ਤਾਂ ਬੀਜ ਗਣਿਤਕ ਰੂਪ ਹੇਠਾਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤਾ ਜਾ ਰਿਹਾ ਹੈ।

$$2x + 3y = 9 \qquad (1)$$

ਅਤੇ $$4x + 6y = 18 \quad (2)$$

ਇਹਨਾਂ ਦੇ ਤੁਲ (equivalent) ਜਿਮਾਇਤੀ ਰੂਪ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਲਈ, ਅਸੀਂ ਹਰ ਇੱਕ ਸਮੀਕਰਣ ਦੁਆਰਾ ਦਰਸਾਈ ਰੇਖਾ ਉੱਪਰ ਦੋ ਬਿੰਦੂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਭਾਵ ਅਸੀਂ ਹਰ ਇੱਕ ਸਮੀਕਰਣ ਦੇ ਦੋ ਹੱਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਇਹ ਹੱਲ ਹੇਠਾਂ 3.2 ਸਾਰਣੀ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਹਨ।

ਸਾਰਣੀ 3.2

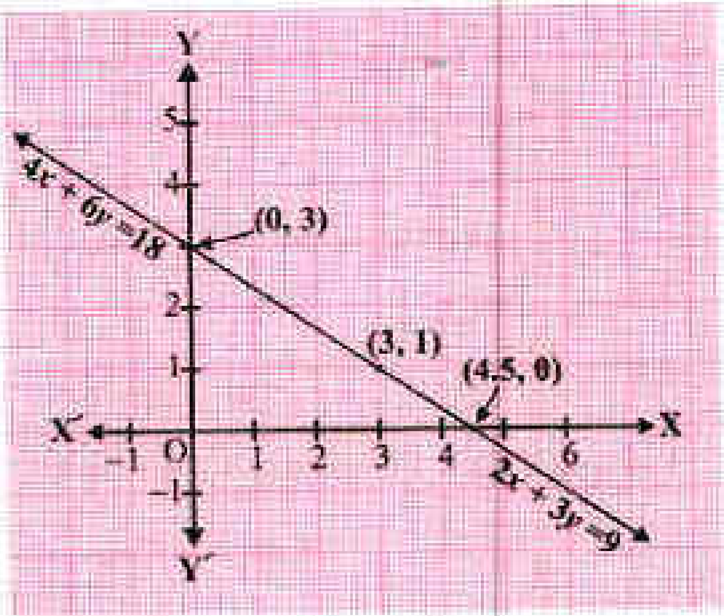
x	0	4.5
$y = \frac{9-2x}{3}$	3	0

(i)

x	0	3
$y = \frac{18-4x}{6}$	3	1

(ii)

ਅਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਬਿੰਦੂਆਂ ਨੂੰ ਗ੍ਰਾਫ ਪੇਪਰ 'ਤੇ ਆਲੇਖਿਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਰੇਖਾਵਾਂ ਖਿੱਚਦੇ ਹਾਂ। ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਦੋਵੇਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਸੰਪਾਤੀ ਹਨ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 3.3)। ਇਹ ਇਸ ਲਈ ਹੈ ਕਿ ਦੋਵੇਂ ਸਮੀਕਰਣ ਤੁਲ ਹਨ, ਭਾਵ ਇੱਕ ਨੂੰ ਦੂਸਰੇ ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 3.3

ਉਦਾਹਰਣ 3 : ਦੋ ਰੇਲ ਪਟੜੀਆਂ, ਸਮੀਕਰਣਾਂ $x + 2y - 4 = 0$ ਅਤੇ ਇਸ $2x + 4y - 12 = 0$ ਦੁਆਰਾ ਦਰਸਾਈਆਂ ਗਈਆਂ ਹਨ। ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਨੂੰ ਜਿਮਾਇਤੀ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਵਿਅਕਤ ਕਰੋ (ਦਰਸਾਉ)

ਹੱਲ : ਸਮੀਕਰਣਾਂ

$$x + 2y - 4 = 0 \qquad (1)$$

ਅਤੇ

$$2x + 4y - 12 = 0 \qquad (2)$$

ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ ਦੇ ਦੋ ਹੱਲ ਸਾਰਣੀ 3.3 ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਹਨ :

ਸਾਰਣੀ 3.3

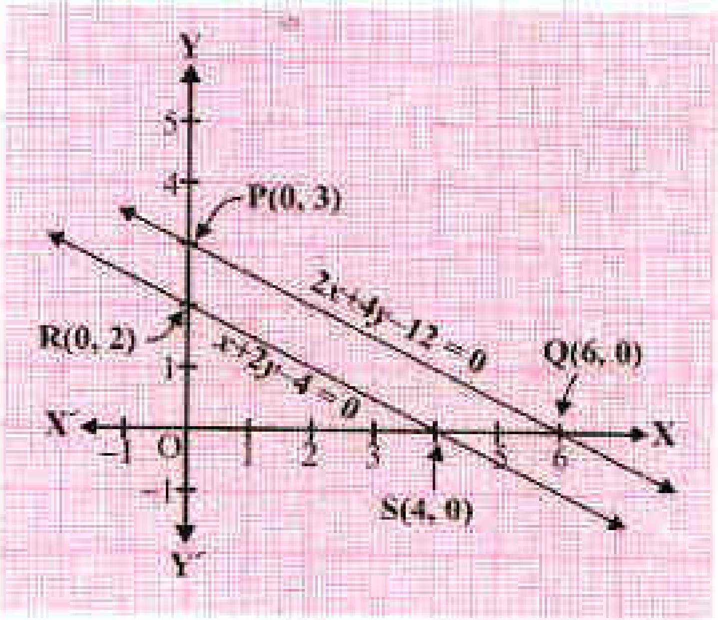
x	0	4
$y = \dfrac{4-x}{2}$	2	0

(i)

x	0	6
$y = \dfrac{12-2x}{4}$	3	0

(ii)

ਇਹਨਾਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਨੂੰ ਗ੍ਰਾਫ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਉਣ ਲਈ ਅਸੀਂ ਬਿੰਦੂਆਂ R(0, 2) ਅਤੇ S(4, 0) ਨੂੰ ਰੇਖਾ RS ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਲਈ ਅੰਕਿਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ, ਅਤੇ ਬਿੰਦੂਆਂ P (0, 3) ਅਤੇ Q(6, 0) ਨੂੰ ਰੇਖਾ PQ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਲਈ ਅੰਕਿਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।



ਚਿੱਤਰ 3.4

ਚਿੱਤਰ 3.4 ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਇਹ ਰੇਖਾਵਾਂ ਕਿਤੇ ਵੀ ਨਹੀਂ ਕੱਟਦੀਆਂ ਭਾਵ ਇਹ ਸਮਾਂਤਰ ਹਨ।

ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ਕਈ ਸਥਿਤੀਆਂ ਦੇਖੀਆਂ ਹਨ। ਜਿਨਾਂ ਨੂੰ ਇੱਕ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣ ਜੋੜੇ ਦੁਆਰਾ ਪ੍ਰਦਰਸ਼ਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਦੇ ਬੀਜ ਗਣਿਤਿਕ ਅਤੇ ਜਿਮਾਇਤੀ ਰੂਪ

ਦੇਖੋ। ਅਗਲੇ ਭਾਗਾਂ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਚਰਚਾ ਕਰਾਂਗੇ ਕਿ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਇਹਨਾਂ ਨਿਰੂਪਣਾਂ ਦਾ ਇੱਕ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਣ ਜੋੜੇ ਦੇ ਹੱਲ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਉਪਯੋਗ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ?

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 3.1

1. ਬਲਦੇਵ ਆਪਣੀ ਲੜਕੀ ਨੂੰ ਕਹਿੰਦਾ ਹੈ, 'ਸੱਤ ਸਾਲ ਪਹਿਲਾਂ ਮੈਂ ਤੇਰੇ ਨਾਲੋਂ ਸੱਤ ਗੁਣਾਂ ਉਮਰ ਦਾ ਸੀ। ਹੁਣ ਤੋਂ ਤਿੰਨ ਸਾਲ ਬਾਦ ਮੈਂ ਤੇਰੇ ਤੋਂ ਸਿਰਫ਼ ਤਿੰਨ ਗੁਣਾ ਉਮਰ ਦਾ ਰਹਿ ਜਾਵਾਂਗਾ (ਕੀ ਇਹ ਮਨੋਰੰਜਕ ਹੈ?) ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਨੂੰ ਬੀਜ ਗਣਿਤਿਕ ਅਤੇ ਆਲੇਖੀ ਰੂਪਾਂ ਵਿੱਚ ਵਿਅਕਤ ਕਰੋ (ਦਰਸਾਓ)।
2. ਕ੍ਰਿਕਟ ਟੀਮ ਦੇ ਇੱਕ ਕੋਚ ਨੇ ₹ 3900 ਵਿੱਚ 3 ਬੱਲੇ ਅਤੇ 6 ਗੇਂਦਾਂ ਖ੍ਰੀਦੀਆਂ। ਬਾਅਦ ਵਿੱਚ ਉਸਨੇ ਇੱਕ ਹੋਰ ਬੱਲਾ ਅਤੇ ਉਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ 3 ਗੇਂਦਾਂ ₹ 1300 ਵਿੱਚ ਖਰੀਦੀਆਂ। ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਨੂੰ ਬੀਜ ਗਣਿਤਿਕ ਅਤੇ ਜਿਮਾਇਤੀ ਰੂਪਾਂ ਵਿੱਚ ਵਿਅਕਤ ਕਰੋ (ਦਰਸਾਉ)।
3. 2 ਕਿ.ਗ੍ਰਾਮ ਸੇਬ ਅਤੇ 1 ਕਿ.ਗ੍ਰਾਮ ਅੰਗੂਰ ਦਾ ਮੁੱਲ ਕਿਸੇ ਦਿਨ ₹ 160 ਸੀ। ਇੱਕ ਮਹੀਨੇ ਬਾਅਦ 4 ਕਿ.ਗ੍ਰਾਮ ਸੇਬ ਅਤੇ 2 ਕਿ.ਗ੍ਰਾਮ ਅੰਗੂਰ ਦਾ ਮੁੱਲ ₹ 300 ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਨੂੰ ਬੀਜ ਗਣਿਤਿਕ ਅਤੇ ਜਿਮਾਇਤੀ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਉ (ਵਿਅਕਤ ਕਰੋ)।

3.3 ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣ ਜੋੜੇ ਦਾ ਆਲੇਖੀ (ਗ੍ਰਾਫ) ਵਿਧੀ ਨਾਲ ਹੱਲ

ਪਿਛਲੇ ਭਾਗ ਵਿੱਚ ਤੁਸੀਂ ਦੇਖਿਆ ਕਿ ਇੱਕ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣ ਜੋੜੇ ਨੂੰ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਗ੍ਰਾਫ ਵਿੱਚ ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਤੁਸੀਂ ਇਹ ਵੀ ਦੇਖਿਆ ਕਿ ਇਹ ਰੇਖਾਵਾਂ ਇੱਕ ਦੂਸਰੇ ਨੂੰ ਕੱਟ ਸਕਦੀਆਂ ਹਨ ਜਾਂ ਸਮਾਂਤਰ ਹੋ ਸਕਦੀਆਂ ਹਨ ਜਾਂ ਸੰਪਾਤੀ ਹੋ ਸਕਦੀਆਂ ਹਨ। ਕੀ ਅਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ ਹਰ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਹੱਲ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ? ਅਤੇ ਜੇਕਰ ਹਾਂ ਤਾਂ ਫਿਰ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ? ਅਸੀਂ ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰਾਂਗੇ ਅਤੇ ਇਹਨਾਂ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਦਾ ਉੱਤਰ ਜਿਮਾਇਤੀ ਦ੍ਰਿਸ਼ਟੀ ਨਾਲ ਇਸ ਭਾਗ ਵਿੱਚ ਦੇਵਾਂਗੇ

ਆਓ ਅਸੀਂ ਪਿਛਲੀਆਂ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਨੂੰ ਇੱਕ-ਇੱਕ ਕਰਕੇ ਦੇਖੀਏ।

- ਉਦਾਹਰਣ 1 ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ, ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ ਅਮਰਦੀਪ ਨੇ ਕਿੰਨੇ ਵਾਰ ਝੂਲੇ ਦੀ ਸਵਾਰੀ ਕੀਤੀ ਅਤੇ ਕਿੰਨੇ ਵਾਰ ਹੂਪਲਾ ਖੇਡ ਖੇਡਿਆ।

ਚਿੱਤਰ 3.2 ਵਿੱਚ ਤੁਸੀਂ ਦੇਖਿਆ ਕਿ ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਣ ਵਾਲੇ ਸਮੀਕਰਣ ਜਿਮਾਇਤੀ ਰੂਪ ਨਾਲ ਬਿੰਦੂ (4, 2) ਤੇ ਕੱਟਣ ਵਾਲੀਆਂ ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਬਿੰਦੂ (4, 2) ਦੋਹਾਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ $x - 2y = 0$ ਅਤੇ $3x + 4y = 20$ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਣ ਵਾਲੀਆ ਰੇਖਾਵਾਂ ਤੇ ਸਥਿਤ ਹੈ ਅਤੇ ਕੇਵਲ ਇਹ ਹੀ ਸਾਂਝਾ ਬਿੰਦੂ ਹੈ।

ਆਓ ਅਸੀਂ ਬੀਜ ਗਣਿਤਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਇਹ ਸਿੱਧ ਕਰੀਏ ਕਿ $x = 4$, $y = 2$ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਸਮੀਕਰਣ ਜੋੜੇ ਦਾ ਇੱਕ ਹੱਲ ਹੈ। ਦੋਹਾਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਵਿੱਚ x ਅਤੇ y ਦਾ ਮੁੱਲ ਰੱਖਣ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $4 - 2 \times 2 = 0$ ਅਤੇ $3(4) + 4(2) = 20$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ਸਿੱਧ ਕੀਤਾ ਹੈ ਕਿ

= 4, y = 2 ਦੋਹਾਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦਾ ਇੱਕ ਹੱਲ ਹੈ **ਕਿਉਂਕਿ (4, 2) ਦੋਹਾਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦਾ ਕੇਵਲ ਇੱਕ ਸਾਂਝਾ ਬਿੰਦੂ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਦੋ ਚਲਾਂ ਵਿੱਚ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣ ਜੋੜੇ ਦਾ ਇੱਕ ਅਤੇ ਕੇਵਲ ਇੱਕ ਹੱਲ ਹੈ।**

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਮਰਦੀਪ ਨੇ ਝੂਲੇ ਦੀ ਚਾਰ ਵਾਰ ਸਵਾਰੀ ਕੀਤੀ ਅਤੇ 2 ਵਾਰ ਹੂਪਲਾ ਖੇਡ ਖੇਡਿਆ।

- ਉਦਾਹਰਣ 2 ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ, ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਹਰੇਕ ਪੈਨਸਿਲ ਅਤੇ ਹਰੇਕ ਰਬੜ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ?

ਚਿੱਤਰ 3.3 ਵਿੱਚ ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਨੂੰ ਜਿਮਾਇਤੀ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਸੰਪਾਤੀ ਰੇਖਾ ਦੇ ਜੋੜੇ ਦੁਆਰਾ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੇ ਹੱਲ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਸਾਂਝੇ ਬਿੰਦੂਆਂ (Common Points) ਦੁਆਰਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

ਕੀ ਇਹਨਾਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਸਾਂਝਾ ਬਿੰਦੂ ਹੈ? ਗ੍ਰਾਫ ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਇਸ ਰੇਖਾ ਦਾ ਹਰ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਦੋਹਾਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦਾ ਇੱਕ ਹੱਲ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਸਮੀਕਰਣਾਂ $2x + 3y = 9$ ਅਤੇ $4x + 6y = 18$ ਦੇ ਅਨੇਕਾਂ ਹੱਲ (Infinite solution) ਹਨ। ਇਸ ਤੋਂ ਸਾਨੂੰ ਹੈਰਾਨੀ ਨਹੀਂ ਹੋਣੀ ਚਾਹੀਦੀ ਕਿਉਂਕਿ ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਸਮੀਕਰਣ $4x + 6y = 18$ ਨੂੰ 2 ਨਾਲ ਭਾਗ ਕਰੀਏ ਤਾਂ ਸਾਨੂੰ $2x + 3y = 9$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਜੋ ਕਿ ਸਮੀਕਰਣ (1) ਹੀ ਹੈ। ਭਾਵ ਦੋਵੇਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਤੁਲ ਹੀ ਹਨ। ਗ੍ਰਾਫ ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਰੇਖਾ 'ਤੇ ਹਰੇਕ ਬਿੰਦੂ ਹਰੇਕ ਪੈਨਸਿਲ ਅਤੇ ਹਰੇਕ ਰਬੜ ਦਾ ਮੁੱਲ ਦਿੰਦਾ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ, ਹਰੇਕ ਪੈਨਸਿਲ ਅਤੇ ਹਰੇਕ ਰਬੜ ਦਾ ਮੁੱਲ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ₹ 3 ਅਤੇ ₹ 1 ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ ਜਾਂ ਹਰ ਇੱਕ ਪੈਨਸਿਲ ਦਾ ਮੁੱਲ ₹ 3.74 ਅਤੇ ਰਬੜ ਦਾ ਮੁੱਲ ₹ 0.50 ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ, ਆਦਿ।

- **ਉਦਾਹਰਣ 3 ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ, ਕੀ ਰੇਲ ਪਟੜੀਆਂ ਕਿਸੇ ਸਥਾਨ 'ਤੇ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਮਿਲ ਸਕਦੀਆਂ ਹਨ?**

ਉਦਾਹਰਣ 3.4 ਵਿੱਚ, ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਸਥਿਤੀ ਨੂੰ ਜਿਮਾਇਤੀ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦੋ ਸਮਾਂਤਰ ਰੇਖਾਵਾਂ ਨਾਲ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਕਿਉਂਕਿ ਰੇਖਾਵਾਂ ਕੱਟਦੀਆਂ ਨਹੀਂ ਹਨ। ਇਹ ਪਟੜੀਆਂ ਇੱਕ ਦੂਸਰੇ ਨੂੰ ਨਹੀਂ ਮਿਲਦੀਆਂ। ਇਸ ਦਾ ਇਹ ਅਰਥ ਹੈ ਇਹਨਾਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦਾ ਕੋਈ ਸਾਂਝਾ ਹੱਲ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਇੱਕ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣ ਜੋੜਾ, ਜਿਸਦਾ ਕੋਈ ਹੱਲ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ, ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦਾ ਅਸੰਗਤ (inconsistent) ਜੋੜਾ ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਇੱਕ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣ ਜੋੜਾ ਜਿਸਦਾ ਹੱਲ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦਾ ਸੰਗਤ (consistent) ਜੋੜਾ ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਤੁਲ (equivalent) ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੇ ਇੱਕ ਜੋੜੇ ਦੇ ਅਣਗਿਣਤ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਅਨੇਕਾਂ (Infinite) ਹੱਲ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਜੋੜੇ ਨੂੰ ਦੋ ਚਲਾਂ ਦੇ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦਾ ਆਸ਼ਰਿਤ (dependent) ਜੋੜਾ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦਾ ਆਸ਼ਰਿਤ ਜੋੜਾ ਹਮੇਸ਼ਾਂ ਸੰਗਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਦੋ ਚਲਾਂ ਦੇ ਇੱਕ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣ ਜੋੜੇ ਦੁਆਰਾ ਨਿਰੂਪਤ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੇ ਵਿਹਾਰ ਨੂੰ

ਅਤੇ ਹੱਲ ਦੀ ਹੋਂਦ ਨੂੰ ਹੇਠਾਂ ਅਨੁਸਾਰ ਇੱਕ ਸਾਰ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ :

(i) ਰੇਖਾਵਾਂ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ 'ਤੇ ਕੱਟ ਸਕਦੀਆਂ ਹਨ। ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ, ਸਮੀਕਰਣ ਜੋੜੇ ਦਾ ਕੇਵਲ ਇੱਕ ਵਿਲੱਖਣ ਹੱਲ (unique solution) ਹੁੰਦਾ ਹੈ (ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦਾ ਸੰਗਤ ਜੋੜਾ)।

(ii) ਰੇਖਾਵਾਂ ਸਮਾਂਤਰ ਹੋ ਸਕਦੀਆਂ ਹਨ। ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦਾ ਕੋਈ ਹੱਲ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ (ਅਸੰਗਤ ਸਮੀਕਰਣ ਜੋੜਾ)।

(iii) ਰੇਖਾਵਾਂ ਸੰਪਾਤੀ ਹੋ ਸਕਦੀਆਂ ਹਨ। ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੇ ਅਣਗਿਣਤ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਅਨੇਕਾਂ ਹੱਲ (Infinite solution) ਹੁੰਦੇ ਹਨ। [ਆਸ਼ਰਿਤ (ਸੰਗਤ) ਸਮੀਕਰਣ ਜੋੜਾ]।

ਆਓ ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਉਦਾਹਰਣਾਂ 1, 2 ਅਤੇ 3 ਵਿੱਚ ਬਣੇ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣ ਜੋੜਿਆਂ 'ਤੇ ਫਿਰ ਤੋਂ ਵਾਪਿਸ ਆਈਏ ਅਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ ਕਿ ਇਹ ਜੋੜੇ ਜਿਮਾਇਤੀ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਕਿਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਹਨ।

(i) $x - 2y = 0$ ਅਤੇ $3x + 4y - 20 = 0$ (ਰੇਖਾਵਾਂ ਕੱਟਦੀਆਂ ਹਨ)

(ii) $2x + 3y - 9 = 0$ ਅਤੇ $4x + 6y - 18 = 0$ (ਰੇਖਾਵਾਂ ਸੰਪਾਤੀ ਹਨ)

(iii) $x + 2y - 4 = 0$ ਅਤੇ $2x + 4y - 12 = 0$ (ਰੇਖਾਵਾਂ ਸਮਾਂਤਰ ਹਨ)

ਹੁਣ ਆਓ ਸਾਰੀਆਂ ਤਿੰਨਾਂ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਵਿੱਚ, $\frac{a_1}{a_2}$, $\frac{b_1}{b_2}$ ਅਤੇ $\frac{c_1}{c_2}$ ਦੇ ਮੁੱਲ ਲਿਖੀਏ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਕਰੀਏ। ਇੱਥੇ a_1, b_1, c_1 ਅਤੇ a_2, b_2, c_2 ਭਾਗ 3.2 ਵਿੱਚ ਵਿਆਪਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੇ ਗੁਣਾਂਕਾਂ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਨ।

ਸਾਰਣੀ 3.4

ਲੜੀ ਨੰ.	ਸਮੀਕਰਣ ਜੋੜਾ	$\frac{a_1}{a_2}$	$\frac{b_1}{b_2}$	$\frac{c_1}{c_2}$	ਅਨੁਪਾਤਾਂ ਦੀ ਤੁਲਨਾ	ਆਲੇਖੀ (ਗ੍ਰਾਫੀ) ਨਿਰੂਪਣ	ਬੀਜਗਣਿਤਕ ਨਿਰੂਪਣ
1	$x - 2y = 0$ $3x + 4y - 20 = 0$	$\frac{1}{3}$	$\frac{-2}{4}$	$\frac{0}{-20}$	$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$	ਕੱਟਦੀਆਂ ਰੇਖਾਵਾਂ	ਕੇਵਲ ਇੱਕ ਹੱਲ (ਵਿਲੱਖਣ)
2	$2x + 3y - 9 = 0$ $4x + 6y - 18 = 0$	$\frac{2}{4}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{-9}{-18}$	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$	ਸੰਪਾਤੀ ਰੇਖਾਵਾਂ	ਅਣਗਿਣਤ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਅਨੇਕ ਹੱਲ
3	$x + 2y - 4 = 0$ $2x + 4y - 12 = 0$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{-4}{-12}$	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$	ਸਮਾਂਤਰ ਰੇਖਾਵਾਂ	ਕੋਈ ਹੱਲ ਨਹੀਂ

ਸਾਰਣੀ 3.4 ਤੋਂ ਤੁਸੀਂ ਦੇਖ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0$$

ਅਤੇ $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੀਆਂ ਰੇਖਾਵਾਂ

(i) ਕੱਟਦੀਆਂ ਹਨ, ਤਾਂ $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

(ii) ਸੰਪਾਤੀ ਹਨ, ਤਾਂ $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

(iii) ਸਮਾਂਤਰ ਹਨ, ਤਾਂ $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਅਸਲ ਵਿੱਚ, ਇਸਦਾ ਉਲਟ ਵੀ ਕਿਸੇ ਵੀ ਰੇਖੀ ਜੋੜੇ ਦੇ ਲਈ ਸੱਚ ਹੈ। ਤੁਸੀਂ ਕੁਝ ਹੋਰ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਲੈ ਕੇ ਇਸ ਦੀ ਜਾਂਚ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ।

ਆਓ ਇਸਨੂੰ ਸਪਸ਼ਟ ਕਰਨ ਲਈ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਲਈਏ।

ਉਦਾਹਰਣ 4 : ਪੜਤਾਲ ਕਰੋ ਕਿ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦਾ ਜੋੜਾ

$$x + 3y = 6 \qquad (1)$$

ਅਤੇ

$$2x - 3y = 12 \qquad (2)$$

ਸੰਗਤ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੈ, ਤਾਂ ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ ਗ੍ਰਾਫ ਦੁਆਰਾ ਹੱਲ ਕਰੋ।

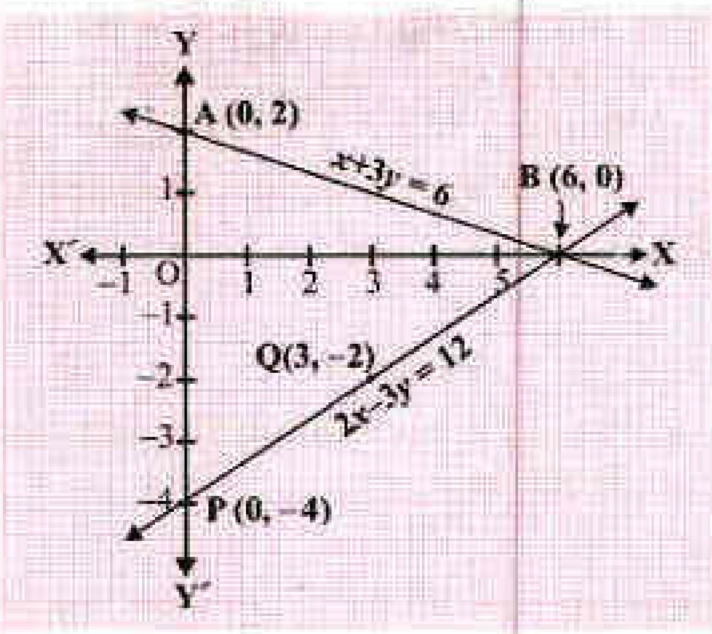
ਹੱਲ : ਆਓ ਸਮੀਕਰਣਾਂ (1) ਅਤੇ (2) ਦਾ ਗ੍ਰਾਫ ਖਿੱਚੀਏ। ਇਸਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ ਹਰੇਕ ਸਮੀਕਰਣ ਦੇ ਦੋ ਹੱਲ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ, ਜੋ ਸਾਰਣੀ 3.5 ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਹਨ।

ਸਾਰਣੀ 3.5

x	0	6
$y = \frac{6-x}{3}$	2	0

x	0	3
$y = \frac{2x-12}{3}$	−4	−2

ਇੱਕ ਗ੍ਰਾਫ ਪੇਪਰ 'ਤੇ ਬਿੰਦੂਆਂ A(0, 2), B(6, 0), P(0, −4) ਅਤੇ Q(3, − 2) ਨੂੰ ਆਲੇਖਿਤ ਕਰੋ ਅਤੇ ਬਿੰਦੂਆਂ ਨੂੰ ਮਿਲਾ ਕੇ ਰੇਖਾ AB ਅਤੇ PQ ਚਿੱਤਰ 3.5 ਅਨੁਸਾਰ ਬਣਾਓ।



ਚਿੱਤਰ 3.5

ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਰੇਖਾਵਾਂ AB ਅਤੇ PQ ਵਿੱਚ ਸਾਂਝਾ ਬਿੰਦੂ B(6, 0) ਹੈ। ਇਸ ਲਈ, ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣ ਜੋੜੇ ਦਾ ਹੱਲ $x = 6, y = 0$ ਹੈ, ਭਾਵ ਸਮੀਕਰਣ ਜੋੜਾ ਸੰਗਤ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 5 : ਗ੍ਰਾਫ ਦੁਆਰਾ ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਸਮੀਕਰਣ ਦੇ ਜੋੜੇ ਦਾ ਹੱਲ ਨਹੀਂ ਹੈ, ਇੱਕ ਵਿਲੱਖਣ ਹੱਲ ਹੈ ਜਾਂ ਅਣਗਿਣਤ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਅਨੇਕ ਹੱਲ ਹਨ:

$$5x - 8y + 1 = 0 \qquad (1)$$

$$3x - \frac{24}{5}y + \frac{3}{5} = 0 \qquad (2)$$

ਹੱਲ : ਸਮੀਕਰਣ (2) ਨੂੰ $\frac{5}{3}$ ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰਨ 'ਤੇ, ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ:

$$5x - 8y + 1 = 0$$

ਪ੍ਰੰਤੂ ਇਹ ਤਾਂ ਉਹ ਹੀ ਹੈ ਜੋ ਸਮੀਕਰਣ (1) ਹੈ। ਇਸ ਲਈ, ਸਮੀਕਰਣਾਂ (1) ਅਤੇ (2) ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਣ ਵਾਲੀਆਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਸੰਪਾਤੀ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਸਮੀਕਰਣਾਂ (1) ਅਤੇ (2) ਦੇ ਅਣਗਿਣਤ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਅਨੇਕ ਹੱਲ ਹਨ।

ਗ੍ਰਾਫ 'ਤੇ ਕੁਝ ਬਿੰਦੂ ਲਗਾਉ ਅਤੇ ਆਪਣੇ ਆਪ ਜਾਂਚ ਕਰ ਲਓ।

ਉਦਾਹਰਣ 6 : ਚੰਪਾ ਇੱਕ ਸੇਲ ਤੋਂ ਕੁਝ ਪੈਂਟਾਂ ਅਤੇ ਸਕਰਟਾਂ ਖਰੀਦਣ ਗਈ। ਜਦੋਂ ਉਸਦੀਆਂ

ਸਹੇਲੀਆਂ ਨੇ ਪੁੱਛਿਆ ਕਿ ਹਰੇਕ ਦੇ ਕਿੰਨੇ ਨਗ ਖਰੀਦੇ ਤਾਂ ਉਸਨੇ ਉੱਤਰ ਦਿੱਤਾ "ਸਕਰਟਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਖਰੀਦੀਆਂ ਗਈਆਂ ਪੈਂਟਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਦੇ ਦੁਗਣੇ ਤੋਂ ਦੋ ਘੱਟ ਹੈ। ਸਕਰਟਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਖਰੀਦੀਆਂ ਗਈਆਂ ਪੈਂਟਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਦੀ ਚਾਰ ਗੁਣਾ ਤੋਂ ਵੀ ਚਾਰ ਘੱਟ ਹੈ।" ਸਹੇਲੀਆਂ ਦੀ ਇਹ ਲੱਭਣ ਲਈ ਸਹਾਇਤਾ ਕਰੋ ਕਿ ਚੰਪਾ ਨੇ ਕਿੰਨੀਆਂ ਪੈਂਟਾਂ ਅਤੇ ਸਕਰਟਾਂ ਖਰੀਦੀਆਂ ?

ਹੱਲ : ਆਓ ਅਸੀਂ ਪੈਂਟਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਨੂੰ x ਅਤੇ ਸਕਰਟਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਨੂੰ y ਨਾਲ ਦਰਸਾਈਏ ਤਾਂ ਇਹਨਾਂ ਤੋਂ ਬਣੀਆਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਹਨ :

$$y = 2x - 2 \qquad (1)$$

ਅਤੇ

$$y = 4x - 4 \qquad (2)$$

ਹੁਣ ਆਓ ਸਮੀਕਰਣਾਂ (1) ਅਤੇ (2) ਦੇ ਗ੍ਰਾਫ ਖਿੱਚਣ ਲਈ ਹਰ ਇੱਕ ਸਮੀਕਰਣ ਦੇ ਦੋ ਹੱਲ ਪਤਾ ਕਰੀਏ। ਇਹ ਸਾਰਣੀ 3.6 ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਹਨ

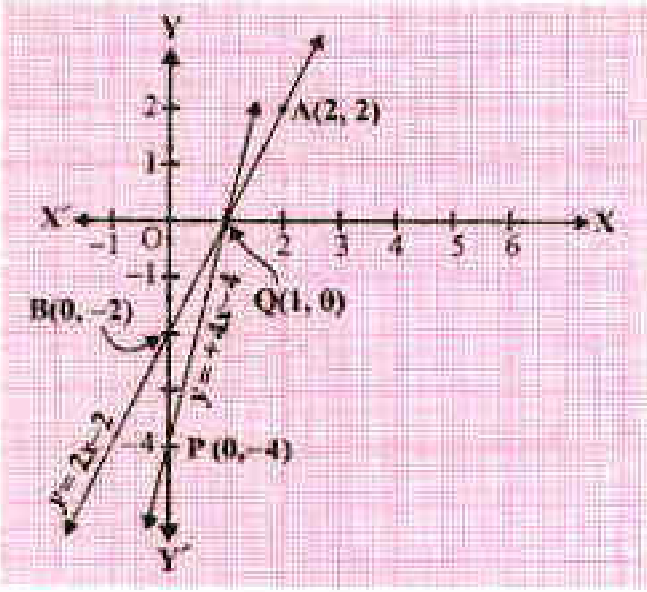
ਸਾਰਣੀ 3.6

x	2	0
$y = 2x - 2$	2	-2

x	0	1
$y = 4x - 4$	-4	0

ਬਿੰਦੂਆਂ ਨੂੰ ਆਲੇਖਿਤ ਕਰੋ ਅਤੇ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਣ ਲਈ ਉਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਜਾਣ ਵਾਲੀਆਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਖਿੱਚੋ, ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਚਿੱਤਰ 3.6 ਵਿੱਚ ਦਿਖਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ।

ਇਹ ਦੋਵੇਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਬਿੰਦੂ (1,0) 'ਤੇ ਕੱਟਦੀਆਂ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ $x = 1$, $y = 0$ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣ ਜੋੜੇ ਦਾ ਇੱਕ ਲੋੜੀਂਦਾ ਹੱਲ ਹੈ, ਭਾਵ ਉਸਦੇ ਦੁਆਰਾ ਖਰੀਦੀਆਂ ਗਈਆਂ ਪੈਂਟਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ 1 ਹੈ ਅਤੇ ਉਸਨੇ ਕੋਈ ਸਕਰਟ ਨਹੀਂ ਖਰੀਦੀ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 3.6

ਪੜਤਾਲ (1) ਅਤੇ (2) ਵਿੱਚ $x = 1$ ਅਤੇ $y = 0$ ਰੱਖਣ ਤੇ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਦੋਵੇਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਹੋ ਜਾਂਦੀਆਂ ਹਨ।

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 3.2

1. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਵਿੱਚ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੇ ਜੋੜੇ ਬਣਾਉ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਆਲੇਖੀ ਵਿਧੀ ਨਾਲ ਹੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ :

   (i) ਜਮਾਤ X ਦੇ 10 ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਨੇ ਗਣਿਤ ਦੀ ਇੱਕ ਬੁਝਾਰਤ ਮੁਕਾਬਲੇ ਵਿੱਚ ਭਾਗ ਲਿਆ। ਜੇਕਰ ਲੜਕੀਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ, ਲੜਕਿਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਤੋਂ 4 ਵੱਧ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਮੁਕਾਬਲੇ ਵਿੱਚ ਭਾਗ ਲੈਣ ਵਾਲੇ ਲੜਕੇ ਅਤੇ ਲੜਕੀਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।

   (ii) 5 ਪੈਨਸਿਲਾਂ ਅਤੇ 7 ਕਲਮਾਂ ਦਾ ਕੁੱਲ ਮੁੱਲ ₹ 50 ਹੈ, ਜਦ ਕਿ 7 ਪੈਨਸਿਲਾਂ ਅਤੇ 5 ਕਲਮਾਂ ਦਾ ਕੁੱਲ ਮੁੱਲ ₹ 46 ਹੈ। ਇੱਕ ਪੈਨਸਿਲ ਅਤੇ ਇੱਕ ਕਲਮ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

2. ਅਨੁਪਾਤਾਂ $\frac{a_1}{a_2}$, $\frac{b_1}{b_2}$ ਅਤੇ $\frac{c_1}{c_2}$ ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਕਰਕੇ ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਸਮੀਕਰਣ ਜੋੜਿਆਂ ਦੁਆਰਾ ਦਰਸਾਉਂਦੀਆਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ 'ਤੇ ਕੱਟਦੀਆਂ ਹਨ, ਸਮਾਂਤਰ ਹਨ ਜਾਂ ਸੰਪਾਤੀ ਹਨ:

   (i) $5x - 4y + 8 = 0$
   $7x + 6y - 9 = 0$

   (ii) $9x + 3y + 12 = 0$
   $18x + 6y + 24 = 0$

   (iii) $6x - 3y + 10 = 0$
   $2x - y + 9 = 0$

3. ਅਨੁਪਾਤਾਂ $\frac{a_1}{a_2}$, $\frac{b_1}{b_2}$ ਅਤੇ $\frac{c_1}{c_2}$ ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਕਰਕੇ ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੇ ਜੋੜੇ ਸੰਗਤ ਹਨ ਜਾਂ ਅਸੰਗਤ :

   (i) $3x + 2y = 5$; $2x - 3y = 7$

   (ii) $2x - 3y = 8$; $4x - 6y = 9$

   (iii) $\frac{3}{2}x + \frac{5}{3}y = 7$; $9x - 10y = 14$

   (iv) $5x - 3y = 11$; $-10x + 6y = -22$

   (v) $\frac{4}{3}x + 2y = 8$; $2x + 3y = 12$

4. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੇ ਜੋੜਿਆਂ ਵਿੱਚ ਕਿਹੜਾ ਜੋੜਾ ਸੰਗਤ ਹੈ ਅਤੇ ਕਿਹੜਾ ਅਸੰਗਤ। ਜੇਕਰ ਜੋੜਾ ਸੰਗਤ ਹੈ ਤਾਂ ਆਲੇਖੀ ਵਿਧੀ ਨਾਲ ਹੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ:

   (i) $x + y = 5$, $2x + 2y = 10$

   (ii) $x - y = 8$, $3x - 3y = 16$

   (iii) $2x + y - 6 = 0$, $4x - 2y - 4 = 0$

   (iv) $2x - 2y - 2 = 0$, $4x - 4y - 5 = 0$

5. ਇੱਕ ਆਇਤਾਕਾਰ ਬਾਗ, ਜਿਸਦੀ ਲੰਬਾਈ, ਚੌੜਾਈ ਤੋਂ 4 ਮੀ. ਵੱਧ ਹੈ, ਦਾ ਅਰਧ ਪਰਿਮਾਪ 36 ਮੀ. ਹੈ। ਬਾਗ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਅਤੇ ਚੌੜਾਈ ਪਤਾ ਕਰੋ।
6. ਇਕ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣ $2x + 3y - 8 = 0$ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਹੈ। ਦੋ ਚਲਾਂ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਇਸ ਤਰਾਂ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਲਿਖੋ ਤਾਂ ਕਿ ਪ੍ਰਾਪਤ ਜੋੜੇ ਦਾ ਜਿਮਾਇਤੀ ਨਿਰੂਪਣ ਜਦੋਂ ਕਿ
   (i) ਕੱਟਦੀਆਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਹੋਣ। (ii) ਸਮਾਂਤਰ ਰੇਖਾਵਾਂ ਹੋਣ।
   (iii) ਸੰਪਾਤੀ ਰੇਖਾਵਾਂ ਹੋਣ।
7. ਸਮੀਕਰਣਾਂ $x - y + 1 = 0$ ਅਤੇ $3x + 2y - 12 = 0$ ਦਾ ਗ੍ਰਾਫ ਖਿੱਚੋ। x-ਧੁਰੇ ਅਤੇ ਇਹਨਾਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਨਾਲ ਬਣੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੇ ਸਿਖਰਾਂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਪਤਾ ਕਰੋ ਅਤੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਆਕਾਰ ਖੇਤਰ ਨੂੰ ਛਾਇਆ-ਅੰਕਿਤ (Shade) ਕਰੋ।

3.4 ਇੱਕ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣ ਜੋੜੇ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਦੀ ਬੀਜਗਣਿਤਕ (Algebraic) ਵਿਧੀ

ਪਿਛਲੇ ਭਾਗ ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣ ਜੋੜੇ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਦੀ ਆਲੇਖੀ (ਗ੍ਰਾਫੀ) ਵਿਧੀ ਬਾਰੇ ਚਰਚਾ ਕੀਤੀ ਸੀ। ਆਲੇਖੀ ਵਿਧੀ ਉਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਸੁਵਿਧਾਜਨਕ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦੀ ਜਦ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੇ ਹੱਲਾਂ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਣ ਵਾਲੇ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼-ਅੰਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਨਾ ਹੋਣ ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $\left(\sqrt{3}, 2\sqrt{7}\right), (-1.75, 3.3), \left(\frac{4}{13}, \frac{1}{19}\right)$ ਆਦਿ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਬਿੰਦੂਆਂ ਨੂੰ ਪੜ੍ਹਨ ਵਿੱਚ ਗਲਤੀ ਦੀ ਬਹੁਤ ਸੰਭਾਵਨਾ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਕੀ ਹੱਲ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੀ ਕੋਈ ਹੋਰ ਵਿਧੀ ਵੀ ਹੈ? ਇਸ ਦੀਆਂ ਕਈ ਬੀਜਗਣਿਤਿਕ ਵਿਧੀਆਂ ਹਨ, ਜਿਹਨਾਂ ਦੀ ਅਸੀਂ ਹੁਣ ਚਰਚਾ ਕਰਾਂਗੇ।

3.4.1 ਪ੍ਰਤਿਸਥਾਪਨ (Substitution) ਵਿਧੀ :

ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਤਿਸਥਾਪਨ ਵਿਧੀ ਨੂੰ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਲੈ ਕੇ ਸਮਝਾਵਾਂਗੇ।

ਉਦਾਹਰਣ 7 : ਪ੍ਰਤਿਸਥਾਪਨ ਵਿਧੀ ਦੁਆਰਾ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣ ਜੋੜੇ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ :

$$7x - 15y = 2 \qquad (1)$$

$$x + 2y = 3 \qquad (2)$$

ਹੱਲ :

ਪਗ 1 : ਅਸੀਂ ਕਿਸੇ ਇੱਕ ਸਮੀਕਰਣ ਨੂੰ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਕਿਸੇ ਇੱਕ ਚਲ ਨੂੰ ਦੂਸਰੇ ਦੇ ਪਦਾਂ ਵਿੱਚ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ। ਆਓ ਸਮੀਕਰਣ (2)

$x + 2y = 3$, ਨੂੰ ਲਈਏ ਅਤੇ ਇਸਨੂੰ

$x = 3 - 2y$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖੀਏ (3)

ਪਗ 2 : x ਦਾ ਇਹ ਮੁੱਲ ਸਮੀਕਰਣ (1) ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਤਿਸਥਾਪਿਤ ਕਰੋ। ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :

$$7(3 - 2y) - 15y = 2$$

ਭਾਵ $21 - 14y - 15y = 2$

ਭਾਵ $-29y = -19$

ਇਸ ਲਈ $y = \frac{19}{29}$

ਪਗ 3 : y ਦਾ ਇਹ ਮੁੱਲ ਸਮੀਕਰਣ (3) ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਤਿਸਥਾਪਿਤ ਕਰਨ 'ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ:

$$x = 3 - 2\left(\frac{19}{29}\right) = \frac{49}{29}$$

ਇਸ ਲਈ $x = \frac{49}{29}, y = \frac{19}{29}$ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਹੱਲ ਹੈ।

ਪੜਤਾਲ : $x = \frac{49}{29}$ ਅਤੇ $y = \frac{19}{29}$ ਨੂੰ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਵਿੱਚ ਰੱਖਣ 'ਤੇ ਤੁਸੀਂ ਦੇਖ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ ਦੋਵੇਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ (1) ਅਤੇ (2) ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਹੋ ਜਾਂਦੀਆਂ ਹਨ।

ਪ੍ਰਤਿਸਥਾਪਨ ਵਿਧੀ ਨੂੰ ਹੋਰ ਸਪਸ਼ਟ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਸਮਝਣ ਲਈ, ਆਓ ਇਸਦੇ ਲੜੀਬੱਧ ਰੂਪ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ।

ਪਗ 1 : ਇੱਕ ਚਲ ਦਾ ਮੁੱਲ, ਮੰਨ ਲਓ y ਨੂੰ ਦੂਸਰੇ ਚਲ, ਮੰਨ ਲਉ x ਦੇ ਪਦਾਂ ਵਿੱਚ ਕਿਸੇ ਵੀ ਸਮੀਕਰਣ ਤੋਂ ਪਤਾ ਕਰੋ, ਜੋ ਸੁਵਿਧਾਜਨਕ ਹੋਵੇ।

ਪਗ 2: y ਦੇ ਇਸ ਮੁੱਲ ਨੂੰ ਦੂਸਰੇ ਸਮੀਕਰਣ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਤਿਸਥਾਪਿਤ ਕਰੋ ਅਤੇ ਇਸਨੂੰ ਇੱਕ ਚਲ x ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਬਦਲੋ, ਜਿਸ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਕਦੇ-ਕਦੇ ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੇਠਾਂ ਉਦਾਹਰਣ 9 ਅਤੇ 10 ਵਿੱਚ ਹੈ। ਤੁਸੀਂ ਬਿਨਾਂ ਕਿਸੇ ਚਲ ਦੇ ਕਥਨ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ। ਜੇਕਰ ਇਹ ਕਥਨ ਸੱਚ ਹੈ ਤਾਂ ਤੁਸੀਂ ਇਹ ਨਤੀਜਾ ਕੱਢ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣ ਜੋੜੇ ਦੇ ਅਣਗਿਣਤ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਅਨੇਕ ਹੱਲ ਹਨ। ਜੇਕਰ ਪਗ 2 ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਥਨ ਝੂਠਾ ਹੈ ਤਾਂ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣ ਜੋੜਾ ਅਸੰਗਤ ਹੈ।

ਪਗ 3 : ਪਗ 2 ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ x (ਜਾਂ y) ਦਾ ਮੁੱਲ ਉਸ ਸਮੀਕਰਣ ਜਿਸਨੂੰ ਪਗ 1 ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ, ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਤਿਸਥਾਪਿਤ ਕਰਕੇ ਦੂਸਰੇ ਚਲ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਟਿੱਪਣੀ: ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਚਲ ਦਾ ਮੁੱਲ ਦੂਸਰੇ ਚਲ ਦੇ ਪਦ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾ ਕੇ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣ ਜੋੜੇ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਲਈ ਪ੍ਰਤਿਸਥਾਪਿਤ ਕੀਤਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਇਸ ਵਿਧੀ ਨੂੰ **ਪ੍ਰਤਿਸਥਾਪਨ ਵਿਧੀ** ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ 8 : ਅਭਿਆਸ 3.1 ਦੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਂ ਨੂੰ ਪ੍ਰਤਿਸਥਾਪਨ ਵਿਧੀ ਨਾਲ ਹੱਲ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਓ ਬਲਦੇਵ ਅਤੇ ਉਸਦੀ ਲੜਕੀ ਦੀ ਉਮਰ (ਸਾਲਾਂ ਵਿੱਚ) ਕ੍ਰਮਵਾਰ s ਅਤੇ t ਹੈ। ਹੁਣ

ਉਸ ਸਥਿਤੀ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਣ ਲਈ, ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣ ਜੋੜਾ ਹੈ :

$$s - 7 = 7(t - 7), \text{ ਭਾਵ } s - 7t + 42 = 0 \quad (1)$$

ਅਤੇ $$s + 3 = 3(t + 3), \text{ ਭਾਵ } s - 3t = 6 \quad (2)$$

ਸਮੀਕਰਣ (2) ਤੋਂ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ : $s = 3t + 6$

ਸਮੀਕਰਣ (1) ਵਿੱਚ s ਦਾ ਮੁੱਲ ਰੱਖਣ 'ਤੇ, ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ :

$$(3t + 6) - 7t + 42 = 0$$

ਭਾਵ $4t = 48$, ਜਿਸ ਤੋਂ $t = 12$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

t ਦੇ ਇਸ ਮੁੱਲ ਨੂੰ ਸਮੀਕਰਣ (2) ਵਿੱਚ ਰੱਖਣ 'ਤੇ, ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ :

$$s = 3(12) + 6 = 42$$

ਇਸ ਲਈ, ਬਲਦੇਵ ਅਤੇ ਉਸਦੀ ਲੜਕੀ ਦੀ ਉਮਰ ਕ੍ਰਮਵਾਰ 42 ਸਾਲ ਅਤੇ 12 ਸਾਲ ਹੈ।

ਇਸ ਉੱਤਰ ਦੀ ਜਾਂਚ ਦੇ ਲਈ, ਇਹ ਪੜਤਾਲ ਕਰੋ ਕਿ ਇਹ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਸਮੱਸਿਆ ਦੀਆਂ ਸ਼ਰਤਾਂ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦਾ ਹੈ ਜਾਂ ਨਹੀਂ।

ਉਦਾਹਰਣ 9 : ਆਓ ਭਾਗ 3.3 ਦੇ ਉਦਾਹਰਣ 2 ਨੂੰ ਲਈਏ, ਭਾਵ 2 ਪੈਨਸਿਲਾਂ ਅਤੇ 3 ਰਬੜਾਂ ਦਾ ਮੁੱਲ ₹ 9 ਅਤੇ 4 ਪੈਨਸਿਲਾਂ ਅਤੇ 6 ਰਬੜਾਂ ਦਾ ਮੁੱਲ ₹ 18 ਹੈ। ਹਰ ਇੱਕ ਪੈਨਸਿਲ ਅਤੇ ਰਬੜ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣ ਜੋੜੇ ਜੋ ਬਣੇ ਸਨ, ਉਹ ਹਨ :

$$2x + 3y = 9 \quad (1)$$

$$4x + 6y = 18 \quad (2)$$

ਅਸੀਂ ਪਹਿਲੇ ਸਮੀਕਰਣ $2x + 3y = 9$ ਤੋਂ x ਦਾ ਮੁੱਲ y ਦੇ ਪਦਾਂ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

$$x = \frac{9 - 3y}{2} \quad (3)$$

ਹੁਣ ਅਸੀਂ x ਦੇ ਇਸ ਮੁੱਲ ਨੂੰ ਸਮੀਕਰਣ (2) ਵਿੱਚ ਰੱਖਣ 'ਤੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

$$\frac{4(9 - 3y)}{2} + 6y = 18$$

ਭਾਵ $$18 - 6y + 6y = 18$$

ਭਾਵ $$18 = 18$$

ਇਹ ਕਥਨ y ਦੇ ਸਾਰੇ ਮੁੱਲਾਂ ਲਈ ਸੱਚ ਹੈ। ਭਾਵੇਂ ਇਸ ਤੋਂ y ਦਾ ਕੋਈ ਮੁੱਲ ਹੱਲ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਪਤ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਸਾਨੂੰ x ਦਾ ਕੋਈ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਮੁੱਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ। ਇਹ ਸਥਿਤੀ ਇਸ ਲਈ ਪੈਦਾ ਹੋਈ ਕਿਉਂਕਿ ਦੋਵੇਂ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਸਮੀਕਰਣ ਇੱਕ ਹੀ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਸਮੀਕਰਣ (1) ਅਤੇ

(2) ਦੇ ਅਣਗਿਣਤ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਅਨੇਕ ਹੱਲ ਹਨ। ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦਾ ਇਹ ਹੀ ਹੱਲ ਸਾਨੂੰ ਗ੍ਰਾਫੀ (ਆਲੇਖੀ) ਵਿਧੀ ਤੋਂ ਮਿਲਿਆ ਹੈ (ਭਾਗ 3.2 ਦੇ ਚਿੱਤਰ 3.3 ਦੇ ਹਵਾਲੇ ਤੋਂ)। ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਪੈਨਸਿਲ ਅਤੇ ਇੱਕ ਰਬੜ ਦਾ ਇੱਕ ਵਿੱਲਖਣ ਮੁੱਲ (Unique Cost) ਪ੍ਰਾਪਤ ਨਹੀਂ ਕਰ ਸਕਦੇ ਕਿਉਂਕਿ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਬਹੁਤ ਸਾਰੇ ਸਾਂਝੇ ਹੱਲ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ 10 : ਆਓ ਭਾਗ 3.2 ਦਾ ਉਦਾਹਰਣ 3 ਲਈਏ। ਕੀ ਰੇਲ ਪਟੜੀਆਂ ਇੱਕ ਦੂਸਰੇ ਨੂੰ ਕੱਟਣਗੀਆਂ?

ਹੱਲ : ਇਸ ਤੋਂ ਬਣਾਏ ਗਏ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣ ਸਨ :

$$x + 2y - 4 = 0 \tag{1}$$

$$2x + 4y - 12 = 0 \tag{2}$$

ਸਮੀਕਰਣ (1) ਤੋਂ x ਨੂੰ y ਦੇ ਪਦਾਂ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਉਣ 'ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ :

$$x = 4 - 2y$$

ਹੁਣ x ਦੇ ਇਸ ਮੁੱਲ ਨੂੰ ਸਮੀਕਰਣ (2) ਵਿੱਚ ਰੱਖਣ 'ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ :

$$2(4 - 2y) + 4y - 12 = 0$$

ਭਾਵ $$8 - 12 = 0$$

ਭਾਵ $$-4 = 0$$

ਜੋ ਕਿ ਇੱਕ ਝੂਠਾ ਕਥਨ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ, ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦਾ ਕੋਈ ਸਾਂਝਾ ਹੱਲ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ, ਦੋਵੇਂ ਪਟੜੀਆਂ ਇੱਕ ਦੂਸਰੇ ਨੂੰ ਨਹੀਂ ਕੱਟਣਗੀਆਂ।

ਅਭਿਆਸ 3.3

1. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣ ਜੋੜਿਆਂ ਨੂੰ ਪ੍ਰਤਿਸਥਾਪਨ ਵਿਧੀ ਨਾਲ ਹੱਲ ਕਰੋ :-

(i) $x + y = 14$
$x - y = 4$

(ii) $s - t = 3$
$\frac{s}{3} + \frac{t}{2} = 6$

(iii) $3x - y = 3$
$9x - 3y = 9$

(iv) $0.2x + 0.3y = 1.3$
$0.4x + 0.5y = 2.3$

(v) $\sqrt{2}x + \sqrt{3}y = 0$
$\sqrt{3}x - \sqrt{8}y = 0$

(vi) $\frac{3x}{2} - \frac{5y}{3} = -2$
$\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = \frac{13}{6}$

2. $2x + 3y = 11$ ਅਤੇ $2x - 4y = -24$ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ ਅਤੇ ਇਸ ਵਿੱਚ 'm' ਦਾ (ਹ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸਦੇ ਲਈ $y = mx + 3$ ਹੋਵੇ।

3. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਦੇ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣ ਜੋੜੇ ਬਣਾਉ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਹੱਲ ਪ੍ਰਤਿਸਥਾਪਨ ਵਿਧੀ ਨਾਲ ਪਤਾ ਕਰੋ :

   (i) ਦੋ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਅੰਤਰ 26 ਹੈ ਅਤੇ ਇੱਕ ਸੰਖਿਆ ਦੂਸਰੀ ਸੰਖਿਆ ਦੀ ਤਿੰਨ ਗੁਣਾ ਹੈ। ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰੋ।

   (ii) ਦੋ ਸੰਪੂਰਕ ਕੋਣਾਂ ਵਿੱਚ ਵੱਡਾ ਕੋਣ ਛੋਟੇ ਕੋਣ ਤੋਂ 18 ਡਿਗਰੀ ਵੱਧ ਹੈ। ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰੋ।

   (iii) ਇੱਕ ਕ੍ਰਿਕਟ ਟੀਮ ਦੇ ਕੋਚ ਨੇ 7 ਬੱਲੇ ਅਤੇ 6 ਗੇਦਾਂ ₹ 3800 ਵਿੱਚ ਖਰੀਦੀਆਂ । ਬਾਅਦ ਵਿੱਚ ਉਸਨੇ 3 ਬੱਲੇ ਅਤੇ 5 ਗੇਦਾਂ ₹ 1750 ਵਿੱਚ ਖਰੀਦੀਆਂ। ਹਰ ਇੱਕ ਬੱਲੇ ਅਤੇ ਗੇਂਦ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

   (iv) ਇੱਕ ਸ਼ਹਿਰ ਵਿੱਚ ਟੈਕਸੀ ਕਿਰਾਏ ਵਿੱਚ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਕਿਰਾਏ ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ ਤੈਅ ਕੀਤੀ ਦੂਰੀ ਦਾ ਕਿਰਾਇਆ ਸ਼ਾਮਿਲ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। 10 ਕਿ.ਮੀ ਦੂਰੀ ਦੇ ਲਈ ਕਿਰਾਇਆ ₹ 105 ਹੈ ਅਤੇ 15 ਕਿ.ਮੀ ਦੇ ਲਈ ਕਿਰਾਇਆ ₹ 155 ਹੈ। ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਕਿਰਾਇਆ ਅਤੇ ਪ੍ਰਤੀ ਕਿ.ਮੀ ਕਿਰਾਇਆ ਕੀ ਹੈ? ਇੱਕ ਵਿਅਕਤੀ ਨੂੰ 25 ਕਿ.ਮੀ ਯਾਤਰਾ ਤੈਅ ਕਰਨ ਲਈ ਕਿੰਨਾ ਕਿਰਾਇਆ ਦੇਣਾ ਪਵੇਗਾ?

   (v) ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ ਭਿੰਨ ਦੇ ਅੰਸ਼ ਅਤੇ ਹਰ ਦੋਹਾਂ ਵਿੱਚ 2 ਜੋੜ ਦਿੱਤਾ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਇਹ $\frac{9}{11}$ ਹੋ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਅੰਸ਼ ਅਤੇ ਹਰ ਦੋਹਾਂ ਵਿੱਚ 3 ਜੋੜ ਦਿੱਤਾ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਇਹ $\frac{5}{6}$ ਹੋ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਇਹ ਭਿੰਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

   (vi) ਪੰਜ ਸਾਲ ਬਾਦ ਜੈਕਬ ਦੀ ਉਮਰ ਉਸਦੇ ਲੜਕੇ ਦੀ ਉਮਰ ਦਾ ਤਿੰਨ ਗੁਣਾ ਹੋ ਜਾਵੇਗੀ। ਪੰਜ ਸਾਲ ਪਹਿਲਾਂ ਜੈਕਬ ਦੀ ਉਮਰ ਉਸਦੇ ਲੜਕੇ ਦੀ ਉਮਰ ਦਾ ਸੱਤ ਗੁਣਾ ਸੀ। ਉਹਨਾਂ ਦੀ ਹੁਣ ਦੀ (ਵਰਤਮਾਨ) ਉਮਰ ਕੀ ਹੈ?

3.4.2 ਵਿਲੋਪਣ (Elimination) ਵਿਧੀ

ਹੁਣ ਆਓ ਇੱਕ ਹੋਰ ਵਿਧੀ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ ਜਿਸਨੂੰ ਇੱਕ ਚਲ ਨੂੰ ਲੁਪਤ (ਅਲੋਪ) ਕਰਨ ਦੀ ਵਿਧੀ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਹ ਕਦੇ-ਕਦੇ ਪ੍ਰਤਿਸਥਾਪਨ ਵਿਧੀ ਨਾਲੋਂ ਵੱਧ ਸੁਵਿਧਾਜਨਕ ਰਹਿੰਦੀ ਹੈ। ਆਓ ਦੇਖੀਏ ਕਿ ਇਹ ਵਿਧੀ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕੀਤੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 11 : ਦੋ ਵਿਅਕਤੀਆਂ ਦੀ ਆਮਦਨ ਦਾ ਅਨੁਪਾਤ 9 : 7 ਹੈ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਖਰਚੇ ਦਾ ਅਨੁਪਾਤ 4 : 3 ਹੈ। ਜੇਕਰ ਹਰੇਕ ਵਿਅਕਤੀ ਮਹੀਨੇ ਵਿੱਚ ₹ 2000 ਬਚਾ ਲੈਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਉਹਨਾਂ ਦੀ ਮਹੀਨਾਵਾਰ ਆਮਦਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਆਓ ਦੋਹਾਂ ਵਿਅਕਤੀਆਂ ਦੀ ਮਹੀਨਾਵਾਰ ਆਮਦਨ ਨੂੰ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ₹ $9x$ ਅਤੇ ₹ $7x$ ਅਤੇ

ਖਰਚਿਆਂ ਨੂੰ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ₹ $4y$ ਅਤੇ ₹ $3y$ ਨਾਲ ਦਰਸਾਈਏ. ਹੁਣ ਸਥਿਤੀ ਅਨੁਸਾਰ ਬਣੇ ਸਮੀਕਰਣ ਹਨ :

$$9x - 4y = 2000 \quad (1)$$

ਅਤੇ
$$7x - 3y = 2000 \quad (2)$$

ਪਗ 1 : y ਦੇ ਗੁਣਾਕਾਂ ਨੂੰ ਬਰਾਬਰ ਕਰਨ ਲਈ ਸਮੀਕਰਣ (1) ਨੂੰ 3 ਨਾਲ ਅਤੇ ਸਮੀਕਰਣ (2) ਨੂੰ 4 ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰੋ। ਸਾਨੂੰ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਸਮੀਕਰਣ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੇ ਹਨ :

$$27x - 12y = 6000 \quad (3)$$

$$28x - 12y = 8000 \quad (4)$$

ਪਗ 2 : y ਦਾ ਵਿਲੋਪਣ (eliminate) ਕਰਨ ਲਈ ਸਮੀਕਰਣ (3) ਨੂੰ ਸਮੀਕਰਣ (4) ਵਿੱਚੋਂ ਘਟਾਉ, ਕਿਉਂਕਿ y ਦੇ ਗੁਣਾਂਕ ਬਰਾਬਰ ਹਨ, ਇਸ ਲਈ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ :

$$(28x - 27x) - (12y - 12y) = 8000 - 6000$$

ਭਾਵ
$$x = 2000$$

ਪਗ 3 : x ਦਾ ਮੁੱਲ (1) ਵਿੱਚ ਰੱਖਣ 'ਤੇ, ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ :

$$9(2000) - 4y = 2000$$

ਭਾਵ
$$y = 4000$$

ਇਸ ਲਈ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੇ ਜੋੜੇ ਦਾ ਹੱਲ $x = 2000$, $y = 4000$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ, ਵਿਅਕਤੀਆਂ ਦੀ ਮਹੀਨਾਵਾਰ ਆਮਦਨ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ₹ 18000 ਅਤੇ ₹ 14000 ਹੈ।

ਜਾਂਚ: $18000 : 14000 = 9 : 7$ ਹੈ। ਨਾਲ ਹੀ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਖਰਚੇ ਦਾ ਅਨੁਪਾਤ
$18000 - 2000 : 14000 - 2000 = 16000 : 12000 = 4 : 3$ ਹੈ।

ਟਿੱਪਣੀ :

1. ਉਪਰੋਕਤ ਉਦਾਹਰਣ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਲਈ, ਵਰਤੀ ਗਈ ਵਿਧੀ ਨੂੰ **ਵਿਲੋਪਣ ਵਿਧੀ (elimination method)** ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ, ਕਿਉਂਕਿ ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਇੱਕ ਚਲ ਨੂੰ ਅਲੋਪ ਕਰਕੇ, ਇੱਕ ਚਲ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਉਪਰੋਕਤ ਉਦਾਹਰਣ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ y ਨੂੰ ਅਲੋਪ ਕੀਤਾ ਹੈ। ਅਸੀਂ x ਨੂੰ ਵੀ ਅਲੋਪ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਵੀ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਦਾ ਯਤਨ ਕਰੋ।
2. ਤੁਸੀਂ ਇਸਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਲਈ ਪ੍ਰਤਿਸਥਾਪਨ ਵਿਧੀ ਜਾਂ ਆਲੇਖੀ (ਗ੍ਰਾਫ਼ੀ) ਵਿਧੀ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਵੀ ਕਰ ਸਕਦੇ ਸੀ। ਇਹਨਾਂ ਵਿਧੀਆਂ ਨਾਲ ਵੀ ਹੱਲ ਕਰੋ ਅਤੇ ਦੇਖੋ ਕਿ ਕਿਹੜੀ ਵਿਧੀ ਸਭ ਤੋਂ ਉਚਿਤ ਹੈ।

ਆਓ ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਵਿਲੋਪਣ ਵਿਧੀ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਦੇ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਪਗ ਦੱਸੀਏ :

ਪਗ 1 : ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਦੋਹਾਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਨੂੰ ਕਿਸੇ ਲੋੜੀਂਦੇ ਗੈਰ-ਸਿਫ਼ਰ ਅਚਲ ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰਕੇ ਕਿਸੇ ਇੱਕ ਚਲ (x ਜਾਂ y) ਦੇ ਗੁਣਾਕਾਂ ਨੂੰ ਸੰਖਿਆਤਮਕ ਰੂਪ ਵਿਚ ਬਰਾਬਰ ਕਰਨ ਲਈ ਗੁਣਾ ਕਰੋ।

ਪਗ 2 : ਇਸ ਤੋਂ ਉਪਰੰਤ ਦੋਹਾਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਨੂੰ ਜੋੜੋ ਜਾਂ ਘਟਾਉ ਜਿਸ ਨਾਲ ਇੱਕ ਚਲ ਅਲੋਪ ਹੋ

ਜਾਵੇ। ਜੇਕਰ ਤਹਾਨੂੰ ਇੱਕ ਚਲ ਵਿੱਚ ਸਮੀਕਰਣ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਪਗ 3 ਵਿੱਚ ਜਾਉ।

ਜੇਕਰ ਪਗ 2 ਵਿੱਚ ਸਾਨੂੰ ਚਲ ਰਹਿਤ ਇੱਕ ਸੱਚਾ ਕਥਨ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਵੇ, ਤਾਂ ਮੂਲ ਸਮੀਕਰਣ ਜੋੜੇ ਦੇ ਅਣਗਿਣਤ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਅਨੇਕ ਹੱਲ ਹਨ।

ਜੇਕਰ ਪਗ 2 ਵਿੱਚ, ਸਾਨੂੰ ਇੱਕ ਚੱਲ ਰਹਿਤ ਝੂਠਾ ਕਥਨ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਮੂਲ ਸਮੀਕਰਣ ਜੋੜੇ ਦਾ ਕੋਈ ਹੱਲ ਨਹੀਂ ਹੋਵੇਗਾ ਭਾਵ ਇਹ ਅਸੰਗਤ ਹੈ।

ਪਗ 3 : ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ, ਇੱਕ ਚਲ (x ਜਾਂ y) ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਪਤ ਸਮੀਕਰਣ ਨੂੰ, ਉਸ ਚਲ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ, ਹੱਲ ਕਰੋ।

ਪਗ 4 : x (ਜਾਂ y) ਦੇ ਇਸ ਮੁੱਲ ਨੂੰ ਮੂਲ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਸੇ ਇਕ ਚੱਲ ਵਿੱਚ ਦੂਸਰੇ ਚਲ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਪ੍ਰਤਿਸਥਾਪਿਤ ਕਰੋ। ਹੁਣ ਇਸਨੂੰ ਸਮਝਾਉਣ ਲਈ, ਅਸੀਂ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਹੱਲ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

ਉਦਾਹਰਣ 12 : ਵਿਲੋਪਣ ਵਿਧੀ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ, ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣ ਜੋੜੇ ਦੇ ਸਾਰੇ ਸੰਭਵ ਹੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ:

$$2x + 3y = 8 \quad (1)$$
$$4x + 6y = 7 \quad (2)$$

ਹੱਲ :

ਪਗ 1 : ਸਮੀਕਰਣ (1) ਨੂੰ 2 ਨਾਲ ਅਤੇ ਸਮੀਕਰਣ (2) ਨੂੰ 1 ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰੋ ਤਾਂ ਕਿ x ਦੇ ਗੁਣਾਂਕ ਬਰਾਬਰ ਹੋ ਜਾਣ, ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ :

$$4x + 6y = 16 \quad (3)$$
$$4x + 6y = 7 \quad (4)$$

ਪਗ 2 : ਸਮੀਕਰਣ (4) ਨੂੰ ਸਮੀਕਰਣ (3) ਵਿੱਚੋਂ ਘਟਾਉਣ 'ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :

$$(4x - 4x) + (6y - 6y) = 16 - 7$$

ਭਾਵ $0 = 9$, ਜੋ ਕਿ ਇੱਕ ਝੂਠਾ ਕਥਨ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ ਸਮੀਕਰਣ ਜੋੜੇ ਦਾ ਕੋਈ ਹੱਲ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 13 : ਦੋ ਅੰਕਾਂ ਦੀ ਇੱਕ ਸੰਖਿਆ ਅਤੇ ਉਸਦੇ ਅੰਕਾਂ ਨੂੰ ਉਲਟਾ ਕੇ ਬਣੀ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਜੋੜ 66 ਹੈ। ਜੇਕਰ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਅੰਕਾਂ ਦਾ ਅੰਤਰ 2 ਹੈ ਤਾਂ ਸੰਖਿਆ ਪਤਾ ਕਰੋ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਕਿੰਨੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ?

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਪਹਿਲੀ ਸੰਖਿਆ ਦੀ ਦਹਾਈ ਅਤੇ ਇੱਕਾਈ ਦੇ ਅੰਕ ਕ੍ਰਮਵਾਰ x ਅਤੇ y ਹਨ ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ਪਹਿਲੀ ਸੰਖਿਆ ਨੂੰ ਵਿਸਤਾਰਿਤ ਰੂਪ ਵਿਚ $10x + y$ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ [ਉਦਾਹਰਣ ਲਈ, $56 = 10(5) + 6$]।

ਜਦੋਂ ਅੰਕ ਉਲਟ ਜਾਂਦੇ ਹਨ ਤਾਂ x ਇਕਾਈ ਦਾ ਅੰਕ ਅਤੇ y ਦਹਾਈ ਦਾ ਅੰਕ ਬਣ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਸੰਖਿਆ $10y + x$ ਬਣ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। [ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ ਜਦ 56 ਨੂੰ ਉਲਟਾ ਦਿੱਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ $65 = 10(6) + 5$]।

ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਸ਼ਰਤ ਅਨੁਸਾਰ,

$$(10x + y) + (10y + x) = 66$$

ਭਾਵ $$11(x+y) = 66$$

ਭਾਵ $$x + y = 6 \qquad (1)$$

ਸਾਨੂੰ ਇਹ ਵੀ ਦਿੱਤਾ ਹੈ ਕਿ ਅੰਕਾਂ ਦਾ ਅੰਤਰ 2 ਹੈ। ਇਸ ਲਈ

ਜਾਂ ਤਾਂ $$x - y = 2 \qquad (2)$$

ਜਾਂ $$y - x = 2 \qquad (3)$$

ਜੇਕਰ $x - y = 2$ ਹੈ, ਤਾਂ (1) ਅਤੇ (2) ਨੂੰ ਵਿਲੋਪਣ ਵਿਧੀ ਨਾਲ ਹੱਲ ਕਰਨ ਤੇ $x = 4$ ਅਤੇ $y = 2$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਸਾਨੂੰ ਸੰਖਿਆ 42 ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

ਜੇਕਰ $y - x = 2$ ਹੈ, ਤਾਂ (1) ਅਤੇ (3) ਨੂੰ ਵਿਲੋਪਣ ਵਿਧੀ ਨਾਲ ਹੱਲ ਕਰਨ 'ਤੇ $x = 2$ ਅਤੇ $y = 4$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਸੰਖਿਆ 24 ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਜਿਹੀਆਂ ਦੋ ਸੰਖਿਆਵਾਂ 42 ਅਤੇ 24 ਹੈ।

ਜਾਂਚ : ਇੱਥੇ $42 + 24 = 66$ ਅਤੇ $4 - 2 = 2$ ਹੈ ਅਤੇ $24 + 42 = 66$ ਅਤੇ $4 - 2 = 2$ ਹੈ।

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 3.4

1. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਸਮੀਕਰਣ ਜੋੜਿਆਂ ਨੂੰ ਵਿਲੋਪਣ ਵਿਧੀ ਅਤੇ ਪ੍ਰਤਿਸਥਾਪਨ ਵਿਧੀ ਨਾਲ ਹੱਲ ਕਰੋ। ਕਿਹੜੀ ਵਿਧੀ ਵੱਧ ਉਚਿਤ ਹੈ?

   (i) $x + y = 5$ ਅਤੇ $2x - 3y = 4$ (ii) $3x + 4y = 10$ ਅਤੇ $2x - 2y = 2$

   (iii) $3x - 5y - 4 = 0$ ਅਤੇ $9x = 2y + 7$ (iv) $\frac{x}{2} + \frac{2y}{3} = -1$ ਅਤੇ $x - \frac{y}{3} = 3$

2. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਦੇ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣ ਜੋੜੇ ਬਣਾਓ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਹੱਲ (ਜੇਕਰ ਉਸਦੀ ਹੋਂਦ ਹੋਵੇ) ਵਿਲੋਪਣ ਵਿਧੀ ਨਾਲ ਪਤਾ ਕਰੋ :

   (i) ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਅੰਸ਼ ਵਿੱਚ 1 ਜੋੜ ਦੇਈਏ ਅਤੇ ਹਰ ਵਿੱਚੋਂ 1 ਘਟਾ ਦੇਈਏ ਤਾਂ ਭਿੰਨ 1 ਵਿੱਚ ਬਦਲ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਸਿਰਫ਼ ਹਰ ਵਿੱਚ 1 ਜੋੜ ਦੇਈਏ ਤਾਂ ਇਹ $\frac{1}{2}$ ਬਣ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਭਿੰਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

   (ii) ਪੰਜ ਸਾਲ ਪਹਿਲਾਂ ਨੂਰੀ ਦੀ ਉਮਰ ਸੋਨੂੰ ਦੀ ਉਮਰ ਦਾ ਤਿੰਨ ਗੁਣਾ ਸੀ। ਦਸ ਸਾਲ ਬਾਦ ਨੂਰੀ ਦੀ ਉਮਰ ਸੋਨੂੰ ਦੀ ਉਮਰ ਦਾ ਦੋ ਗੁਣਾ ਹੋ ਜਾਵੇਗੀ। ਨੂਰੀ ਅਤੇ ਸੋਨੂੰ ਦੀ ਉਮਰ ਕਿੰਨੀ ਹੈ?

   (iii) ਦੋ ਅੰਕਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਅੰਕਾਂ ਦਾ ਜੋੜ 9 ਹੈ। ਇਸ ਸੰਖਿਆ ਦਾ 9 ਗੁਣਾ, ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਅੰਕਾਂ ਨੂੰ ਉਲਟਾ ਕੇ ਬਣੀ ਸੰਖਿਆ ਦਾ 2 ਗੁਣਾ ਹੈ। ਸੰਖਿਆ ਪਤਾ ਕਰੋ।

   (iv) ਮੀਨਾ ₹ 2000 ਕਢਵਾਉਣ ਇੱਕ ਬੈਂਕ ਵਿੱਚ ਗਈ। ਉਸਨੇ ਖਜਾਨਚੀ ਨੂੰ ₹ 50 ਅਤੇ ₹ 100 ਦੇ ਨੋਟ ਦੇਣ ਲਈ ਕਿਹਾ। ਮੀਨਾ ਨੇ ਕੁੱਲ 25 ਨੋਟ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੇ। ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ ਉਸਨੇ ₹ 50 ਅਤੇ ₹100 ਦੇ ਕਿੰਨੇ-ਕਿੰਨੇ ਨੋਟ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੇ?

(v) ਕਿਰਾਏ 'ਤੇ ਪੁਸਤਕਾਂ ਦੇਣ ਵਾਲੀ ਕਿਸੇ ਲਾਇਬਰੇਰੀ ਦਾ ਪਹਿਲੇ ਤਿੰਨ ਦਿਨ ਦਾ ਇੱਕ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਕਿਰਾਇਆ ਹੈ ਅਤੇ ਉਸ ਤੋਂ ਬਾਦ ਹਰ ਇੱਕ ਵਾਧੂ ਦਿਨ ਦਾ ਕਿਰਾਇਆ ਅਲੱਗ ਹੈ। ਸਰਿਤਾ ਨੇ ਸੱਤ ਦਿਨ ਤੱਕ ਇੱਕ ਪੁਸਤਕ ਰੱਖਣ ਲਈ ₹ 27 ਦਿੱਤੇ ਜਦਕਿ ਮੰਜੂ ਨੇ ਇੱਕ ਪੁਸਤਕ ਪੰਜ ਦਿਨ ਰੱਖਣ ਲਈ ₹ 21 ਦਿੱਤੇ। ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਕਿਰਾਇਆ ਅਤੇ ਹਰ ਇੱਕ ਵਾਧੂ ਦਿਨ ਦਾ ਕਿਰਾਇਆ ਪਤਾ ਕਰੋ।

3.4.3 ਤਿਰਛੀ ਗੁਣਾ ਵਿਧੀ

ਹੁਣ ਤੱਕ, ਤੁਸੀਂ ਪੜ੍ਹਿਆ ਹੈ ਕਿ ਦੋ ਚਲਾਂ ਵਾਲੇ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣ ਜੋੜੇ ਨੂੰ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਆਲੇਖੀ (ਗ੍ਰਾਫੀ), ਪ੍ਰਤਿਸਥਾਪਨ ਅਤੇ ਵਿਲੋਪਣ ਵਿਧੀਆਂ ਰਾਹੀ ਹੱਲ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣ ਜੋੜੇ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਇੱਕ ਹੋਰ ਬੀਜ ਗਣਿਤਿਕ ਵਿਧੀ ਬਾਰੇ ਦੱਸ ਰਹੇ ਹਾਂ, ਜੋ ਕਈ ਕਾਰਣਾਂ ਕਰਕੇ ਇਹਨਾਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਦੀ ਬਹੁਤ ਉਪਯੋਗੀ ਵਿਧੀ ਹੈ। ਇਸ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਕਿ ਅਸੀਂ ਅੱਗੇ ਵਧੀਏ, ਆਓ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀ ਸਥਿਤੀ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ।

5 ਸੰਤਰੇ ਅਤੇ 3 ਸੇਬਾਂ ਦਾ ਮੁੱਲ ₹ 35 ਹੈ ਅਤੇ 2 ਸੰਤਰੇ ਅਤੇ 4 ਸੇਬਾਂ ਦਾ ਮੁੱਲ ₹ 28 ਹੈ। ਆਓ ਇੱਕ ਸੰਤਰੇ ਅਤੇ ਇੱਕ ਸੇਬ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੀਏ।

ਮੰਨ ਲਓ ਕਿ ਇੱਕ ਸੰਤਰੇ ਦਾ ਮੁੱਲ ₹ x ਅਤੇ ਇੱਕ ਸੇਬ ਦਾ ਮੁੱਲ ₹ y ਹੈ ਤਾਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਬਣਨਗੀਆਂ :

$$5x + 3y = 35, \text{ ਭਾਵ } 5x + 3y - 35 = 0 \qquad (1)$$

ਅਤੇ

$$2x + 4y = 28, \text{ ਭਾਵ } 2x + 4y - 28 = 0 \qquad (2)$$

ਆਓ ਵਿਲੋਪਨ ਵਿਧੀ ਨਾਲ ਇਹਨਾਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੀਏ।

ਸਮੀਕਰਣ (1) ਨੂੰ 4 ਅਤੇ ਸਮੀਕਰਣ (2) ਨੂੰ 3 ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰਨ 'ਤੇ, ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :

$$(4)(5)x + (4)(3)y + (4)(-35) = 0 \qquad (3)$$

$$(3)(2)x + (3)(4)y + (3)(-28) = 0 \qquad (4)$$

ਸਮੀਕਰਣ (4) ਨੂੰ ਸਮੀਕਰਣ (3) ਵਿੱਚੋਂ ਘਟਾਉਣ ਨਾਲ, ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ :

$$[(5)(4) - (3)(2)]x + [(4)(3) - (3)(4)]y + [4(-35) - (3)(-28)] = 0$$

ਇਸ ਲਈ

$$x = \frac{-[(4)(-35) - (3)(-28)]}{(5)(4) - (3)(2)}$$

ਭਾਵ

$$x = \frac{(3)(-28) - (4)(-35)}{(5)(4) - (2)(3)} \qquad (5)$$

ਜੇਕਰ ਸਮੀਕਰਣਾਂ (1) ਅਤੇ (2) ਨੂੰ $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ ਅਤੇ $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਜਾਵੇ, ਤਾਂ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ।

$$a_1 = 5,\ b_1 = 3,\ c_1 = -35,\ a_2 = 2,\ b_2 = 4,\ c_2 = -28$$

ਤਾਂ ਸਮੀਕਰਣ (5) ਨੂੰ ਇਸ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ : $x = \frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$

ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ, ਤੁਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ : $y = \frac{c_1a_2 - c_2a_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$

ਸਮੀਕਰਣ (5) ਨੂੰ ਸਰਲ ਕਰਨ 'ਤੇ, ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ :

$$x = \frac{-84 + 140}{20 - 6} = 4$$

ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ $$y = \frac{(-35)(2) - (5)(-28)}{20 - 6} = \frac{-70 + 140}{14} = 5$$

ਇਸ ਲਈ, $x = 4$, $y = 5$ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੇ ਜੋੜੇ ਦਾ ਹੱਲ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ, ਇੱਕ ਸੰਤਰੇ ਦਾ ਮੁੱਲ ₹ 4 ਅਤੇ ਇੱਕ ਸੇਬ ਦਾ ਮੁੱਲ ₹ 5 ਹੈ।

ਪੜਤਾਲ : 5 ਸੰਤਰਿਆਂ ਦਾ ਮੁੱਲ +3 ਸੇਬਾਂ ਦਾ ਮੁੱਲ = ₹ 20 + ₹ 15 = ₹ 35

2 ਸੰਤਰਿਆਂ ਦਾ ਮੁੱਲ +4 ਸੇਬਾਂ ਦਾ ਮੁੱਲ = ₹ 8 + ₹ 20 = ₹ 28

ਆਓ ਹੁਣ ਦੇਖੀਏ ਕਿ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਇਹ ਵਿਧੀ ਦੋ ਚਲਾਂ ਦੇ ਕਿਸੇ ਵੀ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੇ ਜੋੜੇ

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \quad (1)$$

ਅਤੇ $$a_2x + b_2y + c_2 = 0 \quad (2)$$

ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਉਪਯੋਗੀ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਉਪਰੋਕਤ ਵਿਧੀ ਨਾਲ x ਅਤੇ y ਦੇ ਮੁੱਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਅਨੁਸਾਰ ਅੱਗੇ ਵਧਾਂਗੇ।

ਪਗ 1 : ਸਮੀਕਰਣ (1) ਨੂੰ b_2 ਅਤੇ ਸਮੀਕਰਣ (2) ਨੂੰ b_1 ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰਕੇ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ:

$$b_2a_1x + b_2b_1y + b_2c_1 = 0 \quad (3)$$

$$b_1a_2x + b_1b_2y + b_1c_2 = 0 \quad (4)$$

ਪਗ 2 : ਸਮੀਕਰਣ (4) ਨੂੰ (3) ਵਿੱਚੋਂ ਘਟਾਉਣ ਨਾਲ, ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ

$$(b_2a_1 - b_1a_2)\,x + (b_2b_1 - b_1b_2)\,y + (b_2c_1 - b_1c_2) = 0$$

ਭਾਵ $$(b_2a_1 - b_1a_2)\,x = b_1c_2 - b_2c_1$$

ਇਸ ਲਈ $$x = \frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}, \text{ ਜਦਕਿ } b_2a_1 - b_1a_2 \neq 0 \text{ ਹੋਵੇ} \quad (5)$$

ਪਗ 3 : x ਦਾ ਮੁੱਲ (1) ਅਤੇ (2) ਵਿੱਚ ਰੱਖਣ ਨਾਲ, ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ :

$$y = \frac{c_1a_2 - c_2a_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \qquad (6)$$

ਹੁਣ ਦੋ ਸਥਿਤੀਆਂ ਪੈਦਾ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ :

ਸਥਿਤੀ 1 : $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ ਜੇਕਰ ਹੈ। ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ ਹੈ, ਤਾਂ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੇ ਜੋੜੇ ਦਾ ਇੱਕ ਵਿਲੱਖਣ ਹੱਲ ਹੈ।

ਸਥਿਤੀ 2 : $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ ਜੇਕਰ ਹੈ। $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = k$ ਹੈ, ਤਾਂ $a_1 = k\,a_2, b_1 = k\,b_2$ ਹੋਵੇਗਾ।

a_1 ਅਤੇ b_1 ਨੂੰ ਮੁੱਲਾਂ ਨੂੰ ਸਮੀਕਰਣ (1) ਵਿੱਚ ਰੱਖਣ 'ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ :

$$k\,(a_2x + b_2y) + c_1 = 0 \qquad (7)$$

ਇਹ ਦੇਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਕਿ ਸਮੀਕਰਣ (7) ਅਤੇ (2) ਦੋਵੇਂ ਤਾਂ ਹੀ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਹੋ ਸਕਦੇ ਹਨ, ਜੇਕਰ $c_1 = k\,c_2$ ਹੋਵੇ ਭਾਵ $\frac{c_1}{c_2} = k$ ਹੋਵੇ।

ਜੇਕਰ $c_1 = k\,c_2$ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਸਮੀਕਰਣ (2) ਦਾ ਕੋਈ ਵੀ ਹੱਲ ਸਮੀਕਰਣ (1) ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰੇਗਾ ਅਤੇ ਉਲਟ ਵੀ ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੋਵੇਗਾ। ਇਸ ਲਈ, ਜੇਕਰ $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = k$ ਹੋਵੇ ਤਾਂ (1) ਅਤੇ (2) ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੇ ਜੋੜਿਆਂ ਦੇ ਅਸੀਮਿਤ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਅਨੇਕ ਹੱਲ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

ਜੇਕਰ $c_1 \neq k\,c_2$ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਸਮੀਕਰਣ (1) ਦਾ ਕੋਈ ਵੀ ਹੱਲ ਸਮੀਕਰਣ (2) ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਨਹੀਂ ਕਰੇਗਾ ਅਤੇ ਉਲਟ ਵੀ ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੋਵੇਗਾ। ਇਸ ਲਈ ਇਸ ਜੋੜੇ ਦਾ ਕੋਈ ਹੱਲ ਨਹੀਂ ਹੋਵੇਗਾ।

(1) ਅਤੇ (2) ਦੁਆਰਾ ਦਿੱਤੀਆਂ ਗਈਆਂ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੇ ਜੋੜਿਆਂ ਬਾਰੇ ਉਪਰੋਕਤ ਚਰਚਾ ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ:

(i) ਜਦੋਂ $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ ਹੋਵੇ, ਤਾਂ ਸਾਨੂੰ ਇੱਕ ਵਿਲੱਖਣ ਹੱਲ (Unique Solution) ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

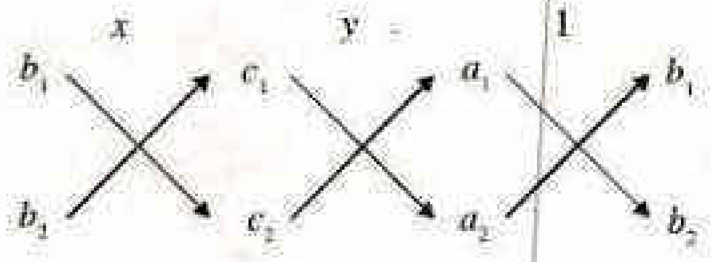
(ii) ਜਦੋਂ $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ ਹੋਵੇ, ਤਾਂ ਜੋੜੇ ਦੇ ਅਣਗਿਣਤ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਅਨੇਕ ਹੱਲ (many solution) ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

(iii) ਜਦੋਂ $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ ਹੈ, ਤਾਂ ਜੋੜੇ ਦਾ ਕੋਈ ਹੱਲ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ।

ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ਸਮੀਕਰਣ (5) ਅਤੇ (6) ਦੁਆਰਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੱਲ ਨੂੰ ਤੁਸੀਂ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਅਨੁਸਾਰ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹੋ :

$$\frac{x}{b_1c_2 - b_2c_1} = \frac{y}{c_1a_2 - c_2a_1} = \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1} \qquad (8)$$

ਉਪਰੋਕਤ ਪਰਿਣਾਮ ਨੂੰ ਯਾਦ ਰੱਖਣ ਲਈ, ਤੁਹਾਨੂੰ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤਾ ਚਿੱਤਰ ਉਪਯੋਗੀ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ :



ਦੋ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਵਿੱਚ ਦੇ ਤੀਰ ਦੇ ਨਿਸ਼ਾਨ ਸੂਚਿਤ ਕਰਦੇ ਹਨ ਕਿ ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ ਗੁਣਾ ਕਰਨਾ ਹੈ ਅਤੇ ਦੂਸਰੇ ਗੁਣਨਫਲ ਨੂੰ ਪਹਿਲੇ ਗੁਣਨਫਲ ਵਿੱਚੋਂ ਘਟਾਉਣਾ ਹੈ।

ਇਸ ਵਿਧੀ ਨਾਲ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣ ਜੋੜਿਆਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਲਈ ਅਸੀਂ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਪਗਾਂ ਅਨੁਸਾਰ ਅੱਗੇ ਵਧਾਂਗੇ:

ਪਗ 1 : ਦਿੱਤੀਆਂ ਗਈਆਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਨੂੰ (1) ਅਤੇ (2) ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖੋ।

ਪਗ 2 : ਉਪਰੋਕਤ ਚਿੱਤਰ ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਨਾਲ (8) ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੀਆਂ ਗਈਆਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਨੂੰ ਲਿਖੋ।

ਪਗ 3 : x ਅਤੇ y ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰੋ, ਜਦ ਕਿ $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ ਹੋਵੇ।

ਉਪਰੋਕਤ ਪਗ 2 ਤੁਹਾਨੂੰ ਇਸ਼ਾਰਾ ਕਰਦਾ ਹੈ ਕਿ ਇਸ ਨੂੰ ਤਿਰਛੀ ਗੁਣਾ ਵਿਧੀ ਕਿਉਂ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

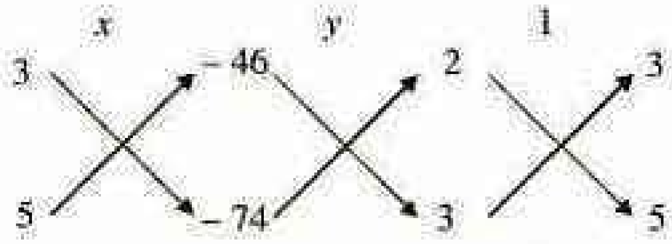
ਉਦਾਹਰਣ 14 : ਚੰਡੀਗੜ੍ਹ ਦੇ ਬੱਸ ਸਟੈਂਡ 'ਤੇ ਜੇਕਰ ਦੋ ਟਿਕਟਾਂ ਜੀਰਕਪੁਰ ਅਤੇ ਤਿੰਨ ਟਿਕਟਾਂ ਰਾਜਪੁਰੇ ਦੀਆਂ ਖਰੀਦੀਏ ਤਾਂ ਕੁੱਲ ਕਿਰਾਇਆ ₹ 46 ਹੈ। ਪ੍ਰੰਤੂ ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ 3 ਟਿਕਟਾਂ ਜੀਰਕਪੁਰ ਅਤੇ 5 ਟਿਕਟਾਂ ਰਾਜਪੁਰੇ ਦੀਆਂ ਲਈਏ ਤਾਂ ਕੁੱਲ ਕਿਰਾਇਆ ₹ 74 ਹੈ। ਬੱਸ ਸਟੈਂਡ ਤੋਂ ਜੀਰਕਪੁਰ ਅਤੇ ਰਾਜਪੁਰੇ ਦਾ ਕਿਰਾਇਆ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਚੰਡੀਗੜ ਦੇ ਬਸ ਸਟੈਂਡ ਤੋਂ ਜੀਰਕਪੁਰ ਦਾ ਕਿਰਾਇਆ ₹ x ਅਤੇ ਰਾਜਪੁਰੇ ਦਾ ਕਿਰਾਇਆ ₹ y ਹੈ। ਦਿੱਤੀਆਂ ਹੋਈਆਂ ਸ਼ਰਤਾਂ ਨੂੰ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :

$$2x + 3y = 46, \text{ ਭਾਵ } 2x + 3y - 46 = 0 \qquad (1)$$

$$3x + 5y = 74, \text{ ਭਾਵ } 3x + 5y - 74 = 0 \qquad (2)$$

ਤਿਰਛੀ ਗੁਣਾ ਵਿਧੀ ਨਾਲ ਇਹਨਾਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਲਈ ਅਸੀਂ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤਾ ਚਿੱਤਰ ਬਣਾਉਂਦੇ ਹਾਂ :



ਹੁਣ $$\frac{x}{(3)(-74)-(5)(-46)} = \frac{y}{(-46)(3)-(-74)(2)} = \frac{1}{(2)(5)-(3)(3)}$$

ਭਾਵ $$\frac{x}{-222+230} = \frac{y}{-138+148} = \frac{1}{10-9}$$

ਭਾਵ $$\frac{x}{8} = \frac{y}{10} = \frac{1}{1}$$

ਭਾਵ $$\frac{x}{8} = \frac{1}{1} \text{ ਅਤੇ } \frac{y}{10} = \frac{1}{1}$$

ਭਾਵ $$x = 8 \text{ ਅਤੇ } y = 10$$

ਇਸ ਲਈ, ਚੰਡੀਗੜ ਦੇ ਬੱਸ ਸਟੈਂਡ ਤੋਂ ਜੀਰਕਪੁਰ ਦਾ ਕਿਰਾਇਆ ₹ 8 ਅਤੇ ਰਾਜਪੁਰੇ ਦਾ ਕਿਰਾਇਆ ₹ 10 ਹੈ।

ਜਾਂਚ : ਤੁਸੀਂ ਸ਼ੁਰੂ ਦੀ ਸਮੱਸਿਆ ਤੋਂ ਪੜਤਾਲ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ ਜੋ ਹੱਲ ਅਸੀਂ ਪਤਾ ਕੀਤੇ ਹਨ ਉਹ ਸਹੀ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ 15 : p ਦੇ ਕਿਹੜੇ ਮੁੱਲਾਂ ਨਾਲ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਸਮੀਕਰਣ ਜੋੜੇ ਦਾ ਇੱਕ ਵਿਲੱਖਣ ਹੱਲ ਹੈ?

$$4x + py + 8 = 0$$
$$2x + 2y + 2 = 0$$

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ $a_1 = 4$, $a_2 = 2$, $b_1 = p$, $b_2 = 2$ ਹੈ।

ਹੁਣ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਜੋੜੇ ਦਾ ਇੱਕ ਵਿਲੱਖਣ ਹੱਲ ਹੋਣ ਲਈ $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ ਹੋਵੇਗਾ।

ਭਾਵ $$\frac{4}{2} \neq \frac{p}{2}$$

ਭਾਵ $$p \neq 4$$

ਇਸ ਲਈ, 4 ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ, p ਦੇ ਹਰ ਇੱਕ ਮੁੱਲ ਲਈ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਸਮੀਕਰਣ ਜੋੜੇ ਦਾ ਇੱਕ ਵਿਲੱਖਣ ਹੱਲ ਹੋਵੇਗਾ।

ਉਦਾਹਰਣ 16 : k ਦੇ ਕਿਸ ਮੁੱਲ ਦੇ ਲਈ, ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣ ਜੋੜੇ ਦੇ ਅਸੀਮਿਤ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਅਨੇਕ ਹੱਲ ਹੋਣਗੇ?

$$kx + 3y - (k - 3) = 0$$

$$12x + ky - k = 0$$

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ $\frac{a_1}{a_2} = \frac{k}{12}, \frac{b_1}{b_2} = \frac{3}{k}, \frac{c_1}{c_2} = \frac{k-3}{k}$ ਹੈ।

ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੇ ਜੋੜੇ ਦੇ ਅਣਗਿਣਤ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਅਨੇਕ ਹੱਲ ਹੋਣ ਦੇ ਲਈ $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ ਸਾਨੂੰ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ $\frac{k}{12} = \frac{3}{k} = \frac{k-3}{k}$

ਜਾਂ $\frac{k}{12} = \frac{3}{k}$

ਜਿਸ ਤੋਂ $k^2 = 36$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਭਾਵ $k = \pm 6$ ਹੈ।

ਨਾਲ ਹੀ $\frac{3}{k} = \frac{k-3}{k}$ ਤੋਂ

ਜਿਸ ਤੋਂ $3k = k^2 - 3k$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਭਾਵ $6k = k^2$ ਹੈ।

ਜਿਸਦਾ ਭਾਵ $k = 0$ ਹੈ ਜਾਂ $k = 6$ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ k ਦਾ ਮੁੱਲ ਜੋ ਦੋਹਾਂ ਸ਼ਰਤਾਂ ਨੂੰ ਪੂਰਾ (ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦਾ ਹੈ, $k = 6$ ਹੈ। ਇਸ ਮੁੱਲ ਦੇ ਲਈ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੇ ਜੋੜੇ ਦੇ ਅਣਗਿਣਤ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਅਨੇਕ ਹੱਲ ਹਨ।

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 3.5

1. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੇ ਜੋੜੇ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਸ ਦਾ ਇੱਕ ਵਿਲੱਖਣ ਹੱਲ ਹੈ, ਕਿਸਦਾ ਕੋਈ ਹੱਲ ਨਹੀਂ ਜਾਂ ਕਿਸਦੇ ਅਸੀਮਿਤ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਅਨੇਕ ਹੱਲ ਹਨ। ਇੱਕ ਹੱਲ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ, ਉਸਨੂੰ ਤਿਰਛੀ ਗੁਣਾ ਦੀ ਵਿਧੀ ਨਾਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

   (i) $x - 3y - 3 = 0$
   $3x - 9y - 2 = 0$

   (ii) $2x + y = 5$
   $3x + 2y = 8$

   (iii) $3x - 5y = 20$
   $6x - 10y = 40$

   (iv) $x - 3y - 7 = 0$
   $3x - 3y - 15 = 0$

2. (i) a ਅਤੇ b ਦੇ ਕਿਹੜੇ ਮੁੱਲਾਂ ਦੇ ਲਈ, ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੇ ਜੋੜੇ ਦੇ ਅਣਗਿਣਤ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਅਨੇਕ ਹੱਲ ਹੋਣਗੇ?

   $2x + 3y = 7$

   $(a - b)x + (a + b)y = 3a + b - 2$

   (ii) k ਦੇ ਕਿਹੜੇ ਮੁੱਲਾਂ ਲਈ, ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣ ਦੇ ਜੋੜੇ ਦਾ ਕੋਈ ਹੱਲ ਨਹੀਂ ਹੈ?

   $3x + y = 1$

   $(2k - 1)x + (k - 1)y = 2k + 1$

3. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣ ਜੋੜੇ ਨੂੰ ਪ੍ਰਤਿਸਥਾਪਨ ਅਤੇ ਤਿਰਛੀ ਗੁਣਾ ਵਿਧੀ ਨਾਲ ਹੱਲ ਕਰੋ। ਤੁਸੀਂ ਕਿਹੜੀ ਵਿਧੀ ਨੂੰ ਵੱਧ ਢੁਕਵੀਂ ਮੰਨਦੇ ਹੋ?

   $8x + 5y = 9$

   $3x + 2y = 4$

4. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਵਿੱਚ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣ ਦੇ ਜੋੜੇ ਬਣਾਉ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਹੱਲ (ਜੇਕਰ ਉਹਨਾਂ ਦੀ ਹੋਂਦ ਹੋਵੇ) ਕਿਸੇ ਵੀ ਬੀਜਗਣਿਤਕ ਵਿਧੀ ਨਾਲ ਪਤਾ ਕਰੋ :

   (i) ਇੱਕ ਹੋਸਟਲ (Hostel) ਦੇ ਮਹੀਨਾਵਾਰ ਖਰਚ ਦਾ ਇੱਕ ਭਾਗ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਹੈ ਅਤੇ ਬਾਕੀ ਇਸ 'ਤੇ ਨਿਰਭਰ ਕਰਦਾ ਹੈ ਕਿ ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਨੇ ਕਿੰਨੇ ਦਿਨ ਭੋਜਨ ਕੀਤਾ ਹੈ। ਇੱਕ ਵਿਦਿਆਰਥੀ A ਜਿਸਨੇ 20 ਦਿਨ ਭੋਜਨ ਕੀਤਾ ਹੈ, ₹ 1000 ਹੋਸਟਲ (Hostel) ਦੇ ਖਰਚ ਲਈ ਦਿੰਦਾ ਹੈ, ਜਦੋਂ ਕਿ ਦੂਸਰਾ ਵਿਦਿਆਰਥੀ B ਜਿਸਨੇ 26 ਦਿਨ ਭੋਜਨ ਕੀਤਾ ਹੈ, ਹੋਸਟਲ ਦੇ ਖਰਚ ਲਈ ₹ 1180 ਖਰਚ ਦਿੰਦਾ ਹੈ। ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਖਰਚ ਅਤੇ ਹਰ ਇੱਕ ਦਿਨ ਦੇ ਭੋਜਨ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

(ii) ਇੱਕ ਭਿੰਨ ਦੇ ਸਿਰਫ ਅੰਸ਼ ਵਿੱਚੋਂ 1 ਘਟਾਉਣ ਨਾਲ ਉਹ $\frac{1}{3}$ ਹੋ ਜਾਂਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਹਰ ਵਿੱਚ 8 ਜੋੜਨ ਨਾਲ ਉਹ $\frac{1}{4}$ ਹੋ ਜਾਂਦੀ ਹੈ ਭਿੰਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

(iii) ਯਸ਼ਪਾਲ ਨੇ ਇੱਕ ਟੈਸਟ ਵਿੱਚ 40 ਅੰਕ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੇ, ਜਦੋਂ ਉਸਨੂੰ ਸਹੀ ਉੱਤਰ ਦੇ 3 ਅੰਕ ਮਿਲੇ ਅਤੇ ਗਲਤ ਉੱਤਰ ਤੇ 1 ਅੰਕ ਦੀ ਕਟੌਤੀ ਕੀਤੀ ਗਈ। ਜੇਕਰ ਉਸਨੂੰ ਸਹੀ ਉੱਤਰ ਦੇ 4 ਅੰਕ ਮਿਲਣ ਅਤੇ ਗਲਤ ਉੱਤਰ ਦੇ 2 ਅੰਕ ਕੱਟੇ ਜਾਣ ਤਾਂ ਉਹ 50 ਅੰਕ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਟੈਸਟ ਵਿੱਚ ਕਿੰਨੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਸਨ?

(iv) ਇੱਕ ਰਾਜਮਾਰਗ 'ਤੇ ਦੋ ਸਥਾਨ A ਤੇ B, 100 ਕਿ.ਮੀ. ਦੀ ਦੂਰੀ 'ਤੇ ਹਨ। ਇੱਕ ਕਾਰ A ਤੋਂ ਅਤੇ ਦੂਸਰੀ ਕਾਰ B ਤੋਂ ਇੱਕ ਹੀ ਸਮੇਂ 'ਤੇ ਚਲਣਾ ਸ਼ੁਰੂ ਕਰਦੀਆਂ ਹਨ। ਜੇਕਰ ਇਹ ਕਾਰਾਂ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਗਤੀ (ਚਾਲ) ਨਾਲ ਇੱਕ ਹੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਚਲਦੀਆਂ ਹਨ, ਤਾਂ ਇਹ 5 ਘੰਟੇ ਬਾਅਦ ਮਿਲ ਜਾਣਗੀਆਂ। ਜੇਕਰ ਇਹ ਕਾਰਾਂ ਇੱਕ ਦੂਜੇ ਵੱਲ (ਜਾਂ ਵਿਰੋਧੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ) ਚਲਦੀਆਂ ਹਨ ਤਾਂ ਇਹ 1 ਘੰਟੇ ਬਾਅਦ ਮਿਲ ਜਾਣਗੀਆਂ। ਦੋਵਾਂ ਕਾਰਾਂ ਦੀ ਗਤੀ (ਚਾਲ) ਪਤਾ ਕਰੋ।

(v) ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਆਇਤ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਨੂੰ 5 ਇਕਾਈਆਂ ਘਟਾ ਦੇਈਏ ਅਤੇ ਚੌੜਾਈ ਨੂੰ 3 ਇਕਾਈਆਂ ਵਧਾ ਦੇਈਏ ਤਾਂ ਆਇਤ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ 9 ਵਰਗ ਇਕਾਈਆਂ ਘੱਟ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਲੰਬਾਈ 3 ਇਕਾਈਆਂ ਅਤੇ ਚੌੜਾਈ ਨੂੰ 2 ਇਕਾਈਆਂ ਵਧਾ ਦੇਈਏ ਤਾਂ ਖੇਤਰਫਲ 67 ਵਰਗ ਇਕਾਈਆਂ ਵੱਧ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਆਇਤ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਅਤੇ ਚੌੜਾਈ ਪਤਾ ਕਰੋ।

3.5 ਦੋ ਚਲਾਂ ਦੇ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੇ ਜੋੜਿਆਂ ਵਿੱਚ ਬਦਲੇ ਜਾ ਸਕਣ ਵਾਲੇ ਸਮੀਕਰਣ:

ਇਸ ਭਾਗ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਸਮੀਕਰਣ ਜੋੜਿਆਂ ਬਾਰੇ ਚਰਚਾ ਕਰਾਂਗੇ ਜੋ ਰੇਖੀ ਨਹੀਂ ਹਨ, ਪ੍ਰੰਤੂ ਕੁਝ ਢੁਕਵੀਂ ਪ੍ਰਤਿਸਥਾਪਨਾ ਦੁਆਰਾ ਉਹਨਾਂ ਨੂੰ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣ ਜੋੜਿਆਂ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਬਦਲਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਇਸ ਪ੍ਰਕਿਰਿਆ ਨੂੰ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਦੁਆਰਾ ਸਮਝਾਵਾਂਗੇ।

ਉਦਾਹਰਣ 17 : ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੇ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਜੋੜੇ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ :

$$\frac{2}{x}+\frac{3}{y}=13$$

$$\frac{5}{x}-\frac{4}{y}=-2$$

ਹੱਲ : ਆਉ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੇ ਜੋੜੇ ਨੂੰ

$$2\left(\frac{1}{x}\right)+3\left(\frac{1}{y}\right)=13 \quad (1)$$

$$5\left(\frac{1}{x}\right)-4\left(\frac{1}{y}\right)=-2 \quad (2)$$

ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖੀਏ।

ਇਹ ਸਮੀਕਰਣਾਂ $ax + by + c = 0$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਨਹੀਂ ਹਨ। ਪ੍ਰੰਤੂ ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਸਮੀਕਰਣ (1) ਅਤੇ (2) ਵਿੱਚ $\frac{1}{x} = p$ ਅਤੇ $\frac{1}{y} = q$ ਰੱਖ ਦੇਈਏ ਤਾਂ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ :

$$2p + 3q = 13 \qquad (3)$$

$$5p - 4q = -2 \qquad (4)$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ, ਅਸੀਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਨੂੰ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੇ ਜੋੜੇ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਬਦਲ ਦਿੱਤਾ ਹੈ। ਹੁਣ ਤੁਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ ਕਿਸੇ ਵੀ ਵਿਧੀ ਨਾਲ ਹੱਲ ਕਰਕੇ $p = 2, q = 3$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ।

ਤੁਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹੋ ਕਿ $p = \frac{1}{x}$ ਅਤੇ $q = \frac{1}{y}$ ਹੈ।

p ਅਤੇ q ਦੇ ਮੁੱਲਾਂ ਨੂੰ ਰੱਖਣ ਤੇ, ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ :

$\frac{1}{x} = 2$ ਭਾਵ $x = \frac{1}{2}$ ਅਤੇ $\frac{1}{y} = 3$ ਭਾਵ $y = \frac{1}{3}$

ਜਾਂਚ : ਦੋਹਾਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਵਿੱਚ $x = \frac{1}{2}$ ਅਤੇ $y = \frac{1}{3}$ ਰੱਖਣ ਨਾਲ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਦੋਨੋਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਹੋ ਜਾਂਦੀਆਂ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ 18 : ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਸਮੀਕਰਣ ਜੋੜੇ ਨੂੰ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣ ਜੋੜੇ ਵਿੱਚ ਬਦਲ ਕੇ ਹੱਲ ਕਰੋ:

$$\frac{5}{x-1} + \frac{1}{y-2} = 2$$

$$\frac{6}{x-1} - \frac{3}{y-2} = 1$$

ਹੱਲ : ਆਉ $\frac{1}{x-1} = p$ ਅਤੇ $\frac{1}{y-2} = q$ ਰੱਖੋ, ਹੁਣ ਦਿੱਤੀਆਂ ਗਈਆਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ

$$5\left(\frac{1}{x-1}\right) + \frac{1}{y-2} = 2 \qquad (1)$$

$$6\left(\frac{1}{x-1}\right) - 3\left(\frac{1}{y-2}\right) = 1 \qquad (2)$$

$$5p + q = 2 \qquad (3)$$

$$6p - 3q = 1 \tag{4}$$

ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖੀਆਂ ਜਾ ਸਕਦੀਆਂ ਹਨ :

ਸਮੀਕਰਣਾਂ (3) ਅਤੇ (4) ਵਿਆਪਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣ ਜੋੜਾ ਬਣਾਉਂਦੀਆਂ ਹਨ। ਹੁਣ ਤੁਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਲਈ ਕਿਸੇ ਵੀ ਵਿਧੀ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ। ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ, $p = \frac{1}{3}$ ਅਤੇ $q = \frac{1}{3}$

ਹੁਣ p ਦੇ ਲਈ $\frac{1}{x-1}$, ਰੱਖਣ 'ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ :

$$\frac{1}{x-1} = \frac{1}{3}$$

ਭਾਵ $x - 1 = 3$, ਭਾਵ $x = 4$ ਹੈ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ q ਦੇ ਲਈ $\frac{1}{y-2}$, ਰੱਖਣ 'ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ :

$$\frac{1}{y-2} = \frac{1}{3}$$

ਭਾਵ $3 = y - 2$, ਭਾਵ $y = 5$ ਹੈ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ, ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਸਮੀਕਰਣ ਜੋੜੇ ਦਾ ਹੱਲ $x = 4, y = 5$ ਹੈ।

ਜਾਂਚ : (1) ਅਤੇ (2) ਵਿੱਚ $x = 4$ ਅਤੇ $y = 5$ ਰੱਖਣ 'ਤੇ ਜਾਂਚ ਕਰੋ ਕਿ ਕੀ ਇਹ ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦੇ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ 18 : ਇੱਕ ਕਿਸ਼ਤੀ 10 ਘੰਟਿਆਂ ਵਿੱਚ ਧਾਰਾ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਦੇ ਉਲਟ 30 km ਅਤੇ ਧਾਰਾ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ 44 km ਜਾਂਦੀ ਹੈ। 13 ਘੰਟਿਆਂ ਵਿੱਚ ਇਹ ਧਾਰਾ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਦੇ ਉਲਟ 40 km ਅਤੇ ਧਾਰਾ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ 55 km ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਧਾਰਾ ਦੀ ਚਾਲ ਅਤੇ ਕਿਸ਼ਤੀ ਦੀ ਸਥਿਰ ਪਾਣੀ ਵਿੱਚ ਚਾਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਕਿਸ਼ਤੀ ਦੀ ਸਥਿਰ ਪਾਣੀ ਵਿੱਚ ਚਾਲ x km/h ਹੈ ਅਤੇ ਧਾਰਾ ਦੀ ਚਾਲ y km/h ਹੈ। ਇਸ ਲਈ, ਕਿਸ਼ਤੀ ਦੀ ਧਾਰਾ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਚਾਲ = $(x + y)$ km/h ਅਤੇ ਕਿਸ਼ਤੀ ਦੀ ਧਾਰਾ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਦੇ ਉਲਟ ਚਾਲ = $(x - y)$ km/h ਹੋਵੇਗੀ।

ਨਾਲ ਹੀ $$\text{ਸਮਾਂ} = \frac{\text{ਦੂਰੀ}}{\text{ਚਾਲ}}$$

ਪਹਿਲੀ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ, ਜਦੋਂ ਕਿਸ਼ਤੀ 30 km ਧਾਰਾ ਦੇ ਉਲਟ ਚਲਦੀ ਹੈ। ਮੰਨ ਲਉ ਘੰਟਿਆਂ ਵਿੱਚ ਲਿਆ ਗਿਆ ਸਮਾਂ t_1 ਹੈ। ਇਸ ਲਈ

$$t_1 = \frac{30}{(x-y)}$$

ਮੰਨ ਲਉ ਜਦੋਂ ਕਿਸ਼ਤੀ 44 km ਧਾਰਾ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਚਲਦੀ ਹੈ ਤਾਂ ਉਹ t_2 ਘੰਟੇ ਸਮਾਂ ਲੈਂਦੀ ਹੈ ਤਾਂ $t_2 = \frac{44}{x+y}$ ਹੈ। ਕੁੱਲ ਲੱਗਿਆ ਸਮਾਂ $t_1 + t_2 = 10$ ਘੰਟੇ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ, ਸਾਨੂੰ ਸਮੀਕਰਣ ਮਿਲਦਾ ਹੈ:

$$\frac{30}{x-y} + \frac{44}{x+y} = 10 \tag{1}$$

ਦੂਸਰੀ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ, 13 ਘੰਟਿਆਂ ਵਿੱਚ ਇਹ 40 ਕਿ.ਮੀ. ਧਾਰਾ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਦੇ ਉਲਟ ਅਤੇ 55 ਕਿ.ਮੀ. ਧਾਰਾ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਚਲਦੀ ਹੈ। ਸਾਨੂੰ ਇਸ ਤੋਂ ਸਮੀਕਰਣ ਮਿਲਦੀ ਹੈ:

$$\frac{40}{x-y} + \frac{55}{x+y} = 13 \tag{2}$$

$$\frac{1}{x-y} = u \text{ ਅਤੇ } \frac{1}{x+y} = v \text{ ਰੱਖੋ।} \tag{3}$$

ਇਹਨਾਂ ਮੁੱਲਾਂ ਨੂੰ ਸਮੀਕਰਣ (1) ਅਤੇ (2) ਵਿੱਚ ਰੱਖਣ 'ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦਾ ਹੇਠ ਲਿਖਿਆ ਜੋੜਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

$$30u + 44v = 10 \quad \text{ਜਾਂ} \quad 30u + 44v - 10 = 0 \tag{4}$$

$$40u + 55v = 13 \quad \text{ਜਾਂ} \quad 40u + 55v - 13 = 0 \tag{5}$$

ਤਿਰਛੀ ਗੁਣਾ ਵਿਧੀ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ :

$$\frac{u}{44(-13) - 55(-10)} = \frac{v}{40(-10) - 30(-13)} = \frac{1}{30(55) - 44(40)}$$

ਭਾਵ $$\frac{u}{-22} = \frac{v}{-10} = \frac{1}{-110}$$

ਭਾਵ $$u = \frac{1}{5},\quad v = \frac{1}{11}$$

ਹੁਣ u ਅਤੇ v ਦੇ ਇਹਨਾਂ ਮੁੱਲਾਂ ਨੂੰ ਸਮੀਕਰਣ (3) ਵਿੱਚ ਰੱਖਣ 'ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ:

$$\frac{1}{x-y}=\frac{1}{5} \text{ ਅਤੇ } \frac{1}{x+y}=\frac{1}{11}$$

ਭਾਵ $x - y = 5$ ਅਤੇ $x + y = 11$ (6)

ਇਹਨਾਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਨੂੰ ਜੋੜਨ 'ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ :

$$2x = 16$$

ਭਾਵ $x = 8$

(6) ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੀਆਂ ਹੋਈਆਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਨੂੰ ਘਟਾਉਣ 'ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ :

$$2y = 6$$

ਭਾਵ $y = 3$

ਇਸ ਲਈ, ਕਿਸ਼ਤੀ ਦੀ ਸਥਿਰ ਪਾਣੀ ਵਿੱਚ ਚਾਲ 8 km/h ਅਤੇ ਧਾਰਾ ਦੀ ਚਾਲ 3 km/h ਹੈ।

ਪੜਤਾਲ : ਜਾਂਚ ਕਰੋ ਕਿ ਇਹ ਸ਼ੁਰੂ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੀਆਂ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਦੀਆਂ ਸ਼ਰਤਾਂ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦੇ ਹਨ।

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 3.6

1. ਅੱਗੇ ਦਿੱਤੇ ਸਮੀਕਰਣ ਜੋੜਿਆਂ ਨੂੰ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੇ ਵਿੱਚ ਬਦਲ ਕੇ ਹੱਲ ਕਰੋ :

(i) $\frac{1}{2x}+\frac{1}{3y}=2$

$\frac{1}{3x}+\frac{1}{2y}=\frac{13}{6}$

(ii) $\frac{2}{\sqrt{x}}+\frac{3}{\sqrt{y}}=2$

$\frac{4}{\sqrt{x}}-\frac{9}{\sqrt{y}}=-1$

(iii) $\frac{4}{x}+3y=14$

$\frac{3}{x}-4y=23$

(iv) $\frac{5}{x-1}+\frac{1}{y-2}=2$

$\frac{6}{x-1}-\frac{3}{y-2}=1$

(v) $\frac{7x-2y}{xy}=5$

$\frac{8x+7y}{xy}=15$

(vi) $6x+3y=6xy$

$2x+4y=5xy$

(vii) $\frac{10}{x+y}+\frac{2}{x-y}=4$

(viii) $\frac{1}{3x+y}+\frac{1}{3x-y}=\frac{3}{4}$

(ix) $\frac{15}{x+y} - \frac{5}{x-y} = -2$ (x) $\frac{1}{2(3x+y)} - \frac{1}{2(3x-y)} = \frac{-1}{8}$

2. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣ ਜੋੜੇ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਓ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਦਾ ਹੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ :

(i) ਰਿਤੂ ਧਾਰਾ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ 2 ਘੰਟਿਆਂ ਵਿੱਚ 20 km ਤੈਰ ਸਕਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਧਾਰਾ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਦੇ ਉਲਟ 2 ਘੰਟਿਆਂ ਵਿੱਚ 4 km ਤੈਰ ਸਕਦੀ ਹੈ। ਉਸਦੀ ਖੜੇ ਪਾਣੀ ਵਿੱਚ ਤੈਰਨ ਦੀ ਚਾਲ (ਗਤੀ) ਅਤੇ ਧਾਰਾ ਦੀ ਚਾਲ (ਗਤੀ) ਪਤਾ ਕਰੋ।

(ii) 2 ਇਸਤਰੀਆਂ ਅਤੇ 5 ਆਦਮੀ ਇੱਕ ਕਸੀਦੇ ਦੇ ਕੰਮ ਨੂੰ ਇੱਕਠੇ 4 ਦਿਨ ਵਿੱਚ ਪੂਰਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਨ, ਜਦਕਿ 3 ਇਸਤਰੀਆਂ ਅਤੇ 6 ਆਦਮੀ ਇਸਨੂੰ 3 ਦਿਨ ਵਿੱਚ ਪੂਰਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਨ। ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ ਇਸ ਕੰਮ ਨੂੰ ਇੱਕ ਇਕੱਲੀ ਇਸਤਰੀ ਕਿੰਨੇ ਸਮੇਂ ਵਿੱਚ ਪੂਰਾ ਕਰੇਗੀ? ਇਸ ਕੰਮ ਨੂੰ ਇਕੱਲਾ ਇੱਕ ਆਦਮੀ ਕਿੰਨੇ ਸਮੇਂ ਵਿੱਚ ਪੂਰਾ ਕਰੇਗਾ?

(iii) ਦੀਪਿਕਾ 300 km ਦੂਰੀ ਤੇ ਸਥਿਤ ਆਪਣੇ ਘਰ ਜਾਣ ਦੇ ਲਈ ਕੁਝ ਦੂਰੀ ਰੇਲਗੱਡੀ ਦੁਆਰਾ ਅਤੇ ਕੁਝ ਦੂਰੀ ਬੱਸ ਦੁਆਰਾ ਤੈਅ ਕਰਦੀ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਉਹ 60 km ਰੇਲਗੱਡੀ ਦੁਆਰਾ ਅਤੇ ਬਾਕੀ ਬੱਸ ਦੁਆਰਾ ਕਰਦੀ ਹੈ ਤਾਂ ਉਸਨੂੰ 4 ਘੰਟੇ ਲੱਗਦੇ ਹਨ। ਜੇਕਰ ਉਹ 100 km ਦੁਬਾਰਾ ਰੇਲਗੱਡੀ ਰਾਹੀਂ ਅਤੇ ਬਾਕੀ ਯਾਤਰਾ ਬੱਸ ਦੁਆਰਾ ਕਰੇ ਤਾਂ ਉਸਨੂੰ 10 ਮਿੰਟ ਵੱਧ ਲੱਗਦੇ ਹਨ। ਰੇਲਗੱਡੀ ਅਤੇ ਬੱਸ ਦੀ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਚਾਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 3.7 (ਇੱਛਾ ਅਨੁਸਾਰ)*

1. ਦੋ ਦੋਸਤਾਂ ਹਨੀ ਅਤੇ ਸੰਨੀ ਦੀ ਉਮਰ ਵਿੱਚ 3 ਸਾਲ ਦਾ ਅੰਤਰ ਹੈ। ਹਨੀ ਦੇ ਪਿਤਾ ਹਰਮਿੰਦਰ ਦੀ ਉਮਰ ਹਨੀ ਦੀ ਉਮਰ ਤੋਂ ਦੁੱਗਣੀ ਹੈ ਅਤੇ ਸੰਨੀ ਦੀ ਉਮਰ ਆਪਣੀ ਭੈਣ ਗੁਨੂ ਦੀ ਉਮਰ ਤੋਂ ਦੁੱਗਣੀ ਹੈ। ਗੁਨੂ ਅਤੇ ਹਰਮਿੰਦਰ ਦੀ ਉਮਰ ਵਿੱਚ 30 ਸਾਲ ਦਾ ਅੰਤਰ ਹੈ। ਹਨੀ ਅਤੇ ਸੰਨੀ ਦੀ ਉਮਰ ਪਤਾ ਕਰੋ।

2. ਇੱਕ ਮਿੱਤਰ ਦੂਸਰੇ ਨੂੰ ਕਹਿੰਦਾ ਹੈ ਕਿ "ਜੇਕਰ ਤੁਸੀਂ ਮੈਨੂੰ ਇੱਕ ਸੌ ਰੁਪਏ ਦੇ ਦਿਉ ਤਾਂ ਮੇਰੇ ਕੋਲ ਤੁਹਾਡੇ ਨਾਲੋਂ ਦੋ ਗੁਣਾ ਪੈਸੇ ਹੋ ਜਾਣਗੇ।" ਦੂਸਰਾ ਕਹਿੰਦਾ ਹੈ ਕਿ "ਜੇਕਰ ਤੁਸੀਂ ਮੈਨੂੰ ₹10 ਦੇ ਦਿਉ ਤਾਂ ਮੈਂ ਤੁਹਾਡੇ ਤੋਂ ਛੇ ਗੁਣਾ ਅਮੀਰ ਹੋ ਜਾਵਾਂਗਾ।" ਪਤਾ ਕਰੋ ਉਹਨਾਂ ਕੋਲ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਕਿੰਨੇ ਪੈਸੇ ਹਨ? (ਭਾਸਕਰ II ਦੇ ਬੀਜਗਣਿਤ ਤੋਂ)
[ਸੰਕੇਤ : $x + 100 = 2(y - 100)$; $y + 10 = 6(x - 10)$]

3. ਇੱਕ ਰੇਲਗੱਡੀ ਕੁਝ ਦੂਰੀ ਇੱਕ ਸਮਾਨ ਚਾਲ ਨਾਲ ਤੈਅ ਕਰਦੀ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਗੱਡੀ ਦੀ ਗਤੀ 10 km/h ਵਧਾ ਦਿੱਤੀ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਉਹ ਉੱਨੀ ਦੂਰੀ ਤੈਅ ਕਰਨ ਲਈ 2 ਘੰਟੇ ਘੱਟ ਸਮਾਂ ਲਵੇਗੀ ਅਤੇ ਜੇਕਰ ਰੇਲਗੱਡੀ ਦੀ ਗਤੀ 10 km/h ਘਟਾ ਦਿੱਤੀ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਉਹ ਉੱਨੀ ਦੂਰੀ ਲਈ 3 ਘੰਟੇ ਵੱਧ ਸਮਾਂ

*ਇਹ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ ਪ੍ਰੀਖਿਆ ਦੀ ਦ੍ਰਿਸ਼ਟੀ ਤੋਂ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਲਵੇਗੀ। ਰੇਲਗੱਡੀ ਦੁਆਰਾ ਤੈਅ ਕੀਤੀ ਦੂਰੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।

4. ਇੱਕ ਜਮਾਤ ਵਿੱਚ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਨੂੰ ਪੰਗਤੀਆਂ ਵਿੱਚ ਖੜ੍ਹਾ ਕਰਨਾ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਪੰਗਤੀ ਵਿੱਚ 3 ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਵੱਧ ਹੁੰਦੇ ਤਾਂ ਇੱਕ ਪੰਗਤੀ ਘੱਟ ਹੁੰਦੀ। ਜੇਕਰ ਪੰਗਤੀ ਵਿੱਚ 3 ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਘੱਟ ਹੁੰਦੇ, ਤਾਂ 2 ਪੰਗਤੀਆਂ ਵੱਧ ਬਣਦੀਆਂ। ਜਮਾਤ ਵਿੱਚ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।

5. ਇੱਕ ΔABC ਵਿੱਚ $\angle C = 3\angle B = 2(\angle A + \angle B)$ ਹੈ। ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੇ ਤਿੰਨੇ ਕੋਣ ਪਤਾ ਕਰੋ।

6. ਸਮੀਕਰਣਾਂ $5x - y = 5$ ਅਤੇ $3x - y = 3$ ਦੇ ਗ੍ਰਾਫ ਖਿੱਚੋ। ਇਹਨਾਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਅਤੇ y - ਧੁਰੇ ਨਾਲ ਬਣੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੇ ਸਿਖਰਾਂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਅਤੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

7. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਸਮੀਕਰਣ ਜੋੜਿਆਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ :

(i) $px + qy = p - q$
$qx - py = p + q$

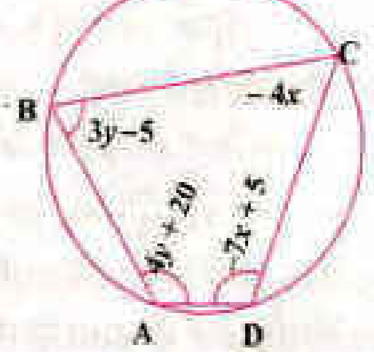
(ii) $ax + by = c$
$bx + ay = 1 + c$

(iii) $\dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b} = 0$
$ax + by = a^2 + b^2$

(iv) $(a-b)x + (a+b)y = a^2 - 2ab - b^2$
$(a+b)(x+y) = a^2 + b^2$

(v) $152x - 378y = -74$
$-378x + 152y = -604$

8. ABCD ਇੱਕ ਚੱਕਰੀ ਚਤੁਰਭੁਜ ਹੈ। ਇਸ ਚੱਕਰੀ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੇ ਕੋਣ ਪਤਾ ਕਰੋ (ਵੇਖ ਚਿੱਤਰ 3.7)।



ਚਿੱਤਰ 3.7

3.6 ਸਾਰ-ਅੰਸ਼

ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ, ਤੁਸੀਂ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਨੁਕਤਿਆਂ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕੀਤਾ ਹੈ :

1. ਦੋ ਚਲਾਂ ਵਿੱਚ ਦੋ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣ ਇੱਕ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦਾ ਜੋੜਾ ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣ ਜੋੜੇ ਦਾ ਵਿਆਪਕ ਰੂਪ ਹੈ:

$a_1x + b_1y + c_1 = 0$

$a_2x + b_2y + c_2 = 0$

ਜਿੱਥੇ $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ ਕਿ $a_1^2 + b_1^2 \neq 0,\ a_2^2 + b_2^2 \neq 0$ ਹੈ।

2. ਇੱਕ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣ ਜੋੜੇ ਨੂੰ ਆਲੇਖੀ (ਗ੍ਰਾਫ਼ੀ) ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਹੱਲ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

(i) ਆਲੇਖੀ (ਗ੍ਰਾਫ਼ੀ) ਵਿਧੀ ਦੁਆਰਾ

(ii) ਬੀਜਗਣਿਤਿਕ ਵਿਧੀ ਦੁਆਰਾ

3. **(ਗ੍ਰਾਫ਼ੀ) ਆਲੇਖੀ ਵਿਧੀ :**

ਦੋ ਚਲਾਂ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਨ ਜੋੜੇ ਦਾ ਗ੍ਰਾਫ਼ ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ।

(i) ਜੇਕਰ ਰੇਖਾਵਾਂ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ 'ਤੇ ਕੱਟਦੀਆਂ ਹਨ ਤਾਂ ਇਹ ਬਿੰਦੂ ਦੋਹਾਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦਾ ਸਿਰਫ਼ ਇੱਕ ਵਿਲੱਖਣ (unique) ਹੱਲ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਸਮੀਕਰਣ ਜੋੜਾ ਸੰਗਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

(ii) ਜੇਕਰ ਰੇਖਾਵਾਂ ਸੰਪਾਤੀ ਹਨ ਤਾਂ ਇਸਦੇ ਅਣਗਿਣਤ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਅਨੇਕਾਂ ਹੱਲ ਹੁੰਦੇ ਹਨ- ਰੇਖਾ 'ਤੇ ਸਥਿਤ ਹਰ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਹੱਲ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ, ਸਮੀਕਰਣ ਜੋੜਾ ਆਸ਼ਰਿਤ (ਸੰਗਤ) ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

(iii) ਜੇਕਰ ਰੇਖਾਵਾਂ ਸਮਾਂਤਰ ਹਨ ਤਾਂ ਸਮੀਕਰਣ ਜੋੜੇ ਦਾ ਕੋਈ ਹੱਲ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ। ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ, ਸਮੀਕਰਣ ਜੋੜਾ ਅਸੰਗਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

4. **ਬੀਜਗਣਿਤਿਕ ਵਿਧੀ :** ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣ ਜੋੜੇ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਲਈ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੀਆਂ ਵਿਧੀਆਂ ਦੀ ਚਰਚਾ ਕੀਤੀ ਹੈ :

(i) ਪ੍ਰਤਿਸਥਾਪਨ ਵਿਧੀ (ii) ਵਿਲੋਪਣ ਵਿਧੀ (iii) ਤਿਰਛੀ ਗੁਣਾ ਵਿਧੀ

5. ਜੇਕਰ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣ $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ ਅਤੇ $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ ਇੱਕ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣ ਜੋੜੇ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੀਆਂ ਹਨ, ਤਾਂ ਹੇਠ ਦਿੱਤੀਆਂ ਸਥਿਤੀਆਂ ਉਤਪੰਨ ਹੋ ਸਕਦੀਆਂ ਹਨ :

(i) $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$: ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ, ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣ ਜੋੜਾ ਸੰਗਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

(ii) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$: ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ, ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣ ਜੋੜਾ ਅਸੰਗਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

(iii) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$: ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ, ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣ ਜੋੜਾ ਆਸ਼ਰਿਤ (ਸੰਗਤ) ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

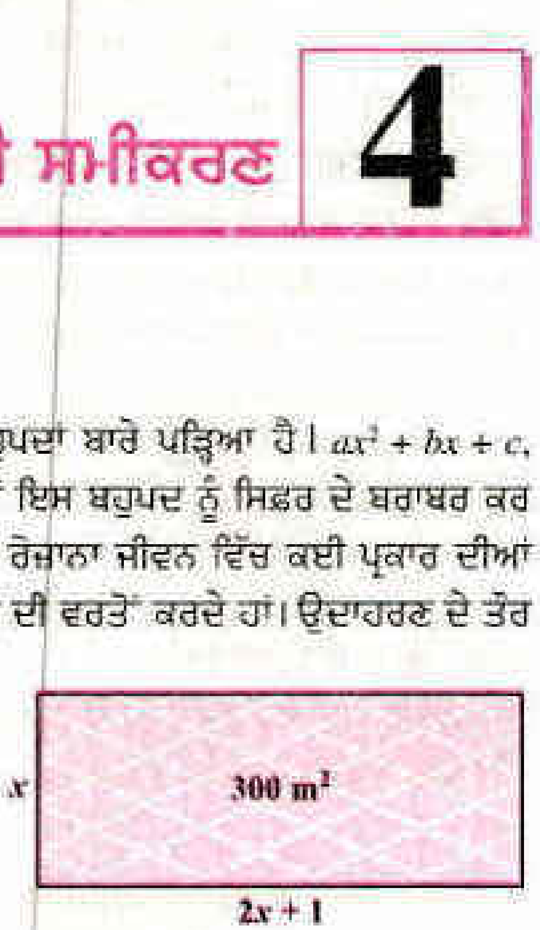
6. ਅਨੇਕਾਂ ਸਥਿਤੀਆਂ ਹਨ ਜਿਸ ਨੂੰ ਗਣਿਤਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਦੋ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ, ਜੋ ਸ਼ੁਰੂ ਵਿੱਚ ਰੇਖੀ ਨਾ ਹੋਣ। ਪ੍ਰੰਤੂ ਅਸੀਂ ਇਸ ਨੂੰ ਪ੍ਰਵਰਤਿਤ ਕਰਕੇ ਇੱਕ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣ ਜੋੜੇ ਵਿੱਚ ਬਦਲ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

000

ਦੋ ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਣ 4

4.1 ਭੂਮਿਕਾ

ਅਧਿਆਇ 2 ਵਿੱਚ, ਤੁਸੀਂ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਬਹੁਪਦਾਂ ਬਾਰੇ ਪੜ੍ਹਿਆ ਹੈ। $ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ ਇੱਕ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦਾ ਦੋ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ ਹੈ। ਜਦੋਂ ਅਸੀਂ ਇਸ ਬਹੁਪਦ ਨੂੰ ਸਿਫ਼ਰ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਕਰ ਦਿੰਦੇ ਹਾਂ ਤਾਂ ਸਾਨੂੰ ਦੋ ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਣ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਰੋਜ਼ਾਨਾ ਜੀਵਨ ਵਿੱਚ ਕਈ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੀਆਂ ਮੁਸ਼ਕਲਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਲਈ ਅਸੀਂ ਦੋ ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ 'ਤੇ ਮੰਨ ਲਉ ਇੱਕ ਧਾਰਮਿਕ ਟਰੱਸਟ ਨੇ 300 m² ਖੇਤਰਫਲ ਦਾ ਪ੍ਰਾਰਥਨਾ ਹਾਲ ਬਣਾਉਣਾ ਹੈ, ਜਿਸਦੀ ਲੰਬਾਈ ਉਸਦੀ ਚੌੜਾਈ ਦੇ ਦੁੱਗਣੇ ਤੋਂ ਇੱਕ ਮੀਟਰ ਵੱਧ ਹੋਵੇ। ਹਾਲ ਕਮਰੇ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਅਤੇ ਚੌੜਾਈ ਕੀ ਹੋਣੀ ਚਾਹੀਦੀ ਹੈ? ਮੰਨ ਲਉ ਹਾਲ ਦੀ ਚੌੜਾਈ x ਮੀਟਰ ਹੈ, ਤਾਂ ਇਸਦੀ ਲੰਬਾਈ $(2x + 1)$ ਮੀਟਰ ਹੋਵੇਗੀ। ਅਸੀਂ ਇਸ ਸੂਚਨਾ ਨੂੰ ਚਿੱਤਰ 4.1 ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਿਖਾ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।



ਚਿੱਤਰ 4.1

ਹੁਣ ਹਾਲ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ $= (2x + 1)\, x \text{ m}^2 = (2x^2 + x) \text{ m}^2$

ਇਸ ਲਈ $2x^2 + x = 300$ .... (ਦਿੱਤਾ ਹੈ)

ਭਾਵ $2x^2 + x - 300 = 0$

ਇਸ ਲਈ, ਹਾਲ ਦੀ ਚੌੜਾਈ ਦੋ ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਣ $2x^2 + x - 300 = 0$, ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰੇਗੀ।

ਜ਼ਿਆਦਾਤਰ ਲੋਕ ਵਿਸ਼ਵਾਸ ਕਰਦੇ ਹਨ ਕਿ ਬੇਬੀਲੋਨ ਵਾਸੀਆਂ ਨੇ ਹੀ ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਦੋ ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕੀਤਾ ਸੀ। ਉਦਾਹਰਨ ਦੇ ਤੌਰ 'ਤੇ ਉਹ ਜਾਣਦੇ ਸਨ ਕਿ ਦੋ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਪਤਾ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲਗਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਜਦੋਂ ਉਹਨਾਂ ਦਾ ਜੋੜਫਲ ਅਤੇ ਗੁਣਨਫਲ ਦਿੱਤਾ ਹੋਵੇ। ਧਿਆਨ ਦਿਉ

ਕਿ ਇਹ ਸਮੱਸਿਆ $x^2 - px + q = 0$ ਵਰਗੇ ਸਮੀਕਰਣ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਵਰਗੀ ਹੈ। ਯੂਨਾਨੀ ਗਣਿਤ ਵਿਗਿਆਨੀ ਯੂਕਲਿਡ ਨੇ ਲੰਬਾਈਆਂ ਦਾ ਪਤਾ ਲਗਾਉਣ ਲਈ ਇੱਕ ਜਿਮਾਇਤੀ ਵਿਧੀ ਵਿਕਸਿਤ ਕੀਤੀ ਜਿਸਨੂੰ ਅਸੀਂ ਵਰਤਮਾਨ ਸਬਦਾਵਲੀ ਵਿੱਚ ਦੋ ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਣ ਦੇ ਹੱਲ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ। ਵਿਆਪਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ, ਦੋ ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਣ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਦਾ ਸਿਹਰਾ ਆਮ ਤੌਰ 'ਤੇ ਪ੍ਰਾਚੀਨ ਭਾਰਤੀ ਵਿਗਿਆਨੀਆਂ ਨੂੰ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਬ੍ਰਹਮਗੁਪਤ (598-665 ਈ.) ਨੇ $ax^2 + bx = c$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦੋ ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਣ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਦਾ ਸਪਸ਼ਟ ਸੂਤਰ ਦਿੱਤਾ ਸੀ। ਬਾਦ ਵਿੱਚ, ਸ੍ਰੀਧਰਾਚਾਰਿਆ (1025 ਈ.) ਨੇ ਇੱਕ ਸੂਤਰ ਕੱਢਿਆ ਜਿਸਨੂੰ ਹੁਣ ਦੋ ਘਾਤੀ ਸੂਤਰ ਦੇ ਤੌਰ ਤੇ ਜਾਣਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਜੋ ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਵਿਧੀ ਰਾਹੀਂ ਦੋ ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਣ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਤੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਇਆ (ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਭਾਸਕਰ II ਨੇ ਲਿਖਿਆ)। ਇੱਕ ਅਰਬ ਗਣਿਤ ਵਿਗਿਆਨੀ ਅਲ ਖਵਾਰਿਜਮੀ (ਲਗਭਗ 800 ਈ.) ਨੇ ਵੀ ਭਿੰਨ-ਭਿੰਨ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਦੋ ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕੀਤਾ। ਅਬਰਾਹਮ ਬਾਰ ਹਿਯਾ ਹਾ-ਨਾਸੀ (Abraham bar Hiyya Ha-Nasi) ਨੇ 1145 ਵਿੱਚ ਛਪੀ ਆਪਣੀ ਪੁਸਤਕ ਲਿਬਰ ਇੰਬਾਡੋਰਮ (Liber Embadorum) ਵਿੱਚ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਦੋ ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੇ ਪੂਰਨ ਹੱਲ ਦਿੱਤੇ।

ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ, ਤੁਸੀਂ ਦੋ ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਹੱਲ ਪਤਾ ਲਗਾਉਣ ਦੀਆਂ ਭਿੰਨ-ਭਿੰਨ ਵਿਧੀਆਂ ਬਾਰੇ ਅਧਿਐਨ ਕਰੋਗੇ। ਰੋਜ਼ਾਨਾ ਜੀਵਨ ਵਿੱਚ ਵੀ ਤੁਸੀਂ ਦੋ ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੇ ਉਪਯੋਗ ਦੇਖੋਗੇ।

4.2 ਦੋ ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਣ

ਚਲ x ਵਿੱਚ ਦੋ ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਣ $ax^2 + bx + c = 0$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਜਿੱਥੇ a, b, c ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ ਅਤੇ $a \neq 0$ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ, $2x^2 + x - 300 = 0$ ਇੱਕ ਦੋ ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ। ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ $2x^2 - 3x + 1 = 0$, $4x - 3x^2 + 2 = 0$ ਅਤੇ $1 - x^2 + 300 = 0$ ਵੀ ਦੋ ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਹਨ।

ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਵੀ ਸਮੀਕਰਣ $p(x) = 0$, ਜਿੱਥੇ $p(x)$ ਘਾਤ 2 ਦਾ ਇੱਕ ਬਹੁਪਦ ਹੈ, ਇੱਕ ਦੋ ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਣ ਕਹਾਉਂਦੀ ਹੈ ਪ੍ਰੰਤੂ ਜਦੋਂ ਅਸੀਂ $p(x)$ ਦੇ ਪਦ ਘਾਤਾਂ ਦੇ ਘਟਦੇ ਕ੍ਰਮ ਵਿੱਚ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ ਤਾਂ ਸਾਨੂੰ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਇੱਕ ਮਿਆਰੀ ਰੂਪ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਭਾਵ $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, **ਦੋ ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਮਿਆਰੀ ਰੂਪ** ਹੈ।

ਸਾਡੇ ਆਲੇ ਦੁਆਲੇ ਦੀਆਂ ਅਨੇਕਾਂ ਸਥਿਤੀਆਂ ਅਤੇ ਗਣਿਤ ਦੇ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਖੇਤਰਾਂ ਵਿੱਚ ਦੋ ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਆਓ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਲਈਏ।

ਉਦਾਹਰਣ 1 : ਹੇਠ ਦਿੱਤੀਆਂ ਸਥਿਤੀਆਂ ਨੂੰ ਗਣਿਤਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖੋ :

(i) ਜਾੱਨ ਅਤੇ ਰੇਖਾ ਦੋਹਾਂ ਕੋਲ ਕੁੱਲ 45 ਬੰਟੇ ਹਨ। ਦੋਵੇਂ ਪੰਜ-ਪੰਜ ਬੰਟੇ ਗੁਆ ਦਿੰਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਹੁਣ ਉਹਨਾਂ ਕੋਲ ਬੰਟਿਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ 124 ਹੈ। ਅਸੀਂ ਜਾਣਨਾ ਚਾਹਾਂਗੇ ਕਿ ਸ਼ੁਰੂ ਵਿੱਚ ਉਹਨਾਂ ਕੋਲ ਕਿੰਨੇ-ਕਿੰਨੇ ਬੰਟੇ ਸਨ।

(ii) ਇੱਕ ਘਰੇਲੂ ਉਦਯੋਗ ਇੱਕ ਦਿਨ ਵਿੱਚ ਕੁਝ ਖਿਡੌਣੇ ਬਣਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਹਰੇਕ ਖਿਡੌਣੇ ਦਾ ਮੁੱਲ (₹ ਵਿੱਚ) 55 ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਦਿਨ ਵਿਚ ਬਣਾਏ ਗਏ ਖਿਡੌਣਿਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਘਟਾਉਣ ਉਪਰੰਤ ਪ੍ਰਾਪਤ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ, ਕਿਸੇ ਇੱਕ ਦਿਨ ਖਿਡੌਣੇ ਬਣਾਉਣ 'ਤੇ ਕੁੱਲ ਖਰਚ ₹ 750 ਸੀ। ਅਸੀਂ ਉਸ ਦਿਨ ਬਣਾਏ ਗਏ ਖਿਡੌਣਿਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਚਾਹਾਂਗੇ।

ਹੱਲ :

(i) ਮੰਨ ਲਉ ਜਾੱਨ ਕੋਲ ਬੰਟਿਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ x ਸੀ,

ਤਾਂ ਰੇਖਾ ਕੋਲ ਬੰਟਿਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ $= 45 - x$ (ਕਿਉਂ?)

ਜਾੱਨ ਕੋਲ 5 ਬੰਟੇ ਗੁਆਚਣ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਬਚੇ ਬੰਟਿਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ $= x - 5$

ਰੇਖਾ ਕੋਲ 5 ਬੰਟੇ ਗੁਆਚਣ ਤੋਂ ਬਾਦ ਬਚੇ ਬੰਟਿਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ $= 45 - x - 5$

$= 40 - x$

ਉਹਨਾਂ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ $= (x - 5)(40 - x)$

$= 40x - x^2 - 200 + 5x$

$= -x^2 + 45x - 200$

ਹੁਣ $-x^2 + 45x - 200 = 124$ (ਦਿੱਤਾ ਹੈ ਗੁਣਨਫਲ = 124)

ਭਾਵ $-x^2 + 45x - 324 = 0$

ਜਾਂ $x^2 - 45x + 324 = 0$

ਇਸ ਲਈ, ਜਾੱਨ ਕੋਲ ਜਿੰਨੇ ਬੰਟੇ ਸੀ, ਉਹ ਸਮੀਕਰਣ

$$x^2 - 45x + 324 = 0$$

ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦੇ ਹਨ।

(ii) ਮੰਨ ਲਉ ਉਸ ਦਿਨ ਬਣਾਏ ਖਿਡੌਣਿਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ x ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ, ਉਸ ਦਿਨ ਪ੍ਰਤੀ ਖਿਡੌਣੇ ਲਾਗਤ (ਰੁਪਇਆਂ ਵਿੱਚ) $= 55 - x$

ਭਾਵ ਉਸ ਦਿਨ ਕੁੱਲ ਨਿਰਮਾਣ ਲਾਗਤ (ਰੁਪਇਆਂ ਵਿੱਚ) $= x(55 - x)$

ਇਸ ਲਈ $x(55 - x) = 750$

ਭਾਵ $55x - x^2 = 750$

ਜਾਂ $-x^2 + 55x - 750 = 0$

ਜਾਂ $x^2 - 55x + 750 = 0$

ਇਸ ਲਈ, ਉਸ ਦਿਨ ਬਣਾਏ ਗਏ ਖਿਡੌਣਿਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ, ਦੋ ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਣ

$$x^2 - 55x + 750 = 0$$

ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦੀ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 2 : ਜਾਂਚ ਕਰੋ ਕਿ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਦੋ ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਣ ਹਨ ਜਾਂ ਨਹੀਂ:

(i) $(x-2)^2+1=2x-3$ (ii) $x(x+1)+8=(x+2)(x-2)$

(iii) $x(2x+3)=x^2+1$ (iv) $(x+2)^3=x^3-4$

ਹੱਲ :

(i) ਖੱਬਾ ਪਾਸਾ $=(x-2)^2+1=x^2-4x+4+1=x^2-4x+5$

ਇਸ ਲਈ $(x-2)^2+1=2x-3$ ਨੂੰ

$x^2-4x+5=2x-3$ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ

ਭਾਵ $x^2-6x+8=0$

ਇਹ $ax^2+bx+c=0$ ਦੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੈ।

ਭਾਵ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਸਮੀਕਰਣ ਦੋ ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ।

(ii) ਕਿਉਂਕਿ $x(x+1)+8=x^2+x+8$ ਅਤੇ $(x+2)(x-2)=x^2-4$ ਹੈ,

ਇਸ ਲਈ $x^2+x+8=x^2-4$

ਭਾਵ $x+12=0$

ਇਹ $ax^2+bx+c=0$ ਦੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਸਮੀਕਰਣ ਦੋ ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਣ ਨਹੀਂ ਹੈ।

(iii) ਇੱਥੇ ਖੱਬਾ ਪਾਸਾ $=x(2x+3)=2x^2+3x$

ਭਾਵ $x(2x+3)=x^2+1$ ਨੂੰ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ:

$2x^2+3x=x^2+1$

ਇਸ ਲਈ $x^2+3x-1=0$ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ।

ਇਹ $ax^2+bx+c=0$ ਦੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ, ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਸਮੀਕਰਣ ਦੋ ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ।

(iv) ਇੱਥੇ ਖੱਬਾ ਪਾਸਾ $=(x+2)^3=x^3+6x^2+12x+8$

ਇਸ ਲਈ $(x+2)^3=x^3-4$ ਨੂੰ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ,

$x^3+6x^2+12x+8=x^3-4$

ਭਾਵ $6x^2+12x+12=0$ ਜਾਂ $x^2+2x+2=0$

ਇਹ $ax^2+bx+c=0$ ਦੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ, ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਸਮੀਕਰਣ ਦੋ ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ।

ਟਿੱਪਣੀ : ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ ਉਪਰੋਕਤ (ii) ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਸਮੀਕਰਣ ਦੇਖਣ ਵਿੱਚ ਦੋ ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਣ ਲੱਗਦੀ ਹੈ ਪ੍ਰੰਤੂ ਇਹ ਦੋ ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਣ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਉਪਰੋਕਤ (iv) ਵਿਚ ਸਮੀਕਰਣ ਦੇਖਣ ਵਿੱਚ ਤਿੰਨ ਘਾਤੀ (ਘਾਤ ਤਿੰਨ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ) ਸਮੀਕਰਣ ਲੱਗਦੀ ਹੈ, ਦੋ ਘਾਤੀ ਨਹੀਂ। ਪ੍ਰੰਤੂ ਇਹ ਦੋ ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ। ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਤੁਸੀਂ ਵੇਖਿਆ ਹੈ ਕਿ ਕਿਸੇ ਵੀ ਸਮੀਕਰਣ ਨੂੰ ਇਹ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਕਿ ਇਹ ਦੋ ਘਾਤੀ ਹੈ ਜਾਂ ਨਹੀਂ, ਸਾਨੂੰ ਉਸ ਨੂੰ ਸਰਲ ਕਰਨਾ ਜ਼ਰੂਰੀ ਹੈ।

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 4.1

1. ਜਾਂਚ ਕਰੋ ਕਿ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੋ ਘਾਤੀ ਹਨ ਜਾਂ ਨਹੀਂ:

(i) $(x+1)^2 = 2(x-3)$ (ii) $x^2 - 2x = (-2)(3-x)$

(iii) $(x-2)(x+1) = (x-1)(x+3)$ (iv) $(x-3)(2x+1) = x(x+5)$

(v) $(2x-1)(x-3) = (x+5)(x-1)$ (vi) $x^2 + 3x + 1 = (x-2)^2$

(vii) $(x+2)^3 = 2x(x^2-1)$ (viii) $x^3 - 4x^2 - x + 1 = (x-2)^3$

2. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਸਥਿਤੀਆਂ ਨੂੰ ਦੋ ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਣ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਬਦਲੋ:

(i) ਇੱਕ ਆਇਤਾਕਾਰ ਪਲਾਟ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ 528 m^2 ਹੈ। ਪਲਾਟ ਦੀ ਲੰਬਾਈ (ਮੀਟਰਾਂ ਵਿੱਚ), ਚੌੜਾਈ ਦੇ ਦੁੱਗਣੇ ਤੋਂ ਇੱਕ ਵੱਧ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਪਲਾਟ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਅਤੇ ਚੌੜਾਈ ਪਤਾ ਕਰਨੀ ਹੈ।

(ii) ਦੋ ਲਗਾਤਾਰ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ 306 ਹੈ। ਅਸੀਂ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਪਤਾ ਕਰਨੀਆਂ ਹਨ।

(iii) ਰੋਹਨ ਦੀ ਮਾਂ ਉਸ ਨਾਲੋਂ 26 ਸਾਲ ਵੱਡੀ ਹੈ। ਹੁਣ ਤੋਂ ਤਿੰਨ ਸਾਲ ਬਾਅਦ ਉਨ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਉਮਰਾਂ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ 360 ਹੋ ਜਾਵੇਗਾ। ਅਸੀਂ ਰੋਹਨ ਦੀ ਵਰਤਮਾਨ ਉਮਰ ਪਤਾ ਕਰਨੀ ਹੈ।

(iv) ਇੱਕ ਰੇਲਗੱਡੀ 380 km ਦੀ ਦੂਰੀ ਇੱਕ ਸਮਾਨ ਚਾਲ ਨਾਲ ਤੈਅ ਕਰਦੀ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਇਸ ਦੀ ਚਾਲ 8 km/h ਘੱਟ ਹੁੰਦੀ ਤਾਂ ਉਹ ਉਸ ਦੂਰੀ ਨੂੰ ਤੈਅ ਕਰਨ ਲਈ 3 ਘੰਟੇ ਵੱਧ ਸਮਾਂ ਲੈਂਦੀ। ਅਸੀਂ ਰੇਲਗੱਡੀ ਦੀ ਚਾਲ ਪਤਾ ਕਰਨੀ ਹੈ।

4.3 ਗੁਣਨਖੰਡਾਂ ਦੁਆਰਾ ਦੋ ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਹੱਲ

ਦੋ ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਣ $2x^2 - 3x + 1 = 0$ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ। ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਇਸ ਸਮੀਕਰਣ ਦੇ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ ਵਿੱਚ x ਦੀ ਥਾਂ 1 ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ ਤਾਂ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ $(2 \times 1^2) - (3 \times 1) + 1 = 0 =$ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਸੱਜਾ ਪਾਸਾ। ਅਸੀਂ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ 1 ਦੋ ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਣ $2x^2 - 3x + 1 = 0$ ਦਾ ਇੱਕ ਮੂਲ ਹੈ। ਇਸ ਦਾ ਅਰਥ ਇਹ ਵੀ ਹੈ ਕਿ 1 ਦੋ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ $2x^2 - 3x + 1$ ਦੀ ਇੱਕ ਸਿਫ਼ਰ ਹੈ।

ਵਿਆਪਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ, ਇੱਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ α ਦੋ ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਣ $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$ ਦਾ ਇੱਕ ਮੂਲ ਕਹਾਉਂਦੀ ਹੈ ਜੇਕਰ $a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਇਹ ਵੀ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $x = \alpha$ **ਦੋ ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਇੱਕ ਹੱਲ ਹੈ ਜਾਂ α ਦੋ ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਣ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦਾ ਹੈ।** ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ **ਦੋ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ $ax^2 + bx + c$ ਦੀਆਂ ਸਿਫ਼ਰਾਂ ਅਤੇ ਦੋ ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਣ $ax^2 + bx + c = 0$ ਦੇ ਮੂਲ ਇੱਕ ਹੀ ਹਨ।**

ਤੁਸੀਂ ਅਧਿਆਇ 2 ਵਿੱਚ ਵੇਖਿਆ ਹੈ ਕਿ ਇੱਕ ਦੋ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ ਦੀਆਂ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਦੋ

ਸਿਫ਼ਰਾਂ ਹੋ ਸਕਦੀਆਂ ਹਨ ਅਤੇ ਕਿਸੇ ਦੋ ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਣ ਦੇ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਦੋ ਹੱਲ/ਮੂਲ ਹੋ ਸਕਦੇ ਹਨ।

ਤੁਸੀਂ ਨੌਵੀਂ ਜਮਾਤ ਵਿੱਚ ਸਿੱਖਿਆ ਹੈ ਕਿ ਇੱਕ ਦੋ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰਲੇ ਪਦ ਨੂੰ ਤੋੜ ਕੇ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਗੁਣਨਖੰਡ ਬਣਾਏ ਜਾ ਸਕਦੇ ਹਨ। ਅਸੀਂ ਇਸ ਗਿਆਨ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਦੋ ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਣ ਦੇ ਮੂਲ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਕਰਾਂਗੇ। ਆਉ ਦੇਖੀਏ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ।

ਉਦਾਹਰਣ 3 : ਗੁਣਨਖੰਡਨ ਦੁਆਰਾ ਸਮੀਕਰਣ $2x^2 - 5x + 3 = 0$ ਦੇ ਮੂਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾ, ਅਸੀਂ ਵਿਚਕਾਰਲੇ (ਮੱਧ) ਪਦ $-5x$ ਨੂੰ $-2x - 3x$ [ਕਿਉਂਕਿ $(-2x) \times (-3x) = 6x^2 = (2x^2) \times 3$] ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਤੋੜਦੇ ਹਾਂ।

ਭਾਵ $2x^2 - 5x + 3 = 2x^2 - 2x - 3x + 3 = 2x(x - 1) - 3(x - 1) = (2x - 3)(x - 1)$

ਇਸ ਲਈ $2x^2 - 5x + 3 = 0$ ਨੂੰ $(2x - 3)(x - 1) = 0$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦੁਬਾਰਾ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਭਾਵ x ਦੇ ਉਹ ਮੁੱਲ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਲਈ $2x^2 - 5x + 3 = 0$ ਉਹੀ ਹਨ ਜੋ $(2x - 3)(x - 1) = 0$ ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

ਭਾਵ $2x - 3 = 0$ ਜਾਂ $x - 1 = 0$ ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਣਗੇ।

ਹੁਣ $2x - 3 = 0$, $x = \frac{3}{2}$ ਦਿੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ $x - 1 = 0$, $x = 1$ ਦਿੰਦਾ ਹੈ।

ਭਾਵ $x = \frac{3}{2}$ ਅਤੇ $x = 1$ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਸਮੀਕਰਣ ਦੇ ਹੱਲ ਹਨ।

ਦੂਜੇ ਸ਼ਬਦਾਂ ਵਿੱਚ, 1 ਅਤੇ $\frac{3}{2}$ ਸਮੀਕਰਣ $2x^2 - 5x + 3 = 0$ ਦੇ ਹੱਲ/ਮੂਲ ਹਨ।

ਪੜਤਾਲ ਕਰੋ ਕਿ ਇਹ ਹੀ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਸਮੀਕਰਣ ਦੇ ਮੂਲ ਹਨ।

ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ਅਸੀਂ $2x^2 - 5x + 3 = 0$ ਦੇ ਮੂਲਾਂ ਨੂੰ $2x^2 - 5x + 3$ ਦੇ ਦੋ ਰੇਖੀ ਗੁਣਨਖੰਡਾਂ ਵਿੱਚ ਬਦਲ ਕੇ ਅਤੇ ਹਰੇਕ ਗੁਣਨਖੰਡ ਨੂੰ ਸਿਫ਼ਰ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਕਰਕੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੇ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ 4 : ਦੋ ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਣ $6x^2 - x - 2 = 0$ ਦੇ ਮੂਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਹੈ: $6x^2 - x - 2 = 6x^2 + 3x - 4x - 2$

$$= 3x(2x + 1) - 2(2x + 1)$$
$$= (3x - 2)(2x + 1)$$

$6x^2 - x - 2 = 0$ ਦੇ ਮੂਲ x ਦੇ ਉਹ ਮੁੱਲ ਹਨ ਜਿੰਨਾਂ ਲਈ $(3x - 2)(2x + 1) = 0$ ਹੋਵੇ।

ਭਾਵ $3x - 2 = 0$ ਜਾਂ $2x + 1 = 0$

ਭਾਵ $x = \frac{2}{3}$ ਜਾਂ $x = -\frac{1}{2}$

ਇਸ ਲਈ $6x^2 - x - 2 = 0$ ਦੇ ਮੂਲ $\frac{2}{3}$ ਤੇ $-\frac{1}{2}$ ਹਨ।

ਅਸੀਂ ਮੂਲਾਂ ਦੀ ਪੜਤਾਲ (Verify) ਲਈ ਇਹ ਜਾਂਚ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $\frac{2}{3}$ ਅਤੇ $-\frac{1}{2}$ ਸਮੀਕਰਣ $6x^2 - x - 2 = 0$ ਨੂੰ ਸਤੁੰਸ਼ਟ ਕਰਦੇ ਹਨ ਜਾਂ ਨਹੀਂ।

ਉਦਾਹਰਣ 5 : ਦੋ ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਣ $3x^2 - 2\sqrt{6}x + 2 = 0$ ਦੇ ਮੂਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ :

$$\begin{aligned} 3x^2 - 2\sqrt{6}x + 2 &= 3x^2 - \sqrt{6}x - \sqrt{6}x + 2 \\ &= \sqrt{3}x\left(\sqrt{3}x - \sqrt{2}\right) - \sqrt{2}\left(\sqrt{3}x - \sqrt{2}\right) \\ &= \left(\sqrt{3}x - \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}x - \sqrt{2}\right) \end{aligned}$$

ਇਸ ਲਈ, ਸਮੀਕਰਣ ਦੇ ਮੂਲ x ਦੇ ਉਹ ਮੁੱਲ ਹਨ, ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਲਈ

$$\left(\sqrt{3}x - \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}x - \sqrt{2}\right) = 0$$

ਹੁਣ $x = \sqrt{\frac{2}{3}}$ ਦੇ ਲਈ $\sqrt{3}x - \sqrt{2} = 0$ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ, ਇਹ ਮੂਲ ਗੁਣਨਖੰਡ $\sqrt{3}x - \sqrt{2}$ ਦੇ ਦੋ ਵਾਰ ਆਉਣ ਕਾਰਨ, ਦੋ ਵਾਰ ਆਉਂਦਾ ਹੈ ਭਾਵ ਇਹ ਮੂਲ ਦੁਹਰਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ $3x^2 - 2\sqrt{6}x + 2 = 0$ ਦੇ ਮੂਲ $\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}$ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 6 : ਭਾਗ 4.1 ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਪ੍ਰਾਰਥਨਾ ਹਾਲ ਦੀਆਂ ਵਿਮਾਵਾਂ/ਲੰਬਾਈ ਅਤੇ ਚੌੜਾਈ (dimensions) ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਭਾਗ 4.1 ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਪਤਾ ਲਗਾਇਆ ਸੀ ਕਿ ਜੇਕਰ ਹਾਲ ਦੀ ਚੌੜਾਈ x ਮੀਟਰ ਹੋਵੇ ਤਾਂ x ਸਮੀਕਰਣ $2x^2 + x - 300 = 0$ ਨੂੰ ਸਤੁੰਸ਼ਟ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਗੁਣਨਖੰਡ ਵਿਧੀ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਕੇ, ਅਸੀਂ ਇਸ ਸਮੀਕਰਣ ਨੂੰ ਹੇਠਾਂ ਅਨੁਸਾਰ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ :

$$2x^2 - 24x + 25x - 300 = 0$$

ਜਾਂ $$2x(x - 12) + 25(x - 12) = 0$$

ਭਾਵ $$(x - 12)(2x + 25) = 0$$

ਇਸ ਲਈ, ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਸਮੀਕਰਣ ਦੇ ਦੋ ਮੂਲ $x = 12$ ਜਾਂ $x = -12.5$ ਹਨ। ਕਿਉਂਕਿ x ਹਾਲ ਦੀ ਚੌੜਾਈ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ, ਇਹ ਰਿਣਾਤਮਕ ਨਹੀਂ ਹੋ ਸਕਦੀ।

ਇਸ ਲਈ, ਹਾਲ ਦੀ ਚੌੜਾਈ 12 m ਹੈ। ਇਸ ਦੀ ਲੰਬਾਈ $= 2x + 1 = 25$ m ਹੋਵੇਗੀ।

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 4.2

1. ਗੁਣਨਖੰਡ ਵਿਧੀ ਰਾਹੀਂ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਦੋ ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਣ ਦੇ ਮੂਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।
   (i) $x^2 - 3x - 10 = 0$ (ii) $2x^2 + x - 6 = 0$
   (iii) $\sqrt{2}x^2 + 7x + 5\sqrt{2} = 0$ (iv) $2x^2 - x + \frac{1}{8} = 0$
   (v) $100x^2 - 20x + 1 = 0$
2. ਉਦਾਹਰਣ 1 ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੀਆਂ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੋ।
3. ਦੋ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਦਾ ਜੋੜ 27 ਅਤੇ ਗੁਣਨਫਲ 182 ਹੋਵੇ।
4. ਦੋ ਲਗਾਤਾਰ ਧਨ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਦੇ ਵਰਗਾਂ ਦਾ ਜੋੜ 365 ਹੋਵੇ।
5. ਇੱਕ ਸਮਕੋਣ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀ ਉਚਾਈ ਇਸ ਦੇ ਆਧਾਰ ਤੋਂ 7 cm ਘੱਟ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਕਰਣ 13 cm ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਬਾਕੀ ਦੋ ਭੁਜਾਵਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ।
6. ਇੱਕ ਘਰੇਲੂ ਉਦਯੋਗ ਇੱਕ ਦਿਨ ਵਿੱਚ ਕੁਝ ਬਰਤਨ ਬਣਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਇੱਕ ਦਿਨ ਇਹ ਵੇਖਿਆ ਗਿਆ ਕਿ ਹਰੇਕ ਬਰਤਨ ਦੀ ਨਿਰਮਾਣ ਲਾਗਤ (ਰੁਪਇਆਂ ਵਿੱਚ) ਉਸ ਦਿਨ ਬਣਾਏ ਗਏ ਬਰਤਨਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆਂ ਦੇ ਦੁੱਗਣੇ ਤੋਂ 3 ਵੱਧ ਸੀ। ਜੇਕਰ ਉਸ ਦਿਨ ਦੀ ਕੁੱਲ ਨਿਰਮਾਣ ਲਾਗਤ ₹ 90 ਸੀ ਤਾਂ ਉਸ ਦਿਨ ਬਣਾਏ ਗਏ ਬਰਤਨਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਅਤੇ ਹਰੇਕ ਨਗ ਨੂੰ ਬਣਾਉਣ ਦੀ ਲਾਗਤ ਪਤਾ ਕਰੋ।

4.4 ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਬਣਾਉਣ ਦੀ ਵਿਧੀ ਰਾਹੀਂ ਦੋ ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਣ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨਾ

ਪਿਛਲੇ ਭਾਗ ਵਿੱਚ ਤੁਸੀਂ, ਇੱਕ ਦੋ ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਣ ਦੇ ਮੂਲ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੀ ਇੱਕ ਵਿਧੀ ਬਾਰੇ ਪੜ੍ਹਿਆ ਸੀ। ਇਸ ਭਾਗ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਹੋਰ ਵਿਧੀ ਬਾਰੇ ਪੜ੍ਹਾਂਗੇ।

ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੀ ਸਥਿਤੀ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ :

ਸੁਨੀਤਾ ਦੀ ਦੋ ਸਾਲ ਪਹਿਲਾਂ ਦੀ ਉਮਰ (ਸਾਲਾਂ ਵਿੱਚ) ਅਤੇ ਹੁਣ ਤੋਂ ਚਾਰ ਸਾਲ ਬਾਅਦ ਦੀ ਉਮਰ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ ਉਸਦੀ ਵਰਤਮਾਨ ਉਮਰ ਦੇ ਦੁੱਗਣੇ ਤੋ ਇੱਕ ਵੱਧ ਹੈ। ਉਸ ਦੀ ਵਰਤਮਾਨ ਉਮਰ ਕੀ ਹੈ?

ਇਸ ਦਾ ਉੱਤਰ ਦੇਣ ਲਈ, ਮੰਨ ਲਉ ਉਸ ਦੀ ਵਰਤਮਾਨ ਉਮਰ (ਸਾਲਾਂ ਵਿੱਚ) x ਹੈ ਤਾਂ ਉਸ ਦੀ 2 ਸਾਲ ਪਹਿਲਾਂ ਦੀ ਉਮਰ ਅਤੇ ਹੁਣ ਤੋਂ 4 ਸਾਲ ਬਾਅਦ ਦੀ ਉਮਰ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ $(x-2)(x+4)$ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ $(x-2)(x+4) = 2x + 1$

ਭਾਵ $x^2 + 2x - 8 = 2x + 1$

ਭਾਵ $x^2 - 9 = 0$

ਇਸ ਲਈ, ਸੁਨੀਤਾ ਦੀ ਵਰਤਮਾਨ ਉਮਰ ਦੋ ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਣ $x^2 - 9 = 0$ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦੀ ਹੈ।

ਅਸੀਂ ਇਸ ਨੂੰ $x^2 = 9$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਵਰਗ ਮੂਲ ਲੈਣ 'ਤੇ ਸਾਨੂੰ $x = 3$ ਜਾਂ $x = -3$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਕਿਉਂਕਿ ਉਮਰ ਇੱਕ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਖਿਆ ਹੁੰਦੀ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ $x = 3$ ਹੀ ਹੋਵੇਗਾ। ਇਸ ਲਈ, ਸੁਨੀਤਾ ਦੀ ਵਰਤਮਾਨ ਉਮਰ 3 ਸਾਲ ਹੈ।

ਹੁਣ ਦੋ ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਣ $(x + 2)^2 - 9 = 0$ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ। ਹੱਲ ਕਰਨ ਲਈ ਅਸੀਂ ਇਸ ਨੂੰ $(x + 2)^2 = 9$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿਚ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਵਰਗ ਮੂਲ ਲੈਣ 'ਤੇ ਸਾਨੂੰ $x + 2 = 3$ ਜਾਂ $x + 2 = -3$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

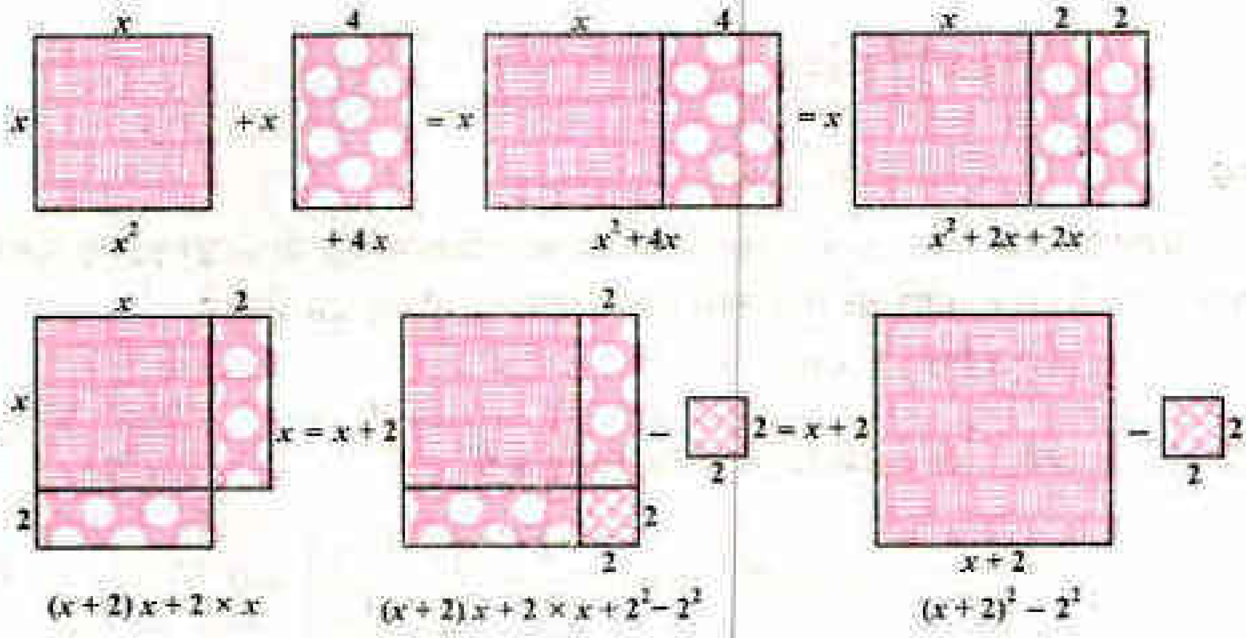
ਇਸ ਲਈ $x = 1$ ਜਾਂ $x = -5$

ਭਾਵ $(x + 2)^2 - 9 = 0$ ਦੇ ਮੂਲ 1 ਅਤੇ – 5 ਹਨ।

ਉਪਰੋਕਤ ਦੋਵੇਂ ਉਦਾਹਰਨਾਂ ਵਿੱਚ x ਵਾਲਾ ਪਦ ਪੂਰੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਵਰਗ ਦੇ ਅੰਦਰ ਹੈ ਅਤੇ ਅਸੀਂ ਵਰਗ ਮੂਲ ਲੈ ਕੇ ਆਸਾਨੀ ਨਾਲ ਮੂਲ ਪਤਾ ਕਰ ਲਏ ਸਨ। ਪ੍ਰੰਤੂ ਜੇਕਰ ਸਾਨੂੰ ਸਮੀਕਰਣ $x^2 + 4x - 5 = 0$ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਲਈ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਤਾਂ ਕੀ ਹੁੰਦਾ? ਅਸੀਂ ਸ਼ਾਇਦ ਇਸ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਲਈ ਗੁਣਨਖੰਡ ਵਿਧੀ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਦੇ ਜਦੋਂ ਤਕ ਸਾਨੂੰ ਇਹ ਪਤਾ ਨਹੀਂ ਲੱਗ ਜਾਂਦਾ ਕਿ, $x^2 + 4x - 5 = (x + 2)^2 - 9$ ਹੈ।

ਭਾਵ $x^2 + 4x - 5 = 0$ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨਾ $(x + 2)^2 - 9 = 0$ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਦੇ ਸਮਾਨ ਹੈ। ਜੋ ਅਸੀਂ ਦੇਖਿਆ ਕਿ ਛੇਤੀ ਹੀ ਹੱਲ ਹੋ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਕਿਸੇ ਵੀ ਦੋ ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਣ ਨੂੰ $(x + a)^2 - b^2 = 0$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ਫਿਰ ਇਸ ਦੇ ਮੂਲ ਆਸਾਨੀ ਨਾਲ ਪਤਾ ਲਗਾ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਆਓ ਦੇਖੀਏ, ਕੀ ਇਹ ਸੰਭਵ ਹੈ? ਚਿੱਤਰ 4.2 ਦੇਖੋ।

ਇਸ ਚਿੱਤਰ ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ ਵੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $x^2 + 4x$, $(x + 2)^2 - 4$ ਵਿੱਚ ਬਦਲ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 4.2

ਇਹ ਪ੍ਰਕ੍ਰਿਆ ਹੇਠਾਂ ਅਨੁਸਾਰ ਹੈ :

$$x^2 + 4x = (x^2 + \frac{4}{2}x) + \frac{4}{2}x$$
$$= x^2 + 2x + 2x$$
$$= (x + 2)\,x + 2 \times x$$
$$= (x + 2)\,x + 2 \times x + 2 \times 2 - 2 \times 2$$
$$= (x + 2)\,x + (x + 2) \times 2 - 2 \times 2$$
$$= (x + 2)\,(x + 2) - 2^2$$
$$= (x + 2)^2 - 4$$

ਭਾਵ $x^2 + 4x - 5 = (x + 2)^2 - 4 - 5 = (x + 2)^2 - 9$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $x^2 + 4x - 5 = 0$ ਨੂੰ ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਬਣਾ ਕੇ $(x + 2)^2 - 9 = 0$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਨੂੰ **ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਬਣਾਉਣ ਦੀ ਵਿਧੀ** ਨਾਲ ਜਾਣਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਸੰਖੇਪ ਵਿੱਚ, ਹੇਠਾਂ ਅਨੁਸਾਰ ਦਿਖਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ :

$$x^2 + 4x = \left(x + \frac{4}{2}\right)^2 - \left(\frac{4}{2}\right)^2 = \left(x + \frac{4}{2}\right)^2 - 4$$

ਭਾਵ $x^2 + 4x - 5 = 0$ ਨੂੰ ਦੁਬਾਰਾ ਹੇਠਾਂ ਅਨੁਸਾਰ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

$$\left(x + \frac{4}{2}\right)^2 - 4 - 5 = 0$$

ਭਾਵ $(x + 2)^2 - 9 = 0$

ਹੁਣ ਸਮੀਕਰਣ $3x^2 - 5x + 2 = 0$ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ। ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ x^2 ਦਾ ਗੁਣਾਂਕ ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਇਸ ਸਮੀਕਰਣ ਨੂੰ 3 ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰਨ 'ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :

$$9x^2 - 15x + 6 = 0$$

ਹੁਣ $9x^2 - 15x + 6 = (3x)^2 - 2 \times 3x \times \frac{5}{2} + 6$

$$= (3x)^2 - 2 \times 3x \times \frac{5}{2} + \left(\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 6$$

$$= \left(3x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} + 6 = \left(3x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

ਭਾਵ $9x^2 - 15x + 6 = 0$ ਨੂੰ ਹੇਠਾਂ ਅਨੁਸਾਰ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ :

$$\left(3x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = 0$$

ਭਾਵ $$\left(3x - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

ਇਸ ਲਈ, $9x^2 - 15x + 6 = 0$ ਦੇ ਉਹੀ ਮੂਲ ਹਨ ਜੋ $\left(3x - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ ਦੇ ਹਨ।

ਭਾਵ $$3x - \frac{5}{2} = \frac{1}{2} \text{ ਜਾਂ } 3x - \frac{5}{2} = -\frac{1}{2}$$

(ਅਸੀਂ ਇਸ ਨੂੰ $3x - \frac{5}{2} = \pm\frac{1}{2}$ ਜਿੱਥੇ '±' ਧਨ ਅਤੇ ਰਿਣ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ)

ਇਸ ਲਈ $$3x = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} \text{ ਜਾਂ } 3x = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}$$

ਭਾਵ $$x = \frac{5}{6} + \frac{1}{6} \text{ ਜਾਂ } x = \frac{5}{6} - \frac{1}{6}$$

ਇਸ ਲਈ $$x = 1 \text{ ਜਾਂ } x = \frac{4}{6}$$

ਭਾਵ $$x = 1 \text{ ਜਾਂ } x = \frac{2}{3}$$

ਇਸ ਲਈ, ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਸਮੀਕਰਣ ਦੇ ਮੂਲ 1 ਅਤੇ $\frac{2}{3}$ ਹਨ।

ਟਿੱਪਣੀ : ਇਸ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਦੀ ਦੂਜੀ ਵਿਧੀ ਹੇਠਾਂ ਅਨੁਸਾਰ ਹੈ :

ਸਮੀਕਰਣ $$3x^2 - 5x + 2 = 0$$

ਉਹੀ ਹੈ ਜੋ $x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{2}{3} = 0$ ਹੈ।

ਹੁਣ $$x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{2}{3} = \left\{x - \frac{1}{2}\left(\frac{5}{3}\right)\right\}^2 - \left\{\frac{1}{2}\left(\frac{5}{3}\right)\right\}^2 + \frac{2}{3}$$

$$= \left(x - \frac{5}{6}\right)^2 + \frac{2}{3} - \frac{25}{36}$$

$$= \left(x-\frac{5}{6}\right)^2 - \frac{1}{36} = \left(x-\frac{5}{6}\right)^2 - \left(\frac{1}{6}\right)^2$$

ਇਸ ਲਈ $3x^2 - 5x + 2 = 0$ ਦਾ ਉਹੀ ਹੱਲ ਹੈ ਜੋ $\left(x-\frac{5}{6}\right)^2 - \left(\frac{1}{6}\right)^2 = 0$ ਦਾ ਹੈ।

ਭਾਵ $x - \frac{5}{6} = \pm\frac{1}{6}$, ਭਾਵ $x = \frac{5}{6}+\frac{1}{6} = 1$ ਅਤੇ $x = \frac{5}{6}-\frac{1}{6} = \frac{2}{3}$ ਹੈ।

ਉਪਰੋਕਤ ਵਿਧੀ ਨੂੰ ਸਮਝਣ ਲਈ, ਆਉ ਕੁੱਝ ਹੋਰ ਉਦਾਹਰਨਾ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ।

ਉਦਾਹਰਣ 7 : ਉਦਾਹਰਣ 3 ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਸਮੀਕਰਣ ਨੂੰ ਪੂਰਨ ਬਣਾਉਣ ਦੀ ਵਿਧੀ ਰਾਹੀਂ ਹੱਲ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਸਮੀਕਰਣ $2x^2 - 5x + 3 = 0$ ਉਹੀ ਹੈ ਜੋ $x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{3}{2} = 0$ ਹੈ।

ਹੁਣ $$x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{3}{2} = \left(x-\frac{5}{4}\right)^2 - \left(\frac{5}{4}\right)^2 + \frac{3}{2} = \left(x-\frac{5}{4}\right)^2 - \frac{1}{16}$$

ਇਸ ਲਈ $2x^2 - 5x + 3 = 0$ ਨੂੰ $\left(x-\frac{5}{4}\right)^2 - \frac{1}{16} = 0$ ਦੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਭਾਵ ਸਮੀਕਰਣ $2x^2 - 5x + 3 = 0$ ਦੇ ਮੂਲ ਉਹੀ ਹੈ ਜੋ $\left(x-\frac{5}{4}\right)^2 - \frac{1}{16} = 0$ ਦੇ ਮੂਲ ਹਨ

ਹੁਣ $$\left(x-\frac{5}{4}\right)^2 - \frac{1}{16} = 0 \text{ ਉਹੀ ਹੈ ਜੋ } \left(x-\frac{5}{4}\right)^2 = \frac{1}{16} \text{ ਹੈ}$$

ਇਸ ਲਈ $$x - \frac{5}{4} = \pm\frac{1}{4}$$

ਭਾਵ $$x = \frac{5}{4} \pm \frac{1}{4}$$

ਭਾਵ $$x = \frac{5}{4} + \frac{1}{4} \text{ ਜਾਂ } x = \frac{5}{4} - \frac{1}{4}$$

ਭਾਵ $$x = \frac{3}{2} \text{ ਜਾਂ } x = 1$$

ਇਸ ਲਈ, ਸਮੀਕਰਣ ਦੇ ਹੱਲ $x = \frac{3}{2}$ ਅਤੇ 1 ਹਨ।

ਆਓ ਹੁਣ ਇਨ੍ਹਾਂ ਮੂਲਾਂ ਦੀ ਜਾਂਚ ਕਰੀਏ।

$2x^2 - 5x + 3 = 0$ ਵਿੱਚ $x = \frac{3}{2}$ ਭਰਨ 'ਤੇ ਸਾਨੂੰ $2\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 5\left(\frac{3}{2}\right) + 3 = 0$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜੋ ਸਹੀ ਹੈ। ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ, ਤੁਸੀਂ ਵਿਖਾ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ $x = 1$ ਵੀ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਸਮੀਕਰਣ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 7 ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ ਸਮੀਕਰਣ $2x^2 - 5x + 3 = 0$ ਨੂੰ 2 ਨਾਲ ਭਾਗ ਕਰਨ 'ਤੇ $x^2 - \frac{5}{2}x + \frac{3}{2} = 0$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤਾ ਸੀ ਜਿਸ ਨਾਲ ਪਹਿਲਾ ਪਦ ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਬਣ ਗਿਆ ਅਤੇ ਫਿਰ ਵਰਗ ਨੂੰ ਪੂਰਾ ਕੀਤਾ। ਇਸ ਦੀ ਬਜਾਏ ਅਸੀਂ ਸਾਰੇ ਪਦਾਂ ਨੂੰ 2 ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰਕੇ ਵੀ ਪਹਿਲੇ ਪਦ ਨੂੰ $4x^2 = (2x)^2$ ਬਣਾ ਸਕਦੇ ਸੀ ਅਤੇ ਫਿਰ ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਬਣਾ ਲੈਂਦੇ।

ਇਸ ਵਿਧੀ ਨੂੰ ਅਗਲੀ ਉਦਾਹਰਣ ਵਿੱਚ ਸਮਝਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 8 : ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਬਣਾਉਣ ਦੀ ਵਿਧੀ ਨਾਲ ਸਮੀਕਰਣ $5x^2 - 6x - 2 = 0$ ਦੇ ਮੂਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਸਮੀਕਰਣ ਨੂੰ 5 ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰਨ 'ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

$$25x^2 - 30x - 10 = 0$$

ਇਹ ਹੇਠ ਦਿੱਤੇ ਦੇ ਸਮਾਨ ਹੈ:

$$(5x)^2 - 2 \times (5x) \times 3 + 3^2 - 3^2 - 10 = 0$$

ਭਾਵ $$(5x - 3)^2 - 9 - 10 = 0$$

ਭਾਵ $$(5x - 3)^2 - 19 = 0$$

ਭਾਵ $$(5x - 3)^2 = 19$$

ਭਾਵ $$5x - 3 = \pm\sqrt{19}$$

ਭਾਵ $$5x = 3 \pm \sqrt{19}$$

ਇਸ ਲਈ $$x = \frac{3 \pm \sqrt{19}}{5}$$

ਇਸ ਲਈ, ਮੂਲ $\frac{3 + \sqrt{19}}{5}$ ਅਤੇ $\frac{3 - \sqrt{19}}{5}$ ਹਨ।

ਪੜਤਾਲ ਕਰੋ ਕਿ ਮੂਲ $\frac{3+\sqrt{19}}{5}$ ਅਤੇ $\frac{3-\sqrt{19}}{5}$ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ 9 : ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਬਣਾਉਣ ਦੀ ਵਿਧੀ ਨਾਲ $4x^2 + 3x + 5 = 0$ ਦੇ ਮੂਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਧਿਆਨ ਦਿਓ $4x^2 + 3x + 5 = 0$ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੇ ਦੇ ਸਮਾਨ ਹੈ :

$$(2x)^2 + 2\times(2x)\times\frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 + 5 = 0$$

ਭਾਵ $$\left(2x+\frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{16} + 5 = 0$$

ਭਾਵ $$\left(2x+\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{71}{16} = 0$$

ਭਾਵ $$\left(2x+\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{-71}{6} < 0 \text{ ਹੈ}$$

ਪ੍ਰੰਤੂ ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਕਿਸੇ ਵੀ ਵਾਸਤਵਿਕ ਮੂਲ ਲਈ $\left(2x+\frac{3}{4}\right)^2$ ਰਿਣਾਤਮਕ ਨਹੀਂ ਹੋ ਸਕਦਾ (ਕਿਉਂ?)। ਇਸ ਲਈ x ਦਾ ਕੋਈ ਵੀ ਮੁੱਲ ਦਿਤੀ ਹੋਈ ਸਮੀਕਰਣ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਨਹੀਂ ਕਰਦਾ। ਇਸ ਲਈ, ਦਿਤੀ ਹੋਈ ਸਮੀਕਰਣ ਦੇ ਕੋਈ ਵਾਸਤਵਿਕ ਮੂਲ ਨਹੀਂ ਹਨ।

ਹੁਣ ਤੱਕ ਤੁਸੀਂ ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਬਣਾਉਣ ਦੀ ਵਿਧੀ ਵਾਲੇ ਕਈ ਉਦਾਹਰਣ ਦੇਖੇ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ,ਆਉ ਇਸ ਵਿਧੀ ਨੂੰ ਵਿਆਪਕ ਰੂਪ ਦੇਈਏ।

ਦੋ ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਣ $ax^2 + bx + c = 0\ (a \neq 0)$ ਉੱਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ। ਸਾਰੇ ਪਦਾਂ ਨੂੰ a ਨਾਲ ਵੰਡਣ 'ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ : $$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

ਇਸ ਲਈ, ਇਸ ਸਮੀਕਰਣ ਨੂੰ ਅਸੀ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ :

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} = 0$$

ਭਾਵ $$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}=0$$

ਇਸ ਲਈ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਸਮੀਕਰਣ ਦੇ ਮੂਲ ਉਹੀ ਹਨ, ਜੋ

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}=0, \text{ ਭਾਵ } \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2} \quad (1)$$

ਦੇ ਹਨ। ਜੇਕਰ $b^2-4ac \geq 0$ ਹੋਵੇ ਤਾਂ (1) ਦਾ ਵਰਗ ਮੂਲ ਲੈਣ 'ਤੇ, ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ:

$$x+\frac{b}{2a}=\frac{\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

ਇਸ ਲਈ $$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

ਭਾਵ $ax^2+bx+c=0$ ਦੇ ਮੂਲ $\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ ਅਤੇ $\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ ਹਨ, ਜੇਕਰ $b^2-4ac \geq 0$ ਹੈ। ਉਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਜਦੋਂ $b^2-4ac<0$ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਸਮੀਕਰਣ ਦੇ ਮੂਲ ਵਾਸਤਵਿਕ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦੇ। (ਕਿਉਂ?)।

ਇਸ ਲਈ: ਜੇਕਰ $b^2-4ac \geq 0$ ਹੈ, ਤਾਂ ਦੋ ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਣ $ax^2+bx+c=0$ ਦੇ ਮੂਲ $\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ ਹਨ।

ਦੋ ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਣ ਦੇ ਮੂਲ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੀ ਇਸ ਵਿਧੀ ਨੂੰ **ਦੋ ਘਾਤੀ ਸੂਤਰ (quadratic formula)** ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

ਦੋ ਘਾਤੀ ਸੂਤਰ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਦੇ ਲਈ ਆਓ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਨਾਂ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ।

ਉਦਾਹਰਣ 10 : ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 4.1 ਦੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨ 2(i) ਨੂੰ ਦੋ ਘਾਤੀ ਸੂਤਰ ਨਾਲ ਹੱਲ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਪਲਾਟ ਦੀ ਚੌੜਾਈ x ਮੀਟਰ ਹੈ ਤਾਂ ਲੰਬਾਈ $(2x+1)$ ਮੀਟਰ ਹੈ। ਸਾਨੂੰ ਦਿੱਤਾ ਹੈ ਕਿ $x(2x+1)=528$ ਭਾਵ $2x^2+x-528=0$ ਹੈ। ਇਹ $ax^2+bx+c=0$ ਦੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ ਜਿੱਥੇ $a=2, b=1, c=-528$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਦੋ ਘਾਤੀ ਸੂਤਰ ਨਾਲ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1+4(2)(528)}}{4}=\frac{-1\pm\sqrt{4225}}{4}=\frac{-1\pm 65}{4}$$

ਭਾਵ $$x = \frac{64}{4} \text{ ਜਾਂ } x = \frac{-66}{4}$$

ਭਾਵ $$x = 16 \text{ ਜਾਂ } x = -\frac{33}{2}$$

ਕਿਉਂਕਿ x ਇੱਕ ਪਸਾਰ (ਚੌੜਾਈ) ਹੋਣ ਕਾਰਣ ਰਿਣਾਤਮਕ ਨਹੀਂ ਹੋ ਸਕਦਾ, ਇਸ ਲਈ, ਪਲਾਟ ਦੀ ਚੌੜਾਈ 16 ਮੀ: ਅਤੇ ਲੰਬਾਈ 33 ਮੀ. ਹੈ।

ਤੁਹਾਨੂੰ ਇਹ ਪੜਤਾਲ ਕਰਨੀ ਚਾਹੀਦੀ ਹੈ ਕਿ ਇਹ ਮੂਲ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਦੀਆਂ ਸ਼ਰਤਾ ਨੂੰ ਪੂਰਾ ਕਰਦੇ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ 11 : ਦੋ ਅਜਿਹੀਆਂ ਲਗਾਤਾਰ ਟਾਂਕ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਦੇ ਵਰਗਾਂ ਦਾ ਜੋੜ 290 ਹੋਵੇ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਦੋ ਲਗਾਤਾਰ ਟਾਂਕ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਛੋਟੀ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ x ਹੈ ਤਾਂ ਦੂਜੀ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ $x + 2$ ਹੋਵੇਗੀ। ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਅਨੁਸਾਰ,

$$x^2 + (x+2)^2 = 290$$

ਭਾਵ $$x^2 + x^2 + 4x + 4 = 290$$

ਭਾਵ $$2x^2 + 4x - 286 = 0$$

ਭਾਵ $$x^2 + 2x - 143 = 0,$$

ਜੋ x ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਦੋ ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ।

ਦੋ ਘਾਤੀ ਸੂਤਰ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਕੇ ਅਸੀਂ ਵੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+572}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{576}}{2} = \frac{-2 \pm 24}{2}$$

ਭਾਵ $$x = 11 \text{ ਜਾਂ } x = -13$$

ਪ੍ਰੰਤੂ x ਇੱਕ ਧਨਾਤਮਕ ਟਾਂਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $x = 11$ ਹੋਵੇਗਾ ਕਿਉਂਕਿ $x \neq -13$ ਨਹੀਂ ਹੋ ਸਕਦਾ। ਇਸ ਲਈ ਦੋਵੇਂ ਲਗਾਤਾਰ ਟਾਂਕ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ 11 ਅਤੇ 13 ਹਨ।

ਪੜਤਾਲ $11^2 + 13^2 = 121 + 169 = 290$ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 12 : ਇੱਕ ਆਇਤਾਕਾਰ ਪਾਰਕ ਨੂੰ ਬਣਾਉਣਾ ਹੈ ਜਿਸ ਦੀ ਚੌੜਾਈ ਇਸ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਨਾਲੋਂ 3m ਘੱਟ ਹੋਵੇ। ਇਸ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਹਿਲਾ ਤੋਂ ਬਣੇ ਇੱਕ ਸਮਦੋਭੁਜੀ ਤ੍ਰਿਕੋਣਾਕਾਰ ਪਾਰਕ, ਜਿਸ ਦਾ ਆਧਾਰ ਆਇਤਾਕਾਰ ਪਾਰਕ ਦੀ ਚੌੜਾਈ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਅਤੇ ਉਚਾਈ 12m ਹੈ, ਤੋਂ 4 ਵਰਗ ਮੀਟਰ ਵੱਧ ਹੈ। ਇਸ ਆਇਤਾਕਾਰ ਪਾਰਕ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਅਤੇ ਚੌੜਾਈ ਪਤਾ ਕਰੋ।

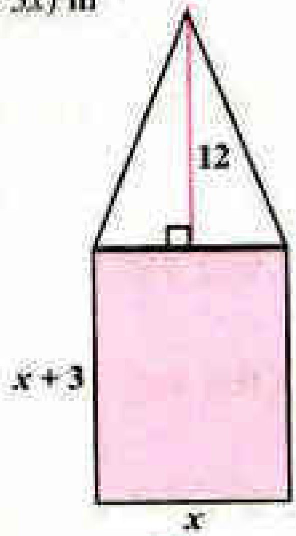
ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਆਇਤਾਕਾਰ ਪਾਰਕ ਦੀ ਚੌੜਾਈ x m ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ, ਇਸਦੀ ਲੰਬਾਈ $= (x+3)$ m ਹੋਵੇਗੀ।

ਇਸ ਲਈ ਆਇਤਾਕਾਰ ਪਾਰਕ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ $= x(x+3)\ \text{m}^2 = (x^2+3x)\ \text{m}^2$

ਹੁਣ ਸਮਦੋਭੁਜੀ ਤਿਕੋਣ ਦਾ ਆਧਾਰ $= x$ m

ਇਸ ਲਈ ਇਸ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ $= \frac{1}{2} \times x \times 12 = 6x\ \text{m}^2$



ਚਿੱਤਰ 4.3

ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਅਨੁਸਾਰ,

$$x^2 + 3x = 6x + 4$$

ਭਾਵ

$$x^2 - 3x - 4 = 0$$

ਦੋ ਘਾਤੀ ਸੂਤਰ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2} = 4 \text{ ਜਾਂ } -1$$

ਪ੍ਰੰਤੂ $x \neq -1$ ਹੈ (ਕਿਉਂ?)। ਇਸ ਲਈ $x = 4$ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ ਪਾਰਕ ਦੀ ਚੌੜਾਈ $= 4$ m ਅਤੇ ਲੰਬਾਈ $= 7$ m ਹੋਵੇਗੀ।

ਪੜਤਾਲ : ਆਇਤਾਕਾਰ ਪਾਰਕ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ $= 28\ \text{m}^2$ ਹੈ।

ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਕਾਰ ਪਾਰਕ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ $= 24\ \text{m}^2 = (28-4)\ \text{m}^2$

ਉਦਾਹਰਣ 13 : ਦੋ ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੇ ਮੂਲ, ਜੇਕਰ ਸੰਭਵ ਹੋਣ, ਤਾਂ ਦੋ ਘਾਤੀ ਸੂਤਰ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ ਪਤਾ ਲਗਾਉ।

(i) $3x^2 - 5x + 2 = 0$ (ii) $x^2 + 4x + 5 = 0$ (iii) $2x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = 0$

ਹੱਲ :

(i) $3x^2 - 5x + 2 = 0$ ਲਈ; ਇੱਥੇ $a = 3$, $b = -5$, $c = 2$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ, $b^2 - 4ac = 25 - 24 = 1 > 0$ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ $x = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{6} = \frac{5 \pm 1}{6}$ ਹੈ, ਭਾਵ $x = 1$ ਜਾਂ $x = \frac{2}{3}$ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ ਮੂਲ $\frac{2}{3}$ ਅਤੇ 1 ਹਨ।

(ii) $x^2 + 4x + 5 = 0$ ਲਈ: ਇੱਥੇ $a = 1, b = 4, c = 5$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $b^2 - 4ac = 16 - 20 = -4 < 0$ ਹੈ।

ਪ੍ਰੰਤੂ ਕਿਉਂਕਿ ਕਿਸੇ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਵਰਗ ਰਿਣਾਤਮਕ ਨਹੀਂ ਹੋ ਸਕਦਾ, ਇਸ ਲਈ $\sqrt{b^2 - 4ac}$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਵਾਸਤਵਿਕ ਨਹੀਂ ਹੋਵੇਗਾ।

ਇਸ ਲਈ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਸਮੀਕਰਣ ਦੇ ਕੋਈ ਵਾਸਤਵਿਕ ਮੂਲ ਨਹੀਂ ਹਨ।

(iii) $2x^2 - 2\sqrt{2}x + 1 = 0$ ਲਈ: ਇੱਥੇ $a = 2, b = -2\sqrt{2}, c = 1$ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ $b^2 - 4ac = 8 - 8 = 0$ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ $x = \frac{2\sqrt{2} \pm \sqrt{0}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \pm 0$ ਹੈ, ਭਾਵ $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ ਮੂਲ $\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}$ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ 14 : ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੇ ਮੂਲ ਪਤਾ ਕਰੋ:

(i) $x + \frac{1}{x} = 3, x \neq 0$ (ii) $\frac{1}{x} - \frac{1}{x-2} = 3, x \neq 0, 2$

ਹੱਲ :

(i) $x + \frac{1}{x} = 3$ ਦੇ ਲਈ : ਸਾਰੇ ਪਦਾਂ ਨੂੰ $x \neq 0$ ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰਨ 'ਤੇ,ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ:

$$x^2 + 1 = 3x$$

ਭਾਵ $x^2 - 3x + 1 = 0$, ਜੋ ਇੱਕ ਦੋ ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ $a = 1, b = -3, c = 1$ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ $b^2 - 4ac = 9 - 4 = 5 > 0$

ਇਸ ਲਈ $x = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$ (ਕਿਉਂ?)

ਇਸ ਲਈ ਮੂਲ $\frac{3 + \sqrt{5}}{2}$ ਅਤੇ $\frac{3 - \sqrt{5}}{2}$ ਹਨ।

(ii) $\frac{1}{x} - \frac{1}{x-2} = 3, x \neq 0, 2$:

ਕਿਉਂਕਿ $x \neq 0, 2$ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਸਮੀਕਰਣ ਨੂੰ $x(x-2)$ ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰਨ 'ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ:

$$(x-2) - x = 3x(x-2)$$
$$= 3x^2 - 6x$$

ਇਸ ਲਈ, ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਸਮੀਕਰਣ ਬਦਲ ਕੇ $3x^2 - 6x + 2 = 0$ ਬਣ ਜਾਂਦੀ ਹੈ ਜੋ ਇੱਕ ਦੋ ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ।

ਇੱਥੇ $a = 3, b = -6, c = 2$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $b^2 - 4ac = 36 - 24 = 12 > 0$ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ $x = \dfrac{6 \pm \sqrt{12}}{6} = \dfrac{6 \pm 2\sqrt{3}}{6} = \dfrac{3 \pm \sqrt{3}}{3}$

ਇਸ ਲਈ, ਮੂਲ $\dfrac{3+\sqrt{3}}{3}$ ਅਤੇ $\dfrac{3-\sqrt{3}}{3}$ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ 15 : ਇੱਕ ਕਿਸ਼ਤੀ, ਜਿਸਦੀ ਖੜੇ ਪਾਣੀ ਵਿੱਚ ਚਾਲ 18 km/h ਹੈ। 24 km ਧਾਰਾ ਦੀ ਉਲਟ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਜਾਣ ਲਈ, ਇਹੀ ਦੂਰੀ ਧਾਰਾ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਜਾਣ ਲਈ ਲੱਗੇ ਸਮੇਂ ਤੋਂ 1 ਘੰਟਾ ਵੱਧ ਸਮਾਂ ਲੈਂਦੀ ਹੈ। ਧਾਰਾ ਦੀ ਚਾਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਧਾਰਾ ਦੀ ਚਾਲ x ਕਿ.km/h ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ ਧਾਰਾ ਦੀ ਉਲਟ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਕਿਸ਼ਤੀ ਦੀ ਚਾਲ $= (18 - x)$ km/h ਅਤੇ ਧਾਰਾ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਕਿਸ਼ਤੀ ਦੀ ਚਾਲ $= (18 + x)$ km/h ਹੈ।

ਜਾਣ ਲਈ ਲਿਆ ਗਿਆ ਸਮਾਂ $= \dfrac{\text{ਦੂਰੀ}}{\text{ਚਾਲ}} = \dfrac{24}{18-x}$ ਘੰਟੇ

ਇਸੇ ਤਰਾਂ, ਧਾਰਾ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਜਾਣ ਲਈ ਲੱਗਿਆ ਸਮਾਂ $= \dfrac{24}{18+x}$ ਘੰਟੇ।

ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਅਨੁਸਾਰ,

$$\frac{24}{18-x} - \frac{24}{18+x} = 1$$

ਭਾਵ $$24(18+x) - 24(18-x) = (18-x)(18+x)$$

ਭਾਵ $$x^2 + 48x - 324 = 0$$

ਦੋ ਘਾਤੀ ਸੂਤਰ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ, ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ:

$$x = \frac{-48 \pm \sqrt{48^2 + 1296}}{2} = \frac{-48 \pm \sqrt{3600}}{2}$$

$$= \frac{-48 \pm 60}{2} = 6 \text{ ਜਾਂ } -54$$

ਕਿਉਂਕਿ x ਧਾਰਾ ਦੀ ਚਾਲ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਰਿਣਾਤਮਕ ਨਹੀਂ ਹੋ ਸਕਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ਮੂਲ $x = -54$ ਨੂੰ ਛੱਡ ਦਿੰਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਲਈ $x = 6$ ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਧਾਰਾ ਦੀ ਚਾਲ 6 km/h ਹੈ।

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 4.3

1. ਜੇਕਰ ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੇ ਮੂਲ ਸੰਭਵ ਹੋਣ ਤਾਂ ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਬਣਾਉਣ ਦੀ ਵਿਧੀ ਰਾਹੀਂ ਪਤਾ ਕਰੋ।

   (i) $2x^2 - 7x + 3 = 0$ (ii) $2x^2 + x - 4 = 0$

   (iii) $4x^2 + 4\sqrt{3}x + 3 = 0$ (iv) $2x^2 + x + 4 = 0$

2. ਉਪਰੋਕਤ ਪ੍ਰਸ਼ਨ 1 ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਦੋ ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੇ ਮੂਲ ਦੋ ਘਾਤੀ ਸੂਤਰ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ ਪਤਾ ਲਗਾਉ।

3. ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੀਆਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੇ ਮੂਲ ਪਤਾ ਕਰੋ :

   (i) $x - \frac{1}{x} = 3, x \neq 0$ (ii) $\frac{1}{x+4} - \frac{1}{x-7} = \frac{11}{30}, x \neq -4, 7$

4. 3 ਸਾਲ ਪਹਿਲਾਂ ਰਹਿਮਾਨ ਦੀ ਉਮਰ (ਸਾਲਾਂ ਵਿੱਚ) ਅਤੇ ਹੁਣ ਤੋਂ 5 ਸਾਲ ਬਾਦ ਦੀ ਉਮਰ ਦੇ ਉਲਟਕ੍ਰਮਾਂ ਦਾ ਜੋੜ $\frac{1}{3}$ ਹੈ। ਉਸਦੀ ਵਰਤਮਾਨ ਉਮਰ ਪਤਾ ਕਰੋ।

5. ਇੱਕ ਸ਼੍ਰੇਣੀ ਟੈਸਟ ਵਿੱਚ ਸ਼ੈਫਾਲੀ ਦੇ ਗਣਿਤ ਅਤੇ ਅੰਗ੍ਰੇਜ਼ੀ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੇ ਅੰਕਾਂ ਦਾ ਜੋੜ 30 ਹੈ। ਜੇਕਰ ਉਸਨੂੰ ਗਣਿਤ ਵਿੱਚ 2 ਅੰਕ ਵੱਧ ਅਤੇ ਅੰਗ੍ਰੇਜ਼ੀ ਵਿੱਚ 3 ਅੰਕ ਘੱਟ ਮਿਲੇ ਹੁੰਦੇ ਤਾਂ ਉਸਦੇ ਅੰਕਾਂ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ 210 ਹੁੰਦਾ। ਉਸ ਦੁਆਰਾ ਦੋਵੇਂ ਵਿਸ਼ਿਆ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਪਤ ਅੰਕ ਪਤਾ ਕਰੋ।

6. ਇੱਕ ਆਇਤਾਕਾਰ ਖੇਤ ਦਾ ਵਿਕਰਣ ਉਸ ਦੀ ਛੋਟੀ ਭੁਜਾ ਤੋਂ 60 m ਵੱਧ ਲੰਬਾ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਵੱਡੀ ਭੁਜਾ ਛੋਟੀ ਭੁਜਾ ਤੋਂ 30 m ਵੱਧ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਖੇਤ ਦੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ।

7. ਦੋ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਵਰਗਾਂ ਦਾ ਅੰਤਰ 180 ਹੈ। ਛੋਟੀ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਵਰਗ, ਵੱਡੀ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਅੱਠ ਗੁਣਾ ਹੈ। ਦੋਵੇਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ।

8. ਇੱਕ ਰੇਲਗੱਡੀ ਇੱਕ ਸਮਾਨ ਚਾਲ ਨਾਲ 360 km ਦਾ ਸਫ਼ਰ ਤੈਅ ਕਰਦੀ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਇਹ ਚਾਲ 5 km/h ਵੱਧ ਹੁੰਦੀ ਤਾਂ ਉਹ ਉਸੇ ਸਫ਼ਰ ਲਈ 1 ਘੰਟਾ ਘੱਟ ਸਮਾਂ ਲੈਂਦੀ। ਰੇਲਗੱਡੀ ਦੀ ਚਾਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

9. ਦੋ ਟੂਟੀਆਂ ਮਿਲ ਕੇ ਇੱਕ ਹੌਜ਼ ਨੂੰ $9\frac{3}{8}$ ਘੰਟਿਆ ਵਿੱਚ ਭਰ ਸਕਦੀਆਂ ਹਨ। ਵੱਡੇ ਵਿਆਸ ਵਾਲੀ

ਟੂਟੀ, ਘੱਟ ਵਿਆਸ ਵਾਲੀ ਟੂਟੀ ਤੋਂ 10 ਘੰਟੇ ਘੱਟ ਸਮਾਂ ਲੈਂਦੀ ਹੈ। ਹਰੇਕ ਟੂਟੀ ਦੁਆਰਾ ਹੌਜ ਨੂੰ ਭਰਨ ਲਈ ਲਿਆ ਗਿਆ ਸਮਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ।

10. ਅੰਮ੍ਰਿਤਸਰ ਤੋਂ ਲੁਧਿਆਣਾ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ 132 km/h ਦਾ ਸਫ਼ਰ ਕਰਨ ਲਈ ਇੱਕ ਐਕਸਪ੍ਰੈਸ ਰੇਲਗੱਡੀ, ਸਵਾਰੀ ਗੱਡੀ ਤੋਂ 1 ਘੰਟਾ ਘੱਟ ਸਮਾਂ ਲੈਂਦੀ ਹੈ। (ਵਿਚਕਾਰਲੇ ਸਟੇਸ਼ਨਾ ਦੇ ਰੁਕਣ ਦਾ ਸਮਾਂ ਧਿਆਨ ਵਿੱਚ ਨਾ ਰੱਖਿਆ ਜਾਵੇ)। ਜੇਕਰ ਐਕਸਪ੍ਰੈਸ ਦੀ ਔਸਤ ਚਾਲ, ਸਵਾਰੀ ਗੱਡੀ ਦੀ ਔਸਤ ਚਾਲ ਤੋਂ 11 km/h ਜਿਆਦਾ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਦੋਵੇਂ ਰੇਲ ਗੱਡੀਆਂ ਦੀ ਔਸਤ ਚਾਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

11. ਦੋ ਵਰਗਾਂ ਦੇ ਖੇਤਰਫਲਾਂ ਦਾ ਜੋੜ 468 m^2 ਹੈ। ਜੇਕਰ ਉਨ੍ਹਾਂ ਦੇ ਪਰਿਮਾਪਾਂ ਦਾ ਅੰਤਰ 24 m ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਦੋਵੇ ਵਰਗਾਂ ਦੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾ ਪਤਾ ਕਰੋ।

4.5 ਮੂਲਾਂ ਦੀ ਪ੍ਰਕ੍ਰਿਤੀ

ਪਿਛਲੇ ਭਾਗ ਵਿੱਚ, ਤੁਸੀਂ ਵੇਖਿਆ ਹੈ ਕਿ ਸਮੀਕਰਣ $ax^2 + bx + c = 0$ ਦੇ ਮੂਲ

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ਦੁਆਰਾ ਤੈਅ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਜੇਕਰ $b^2 - 4ac > 0$ ਹੈ, ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਦੋ ਭਿੰਨ-ਭਿੰਨ ਵਾਸਤਵਿਕ ਮੂਲ

$-\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ਅਤੇ $-\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਜੇਕਰ $b^2 - 4ac = 0$ ਹੈ ਤਾਂ $x = -\frac{b}{2a} \pm 0$, ਭਾਵ $x = -\frac{b}{2a}$ ਜਾਂ $-\frac{b}{2a}$ ਹੈ।

ਭਾਵ ਸਮੀਕਰਣ ਦੇ $ax^2 + bx + c = 0$ ਦੇ ਦੋਵੇਂ ਮੂਲ $\frac{-b}{2a}$ ਹਨ।

ਇਸ ਲਈ, ਅਸੀਂ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿਚ ਦੋ ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਣ $ax^2 + bx + c = 0$ ਦੇ ਦੋ ਬਰਾਬਰ ਵਾਸਤਵਿਕ ਮੂਲ ਹਨ।

ਜੇਕਰ $b^2 - 4ac < 0$ ਹੈ ਤਾਂ ਅਜਿਹੀ ਕੋਈ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ ਨਹੀਂ ਹੈ ਜਿਸ ਦਾ ਵਰਗ $b^2 - 4ac$ ਹੋਵੇ। ਇਸ ਲਈ ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਦੋ ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਣ ਦੇ ਕੋਈ ਵਾਸਤਵਿਕ ਮੂਲ ਨਹੀਂ ਹਨ।

ਕਿਉਂਕਿ $b^2 - 4ac$ ਇਹ ਤੈਅ ਕਰਦਾ ਹੈ ਕਿ ਦੋ ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਣ $ax^2 + bx + c = 0$ ਦੇ ਮੂਲ ਵਾਸਤਵਿਕ ਹਨ ਜਾਂ ਨਹੀਂ, ਇਸ ਲਈ b^2-4ac ਨੂੰ ਦੋ ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ **ਡਿਸਕ੍ਰਿਮੀਨੈਂਟ (Discriminent)** ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ ਦੋ ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਣਾਂ $ax^2 + bx + c = 0$ ਦੇ

(i) ਦੋ ਭਿੰਨ-ਭਿੰਨ ਵਾਸਤਵਿਕ ਮੂਲ ਹੁੰਦੇ ਹਨ, ਜੇਕਰ $b^2 - 4ac > 0$ ਹੋਵੇ।

(ii) ਦੋ ਬਰਾਬਰ ਵਾਸਤਵਿਕ ਮੂਲ ਹੁੰਦੇ ਹਨ, ਜੇਕਰ $b^2 - 4ac = 0$ ਹੋਵੇ।

(iii) ਕੋਈ ਵਾਸਤਵਿਕ ਮੂਲ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ, ਜੇਕਰ $b^2 - 4ac < 0$ ਹੋਵੇ।

ਆਓ ਅਸੀਂ ਹੁਣ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਣਾਂ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

ਉਦਾਹਰਣ 16 : ਦੋ ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਣ $2x^2 - 4x + 3 = 0$ ਦਾ ਡਿਸਕ੍ਰਿਮੀਨੈਂਟ ਪਤਾ ਕਰੋ ਅਤੇ ਫਿਰ ਮੂਲਾਂ ਦੀ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤੀ ਦਾ ਪਤਾ ਲਗਾਉ।

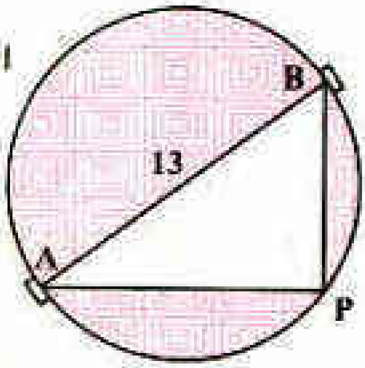
ਹੱਲ : ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਸਮੀਕਰਣ $ax^2 + bx + c = 0$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਹੈ ਜਿੱਥੇ $a = 2, b = -4$ ਅਤੇ $c = 3$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਡਿਸਕ੍ਰਿਮੀਨੈਂਟ

$$b^2 - 4ac = (-4)^2 - (4 \times 2 \times 3) = 16 - 24 = -8 < 0 \text{ ਹੈ।}$$

ਇਸ ਲਈ, ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਕੋਈ ਵਾਸਤਵਿਕ ਮੂਲ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 17 : 13 ਮੀਟਰ ਵਿਆਸ ਵਾਲੇ ਇੱਕ ਚੱਕਰਾਕਾਰ ਪਾਰਕ ਦੇ ਘੇਰੇ 'ਤੇ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ 'ਤੇ ਇੱਕ ਖੰਭਾ ਇਸ ਤਰਾਂ ਗੱਡਣਾ ਹੈ ਕਿ ਇਸ ਪਾਰਕ ਦੇ ਇੱਕ ਵਿਆਸ ਦੇ ਦੋਵੇਂ ਸਿਰਿਆ 'ਤੇ ਬਣੇ ਫਾਟਕ A ਅਤੇ B ਤੋਂ ਖੰਭੇ ਦੀਆਂ ਦੂਰੀਆਂ ਦਾ ਅੰਤਰ 7 ਮੀਟਰ ਹੋਵੇ। ਕੀ ਅਜਿਹਾ ਕਰਨਾ ਸੰਭਵ ਹੈ? ਜੇਕਰ ਹੋਵੇ, ਤਾਂ ਦੋਵੇਂ ਫਾਟਕਾਂ ਤੋਂ ਕਿੰਨੀ - ਕਿੰਨੀ ਦੂਰੀ 'ਤੇ ਖੰਭਾ ਗੱਡਣਾ ਹੋਵੇਗਾ?

ਹੱਲ : ਆਓ ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਇੱਕ ਚਿੱਤਰ ਬਣਾਉਂਦੇ ਹਾਂ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 4.4)।



ਚਿੱਤਰ 4.4

ਮੰਨ ਲਉ ਖੰਭੇ ਦੀ ਲੋੜੀਂਦੀ ਸਥਿਤੀ P ਹੈ ਅਤੇ ਖੰਭੇ ਦੀ ਫਾਟਕ B ਤੋਂ ਦੂਰੀ x ਮੀ.ਹੈ ਭਾਵ $BP = x$ m ਹੈ। ਹੁਣ ਖੰਭੇ ਦੀ ਦੋਵੇਂ ਫਾਟਕਾਂ ਤੋਂ ਦੂਰੀਆਂ ਦਾ ਅੰਤਰ $= AP - BP$ (ਜਾਂ $BP - AP$) $= 7$ m ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $AP = (x + 7)$ m ਹੋਵੇਗੀ।

ਹੁਣ $AB = 13$ m ਹੈ। ਕਿਉਂਕਿ AB ਵਿਆਸ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ

$$\angle APB = 90^\circ \quad \text{(ਕਿਉਂ?)}$$

ਇਸ ਲਈ $$AP^2 + PB^2 = AB^2 \quad \text{(ਪਾਈਥਾਗੋਰਸ ਥਿਊਰਮ ਤੋਂ)}$$

ਭਾਵ $$(x + 7)^2 + x^2 = 13^2$$

ਭਾਵ $$x^2 + 14x + 49 + x^2 = 169$$

ਭਾਵ $$2x^2 + 14x - 120 = 0$$

ਇਸ ਲਈ, ਖੰਭੇ ਦੀ ਫਾਟਕ B ਤੋਂ ਦੂਰੀ 'x' ਸਮੀਕਰਣ $x^2 + 7x - 60 = 0$ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦੀ ਹੈ।

ਇਹ ਦੇਖਣ ਲਈ ਕਿ ਅਜਿਹਾ ਸੰਭਵ ਹੈ ਜਾਂ ਨਹੀਂ, ਆਓ ਇਸ ਦੇ ਡਿਸਕ੍ਰਿਮੀਨੈਂਟ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਦਾ ਡਿਸਕ੍ਰਿਮੀਨੈਂਟ ਹੈ :

$$b^2 - 4ac = 7^2 - 4 \times 1 \times (-60) = 289 > 0$$

ਇਸ ਲਈ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਦੋ ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਣ ਦੇ ਦੋ ਵਾਸਤਵਿਕ ਮੂਲ ਹਨ ਅਤੇ ਖੰਭੇ ਨੂੰ ਪਾਰਕ ਦੇ ਘੇਰੇ 'ਤੇ ਗੱਡਿਆ ਜਾ ਸਕਣਾ ਸੰਭਵ ਹੈ।

ਦੋ ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਣ $x^2 + 7x - 60 = 0$ ਨੂੰ ਦੋ ਘਾਤੀ ਸੂਤਰ ਦੁਆਰਾ ਹੱਲ ਕਰਨ 'ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ,

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{289}}{2} = \frac{-7 \pm 17}{2}$$

ਇਸ ਲਈ, $x = 5$ ਜਾਂ -12 ਹੈ।

ਕਿਉਂਕਿ x, ਖੰਭੇ ਅਤੇ ਫਾਟਕ B ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਦੀ ਦੂਰੀ ਹੈ, ਇਹ ਧਨਾਤਮਕ ਹੋਣੀ ਚਾਹੀਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $x = -12$ ਨੂੰ ਛੱਡ ਦਿੰਦੇ ਹਾਂ। ਇਹ ਲਈ $x = 5$ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ, ਖੰਭੇ ਨੂੰ ਪਾਰਕ ਦੇ ਘੇਰੇ ਤੇ ਫਾਟਕ B ਤੋਂ 5 m ਅਤੇ ਫਾਟਕ A ਤੋਂ $\sqrt{13^2 - 5^2} = 12$ m ਦੀ ਦੂਰੀ 'ਤੇ ਗੱਡਣਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 18 : ਸਮੀਕਰਣ $3x^2 - 2x + \frac{1}{3} = 0$ ਦਾ ਡਿਸਕ੍ਰਿਮੀਨੇਂਟ ਪਤਾ ਕਰੋ ਅਤੇ ਫਿਰ ਮੂਲਾਂ ਦੀ ਪ੍ਰਕ੍ਰਿਤੀ ਬਾਰੇ ਦੱਸੋ। ਜੇਕਰ ਮੂਲ ਵਾਸਤਵਿਕ ਹਨ ਤਾਂ ਉਨ੍ਹਾਂ ਦਾ ਪਤਾ ਲਗਾਉ।

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ $a = 3$, $b = -2$, $c = \frac{1}{3}$ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ, ਡਿਸਕ੍ਰਿਮੀਨੇਂਟ $b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 3 \times \frac{1}{3} = 4 - 4 = 0$ ਹੈ।

ਭਾਵ ਦੋ ਘਾਤੀ ਸਮੀਰਕਰਣ ਦੇ ਦੋ ਬਰਾਬਰ ਵਾਸਤਵਿਕ ਮੂਲ ਹਨ।

ਇਹ ਮੂਲ $\frac{-b}{2a}, \frac{-b}{2a}$, ਭਾਵ $\frac{2}{6}, \frac{2}{6}$, ਭਾਵ $\frac{1}{3}, \frac{1}{3}$ ਹਨ।

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 4.4

1. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਦੋ ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਨਾਂ ਦੇ ਮੂਲਾਂ ਦੀ ਪ੍ਰਕ੍ਰਿਤੀ ਦਾ ਪਤਾ ਲਗਾਉ। ਜੇਕਰ ਮੂਲ ਸੰਭਵ ਹੋਣ ਤਾਂ ਉਨ੍ਹਾਂ ਦਾ ਪਤਾ ਲਗਾਉ:

   (i) $2x^2 - 3x + 5 = 0$ (ii) $3x^2 - 4\sqrt{3}\,x + 4 = 0$

   (iii) $2x^2 - 6x + 3 = 0$

2. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਹਰੇਕ ਦੋ ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਣ ਵਿੱਚ k ਦਾ ਅਜਿਹਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ ਉਸ ਦੇ ਦੋ ਬਰਾਬਰ ਮੂਲ ਹੋਣ।

   (i) $2x^2 + kx + 3 = 0$ (ii) $kx(x - 2) + 6 = 0$

3. ਕੀ ਅਜਿਹਾ ਅੰਬਾਂ ਦਾ ਆਇਤਾਕਾਰ ਬਾਗ ਲਗਾਉਣਾ ਸੰਭਵ ਹੈ ਜਿਸ ਦੀ ਲਬਾਂਈ, ਚੋੜਾਈ ਨਾਲੋਂ ਦੁੱਗਣੀ ਹੋਵੇ ਅਤੇ ਇਸ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ 800 m^2 ਹੋਵੇ। ਜੇਕਰ ਸੰਭਵ ਹੈ ਤਾਂ ਇਸਦੀ ਲੰਬਾਈ ਅਤੇ ਚੌੜਾਈ ਪਤਾ ਕਰੋ।

4. ਕੀ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀ ਸਥਿਤੀ ਸੰਭਵ ਹੈ? ਜੇਕਰ ਹਾਂ ਤਾਂ ਉਨ੍ਹਾਂ ਦੀ ਵਰਤਮਾਨ ਉਮਰਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ। ਦੋ ਮਿੱਤਰਾਂ ਦੀਆਂ ਉਮਰਾਂ ਦਾ ਜੋੜ 20 ਸਾਲ ਹੈ। ਚਾਰ ਸਾਲ ਪਹਿਲਾਂ ਉਨ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਉਮਰਾਂ (ਸਾਲਾਂ ਵਿੱਚ) ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ 48 m ਸੀ।

5. ਕੀ ਪਰਿਮਾਪ 80 m ਅਤੇ ਖੇਤਰਫਲ 400 m^2 ਦੇ ਇੱਕ ਪਾਰਕ ਨੂੰ ਬਣਾਉਣਾ ਸੰਭਵ ਹੈ? ਜੇਕਰ ਹੈ ਤਾਂ ਉਸਦੀ ਲੰਬਾਈ ਅਤੇ ਚੌੜਾਈ ਪਤਾ ਕਰੋ।

4.6 ਸਾਰ-ਅੰਸ਼

ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ, ਤੁਸੀਂ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੇ ਨੁਕਤਿਆਂ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕੀਤਾ ਹੈ :

1. ਚਲ x ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਦੋ ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਣ $ax^2+bx+c=0$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਜਿੱਥੇ a, b, c ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ ਅਤੇ $a \neq 0$ ਹੈ।
2. ਇੱਕ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆ α ਦੋ ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਣ $ax^2+bx+c=0$ ਦਾ ਇੱਕ ਮੂਲ ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ, ਜੇਕਰ $a\alpha^2+b\alpha+c=0$ ਹੋਵੇ। ਦੋ ਘਾਤੀ ਬਹੁਪਦ ax^2+bx+c ਦੀਆਂ ਸਿਫ਼ਰਾਂ ਅਤੇ ਦੋ ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਣ $ax^2+bx+c=0$ ਦੇ ਮੂਲ ਇੱਕ ਹੀ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।
3. ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ $ax^2+bx+c, a \neq 0$ ਨੂੰ ਦੋ ਰੇਖੀ ਗੁਣਨਖੰਡਾਂ ਵਿੱਚ ਬਦਲ ਸਕੀਏ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਦੋ ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਣ $ax^2+bx+c=0$ ਦੇ ਮੂਲ, ਹਰੇਕ ਗੁਣਨਖੰਡ ਨੂੰ ਸਿਫ਼ਰ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਕਰਕੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।
4. ਪੂਰਨ ਵਰਗ ਬਣਾਉਣ ਦੀ ਵਿਧੀ ਨਾਲ ਵੀ ਦੋ ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਣ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।
5. ਦੋ ਘਾਤੀ ਸੂਤਰ : ਦੋ ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਣ $ax^2+bx+c=0$ ਦੇ ਮੂਲ $\dfrac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ ਦੁਆਰਾ ਤੈਅ ਹੁੰਦੇ ਹਨ ਜੇਕਰ $b^2-4ac \geq 0$ ਹੋਵੇ।
6. ਇੱਕ ਦੋ ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਣ $ax^2+bx+c=0, a \neq 0$ ਵਿੱਚ
   (i) ਦੋ ਭਿੰਨ-ਭਿੰਨ ਵਾਸਤਵਿਕ ਮੂਲ ਹੁੰਦੇ ਹਨ, $b^2-4ac>0$ ਹੋਵੇ।
   (ii) ਦੋ ਬਰਾਬਰ ਮੂਲ ਭਾਵ ਸੰਪਾਤੀ ਵਾਸਤਵਿਕ ਮੂਲ ਹੁੰਦੇ ਹਨ, ਜੇਕਰ $b^2-4ac=0$ ਹੋਵੇ ਅਤੇ
   (iii) ਕੋਈ ਵਾਸਤਵਿਕ ਮੂਲ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦੇ ਜੇਕਰ $b^2-4ac<0$ ਹੋਵੇ।

ਪਾਠਕਾਂ ਲਈ ਵਿਸ਼ੇਸ਼

ਸ਼ਬਦ ਸੱਮਸਿਆਵਾਂ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ, ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੱਲਾਂ ਦੀ ਜਾਂਚ/ਪੜਤਾਲ ਸਮੱਸਿਆ ਦੌਰਾਨ ਬਣਾਈ ਗਈ ਸਮੀਕਰਣ ਤੋਂ ਨਹੀਂ ਬਲਕਿ ਮੂਲ ਸਮੱਸਿਆ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧਾਂ ਦੁਆਰਾ ਕੀਤੀ ਜਾਣੀ ਚਾਹੀਦੀ ਹੈ (ਅਭਿਆਸ 3 ਦੇ ਉਦਾਹਰਣ 11, 13, 19 ਅਤੇ ਅਧਿਆਇ 4 ਦੇ ਉਦਾਹਰਣ 10, 11, 12 ਨੂੰ ਦੇਖੋ)।

ਅੰਕ ਗਣਿਤਕ ਲੜੀਆਂ 5

ARITHMETIC PROGRESSION

5.1 ਭੂਮਿਕਾ

ਤੁਸੀਂ ਇਹ ਜ਼ਰੂਰ ਵੇਖਿਆ ਹੋਵੇਗਾ ਕਿ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤੀ ਵਿੱਚ ਅਨੇਕਾਂ ਵਸਤੂਆਂ ਇੱਕ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਨਮੂਨੇ (pattern) ਅਨੁਸਾਰ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ, ਜਿਵੇਂ ਸੂਰਜਮੁਖੀ ਦੇ ਫੁੱਲ ਦੀਆਂ ਪੰਖੜੀਆਂ, ਸ਼ਹਿਦ ਦੀਆਂ ਮੱਖੀਆਂ ਦੇ ਛੱਤੇ ਵਿੱਚ ਛੇਕ, ਇੱਕ ਫਲੀ ਵਿੱਚ ਦਾਣੇ, ਇੱਕ ਅਨਾਨਾਸ਼ ਅਤੇ ਇੱਕ ਪਾਈਨ ਕੋਨ (Pine cone) ਉੱਤੇ ਕੁੰਡਲਦਾਰ (spirals) ਆਦਿ।

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਆਪਣੇ ਰੋਜ਼ਾਨਾ ਜੀਵਨ ਵਿੱਚ ਪੇਸ਼ ਆਉਣ ਵਾਲੇ ਨਮੂਨਿਆਂ ਵੱਲ ਧਿਆਨ ਦਿੰਦੇ ਹਾਂ। ਕੁਝ ਅਜਿਹੇ ਉਦਾਹਰਣ ਹਨ :

(i) ਰੀਨਾ ਨੇ ਇੱਕ ਨੌਕਰੀ ਲਈ ਬੇਨਤੀ ਪੱਤਰ ਦਿੱਤਾ ਅਤੇ ਉਸਦੀ ਨਿਯੁਕਤੀ ਹੋ ਗਈ। ਉਸਨੂੰ ਇਹ ਨੌਕਰੀ ₹ 8000 ਮਹੀਨਾ ਤਨਖਾਹ ਅਤੇ ₹ 500 ਸਾਲਾਨਾ ਵਾਧੇ ਦੀ ਸ਼ਰਤ 'ਤੇ ਦਿੱਤੀ ਗਈ। ਉਸਦੀ ਤਨਖਾਹ (ਰੁਪਇਆਂ ਵਿੱਚ) ਪਹਿਲੇ ਸਾਲ, ਦੂਸਰੇ ਸਾਲ, ਤੀਸਰੇ ਸਾਲ ਆਦਿ ਲਈ ਕ੍ਰਮਵਾਰ 8000, 8500, 9000, . . . ਹੋਵੇਗੀ।

(ii) ਇੱਕ ਪੌੜੀ ਦੇ ਡੰਡਿਆਂ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਹੇਠਾਂ ਤੋਂ ਉੱਪਰ ਵੱਲ ਨੂੰ ਇੱਕ ਸਮਾਨ ਰੂਪ ਨਾਲ 2 cm ਘੱਟਦੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 5.1)। ਸਭ ਤੋਂ ਹੇਠਲੇ ਡੰਡੇ ਦੀ ਲੰਬਾਈ 45 cm ਹੈ। ਹੇਠੋਂ ਪਹਿਲੇ, ਦੂਜੇ, ਤੀਜੇ . . . . ਡੰਡਿਆਂ ਦੀਆਂ ਲੰਬਾਈਆਂ (cm ਵਿੱਚ) ਕ੍ਰਮਵਾਰ 45, 43, 41, 39, 37, 35, 33 ਅਤੇ 31 ਹਨ।

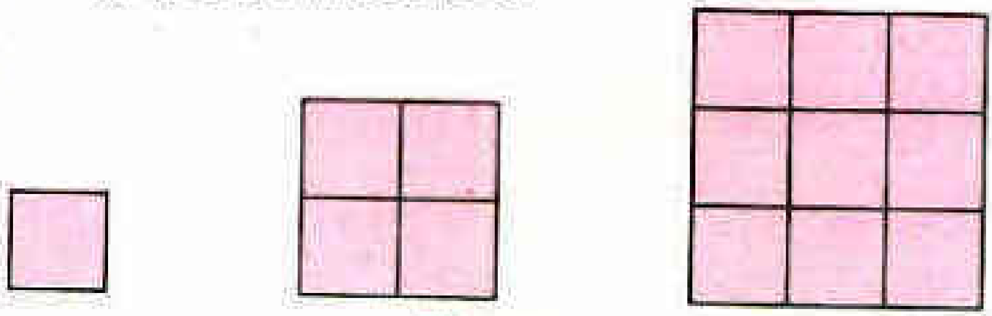
ਚਿੱਤਰ 5.1

(iii) ਕਿਸੇ ਬੱਚਤ ਯੋਜਨਾ ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਧਨ 3 ਸਾਲਾਂ ਬਾਅਦ ਖੁਦ ਦਾ $\frac{5}{4}$ ਗੁਣਾ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

₹ 8000 ਦੀ ਮੂਲ ਰਾਸ਼ੀ 3, 6, 9 ਅਤੇ 12 ਸਾਲ ਦੇ ਬਾਅਦ ਸਮਾਂ ਪੂਰਾ ਹੋਣ 'ਤੇ ਰਾਸ਼ੀ (ਰੁਪਇਆਂ ਵਿੱਚ) ਕ੍ਰਮਵਾਰ:

10000, 12500, 15625 ਅਤੇ 19531.25 ਹੋ ਜਾਵੇਗੀ।

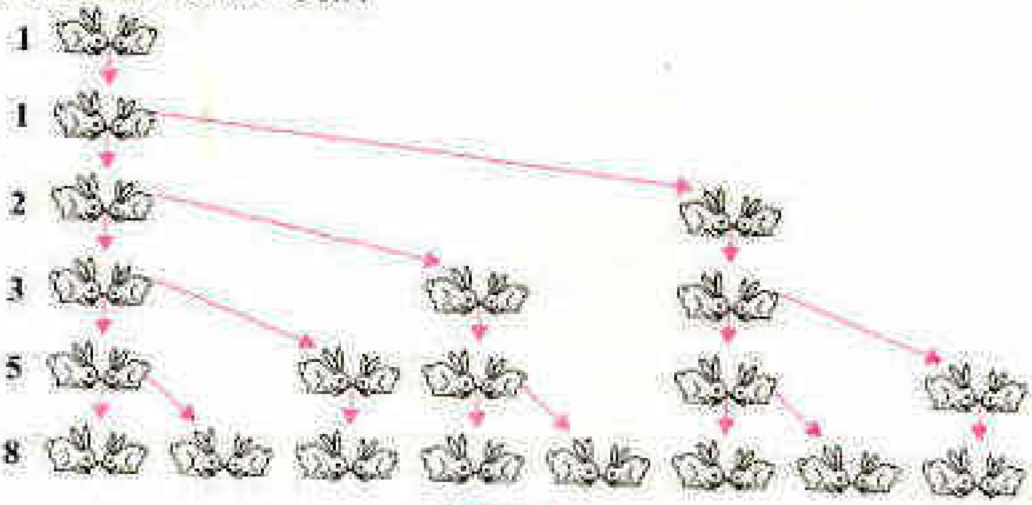
(iv) ਭੁਜਾਵਾਂ 1, 2, 3, ... ਇਕਾਈਆਂ (units) ਵਾਲੇ ਵਰਗਾਂ ਵਿੱਚ ਇਕਾਈ ਵਰਗਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 5.2), ਕ੍ਰਮਵਾਰ $1^2, 2^2, 3^2, \ldots$ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 5.2

(v) ਸ਼ਕੀਲਾ ਆਪਣੀ ਲੜਕੀ ਦੀ ਗੋਲਕ ਵਿੱਚ ₹ 100 ਉਸ ਸਮੇਂ ਪਾਉਂਦੀ ਹੈ ਜਦੋਂ ਉਹ ਇੱਕ ਸਾਲ ਦੀ ਹੋ ਜਾਂਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਹਰ ਸਾਲ ਉਸ ਵਿੱਚ ₹ 50 ਦਾ ਵਾਧਾ ਕਰਦੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਉਸ ਦੇ ਪਹਿਲੇ, ਦੂਜੇ, ਤੀਸਰੇ, ਚੌਥੇ ਜਨਮ ਦਿਨ ਤੇ ਗੋਲਕ ਵਿੱਚ ਪਾਈ ਗਈ ਰਕਮ (ਰੁਪਇਆਂ ਵਿੱਚ) ਕ੍ਰਮਵਾਰ 100, 150, 200, 250, ... ਹੋਵੇਗੀ।

(vi) ਖਰਗੋਸ਼ਾਂ ਦਾ ਇੱਕ ਜੋੜਾ ਆਪਣੇ ਪਹਿਲੇ ਮਹੀਨੇ ਪ੍ਰਜਨਨ ਕਰਨ ਦੇ ਯੋਗ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਦੂਸਰੇ ਅਤੇ ਇਸ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਹਰੇਕ ਆਉਣ ਵਾਲੇ ਮਹੀਨੇ ਵਿੱਚ ਉਹ ਇੱਕ ਨਵਾਂ ਜੋੜਾ ਪੈਦਾ ਕਰਦੇ ਹਨ। ਹਰੇਕ ਨਵਾਂ ਜੋੜਾ ਆਪਣੇ ਦੂਜੇ ਅਤੇ ਹਰੇਕ ਆਉਣ ਵਾਲੇ ਮਹੀਨੇ ਦੌਰਾਨ ਇੱਕ ਨਵਾਂ ਜੋੜਾ ਪੈਦਾ ਕਰਦੇ ਹਨ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 5.3)। ਇਹ ਮੰਨਦੇ ਹੋਏ ਕਿ ਕਿਸੇ ਵੀ ਖਰਗੋਸ਼ ਦੀ ਮੌਤ ਨਹੀਂ ਹੋਈ, ਪਹਿਲੇ, ਦੂਸਰੇ, ਤੀਸਰੇ .... ਛੇਵੇਂ ਮਹੀਨੇ ਦੇ ਸ਼ੁਰੂ ਵਿੱਚ ਖਰਗੋਸ਼ਾਂ ਦੇ ਜੋੜਿਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਕ੍ਰਮਵਾਰ 1, 1, 2, 3, 5 ਅਤੇ 8 ਹੋਵੇਗੀ।



ਚਿੱਤਰ 5.3

ਉਪਰੋਕਤ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਕੁਝ ਨਮੂਨੇ ਵੇਖਦੇ ਹਾਂ। ਕੁਝ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਵੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਆਉਣ ਵਾਲੇ ਪਦ ਆਪਣੇ ਪਹਿਲੇ ਪਦ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਸਥਿਰ ਸੰਖਿਆ ਜੋੜਨ ਨਾਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ; ਕੁਝ ਵਿੱਚ ਇਹ ਪਦ ਆਪਣੇ ਤੋਂ ਪਹਿਲੇ ਪਦ ਨੂੰ ਇੱਕ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਸੰਖਿਆ ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰਕੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਕੁਝ ਹੋਰਾਂ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਵੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਇਹ ਪਦ ਲਗਾਤਾਰ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਵਰਗ ਹਨ, ਆਦਿ।

ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਨਮੂਨੇ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰਾਂਗੇ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਆਉਣ ਵਾਲਾ ਪਦ ਆਪਣੇ ਤੋਂ ਪਹਿਲੇ ਪਦ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਸੰਖਿਆ ਜੋੜਨ ਨਾਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਇਹ ਵੀ ਦੇਖਾਂਗੇ ਕਿ ਇਨ੍ਹਾਂ ਦੇ nਵੇਂ ਪਦ ਅਤੇ n ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪਤਾ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਗਿਆਨ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ, ਰੋਜ਼ਾਨਾ ਜੀਵਨ ਦੀਆਂ ਸਮੱਸਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਲਈ ਕਰਾਂਗੇ।

5.2 ਅੰਕ ਗਣਿਤਕ ਲੜੀਆਂ

ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀਆ ਸੂਚੀਆਂ (lists) 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ

(i) 1, 2, 3, 4, . . .

(ii) 100, 70, 40, 10, . . .

(iii) –3, –2, –1, 0, . . .

(iv) 3, 3, 3, 3, . . .

(v) –1.0, –1.5, –2.0, –2.5, . . .

ਸੂਚੀ ਦੀ ਹਰੇਕ ਸੰਖਿਆ ਇੱਕ **ਪਦ (Term)** ਕਹਾਉਂਦੀ ਹੈ।

ਉਪਰੋਕਤ ਸੂਚੀਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਸੂਚੀ ਵਿੱਚ, ਜੇਕਰ ਤੁਹਾਨੂੰ ਇੱਕ ਪਦ ਦਿੱਤਾ ਹੋਵੇ, ਤਾਂ ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਉਸਦਾ ਅਗਲਾ ਪਦ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹੋ? ਜੇਕਰ ਹਾਂ, ਤਾਂ ਤੁਸੀਂ ਅਜਿਹਾ ਕਿਵੇਂ ਕਰੋਗੇ? ਸ਼ਾਇਦ ਕਿਸੇ ਨਮੂਨੇ ਜਾਂ ਨਿਯਮ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ, ਤੁਸੀਂ ਅਜਿਹਾ ਕਰੋਗੇ। ਆਉ ਉਪਰੋਕਤ ਸੂਚੀਆਂ ਨੂੰ ਦੇਖੀਏ ਅਤੇ ਇਨ੍ਹਾਂ ਵਿਚਕਾਰ ਸਬੰਧਿਤ ਨਿਯਮਾਂ ਨੂੰ ਲਿਖੀਏ।

(i) ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ ਪਦ ਆਪਣੇ ਪਿਛਲੇ ਪਦ ਤੋਂ 1 ਵੱਧ ਹੈ।

(ii) ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ ਪਦ ਆਪਣੇ ਪਿਛਲੇ ਪਦ ਤੋਂ 30 ਘੱਟ ਹੈ।

(iii) ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ ਪਦ ਆਪਣੇ ਪਿਛਲੇ ਪਦ ਵਿੱਚ 1 ਜੋੜਨ ਨਾਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

(iv) ਵਿੱਚ ਸਾਰੇ ਪਦ 3 ਹੈ ਭਾਵ ਹਰੇਕ ਪਦ ਆਪਣੇ ਪਿਛਲੇ ਪਦ ਵਿੱਚ ਸਿਫ਼ਰ ਜੋੜਕੇ (ਜਾਂ ਸਿਫ਼ਰ ਘਟਾ ਕੇ) ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

(v) ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ ਪਦ ਆਪਣੇ ਪਿਛਲੇ ਪਦ ਵਿੱਚ – 0.5 ਜੋੜਕੇ (ਜਾਂ ਉਸ ਵਿਚੋਂ 0.5 ਘਟਾ ਕੇ) ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਉਪਰੋਕਤ ਸੂਚੀਆਂ ਵਿਚ ਹਰੇਕ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਵੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਆਉਣ ਵਾਲੇ ਪਦਾਂ ਨੂੰ ਆਪਣੇ ਪਿਛਲੇ ਪਦਾਂ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਸੰਖਿਆ ਜੋੜ ਕੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਅਜਿਹੀ ਲੜੀ ਨੂੰ ਇਹ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਕਿ ਇਹ ਅੰਕ **ਗਣਿਤਿਕ ਲੜੀ (Arithmetic Progression ਜਾਂ A.P.)** ਬਣਾ ਰਹੇ ਹਨ।

ਇਸ ਲਈ **ਇੱਕ ਅੰਕ-ਗਣਿਤਿਕ ਲੜੀ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਇੱਕ ਅਜਿਹੀ ਸੂਚੀ ਹੈ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ ਪਦ (ਪਹਿਲੇ ਪਦ ਤੋਂ ਬਿਨਾਂ) ਆਪਣੇ ਤੋਂ ਪਿਛਲੇ ਪਦ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਸੰਖਿਆ ਜੋੜ ਕੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।**

ਇਹ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਸੰਖਿਆ A.P. ਦਾ **ਸਾਂਝਾ ਅੰਤਰ (common difference)** ਕਹਾਉਂਦੀ ਹੈ। ਯਾਦ ਰੱਖੋ ਕਿ ਇਹ ਸਾਂਝਾ ਅੰਤਰ **ਧਨਾਤਮਕ, ਰਿਣਾਤਮਕ ਜਾਂ ਸਿਫਰ** ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਆਉ ਇਸ A.P ਦੇ ਪਹਿਲੇ ਪਦ ਨੂੰ a_1, ਦੂਸਰੇ ਪਦ ਨੂੰ $a_2, \ldots, n$ ਵੇਂ ਪਦ ਨੂੰ a_n ਅਤੇ ਸਾਂਝਾ ਅੰਤਰ ਨੂੰ d ਨਾਲ ਦਰਸਾਈਏ। ਤਦ A.P., $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ ਹੋ ਜਾਂਦੀ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ, $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \ldots = a_n - a_{n-1} = d$ ਹੈ।

A.P ਦੇ ਕੁਝ ਹੋਰ ਉਦਾਹਰਣ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਹਨ:

(a) ਕਿਸੇ ਸਕੂਲ ਦੀ ਸਵੇਰ ਦੀ ਸਭਾ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਕਤਾਰ ਵਿੱਚ ਖੜੇ ਕੁਝ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆ ਦੀਆਂ ਉੱਚਾਈਆਂ (cm. ਵਿੱਚ) 147 , 148, 149, . . ., 157 ਹਨ।

(b) ਕਿਸੇ ਸ਼ਹਿਰ ਵਿੱਚ ਜਨਵਰੀ ਮਹੀਨੇ ਵਿੱਚ ਕਿਸੇ ਹਫ਼ਤੇ ਦੌਰਾਨ ਲਏ ਗਏ ਘੱਟੋ ਘੱਟ ਤਾਪਮਾਨ (ਡਿਗਰੀ ਸੈਲਸੀਅਸ ਵਿੱਚ) ਵਧਦੇ ਕ੍ਰਮ ਵਿੱਚ ਲਿਖਣ 'ਤੇ

$$-3.1, -3.0, -2.9, -2.8, -2.7, -2.6, -2.5$$ ਹਨ।

(c) ₹ 1000 ਇੱਕ ਕਰਜ਼ੇ ਵਿਚੋਂ ਹਰੇਕ ਮਹੀਨੇ 5% ਕਰਜ਼ਾ ਵਾਪਸ ਕਰਨ 'ਤੇ ਬਾਕੀ ਰਾਸ਼ੀਆਂ (ਰੁਪਇਆਂ ਵਿੱਚ) 950 , 900 , 850 , 800 , . . ., 50 ਹਨ।

(d) ਕਿਸੇ ਸਕੂਲ ਦੁਆਰਾ ਜਮਾਤਾਂ I ਤੋਂ XII ਤੱਕ ਦੇ ਵੱਧ ਤੋਂ ਵੱਧ ਅੰਕ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਵਾਲੇ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਨੂੰ ਦਿੱਤੇ ਜਾਣ ਵਾਲੇ ਨਗਦ ਇਨਾਮ (ਰੁਪਇਆਂ ਵਿੱਚ) ਕ੍ਰਮਵਾਰ 200, 250, 300, 350, . . ., 750 ਹਨ।

(e) ਜਦੋਂ ₹ 50 ਪ੍ਰਤਿ ਮਹੀਨਾਂ ਦੀ ਬੱਚਤ ਕੀਤੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ ਤਾਂ 10 ਮਹੀਨਿਆਂ ਲਈ ਹਰੇਕ ਮਹੀਨੇ ਦੇ ਅੰਤ ਵਿੱਚ ਕੁੱਲ ਬੱਚਤ (ਰੁਪਇਆਂ ਵਿੱਚ) 50, 100, 150, 200, 250, 300, 350, 400, 450 ਅਤੇ 500 ਹੈ।

ਇਹ ਤੁਹਾਡੇ ਅਭਿਆਸ ਲਈ ਛੱਡਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਤੁਸੀਂ ਸਪਸ਼ਟ ਕਰੋ ਕਿ ਉਪਰੋਕਤ ਵਿਚੋਂ ਹਰੇਕ ਲੜੀ ਇੱਕ A.P. ਕਿਉਂ ਹੈ।

ਤੁਸੀਂ ਇਹ ਦੇਖ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ

$$a, a + d, a + 2d, a + 3d, \ldots$$

ਇੱਕ ਅੰਕ ਗਣਿਤਕ ਲੜੀ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੀ ਹੈ, ਜਿਥੇ ਪਹਿਲਾ ਪਦ a ਹੈ ਅਤੇ ਸਾਂਝਾ ਅੰਤਰ d ਹੈ। **ਇਸ ਨੂੰ A.P. ਦਾ ਆਮ ਰੂਪ (general form)** ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ਉਪਰੋਕਤ ਉਦਾਹਰਣਾਂ (a) ਤੋਂ (e) ਵਿੱਚ ਪਦਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਸੀਮਿਤ (finite) ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ A.P. ਨੂੰ ਇੱਕ **ਸੀਮਿਤ A.P.** ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਤੁਸੀਂ ਇਹ ਵੀ ਵੇਖ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ ਇਨ੍ਹਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ A.P. ਦਾ ਇੱਕ **ਅੰਤਿਮ ਪਦ (last term)** ਹੈ। ਇਸੇ ਭਾਗ ਦੀਆਂ ਉਦਾਹਰਣਾਂ (i) ਤੋਂ (v) ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੀਆਂ A.P. ਸੀਮਿਤ A.P. ਨਹੀਂ ਹਨ। ਇਹ **ਅਸੀਮਿਤ A.P. (Infinite Arithmetic Progressions)** ਕਹਾਉਂਦੀਆ ਹਨ। ਅਜਿਹੇ A.P. ਵਿੱਚ ਅੰਤਿਮ ਪਦ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦੇ।

ਹੁਣ ਇੱਕ A.P ਦੇ ਬਾਰੇ ਵਿੱਚ ਜਾਣਨ ਲਈ ਤੁਹਾਨੂੰ ਘੱਟੋ ਘੱਟ ਕਿਹੜੀ ਸੂਚਨਾ ਦੀ ਜਰੂਰਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ? ਕੀ ਇਸਦੇ ਪਹਿਲੇ ਪਦ ਦੀ ਜਾਣਕਾਰੀ ਕਾਫ਼ੀ ਹੈ? ਜਾਂ ਕੀ ਇਸ ਦੇ ਸਾਂਝੇ ਅੰਤਰ ਦੀ ਜਾਣਕਾਰੀ ਕਾਫ਼ੀ ਹੈ? ਤੁਸੀਂ ਵੇਖੋਗੇ ਕਿ ਤੁਹਾਨੂੰ ਇਨ੍ਹਾਂ ਦੋਵਾਂ ਭਾਵ ਪਹਿਲਾ ਪਦ a ਅਤੇ d ਸਾਂਝਾ ਅੰਤਰ ਦੀ ਜਾਣਕਾਰੀ ਹੋਣੀ ਜਰੂਰੀ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ 'ਤੇ, ਜੇਕਰ ਪਹਿਲਾ ਪਦ $a = 6$ ਹੈ ਅਤੇ ਸਾਂਝਾ ਅੰਤਰ $d = 3$ ਹੈ ਤਾਂ

$$6, 9, 12, 15, \ldots \text{ A.P. ਹੈ।}$$

ਅਤੇ ਜੇਕਰ $a = 6$ ਅਤ $d = -3$ ਹੈ ਤਾਂ

$$6, 3, 0, -3, \ldots \text{ A.P. ਹੈ।}$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਜਦੋਂ

$a = -7$, $d = -2$, ਤਾਂ $-7, -9, -11, -13, \ldots$ A.P. ਹੈ।

$a = 1.0$, $d = 0.1$, ਤਾਂ $1.0, 1.1, 1.2, 1.3, \ldots$ A.P. ਹੈ।

$a = 0$, $d = 1\frac{1}{2}$, ਤਾਂ $0, 1\frac{1}{2}, 3, 4\frac{1}{2}, 6, \ldots$ A.P. ਹੈ।

$a = 2$, $d = 0$, ਤਾਂ $2, 2, 2, 2, \ldots$ A.P. ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ, ਜੇਕਰ ਤੁਹਾਨੂੰ a ਅਤੇ d ਦਾ ਪਤਾ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਤੁਸੀਂ A.P. ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹੋ। ਇਸ ਦੀ ਉਲਟ ਪ੍ਰਕ੍ਰਿਆ ਦੇ ਬਾਰੇ ਵਿੱਚ ਤੁਸੀਂ ਕੀ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹੋ? ਭਾਵ ਜੇਕਰ ਤੁਹਾਨੂੰ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਇੱਕ ਲੜੀ ਦਿੱਤੀ ਹੋਵੇ, ਤਾਂ ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ ਇਹ ਇੱਕ A.P. ਹੈ ਅਤੇ ਫਿਰ ਇਸ ਤੋਂ a ਅਤੇ d ਦਾ ਪਤਾ ਲਗਾ ਸਕਦੇ ਹੋ? ਕਿਉਂਕਿ a ਪਹਿਲਾ ਪਦ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਇਸ ਨੂੰ ਆਸਾਨੀ ਨਾਲ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ A.P. ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ ਆਉਣ ਵਾਲਾ ਪਦ ਆਪਣੇ ਤੋਂ ਪਹਿਲੇ ਪਦ ਵਿੱਚ d ਜੋੜਕੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਇੱਕ A.P. ਦੇ ਲਈ, ਉਸਦੇ ਹਰੇਕ ਪਦ ਨੂੰ ਉਸਦੇ ਅਗਲੇ ਪਦ ਵਿੱਚੋਂ ਘਟਾਉਣ ਤੇ ਪ੍ਰਾਪਤ d ਸਾਰੇ ਪਦਾਂ ਲਈ ਇੱਕ ਹੀ ਹੋਵੇਗਾ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ 'ਤੇ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਸੂਚੀ

$$6, 9, 12, 15, \ldots$$

ਦੇ ਲਈ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ

$$a_2 - a_1 = 9 - 6 = 3$$
$$a_3 - a_2 = 12 - 9 = 3$$
$$a_4 - a_3 = 15 - 12 = 3$$

ਇੱਥੇ ਹਰੇਕ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ, ਕਿਸੇ ਵੀ ਦੋ ਲਗਾਤਾਰ ਪਦਾਂ ਵਿੱਚ ਅੰਤਰ 3 ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਉਪਰੋਕਤ ਲੜੀ ਇੱਕ A.P. ਹੈ, ਜਿਸ ਦਾ ਪਹਿਲਾ ਪਦ $a = 6$ ਅਤੇ ਸਾਂਝਾ ਅੰਤਰ $d = 3$ ਹੈ।

ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਲੜੀ: $6, 3, 0, -3, \ldots$ ਦੇ ਲਈ

$$a_2 - a_1 = 3 - 6 = -3$$
$$a_3 - a_2 = 0 - 3 = -3$$
$$a_4 - a_3 = -3 - 0 = -3$$

ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਵੀ ਇੱਕ A.P. ਹੈ ਜਿਸ ਦਾ ਪਹਿਲਾ ਪਦ 6 ਹੈ ਅਤੇ ਸਾਂਝਾ ਅੰਤਰ -3 ਹੈ।

ਆਮ ਰੂਪ ਵਿੱਚ A.P. $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ਦੇ ਲਈ :

$$d = a_{k+1} - a_k$$

ਜਿੱਥੇ a_{k+1} ਅਤੇ a_k ਕ੍ਰਮਵਾਰ $(k+1)$ਵਾਂ ਅਤੇ kਵਾਂ ਪਦ ਹਨ।

ਇੱਕ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ A.P. ਦਾ d ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਸਾਨੂੰ $a_2 - a_1, a_3 - a_2, a_4 - a_3, \ldots$ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰਨ ਦੀ ਲੋੜ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਇਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਸੇ ਇੱਕ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਹੀ ਕਾਫ਼ੀ ਹੈ।

ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਸੂਚੀ 1, 1, 2, 3, 5, ... 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ। ਕੇਵਲ ਦੇਖਣ ਤੋਂ ਹੀ ਇਹ ਪਤਾ ਚਲ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਕਿ ਕਿਸੇ ਦੋ ਲਗਾਤਾਰ ਪਦਾਂ ਦਾ ਅੰਤਰ ਹਮੇਸ਼ਾ ਇਕੋ ਜਿਹਾ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਇੱਕ A.P. ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ A.P. : $6, 3, 0, -3, \ldots$ ਦਾ d ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਅਸੀਂ 3 ਵਿੱਚੋਂ 6 ਨੂੰ ਘਟਾਇਆ ਸੀ, 6 ਵਿੱਚੋਂ 3 ਨੂੰ ਨਹੀਂ ਘਟਾਇਆ ਸੀ। ਭਾਵ d ਦਾ ਪਤਾ ਲਗਾਉਣ ਲਈ ਸਾਨੂੰ $(k + 1)$ ਵੇਂ ਪਦ ਵਿੱਚੋਂ kਵੇਂ ਪਦ ਨੂੰ ਹੀ ਘਟਾਉਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ, ਚਾਹੇ $(k + 1)$ ਵਾਂ ਪਦ ਛੋਟਾ ਹੀ ਕਿਉਂ ਨਾ ਹੋਵੇ

ਆਓ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਨਾਂ ਦੀ ਸਹਾਇਤਾ ਨਾਲ ਇਨ੍ਹਾਂ ਧਾਰਨਾਵਾਂ (concepts) ਨੂੰ ਹੋਰ ਸਪਸ਼ਟ ਕਰੀਏ।

ਉਦਾਹਰਣ 1 : A.P. : $\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, \ldots$ ਦੇ ਲਈ ਪਹਿਲਾ ਪਦ a ਅਤੇ ਸਾਂਝਾ ਅੰਤਰ d ਲਿਖੋ।

ਹੱਲ : ਇਥੇ $a = \frac{3}{2}, d = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -1$ ਹੈ।

ਯਾਦ ਰੱਖੋ ਕਿ ਜੇਕਰ ਸਾਨੂੰ ਇਹ ਪਤਾ ਹੋਵੇ ਕਿ ਸੰਖਿਆਵਾਂ A.P. ਵਿੱਚ ਹਨ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਕਿਸੇ ਵੀ ਦੋ ਲਗਾਤਾਰ ਪਦਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ d ਦਾ ਪਤਾ ਲਗਾ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

ਉਦਾਹਰਣ 2 : ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀਆਂ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਲੜੀਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਹੜੇ -ਕਿਹੜੇ A.P. ਨਹੀਂ ਹਨ? ਜੇਕਰ ਇਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕੋਈ A.P. ਹੈ, ਤਾਂ ਉਸਦੇ ਅਗਲੇ ਦੋ ਪਦ ਲਿਖੋ।

(i) 4, 10, 16, 22, . . . (ii) 1, – 1, – 3, – 5, . . .

(iii) – 2, 2, – 2, 2, – 2, . . . (iv) 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, . . .

ਹੱਲ : (i)

$$a_2 - a_1 = 10 - 4 = 6$$
$$a_3 - a_2 = 16 - 10 = 6$$
$$a_4 - a_3 = 22 - 16 = 6$$

ਭਾਵ ਹਰੇਕ ਵਾਰ $a_{k+1} - a_k$ ਇੱਕੋ ਜਿਹਾ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ, ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਲੜੀ ਇੱਕ A.P. ਹੈ। ਜਿਸਦਾ ਸਾਂਝਾ ਅੰਤਰ $d = 6$ ਹੈ।

ਇਸ ਦੇ ਅਗਲੇ ਦੋ ਪਦ $22 + 6 = 28$ ਅਤੇ $28 + 6 = 34$ ਹਨ।

(ii) $a_2 - a_1 = -1 - 1 = -2$

$$a_3 - a_2 = -3 - (-1) = -3 + 1 = -2$$
$$a_4 - a_3 = -5 - (-3) = -5 + 3 = -2$$

ਭਾਵ ਹਰੇਕ ਵਾਰ $a_{k+1} - a_k$ ਇੱਕੋ ਜਿਹਾ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ, ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਲੜੀ ਇੱਕ A.P. ਹੈ। ਜਿਸਦਾ ਸਾਂਝਾ ਅੰਤਰ $d = -2$ ਹੈ।

ਇਸ ਦੇ ਅਗਲੇ ਦੋ ਪਦ

$-5 + (-2) = -7$ ਅਤੇ $-7 + (-2) = -9$ ਹਨ।

(iii) $a_2 - a_1 = 2 - (-2) = 2 + 2 = 4$

$$a_3 - a_2 = -2 - 2 = -4$$

ਕਿਉਂਕਿ $a_2 - a_1 \neq a_3 - a_2$ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ, ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਲੜੀ ਇੱਕ A.P. ਨਹੀਂ ਹੈ।

(iv) $a_2 - a_1 = 1 - 1 = 0$, $a_3 - a_2 = 1 - 1 = 0$, $a_4 - a_3 = 2 - 1 = 1$

ਇਥੇ $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 \neq a_4 - a_3$ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ, ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਲੜੀ ਇੱਕ A.P. ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 5.1

1. ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੀਆਂ ਸਥਿਤੀਆਂ ਵਿਚੋਂ ਕਿਹੜੀਆਂ ਸਥਿਤੀਆਂ ਵਿੱਚ ਸਬੰਧਿਤ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਸੂਚੀ A.P. ਹੈ ਅਤੇ ਕਿਉਂ?

(i) ਹਰੇਕ ਕਿਲੋਮੀਟਰ ਦੇ ਬਾਅਦ ਟੈਕਸੀ ਦਾ ਕਿਰਾਇਆ, ਜਦੋਂ ਕਿ ਪਹਿਲੇ ਕਿਲੋਮੀਟਰ ਲਈ ਕਿਰਾਇਆ ₹ 15 ਹੈ ਅਤੇ ਹਰੇਕ ਵਾਧੂ ਕਿਲੋਮੀਟਰ ਦਾ ਕਿਰਾਇਆ ₹ 8 ਹੈ।

(ii) ਕਿਸੇ ਬੇਲਨ (cylinder) ਵਿੱਚ ਹਵਾ ਦੀ ਮਾਤਰਾ, ਜਦੋਂ ਕਿ ਹਵਾ ਕੱਢਣ ਵਾਲਾ ਪੰਪ ਹਰੇਕ ਵਾਰ ਬੇਲਨ ਵਿੱਚ ਬਾਕੀ ਹਵਾ ਦਾ $\frac{1}{4}$ ਹਿੱਸਾ ਬਾਹਰ ਕੱਢ ਦਿੰਦਾ ਹੈ।

(iii) ਹਰੇਕ ਮੀਟਰ ਦੀ ਖੁਦਾਈ ਤੋਂ ਬਾਅਦ, ਇੱਕ ਖੂਹ ਪੁੱਟਣ ਦੀ ਲਾਗਤ, ਜਦੋਂ ਕਿ ਪਹਿਲੇ ਮੀਟਰ ਖੁਦਾਈ ਦੀ ਲਾਗਤ ₹ 150 ਹੈ ਅਤੇ ਬਾਅਦ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਤਿ ਮੀਟਰ ਖੁਦਾਈ ਦੀ ਲਾਗਤ ₹ 50 ਵੱਧ ਜਾਂਦੀ ਹੈ।

(iv) ਖਾਤੇ ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ ਸਾਲ ਦਾ ਮਿਸ਼ਰਧਨ, ਜਦੋਂ ਕਿ ₹ 10000 ਦੀ ਰਕਮ 8 % ਸਾਲਾਨਾ ਦਰ 'ਤੇ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਵਿਆਜ 'ਤੇ ਜਮਾਂ ਕਰਵਾਈ ਜਾਂਦੀ ਹੈ।

2. ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ A.P. ਦੇ ਪਹਿਲੇ ਚਾਰ ਪਦ ਲਿਖੋ, ਜਦੋਂ ਕਿ ਪਹਿਲਾ ਪਦ a ਅਤੇ ਸਾਂਝਾ ਅੰਤਰ d ਹੇਠ ਅਨੁਸਾਰ ਹਨ:

(i) $a = 10, \quad d = 10$ (ii) $a = -2, \quad d = 0$

(iii) $a = 4, \quad d = -3$ (iv) $a = -1, \quad d = \frac{1}{2}$

(v) $a = -1.25, \quad d = -0.25$

3. ਹੇਠਾਂ ਹਰੇਕ A.P. ਦੇ ਲਈ ਪਹਿਲਾ ਪਦ ਅਤੇ ਸਾਂਝਾ ਅੰਤਰ ਪਤਾ ਕਰੋ:

(i) $3, 1, -1, -3, \ldots$ (ii) $-5, -1, 3, 7, \ldots$

(iii) $\frac{1}{3}, \frac{5}{3}, \frac{9}{3}, \frac{13}{3}, \ldots$ (iv) $0.6, 1.7, 2.8, 3.9, \ldots$

4. ਹੇਠ ਲਿਖਿਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਹੜੇ-ਕਿਹੜੇ A.P. ਹਨ? ਜੇਕਰ ਕੋਈ A.P. ਹੈ ਤਾਂ ਉਸ ਦਾ ਸਾਂਝਾ ਅੰਤਰ ਪਤਾ ਕਰੋ:

(i) $2, 4, 8, 16, \ldots$ (ii) $2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, \ldots$

(iii) $-1.2, -3.2, -5.2, -7.2, \ldots$ (iv) $-10, -6, -2, 2, \ldots$

(v) $3, 3+\sqrt{2}, 3+2\sqrt{2}, 3+3\sqrt{2}, \ldots$ (vi) $0.2, 0.22, 0.222, 0.2222, \ldots$

(vii) $0, -4, -8, -12, \ldots$ (viii) $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \ldots$

(ix) $1, 3, 9, 27, \ldots$ (x) $a, 2a, 3a, 4a, \ldots$

(xi) $a, a^2, a^3, a^4, \ldots$ (xii) $\sqrt{2}, \sqrt{8}, \sqrt{18}, \sqrt{32}, \ldots$

(xiii) $\sqrt{3}, \sqrt{6}, \sqrt{9}, \sqrt{12}, \ldots$ (xiv) $1^2, 3^2, 5^2, 7^2, \ldots$

(xv) $1^2, 5^2, 7^2, 73, \ldots$

5.3 A.P. ਦਾ nਵਾਂ ਪਦ

ਆਓ ਭਾਗ 5.1 ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੀ ਉਸ ਸਥਿਤੀ 'ਤੇ ਦੁਬਾਰਾ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਰੀਨਾ ਨੇ ਇੱਕ ਨੌਕਰੀ ਲਈ ਬੇਨਤੀ ਪੱਤਰ ਦਿੱਤਾ ਸੀ ਅਤੇ ਉਸ ਨੂੰ ਚੁਣ ਲਿਆ ਗਿਆ ਸੀ। ਉਸਨੂੰ ਇਹ ਨੌਕਰੀ ₹ 8000 ਪ੍ਰਤਿ ਮਹੀਨਾ ਤਨਖਾਹ ਅਤੇ ₹ 500 ਸਾਲਾਨਾ ਵਾਧੇ ਸ਼ਰਤ ਤੇ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਸੀ। ਪੰਜਵੇਂ ਸਾਲ ਵਿੱਚ ਉਸ ਦੀ ਮਹੀਨਾ ਵਾਰ ਤਨਖਾਹ ਕਿੰਨੀ ਹੋਵੇਗੀ?

ਇਸ ਦਾ ਉੱਤਰ ਦੇਣ ਲਈ, ਆਉ ਦੇਖੀਏ ਕਿ ਦੂਜੇ ਸਾਲ ਉਸ ਦੀ ਮਹੀਨਾਵਾਰ ਤਨਖਾਹ ਕਿੰਨੀ ਹੋਵੇਗੀ।

ਇਹ (₹8000 + ₹500) = ₹8500 ਹੋਵੇਗੀ। ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਤੀਸਰੇ, ਚੌਥੇ ਅਤੇ ਪੰਜਵੇਂ ਸਾਲ ਲਈ ਉਸ ਦੀ ਤਨਖਾਹ ਪਿਛਲੇ ਸਾਲ ਦੀ ਤਨਖਾਹ ਵਿੱਚ ₹500 ਜੋੜ ਕੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ,

ਉਸ ਦੀ ਤੀਸਰੇ ਸਾਲ ਵਿੱਚ ਤਨਖਾਹ = ₹ (8500 + 500)

= ₹ (8000 + 500 + 500)

= ₹ (8000 + 2 × 500)

= ₹[8000 + (3 – 1) × 500] **(ਤੀਸਰੇ ਸਾਲ ਦੇ ਲਈ)**

= ₹ 9000

ਚੌਥੇ ਸਾਲ ਵਿੱਚ ਤਨਖਾਹ = ₹ (9000 + 500)

= ₹ (8000 + 500 + 500 + 500)

= ₹ (8000 + 3 × 500)

= ₹ [8000 + (4 – 1) × 500] **(ਚੌਥੇ ਸਾਲ ਦੇ ਲਈ)**

= ₹ 9500

ਪੰਜਵੇਂ ਸਾਲ ਵਿੱਚ ਤਨਖਾਹ = ₹ (9500 + 500)

= ₹ (8000+500+500+500 + 500)

= ₹ (8000 + 4 × 500)

= ₹ [8000 + (5 – 1) × 500] **(ਪੰਜਵੇਂ ਸਾਲ ਲਈ)**

= ₹10000

ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ਸਾਨੂੰ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀ ਸੂਚੀ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋ ਰਹੀ ਹੈ :

8000, 8500, 9000, 9500, 10000, . . .

ਇਹ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਇੱਕ A.P. ਬਣਾ ਰਹੀਆਂ ਹਨ। (ਕਿਉਂ?)

ਹੁਣ ਉੱਪਰ ਦਿੱਤੇ ਨਮੂਨੇ (Pattern) ਨੂੰ ਵੇਖ ਕੇ ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਉਸ ਦੇ ਛੇਵੇਂ ਸਾਲ ਦੀ ਮਹੀਨਾਵਾਰ ਤਨਖਾਹ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ? ਕੀ ਤੁਸੀਂ 15ਵੇਂ ਸਾਲ ਦੀ ਮਹੀਨਾਵਾਰ ਤਨਖਾਹ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ? ਇਹ ਮੰਨਦੇ ਹੋਏ ਕਿ ਉਹ ਅੱਗੇ ਵੀ ਇਸੇ ਨੌਕਰੀ 'ਤੇ ਕੰਮ ਕਰਦੀ ਰਹੇਗੀ, 25ਵੇਂ ਸਾਲ ਦੇ ਮਹੀਨਾਵਾਰ ਤਨਖਾਹ ਬਾਰੇ ਤੁਸੀਂ ਕੀ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹੋ? ਇਸ ਦਾ ਉੱਤਰ ਦੇਣ ਲਈ ਤੁਸੀਂ ਪਿਛਲੇ ਸਾਲ ਦੀ ਤਨਖਾਹ ਵਿੱਚ ₹ 500 ਜੋੜ ਕੇ ਲੋੜੀਂਦੀ ਤਨਖਾਹ ਦੀ ਗਣਨਾ ਕਰੋਗੇ। ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਇਸ ਪ੍ਰਕ੍ਰਿਆ ਨੂੰ ਸੰਖੇਪ ਰੂਪ ਦੇ ਸਕਦੇ ਹੋ? ਆਉ ਵੇਖੀਏ। ਜਿਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਅਸੀਂ ਇਨ੍ਹਾਂ ਤਨਖਾਹਾਂ ਨੂੰ ਉੱਪਰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤਾ ਹੈ, ਉਸ ਤੋਂ ਤੁਹਾਨੂੰ ਕੁੱਝ ਮਹਿਸੂਸ ਤਾਂ ਹੋ ਗਿਆ ਹੋਵੇਗਾ।

15ਵੇਂ ਸਾਲ ਵਿੱਚ ਤਨਖਾਹ

$$= \text{14ਵੇਂ ਸਾਲ ਵਿੱਚ ਤਨਖਾਹ} + ₹\ 500$$

$$= ₹\left[8000 + \underbrace{500 + 500 + 500 + \ldots + 500}_{\text{13 ਵਾਰੀ}}\right] + ₹\ 500$$

$$= ₹\ [8000 + 14 \times 500]$$

$$= ₹[8000 + (\mathbf{15} - \mathbf{1}) \times 500] = ₹\ 15000$$

ਭਾਵ ਪਹਿਲੀ ਤਨਖਾਹ + (15 – 1) × ਸਾਲਾਨਾ ਤਨਖਾਹ ਵਾਧਾ

ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ 25ਵੇਂ ਸਾਲ ਵਿੱਚ ਉਸਦੀ ਤਨਖਾਹ ਹੋਵੇਗੀ :

$$₹\ [8000 + (\mathbf{25} - \mathbf{1}) \times 500] = ₹\ 20000$$

= ਪਹਿਲੀ ਤਨਖਾਹ + (**25** – **1**) × ਸਾਲਾਨਾ ਵਾਧਾ

ਇਸ ਉਦਾਹਰਣ ਤੋਂ ਤੁਹਾਨੂੰ ਕੁਝ ਅੰਦਾਜ਼ਾ ਤਾਂ ਜ਼ਰੂਰ ਹੋ ਗਿਆ ਹੋਵੇਗਾ ਕਿ A.P. ਦੇ 15ਵੇਂ ਪਦ, 25ਵੇਂ ਪਦ ਅਤੇ ਆਮ ਰੂਪ ਵਿੱਚ nਵੇਂ ਪਦ ਨੂੰ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਮੰਨ ਲਓ $a_1, a_2, a_3, \ldots$ ਇੱਕ A.P. ਹੈ ਜਿਸ ਦਾ ਪਹਿਲਾ ਪਦ a ਹੈ ਅਤੇ ਸਾਂਝਾ ਅੰਤਰ d ਹੈ। ਤਾਂ

ਦੂਸਰਾ ਪਦ $a_2 = a + d = a + (\mathbf{2} - \mathbf{1})\, d$

ਤੀਸਰਾ ਪਦ $a_3 = a_2 + d = (a + d) + d = a + 2d = a + (\mathbf{3} - \mathbf{1})\, d$

ਚੌਥਾ ਪਦ $a_4 = a_3 + d = (a + 2d) + d = a + 3d = a + (\mathbf{4} - \mathbf{1})\, d$

. . . .

. . . .

ਇਸ ਨਮੂਨੇ (pattern) ਨੂੰ ਦੇਖਦੇ ਹੋਏ, ਅਸੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ **nਵਾਂ ਪਦ** $a_n = a + (n-1)d$ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ : **ਪਹਿਲਾ ਪਦ a ਅਤੇ ਸਾਂਝਾ ਅੰਤਰ d ਵਾਲੀ ਇੱਕ A.P. ਦਾ nਵਾਂ ਪਦ $a_n = a + (n-1)d$ ਦੁਆਰਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।**

a_n ਨੂੰ **A.P.** ਦਾ **ਆਮ ਪਦ (General term)** ਵੀ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਜੇਕਰ **ਕਿਸੇ A.P.** ਵਿੱਚ m ਪਦ ਹਨ ਤਾਂ **a_m ਇਸਦੇ ਅੰਤਿਮ ਪਦ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ, ਜਿਸ ਨੂੰ ਕਦੇ - ਕਦੇ l ਦੁਆਰਾ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।**

ਆਓ ਹੁਣ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਣਾਂ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ।

ਉਦਾਹਰਣ 3 : A.P. : 2, 7, 12, . . . ਦਾ 10 ਵਾਂ ਪਦ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ $a = 2$, $d = 7 - 2 = 5$ ਅਤੇ $n = 10$ ਹੈ।

ਕਿਉਂਕਿ $a_n = a + (n-1)d$ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ

$$a_{10} = 2 + (10 - 1) \times 5 = 2 + 45 = 47$$

ਇਸ ਲਈ, ਦਿੱਤੀ A.P. ਦਾ 10ਵਾਂ ਪਦ 47 ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 4 : A.P. : 21, 18, 15, . . . ਦਾ ਕਿੰਨਵਾਂ ਪਦ -81 ਹੈ? ਇਸ ਦੇ ਨਾਲ - ਨਾਲ ਕੀ ਇਸ A.P. ਦਾ ਕੋਈ ਪਦ ਸਿਫ਼ਰ ਹੈ? ਕਾਰਣ ਸਹਿਤ ਉੱਤਰ ਦਿਓ।

ਹੱਲ : ਇਥੇ, $a = 21$, $d = 18 - 21 = -3$ ਅਤੇ $a_n = -81$ ਹੈ। ਅਸੀਂ n ਦਾ ਪਤਾ ਲਗਾਉਣਾ ਹੈ।

ਕਿਉਂਕਿ $\quad a_n = a + (n-1)d$,

ਇਸ ਲਈ $\quad -81 = 21 + (n-1)(-3)$

ਜਾਂ $\quad -81 = 24 - 3n$

ਜਾਂ $\quad -105 = -3n$

ਇਸ ਲਈ $\quad n = 35$

ਇਸ ਲਈ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ A.P. ਦਾ 35ਵਾਂ ਪਦ -81 ਹੈ।

ਅੱਗੇ, ਅਸੀਂ ਇਹ ਜਾਣਨਾ ਚਾਹੁੰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਕੋਈ n ਅਜਿਹਾ ਹੈ ਕਿ $a_n = 0$ ਹੋਵੇ। ਜੇਕਰ ਅਜਿਹਾ n ਹੋਵੇ ਤਾਂ

$$21 + (n-1)(-3) = 0,$$

ਭਾਵ $\quad 3(n-1) = 21$

ਜਾਂ $n = 8$

ਇਸ ਲਈ, 8ਵਾਂ ਪਦ 0 ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 5 : ਉਹ A.P. ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਦਾ ਤੀਸਰਾ ਪਦ 5 ਅਤੇ 7ਵਾਂ ਪਦ 9 ਹੈ।

ਹੱਲ : ਸਾਨੂੰ ਦਿੱਤਾ ਹੈ :

$$a_3 = a + (3-1)d = a + 2d = 5 \quad (1)$$

ਅਤੇ

$$a_7 = a + (7-1)d = a + 6d = 9 \quad (2)$$

ਸਮੀਕਰਣਾਂ (1) ਅਤੇ (2) ਦੇ ਜੋੜੇ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ 'ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :

$$a = 3, \quad d = 1$$

ਇਸ ਲਈ, ਲੋੜੀਂਦੀ A.P. : 3, 4, 5, 6, 7, . . . ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 6 : ਕੀ ਸੰਖਿਆ ਦੀ ਸੂਚੀ 5, 11, 17, 23, . . . ਦਾ ਕੋਈ ਪਦ 301 ਹੈ? ਕਿਉਂ?

ਹੱਲ : ਸਾਨੂੰ ਦਿੱਤਾ ਹੈ :

$$a_2 - a_1 = 11 - 5 = 6, \quad a_3 - a_2 = 17 - 11 = 6, \quad a_4 - a_3 = 23 - 17 = 6$$

ਕਿਉਂਕਿ $k = 1, 2, 3,$ ਆਦਿ ਲਈ $a_{k+1} - a_k$ ਬਰਾਬਰ ਇੱਕ ਸਮਾਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਲੜੀ ਇੱਕ A.P. ਹੈ।

ਇਥੇ $a = 5$ ਅਤੇ $d = 6$

ਮੰਨ ਲਉ A.P. ਦਾ nਵਾਂ ਪਦ 301 ਹੈ।

ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$a_n = a + (n-1)d$$

ਇਸ ਲਈ

$$301 = 5 + (n-1) \times 6$$

ਭਾਵ

$$301 = 6n - 1$$

ਇਸ ਲਈ

$$n = \frac{302}{6} = \frac{151}{3}$$

ਪ੍ਰੰਤੂ n ਇੱਕ ਧੰਨ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੋਣੀ ਚਾਹੀਦੀ ਹੈ (ਕਿਉਂ?)। ਇਸ ਲਈ 301 ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਸੂਚੀ ਦਾ ਪਦ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 7 : ਦੋ ਅੰਕਾਂ ਵਾਲੀਆਂ ਕਿੰਨੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ 3 ਨਾਲ ਵੰਡੀਆਂ ਜਾਂਦੀਆਂ ਹਨ।

ਹੱਲ : 3 ਨਾਲ ਵੰਡੀਆਂ ਜਾਣ ਵਾਲੀਆਂ ਦੋ ਅੰਕਾਂ ਦੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ :

$$12, 15, 18, \ldots, 99$$

ਕੀ ਇਹ ਇੱਕ A.P. ਹੈ? ਹਾਂ, ਇਹ ਹੈ। ਇੱਥੇ $a = 12$, $d = 3$ ਅਤੇ $a_n = 99$ ਹੈ।

ਕਿਉਂਕਿ $a_n = a + (n-1)\,d$,

ਇਸ ਲਈ $99 = 12 + (n-1) \times 3$

ਭਾਵ $87 = (n-1) \times 3$

ਭਾਵ $n - 1 = \dfrac{87}{3} = 29$

ਭਾਵ $n = 29 + 1 = 30$

ਇਸ ਲਈ, 3 ਨਾਲ ਵੰਡੀਆਂ ਜਾਣ ਵਾਲੀਆਂ ਦੋ ਅੰਕਾਂ ਦੀਆਂ ਕੁੱਲ 30 ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ 8 : A.P. : 10, 7, 4, . . ., – 62 ਦਾ ਅੰਤਿਮ ਪਦ ਤੋਂ (ਪਹਿਲੇ ਪਦ ਵੱਲ ਪਾਸੇ) 11ਵਾਂ ਪਦ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ, $a = 10$, $d = 7 - 10 = -3$, $l = -62$,

ਜਿਥੇ $l = a + (n-1)\,d$

ਅੰਤਿਮ ਪਦ ਤੋਂ 11 ਵਾਂ ਪਦ ਪਤਾ ਲਗਾਉਣ ਲਈ ਅਸੀਂ ਇਸ A.P. ਦੇ ਕੁੱਲ ਪਦਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਪਤਾ ਕਰਾਂਗੇ।

ਇਸ ਲਈ $-62 = 10 + (n-1)(-3)$

ਜਾਂ $-72 = (n-1)(-3)$

ਭਾਵ $n - 1 = 24$

ਜਾਂ $n = 25$

ਇਸ ਲਈ, ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ A.P. ਵਿੱਚ 25 ਪਦ ਹਨ।

ਅੰਤਿਮ ਪਦ ਤੋਂ 11ਵਾਂ ਪਦ A.P. ਦਾ 15 ਵਾਂ ਪਦ ਹੋਵੇਗਾ। (ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ਇਹ 14 ਵਾਂ ਪਦ ਨਹੀਂ ਹੋਵੇਗਾ। ਕਿਉਂ?)

ਇਸ ਲਈ $a_{15} = 10 + (15-1)(-3) = 10 - 42 = -32$

ਇਸ ਲਈ, ਅੰਤਮ ਪਦ ਤੋਂ 11ਵਾਂ ਪਦ – 32 ਹੈ।

ਬਦਲਵਾਂ ਹੱਲ :

ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ A.P. ਨੂੰ ਉਲਟ ਪਾਸਿਉਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਤਾਂ ਇਸ ਦਾ ਪਹਿਲਾ ਪਦ $a = -62$ ਹੈ ਅਤੇ

ਸਾਂਝਾ ਅੰਤਰ $d = 3$ ਹੈ। (ਕਿਉਂ?)

ਹੁਣ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਇਹ ਬਣ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਕਿ ਇਸ A.P. ਦਾ 11ਵਾਂ ਪਦ ਪਤਾ ਕੀਤਾ ਜਾਵੇ।

ਇਸ ਲਈ $$a_{11} = -62 + (11-1) \times 3 = -62 + 30 = -32$$

ਇਸ ਲਈ, ਅੰਤਿਮ ਪਦ ਤੋਂ ਲੋੜੀਂਦਾ 11ਵਾਂ ਪਦ – 32 ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 9 : ₹ 1000 ਦੀ ਇੱਕ ਧਨ ਰਾਸ਼ੀ 8% ਸਾਲਾਨਾ ਸਾਧਾਰਣ ਵਿਆਜ ਦੀ ਦਰ 'ਤੇ ਜਮਾਂ ਕੀਤੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਹਰੇਕ ਸਾਲ ਦੇ ਅੰਤ ਵਿੱਚ ਵਿਆਜ ਇੱਕ ਦੀ ਗਣਨਾ ਕਰੋ। ਕੀ ਇਹ ਵਿਆਜ ਇੱਕ A.P. ਬਣਾਉਂਦੇ ਹਨ? ਜੇਕਰ ਅਜਿਹਾ ਹੈ ਤਾਂ ਇਸ ਤੱਥ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹੋਏ 30 ਸਾਲਾਂ ਦੇ ਅੰਤ ਵਿੱਚ ਵਿਆਜ ਦੀ ਗਣਨਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਸਾਧਾਰਣ ਵਿਆਜ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਸੂਤਰ ਹੇਠਾਂ ਅਨੁਸਾਰ ਹੈ:

$$\text{ਸਾਧਾਰਣ ਵਿਆਜ} = \frac{P \times R \times T}{100}$$

ਇਸ ਲਈ, ਪਹਿਲੇ ਸਾਲ ਦੇ ਅੰਤ ਵਿੱਚ ਵਿਆਜ = ₹ $\frac{1000 \times 8 \times 1}{100}$ = ₹80

ਦੂਜੇ ਸਾਲ ਦੇ ਅੰਤ ਵਿੱਚ ਵਿਆਜ = ₹ $\frac{1000 \times 8 \times 2}{100}$ = ₹160 ;

ਤੀਸਰੇ ਸਾਲ ਦੇ ਅੰਤ ਵਿੱਚ ਵਿਆਜ = ₹ $\frac{1000 \times 8 \times 3}{100}$ = ₹ 240

ਇਸੇ ਤਰਾਂ ਅਸੀਂ ਚੌਥੇ, ਪੰਜਵੇਂ ਆਦਿ ਸਾਲਾਂ ਦੇ ਅੰਤ ਵਿੱਚ ਵਿਆਜ ਦੀ ਗਣਨਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਲਈ: ਪਹਿਲੇ, ਦੂਸਰੇ, ਤੀਸਰੇ ... ਸਾਲਾਂ ਦੇ ਅੰਤ ਵਿੱਚ ਵਿਆਜ (ਰੁਪਇਆਂ ਵਿੱਚ) ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਹਨ:

$$80, 160, 240, \ldots$$

ਇਹ ਇੱਕ A.P. ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ ਕਿਸੇ ਵੀ ਦੋ ਲਗਾਤਾਰ ਪਦਾ ਦਾ ਅੰਤਰ 80 ਹੈ, ਭਾਵ $d = 80$ ਹੈ। ਨਾਲ ਹੀ, ਇਥੇ $a = 80$ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ 30 ਸਾਲਾਂ ਦੇ ਅੰਤ ਵਿੱਚ ਵਿਆਜ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ a_{30} ਪਤਾ ਕਰਾਂਗੇ।

ਹੁਣ $$a_{30} = a + (30-1)\,d = 80 + 29 \times 80 = 2400$$

ਇਸ ਲਈ, 30 ਸਾਲਾਂ ਦੇ ਅੰਤ ਵਿੱਚ ਵਿਆਜ ₹ 2400 ਹੋਵੇਗਾ।

ਉਦਾਹਰਣ 10 : ਫੁੱਲਾਂ ਦੀ ਇੱਕ ਕਿਆਰੀ ਦੀ ਪਹਿਲੀ ਕਤਾਰ ਵਿੱਚ 23 ਗੁਲਾਬ ਦੇ ਪੌਦੇ ਹਨ, ਦੂਜੀ

ਕਤਾਰ ਵਿੱਚ 21 ਪੌਦੇ ਹਨ, ਤੀਜੀ ਕਤਾਰ ਵਿੱਚ 19 ਪੌਦੇ ਹਨ ਆਦਿ, ਉਸ ਦੀ ਅੰਤਿਮ ਕਤਾਰ ਵਿੱਚ 5 ਗੁਲਾਬ ਦੇ ਪੌਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਕਿਆਰੀ ਵਿੱਚ ਕੁੱਲ ਕਿੰਨੀਆਂ ਕਤਾਰਾਂ ਹਨ?

ਹੱਲ : ਪਹਿਲੀ, ਦੂਜੀ, ਤੀਜੀ ... ਕਤਾਰਾਂ ਵਿੱਚ ਗੁਲਾਬ ਦੇ ਪੌਦਿਆਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਹੇਠ ਅਨੁਸਾਰ ਹੈ:

$$23, 21, 19, \ldots, 5$$

ਇਹ ਇੱਕ A.P. ਬਣਾਉਂਦੀਆਂ ਹਨ (ਕਿਉਂ?)। ਮੰਨ ਲਉ ਕਤਾਰਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ n ਹੈ।

ਤਾਂ $a = 23$, $d = 21 - 23 = -2$ ਅਤੇ $a_n = 5$ ਹੈ।

ਕਿਉਂਕਿ $a_n = a + (n-1)d$

ਇਸ ਲਈ

$$5 = 23 + (n-1)(-2)$$

ਭਾਵ $-18 = (n-1)(-2)$

ਜਾਂ $n = 10$

ਇਸ ਲਈ, ਫੁੱਲਾਂ ਦੀ ਕਿਆਰੀ ਵਿੱਚ 10 ਕਤਾਰਾਂ ਹਨ।

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 5.2

1. ਹੇਠ ਦਿੱਤੀ ਸਾਰਣੀ ਵਿੱਚ, ਖਾਲੀ ਸਥਾਨਾਂ ਨੂੰ ਭਰੋ, ਜਿੱਥੇ AP ਦਾ ਪਹਿਲਾ ਪਦ a, ਸਾਂਝਾ ਅੰਤਰ d ਅਤੇ nਵਾਂ ਪਦ a_n ਹੈ।

	a	d	n	a_n
(i)	7	3	8	...
(ii)	−18	...	10	0
(iii)	...	−3	18	−5
(iv)	−18.9	2.5	...	3.6
(v)	3.5	0	105	...

2. ਹੇਠ ਦਿੱਤਿਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਸਹੀ ਉੱਤਰ ਚੁਣੋ ਅਤੇ ਉਸਦਾ ਕਾਰਣ ਦੱਸੋ :

(i) A.P.: 10, 7, 4, . . . , ਦਾ 30ਵਾਂ ਪਦ ਹੈ:

(A) 97 (B) 77 (C) −77 (D) −87

(ii) A.P.: $-3, -\frac{1}{2}, 2, \ldots$, ਦਾ 11ਵਾਂ ਪਦ ਹੈ:

(A) 28 (B) 22 (C) -38 (D) $-48\frac{1}{2}$

3. ਹੇਠ ਦਿੱਤੀਆ ਅੰਕਗਣਿਤਕ ਲੜੀਆਂ (A.P) ਵਿੱਚ ਖਾਲੀ ਖਾਨਿਆਂ ਦੇ ਪਦਾ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰੋ।

(i) 2, $\boxed{}$, 26

(ii) $\boxed{}$, 13, $\boxed{}$, 3

(iii) 5, $\boxed{}$, $\boxed{}$, $9\frac{1}{2}$

(iv) -4, $\boxed{}$, $\boxed{}$, $\boxed{}$, $\boxed{}$, 6

(v) $\boxed{}$, 38, $\boxed{}$, $\boxed{}$, $\boxed{}$, -22

4. A.P. : 3, 8, 13, 18, . . . ਦਾ ਕਿੰਨਵਾਂ ਪਦ 78 ਹੈ?

5. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀ ਅੰਕਗਣਿਤਕ ਲੜੀ ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ ਵਿੱਚ ਕਿੰਨੇ ਪਦ ਹਨ?

(i) 7, 13, 19, . . . , 205 (ii) 18, $15\frac{1}{2}$, 13, . . . , -47

6. ਕੀ A.P., 11, 8, 5, 2 . . . ਦਾ ਇੱਕ ਪਦ -150 ਹੈ? ਕਿਉਂ?

7. ਉਸ A.P. ਦਾ 31ਵਾਂ ਪਦ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸਦਾ 11ਵਾਂ ਪਦ 38 ਅਤੇ 16 ਵਾਂ ਪਦ 73 ਹੈ।

8. ਇੱਕ A.P. ਵਿੱਚ 50 ਪਦ ਹਨ, ਜਿਸ ਦਾ ਤੀਸਰਾ ਪਦ 12 ਹੈ ਅਤੇ ਅੰਤਿਮ ਪਦ 106 ਹੈ। ਇਸ ਦਾ 29ਵਾਂ ਪਦ ਪਤਾ ਕਰੋ।

9. ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ A.P ਦਾ ਤੀਸਰਾ ਅਤੇ 9ਵਾਂ ਪਦ ਕ੍ਰਮਵਾਰ 4 ਅਤੇ -8 ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਇਸ ਦਾ ਕਿੰਨਵਾਂ ਪਦ ਸਿਫ਼ਰ ਹੋਵੇਗਾ?

10. ਕਿਸੇ A.P. ਦਾ 17ਵਾਂ ਪਦ ਉਸਦੇ 10ਵੇਂ ਪਦ ਤੋਂ 7 ਵੱਧ ਹੈ। ਇਸ ਦਾ ਸਾਂਝਾ ਅੰਤਰ ਪਤਾ ਕਰੋ।

11. A.P. : 3, 15, 27, 39, ... ਦਾ ਕਿੰਨਵਾਂ ਪਦ ਉਸਦੇ 54 ਵੇਂ ਪਦ ਤੋਂ 132 ਵੱਧ ਹੋਵੇਗਾ?

12. ਦੋ ਅੰਕਗਣਿਤਕ ਲੜੀਆਂ ਦਾ ਸਾਂਝਾ ਅੰਤਰ ਬਰਾਬਰ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਇਹਨਾਂ ਦੇ 100ਵੇਂ ਪਦਾਂ ਦਾ ਅੰਤਰ 100 ਹੈ ਤਾਂ ਇਹਨਾਂ ਦੇ 1000ਵੇਂ ਪਦਾ ਦਾ ਅੰਤਰ ਕੀ ਹੋਵੇਗਾ?

13. ਤਿੰਨ ਅੰਕਾਂ ਵਾਲੀਆ ਕਿੰਨੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ 7 ਨਾਲ ਭਾਜਯੋਗ ਹਨ।

14. 10 ਅਤੇ 250 ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ 4 ਦੇ ਕਿੰਨੇ ਗੁਣਜ ਹਨ?

15. n ਦੇ ਕਿਹੜੇ ਮੁੱਲ ਦੇ ਲਈ, ਦੋਵੇਂ ਅੰਕ ਗਣਿਤਕ ਲੜੀਆਂ 63, 65, 67, ... ਅਤੇ 3, 10, 17, ... ਦੇ nਵੇਂ ਪਦ ਬਰਾਬਰ ਹੋਣਗੇ?

16. ਉਹ A.P ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਦਾ ਤੀਜਾ ਪਦ 16 ਹੈ ਅਤੇ 7ਵਾਂ ਪਦ 5ਵੇਂ ਪਦ ਨਾਲੋਂ 12 ਵੱਧ ਹੈ।

17. A.P. : 3, 8, 13, ..., 253 ਵਿੱਚ ਅੰਤਿਮ ਪਦ ਤੋਂ 20ਵਾਂ ਪਦ ਪਤਾ ਕਰੋ।

18. ਕਿਸੇ A.P. ਦੇ ਚੌਥੇ ਅਤੇ 8ਵੇਂ ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜ 24 ਹੈ ਅਤੇ 6ਵੇਂ ਅਤੇ 10ਵੇਂ ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜ 44 ਹੈ। ਇਸ A.P. ਦੇ ਪਹਿਲੇ ਤਿੰਨ ਪਦ ਪਤਾ ਕਰੋ।

19. ਸੁਬਾ ਰਾਓ ਨੇ 1995 ਵਿੱਚ ₹ 5000 ਪ੍ਰਤਿ ਮਹੀਨਾ ਤਨਖਾਹ 'ਤੇ ਕੰਮ ਸ਼ੁਰੂ ਕੀਤਾ ਅਤੇ ਹਰੇਕ ਸਾਲ ₹ 200 ਦਾ ਸਾਲਾਨਾ ਵਾਧਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤਾ। ਕਿਹੜੇ ਸਾਲ ਉਸਦੀ ਤਨਖਾਹ ₹ 7000 ਹੋ ਜਾਵੇਗੀ?

20. ਰਾਮ ਕਲੀ ਨੇ ਕਿਸੇ ਸਾਲ ਦੇ ਪਹਿਲੇ ਹਫਤੇ ₹ 5 ਦੀ ਬੱਚਤ ਕੀਤੀ ਅਤੇ ਫਿਰ ਆਪਣੀ ਹਫਤਾਵਾਰੀ ਬੱਚਤ ₹ 1.75 ਵਧਾਉਂਦੀ ਗਈ। ਜੇਕਰ nਵੇਂ ਹਫਤੇ ਵਿੱਚ ਉਸਦੀ ਹਫਤਾਵਾਰੀ ਬੱਚਤ ₹ 20.75 ਹੋਵੇ ਤਾਂ n ਪਤਾ ਕਰੋ।

5.4 A.P. ਦੇ ਪਹਿਲੇ n ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜ

ਆਉ ਭਾਗ 5.1 ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਸਥਿਤੀ 'ਤੇ ਫਿਰ ਵਿਚਾਰ ਕਰਦੇ ਹਾਂ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਸ਼ਕੀਲਾ ਆਪਣੀ ਪੁਤਰੀ ਦੇ ਗੋਲਕ ਵਿੱਚ ਉਸਦੇ। ਸਾਲ ਦੀ ਹੋਣ 'ਤੇ ₹ 100 ਪਾਉਂਦੀ ਹੈ, ਉਸਦੇ ਦੂਸਰੇ ਜਨਮ ਦਿਨ ਉੱਤੇ ₹ 150, ਤੀਜੇ ਜਨਮ ਦਿਨ 'ਤੇ ₹ 200 ਪਾਉਂਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੀ ਅੱਗੇ ਜਾਰੀ ਰੱਖਦੀ ਹੈ। ਜਦੋਂ ਉਸਦੀ ਪੁਤਰੀ ਦੀ ਉਮਰ 21 ਸਾਲ ਹੋ ਜਾਵੇਗੀ, ਤਾਂ ਉਸਦੀ ਗੋਲਕ ਵਿੱਚ ਕਿੰਨਾ ਧਨ ਇਕੱਠਾ ਹੋ ਜਾਵੇਗਾ?

ਇਥੇ ਉਸਦੇ ਪਹਿਲੇ, ਦੂਜੇ, ਤੀਜੇ, ਚੌਥੇ ... ਜਨਮ ਦਿਨ ਉੱਤੇ ਉਸ ਦੇ ਗੋਲਕ ਵਿੱਚ ਪਾਈ ਗਈ ਰਕਮ ਕ੍ਰਮਵਾਰ 100, 150, 200, 250, ... ਹੈ ਅਤੇ ਇਹੀ ਕ੍ਰਮ ਉਸਦੇ 21ਵੇਂ ਜਨਮ ਦਿਨ ਤੱਕ ਚਲਦਾ ਰਿਹਾ। 21ਵੇਂ ਜਨਮ ਦਿਨ ਤੱਕ ਇੱਕਠੀ ਹੋਈ ਕੁੱਲ ਰਾਸ਼ੀ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਸਾਨੂੰ ਉਪਰੋਕਤ ਲੜੀ ਦੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਜੋੜਨ ਦੀ ਲੋੜ ਹੈ। ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਨਹੀਂ ਸੋਚਦੇ ਕਿ ਇਹ ਇੱਕ ਮੁਸ਼ਕਿਲ ਪ੍ਰਕ੍ਰਿਆ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਵਿੱਚ ਸਮਾਂ ਵੀ ਅਧਿਕ ਲੱਗੇਗਾ। ਕੀ ਅਸੀਂ ਇਸ ਪ੍ਰਕ੍ਰਿਆ ਨੂੰ ਸਰਲ ਬਣਾ ਸਕਦੇ ਹਾਂ? ਇਹ ਤਾਂ ਹੀ ਸੰਭਵ ਹੋਵੇਗਾ, ਜਦੋਂ ਅਸੀਂ ਇਸ ਦਾ ਜੋੜ ਕਰਨ ਦੀ ਕੋਈ ਵਿਧੀ ਪਤਾ ਕਰ ਲਵਾਂਗੇ। ਆਓ ਦੇਖੀਏ।

ਅਸੀਂ ਗੌਸ (ਜਿਸ ਬਾਰੇ ਤੁਸੀਂ ਅਧਿਆਇ 1 ਵਿੱਚ ਪੜ੍ਹ ਚੁੱਕੇ ਹੋ) ਨੂੰ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਸਮੱਸਿਆ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰਦੇ ਹਾਂ, ਜੋ ਉਸਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਲਈ ਉਦੋਂ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਸੀ ਜਦੋਂ ਉਹ 10 ਸਾਲ ਦਾ ਸੀ। ਉਸਨੂੰ 1 ਤੋਂ 100 ਤੱਕ ਦੀਆਂ ਧਨ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਕਿਹਾ ਗਿਆ ਸੀ। ਉਸਨੇ ਤੁਰੰਤ ਉੱਤਰ ਦਿਤਾ ਕਿ ਜੋੜ 5050 ਹੈ। ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਅਨੁਮਾਨ ਲਗਾ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ ਉਸਨੂੰ ਅਜਿਹਾ ਕਿਵੇਂ ਕੀਤਾ? ਉਸਨੇ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲਿਖਿਆ :

$$S = 1 + 2 + 3 + \ldots + 99 + 100$$

ਫਿਰ ਉਸਨੇ ਉਲਟ ਕ੍ਰਮ ਵਿੱਚ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਲਿਖਿਆ :

$$S = 100 + 99 + \ldots + 3 + 2 + 1$$

ਉਪਰੋਕਤ ਨੂੰ ਜੋੜਨ 'ਤੇ ਉਸ ਨੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤਾ :

$$2S = (100 + 1) + (99 + 2) + \ldots + (3 + 98) + (2 + 99) + (1 + 100)$$
$$= 101 + 101 + \ldots + 101 + 101 \quad (100 \text{ ਵਾਰੀ})$$

ਇਸ ਲਈ $\quad S = \frac{100 \times 101}{2} = 5050$, ਭਾਵ ਜੋੜ $= 5050$

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਇਸ ਤਕਨੀਕ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹੋਏ A.P. ਦੇ ਪਹਿਲੇ n ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਪਤਾ ਕਰਾਂਗੇ। ਮੰਨ ਲਉ ਇਹ A.P. ਹੈ:

$$a, a + d, a + 2d, \ldots$$

ਇਸ A.P ਦਾ nਵਾਂ ਪਦ $a + (n - 1) d$ ਹੈ। ਮੰਨ ਲਉ S ਇਸ A.P. ਦੇ ਪਹਿਲੇ n ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਹੈ ਤਾਂ

$$S = a + (a + d) + (a + 2d) + \ldots + [a + (n - 1) d] \qquad (1)$$

ਪਦਾਂ ਨੂੰ ਉਲਟੇ ਕ੍ਰਮ ਵਿਚ ਲਿਖਣ 'ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :

$$S = [a + (n - 1) d] + [a + (n - 2) d] + \ldots + (a + d) + a \qquad (2)$$

ਹੁਣ (1) ਅਤੇ (2) ਨੂੰ ਪਦਾਂ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਜੋੜਨ 'ਤੇ, ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :

$$2S = \underbrace{[2a + (n-1)d] + [2a + (n-1)d] + \ldots + [2a + (n-1)d] + [2a + (n-1)d]}_{n \text{ ਵਾਰੀ}}$$

ਜਾਂ $\quad 2S = n\,[2a + (n - 1)\,d] \quad$ (ਕਿਉਂਕਿ ਇਸ ਵਿੱਚ n ਪਦ ਹਨ)

ਜਾਂ $\quad S = \frac{n}{2}\,[2a + (n - 1)\,d]$

ਇਸ ਲਈ ਕਿਸੇ **A.P.** ਦੇ ਪਹਿਲੇ n ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜ S ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਸੂਤਰ ਨਾਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :

$$S = \frac{n}{2}\,[2a + (n - 1)\,d]$$

ਅਸੀਂ ਇਸ ਨੂੰ ਇਸ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਵੀ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ :

$$S = \frac{n}{2}\,[a + a + (n - 1)\,d]$$

ਭਾਵ
$$S = \frac{n}{2}\,(a + a_n) \qquad (3)$$

ਹੁਣ, ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ A.P. ਦੇ ਕੇਵਲ n ਹੀ ਪਦ ਹੋਣ, ਤਾਂ a_n ਅੰਤਿਮ ਪਦ l ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ (3) ਤੋਂ ਵੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ :

$$S = \frac{n}{2}\,(a + l) \qquad (4)$$

ਪਰਿਣਾਮ ਦਾ ਇਹ ਰੂਪ ਉਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਉਪਯੋਗੀ ਹੈ, ਜਦੋਂ A.P. ਦਾ ਪਹਿਲਾ ਅਤੇ ਅੰਤਿਮ ਪਦ ਦਿੱਤੇ ਹੋਣ ਅਤੇ ਸਾਂਝਾ ਅੰਤਰ ਨਾ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਹੋਵੇ।

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਉਸੇ ਪ੍ਰਸ਼ਨ 'ਤੇ ਦੁਬਾਰਾ ਵਾਪਸ ਆ ਜਾਂਦੇ ਹਾਂ, ਜੋ ਸ਼ੁਰੂ ਵਿੱਚ ਸਾਨੂੰ ਪੁੱਛਿਆ ਗਿਆ ਸੀ। ਸ਼ਕੀਲਾ ਦੀ ਪੁੱਤਰੀ ਦੇ ਗੋਲਕ ਵਿੱਚ ਉਸਦੇ ਪਹਿਲੇ, ਦੂਜੇ, ਤੀਸਰੇ, ..., ਜਨਮ ਦਿਨ 'ਤੇ ਪਾਈਆਂ ਗਈਆਂ ਰਾਸ਼ੀਆਂ (₹ ਵਿੱਚ) ਕ੍ਰਮਵਾਰ 100, 150, 200, 250, ..., ਹਨ।

ਇਹ ਇੱਕ A.P. ਹੈ। ਅਸੀਂ ਉਸ ਦੇ 21ਵੇਂ ਜਨਮ ਦਿਨ ਤੱਕ ਇਕੱਠੀ ਹੋਈ ਕੁੱਲ ਰਾਸ਼ੀ ਪਤਾ ਕਰਨੀ ਹੈ। ਭਾਵ ਅਸੀਂ ਇਸ A.P. ਦੇ ਪਹਿਲੇ 21 ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜਫਲ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਹੈ।

ਇਥੇ $a = 100$, $d = 50$ ਅਤੇ $n = 21$ ਹੈ। ਸੂਤਰ

$S = \frac{n}{2}[2a + (n - 1)\,d]$ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨ 'ਤੇ

$$S = \frac{21}{2}[2 \times 100 + (21 - 1) \times 50] = \frac{21}{2}[200 + 1000]$$

$$= \frac{21}{2} \times 1200 = 12600$$

ਇਸ ਲਈ, ਉਸਦੇ 21ਵੇਂ ਜਨਮ ਦਿਨ ਤੱਕ ਇੱਕਠੀ ਹੋਈ ਗੋਲਕ ਵਿੱਚ ਕੁੱਲ ਰਕਮ ₹12600 ਹੈ।

ਕੀ ਸੂਤਰ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਨਾਲ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਹੱਲ ਕਰਨਾ ਸਰਲ ਨਹੀਂ ਹੋ ਗਿਆ?

ਕਿਸੇ A.P. ਦੇ n ਪਦਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਣ ਲਈ ਅਸੀਂ S ਦੀ ਥਾਂ 'ਤੇ S_n ਦਾ ਵੀ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰ

ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ 'ਤੇ ਅਸੀਂ A.P. ਦੇ 20 ਪਦਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਣ ਲਈ S_{20} ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਪਹਿਲੇ n ਪਦਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਦੇ ਸੂਤਰ ਵਿੱਚ ਚਾਰ ਰਾਸ਼ੀਆਂ S, a, d ਅਤੇ n ਸ਼ਾਮਿਲ ਹਨ। ਜੇਕਰ ਇਨ੍ਹਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕੋਈ ਤਿੰਨ ਰਾਸ਼ੀਆਂ ਦਾ ਪਤਾ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਚੌਥੀ ਰਾਸ਼ੀ ਦਾ ਪਤਾ ਲਗਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਟਿੱਪਣੀ : ਕਿਸੇ A.P. ਦਾ nਵਾਂ ਪਦ, ਉਸ ਦੇ ਪਹਿਲੇ n ਪਦਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਅਤੇ ਪਹਿਲੇ $(n-1)$ ਪਦਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਦੇ ਅੰਤਰ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ। ਭਾਵ $a_n = S_n - S_{n-1}$ ਹੈ।

ਆਉ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਣਾਂ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ।

ਉਦਾਹਰਣ 11 : A.P. : 8, 3, –2, . . . ਦੇ ਪਹਿਲੇ 22 ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ $a = 8$, $d = 3 - 8 = -5$ ਅਤੇ $n = 22$ ਹੈ।

ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$S = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

ਇਸ ਲਈ
$$S = \frac{22}{2}[16 + 21(-5)] = 11(16 - 105) = 11(-89) = -979$$

ਇਸ ਲਈ, ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ A.P ਦੇ ਪਹਿਲੇ 22 ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜ – 979 ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 12 : ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ A.P. ਦੇ ਪਹਿਲੇ 14 ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜ 1050 ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਦਾ ਪਹਿਲਾ ਪਦ 10 ਹੈ ਤਾਂ 20 ਵਾਂ ਪਦ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹਲ : ਇਥੇ $S_{14} = 1050$, $n = 14$ ਅਤੇ $a = 10$ ਹੈ।

ਕਿਉਂਕਿ
$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

ਇਸ ਲਈ
$$1050 = \frac{14}{2}[20 + 13d] = 140 + 91d$$

ਭਾਵ
$$910 = 91d$$

ਜਾਂ
$$d = 10$$

ਇਸ ਲਈ
$$a_{20} = 10 + (20-1) \times 10 = 200$$

ਭਾਵ 20 ਵਾਂ ਪਦ 200 ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 13 : A.P. : 24, 21, 18, . . . ਦੇ ਕਿੰਨੇ ਪਦ ਲਏ ਜਾਣ, ਤਾਂ ਕਿ ਉਨ੍ਹਾਂ ਦਾ ਜੋੜਫਲ 78 ਹੋਵੇ?

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ $a = 24$, $d = 21 - 24 = -3$ ਅਤੇ $S_n = 78$ ਹੈ। ਅਸੀਂ n ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਹੈ।

ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $$S_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d]$$

ਇਸ ਲਈ $$78 = \frac{n}{2}[48+(n-1)(-3)] = \frac{n}{2}[51-3n]$$

ਜਾਂ $$3n^2 - 51n + 156 = 0$$

ਜਾਂ $$n^2 - 17n + 52 = 0$$

ਜਾਂ $$(n-4)(n-13) = 0$$

ਇਸ ਲਈ $$n = 4 \text{ ਜਾਂ } 13$$

n ਦੇ ਦੋਵੇਂ ਮੁੱਲ ਸੰਭਵ ਹਨ ਅਤੇ ਸਵੀਕਾਰ ਕੀਤੇ ਜਾ ਸਕਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ, ਪਦਾਂ ਦੀ ਲੋੜੀਂਦੀ ਸੰਖਿਆ 4 ਜਾਂ 13 ਹੈ।

ਟਿੱਪਣੀ :

1. ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ, ਪਹਿਲੇ 4 ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜ = ਪਹਿਲੇ 13 ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜ = 78 ਹੈ।
2. ਇਹ ਦੋਵੇਂ ਉੱਤਰ ਸੰਭਵ ਹਨ, ਕਿਉਂਕਿ 5ਵੇਂ ਤੋਂ 13ਵੇਂ ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜਫਲ ਸਿਫ਼ਰ ਹੋ ਜਾਵੇਗਾ। ਇਹ ਇਸ ਲਈ ਹੈ ਕਿ ਇਥੇ a ਧਨਾਤਮਕ ਹੈ ਅਤੇ d ਰਿਣਾਤਮਕ ਹੈ, ਜਿਸ ਨਾਲ ਕੁਝ ਪਦ ਧਨਾਤਮਕ ਅਤੇ ਕੁਝ ਪਦ ਰਿਣਾਤਮਕ ਹੋ ਜਾਂਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਕੱਟ ਜਾਂਦੇ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ 14 : ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤਿਆਂ ਦਾ ਜੋੜਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ:

(i) ਪਹਿਲੀਆਂ 1000 ਧਨ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ (ii) ਪਹਿਲੀਆਂ n ਧਨ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ

ਹੱਲ :

(i) ਮੰਨ ਲਓ $S = 1 + 2 + 3 + \ldots + 1000$ ਹੈ।

A.P. ਦੇ ਪਹਿਲੇ n ਪਦਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਲਈ ਸੂਤਰ $S_n = \frac{n}{2}(a+l)$ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਨ 'ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ:

$$S_{1000} = \frac{1000}{2}(1+1000) = 500 \times 1001 = 500500$$

ਇਸ ਲਈ, ਪਹਿਲੇ 1000 ਧਨ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ 500500 ਹੈ।

(ii) ਮੰਨ ਲਓ $S_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$ ਹੈ।

ਇਥੇ $a = 1$ ਅਤੇ ਅੰਤਿਮ $l = n$ ਪਦ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ $S_n = \frac{n(1+n)}{2}$ ਜਾਂ $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ, **ਪਹਿਲੀਆਂ n ਧਨ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਸੂਤਰ**

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$ **ਨਾਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।**

ਉਦਾਹਰਣ 15 : ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਉਸ ਲੜੀ ਦੇ ਪਹਿਲੇ 24 ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ, ਜਿਸ ਦਾ n ਵਾਂ ਪਦ $a_n = 3 + 2n$ ਨਾਲ ਦਿੱਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਹੱਲ :

ਕਿਉਂਕਿ $a_n = 3 + 2n$ ਹੈ

ਇਸ ਲਈ
$$a_1 = 3 + 2 = 5$$
$$a_2 = 3 + 2 \times 2 = 7$$
$$a_3 = 3 + 2 \times 3 = 9$$
$$\vdots$$

ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਲੜੀ 5, 7, 9, 11, . . . ਹੈ।

ਇੱਥੇ $7 - 5 = 9 - 7 = 11 - 9 = 2$ ਆਦਿ ਹਨ।

ਇਸ ਲਈ, ਇਨ੍ਹਾਂ ਨਾਲ ਇੱਕ A.P. ਬਣਦੀ ਹੈ। ਜਿਸਦਾ ਸਾਂਝਾ ਅੰਤਰ 2 ਹੈ।

S_{24} ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਸਾਡੇ ਕੋਲ: $n = 24$, $a = 5$, $d = 2$

ਇਸ ਲਈ $$S_{24} = \frac{24}{2}[2\times5 + (24-1)\times2] = 12[10 + 46] = 672$$

ਇਸ ਲਈ, ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਲੜੀ ਦੇ ਪਹਿਲੇ 24 ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜ 672 ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 16 : ਟੀ.ਵੀ. ਸੈੱਟਾਂ ਦਾ ਨਿਰਮਾਤਾ ਤੀਜੇ ਸਾਲ 600 ਟੀ.ਵੀ. ਅਤੇ 7ਵੇਂ ਸਾਲ 700 ਟੀ.ਵੀ. ਸੈੱਟਾਂ ਦਾ ਉਤਪਾਦਨ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਇਹ ਮੰਨਦੇ ਹੋਏ ਕਿ ਹਰ ਸਾਲ ਉਤਪਾਦਨ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਸਮਾਨ ਰੂਪ ਨਾਲ ਇੱਕ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਸੰਖਿਆ ਨਾਲ ਵਾਧਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਪਤਾ ਕਰੋ :

(i) ਪਹਿਲੇ ਸਾਲ ਵਿੱਚ ਉਤਪਾਦਨ (ii) 10ਵੇਂ ਸਾਲ ਵਿੱਚ ਉਤਪਾਦਨ

(iii) ਪਹਿਲੇ 7 ਸਾਲਾਂ ਵਿੱਚ ਕੁੱਲ ਉਤਪਾਦਨ।

ਹੱਲ: (i) ਕਿਉਂਕਿ ਹਰ ਸਾਲ ਉਤਪਾਦਨ ਵਿੱਚ ਸਮਾਨ ਰੂਪ ਨਾਲ ਇੱਕ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਸੰਖਿਆ ਨਾਲ ਵਾਧਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ. ਇਸ ਲਈ ਪਹਿਲੇ, ਦੂਸਰੇ, ਤੀਸਰੇ,... ਸਾਲ ਵਿੱਚ ਉਤਪਾਦਿਤ ਟੀ.ਵੀ ਸੈੱਟਾਂ ਦੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ A.P ਵਿੱਚ ਹੋਣਗੀਆਂ। ਆਉ nਵੇਂ ਸਾਲ ਵਿੱਚ ਉਤਪਾਦਿਤ ਟੀ.ਵੀ ਸੈੱਟਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਨੂੰ a_n ਨਾਲ ਦਰਸਾਈਏ।

ਇਸ ਲਈ $a_3 = 600$ ਅਤੇ $a_7 = 700$

ਜਾਂ $a + 2d = 600$

ਅਤੇ $a + 6d = 700$

ਇਨ੍ਹਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ 'ਤੇ ਸਾਨੂੰ $d = 25$ ਅਤੇ $a = 550$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ, ਪਹਿਲੇ ਸਾਲ ਉਤਪਾਦਿਤ ਟੀ.ਵੀ ਸੈੱਟਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ 550 ਹੈ।

(ii) ਹੁਣ $a_{10} = a + 9d = 550 + 9 \times 25 = 775$

ਇਸ ਲਈ 10ਵੇਂ ਸਾਲ ਵਿੱਚ ਉਤਪਾਦਿਤ ਟੀ.ਵੀ. ਸੈੱਟਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ 775 ਹੈ।

(iii) ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ
$$S_7 = \frac{7}{2}[2 \times 550 + (7-1) \times 25]$$
$$= \frac{7}{2}[1100 + 150] = 4375$$

ਇਸ ਲਈ, ਪਹਿਲੇ 7 ਸਾਲਾਂ ਵਿੱਚ ਕੁੱਲ ਬਣਾਏ ਗਏ ਟੀ.ਵੀ. ਸੈੱਟਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ 4375 ਹੈ।

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 5.3

1. ਹੇਠ ਦਿੱਤੀਆਂ ਅੰਕਗਣਿਤਕ ਲੜੀਆਂ ਦਾ ਜੋੜਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ:

   (i) 2, 7, 12, . . ., 10 ਪਦਾਂ ਤੱਕ (ii) –37, –33, –29, . . ., 12 ਪਦਾਂ ਤੱਕ

   (iii) 0.6, 1.7, 2.8, . . ., 100 ਪਦਾਂ ਤੱਕ (iv) $\frac{1}{15}, \frac{1}{12}, \frac{1}{10}, \ldots$, 11 ਪਦਾਂ ਤੱਕ

2. ਹੇਠ ਦਿੱਤਿਆਂ ਦਾ ਜੋੜਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ:

   (i) $7 + 10\frac{1}{2} + 14 + \ldots + 84$ (ii) $34 + 32 + 30 + \ldots + 10$

   (iii) $-5 + (-8) + (-11) + \ldots + (-230)$

3. ਇੱਕ A.P. ਵਿੱਚ

   (i) $a = 5$, $d = 3$ ਅਤੇ $a_n = 50$ ਦਿੱਤਾ ਹੈ। n ਅਤੇ S_n ਪਤਾ ਕਰੋ।

   (ii) $a = 7$ ਅਤੇ $a_{13} = 35$ ਦਿੱਤਾ ਹੈ। d ਅਤੇ S_{13} ਪਤਾ ਕਰੋ।

   (iii) $a_{12} = 37$ ਅਤੇ $d = 3$ ਦਿੱਤਾ ਹੈ। a ਅਤੇ S_{12} ਪਤਾ ਕਰੋ।

   (iv) $a_3 = 15$ ਅਤੇ $S_{10} = 125$ ਦਿੱਤਾ ਹੈ। d ਅਤੇ a_{10} ਪਤਾ ਕਰੋ।

   (v) $d = 5$ ਅਤੇ $S_9 = 75$ ਦਿੱਤਾ ਹੈ। a ਅਤੇ a_9 ਪਤਾ ਕਰੋ।

   (vi) $a = 2$, $d = 8$ ਅਤੇ $S_n = 90$ ਦਿੱਤਾ ਹੈ। n ਅਤੇ a_n ਪਤਾ ਕਰੋ।

   (vii) $a = 8$, $a_n = 62$ ਅਤੇ $S_n = 210$ ਦਿੱਤਾ ਹੈ। n ਅਤੇ d ਪਤਾ ਕਰੋ।

(viii) $a_n = 4$, $d = 2$ ਅਤੇ $S_n = -14$ ਦਿੱਤਾ ਹੈ। n ਅਤੇ a ਪਤਾ ਕਰੋ।

(ix) $a = 3$, $n = 8$ ਅਤੇ $S = 192$ ਦਿੱਤਾ ਹੈ। d ਪਤਾ ਕਰੋ।

(x) $l = 28$, $S = 144$ ਅਤੇ ਕੁੱਲ 9 ਪਦ ਹਨ। a ਪਤਾ ਕਰੋ।

4. 636 ਜੋੜ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਲਈ A.P. : 9, 17, 25, . . . ਦੇ ਕਿੰਨੇ ਪਦ ਲੈਣੇ ਚਾਹੀਦੇ ਹਨ?

5. ਕਿਸੇ A.P. ਦਾ ਪਹਿਲਾ ਪਦ 5, ਅੰਤਿਮ ਪਦ 45 ਅਤੇ ਜੋੜਫਲ 400 ਹਨ। ਪਦਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਅਤੇ ਸਾਂਝਾ ਅੰਤਰ ਪਤਾ ਕਰੋ।

6. ਕਿਸੇ A.P. ਦਾ ਪਹਿਲਾ ਅਤੇ ਅੰਤਿਮ ਪਦ ਕ੍ਰਮਵਾਰ 17 ਅਤੇ 350 ਹਨ। ਜੇਕਰ ਸਾਂਝਾ ਅੰਤਰ 9 ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਇਸ ਵਿੱਚ ਕਿੰਨੇ ਪਦ ਹੋਣਗੇ ਅਤੇ ਇਨ੍ਹਾਂ ਦਾ ਜੋੜਫਲ ਕਿੰਨਾ ਹੋਵੇਗਾ?

7. ਉਸ A.P. ਦੇ ਪਹਿਲੇ 22 ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਵਿੱਚ $d = 7$ ਹੈ ਅਤੇ 22ਵਾਂ ਪਦ 149 ਹੈ।

8. ਉਸ A.P. ਦੇ ਪਹਿਲੇ 51 ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ, ਜਿਸਦੇ ਦੂਸਰੇ ਅਤੇ ਤੀਸਰੇ ਪਦ ਕ੍ਰਮਵਾਰ 14 ਅਤੇ 18 ਹਨ।

9. ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ A.P. ਦੇ ਪਹਿਲੇ 7 ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜਫਲ 49 ਹੈ ਅਤੇ ਪਹਿਲੇ 17 ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜ 289 ਹੈ; ਤਾਂ ਇਸ ਦੇ ਪਹਿਲੇ n ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਪਤਾ ਕਰੋ।

10. ਦਿਖਾਉ ਕਿ $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ ਤੋਂ ਇੱਕ A.P. ਬਣਦੀ ਹੈ, ਜੇਕਰ a_n ਹੇਠ ਦਿੱਤੇ ਅਨੁਸਾਰ ਪ੍ਰਭਾਸ਼ਿਤ ਹੋਵੇ।

(i) $a_n = 3 + 4n$ (ii) $a_n = 9 - 5n$

ਨਾਲ ਹੀ, ਹਰੇਕ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ, ਪਹਿਲੇ 15 ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

11. ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ A.P. ਦੇ ਪਹਿਲੇ n ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜਫਲ $4n - n^2$ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਇਸ ਦਾ ਪਹਿਲਾ ਪਦ (ਭਾਵ S_1) ਕੀ ਹੈ? ਪਹਿਲੇ ਦੋ ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜਫਲ ਕੀ ਹੈ? ਦੂਜਾ ਪਦ ਕੀ ਹੈ? ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਤੀਸਰਾ, 10ਵਾਂ ਅਤੇ nਵਾਂ ਪਦ ਪਤਾ ਕਰੋ।

12. ਅਜਿਹੀਆਂ ਪਹਿਲੀਆਂ 40 ਧਨ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੋ 6 ਨਾਲ ਭਾਜਯੋਗ ਹੋਣ।

13. 8 ਦੇ ਪਹਿਲੇ 15 ਗੁਣਜਾਂ ਦਾ ਜੋੜਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

14. 0 ਅਤੇ 50 ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਟਾਂਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

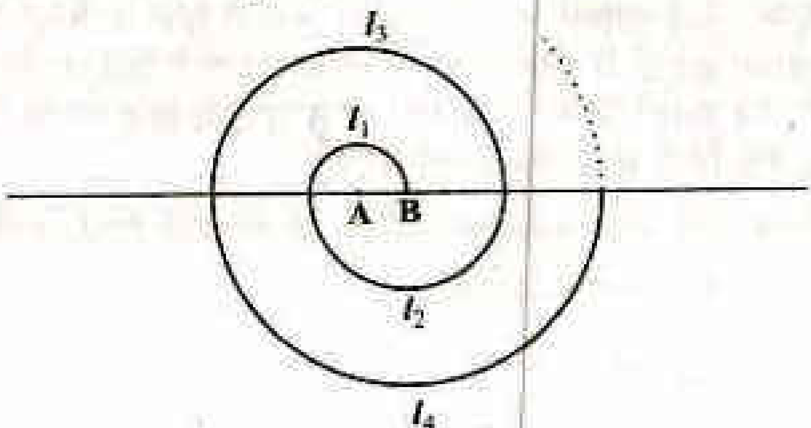
15. ਨਿਰਮਾਣ ਕਾਰਜ ਨਾਲ ਸਬੰਧਤ ਕਿਸੇ ਠੇਕੇ ਵਿੱਚ ਕਿਸੇ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਮਿਤੀ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਕੰਮ ਦੇਰੀ ਨਾਲ ਪੂਰਾ ਕਰਨ ਲਈ, ਜੁਰਮਾਨਾ ਲਗਾਉਣ ਦੀ ਵਿਵਸਥਾ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਹੈ : ਪਹਿਲੇ ਦਿਨ ਦੇ ਲਈ ₹ 200, ਦੂਸਰੇ ਦਿਨ ਲਈ ₹ 250 ਤੀਸਰੇ ਦਿਨ ਲਈ ₹ 300 ਆਦਿ ਭਾਵ ਹਰੇਕ ਅਗਲੇ ਦਿਨ ਦਾ ਜੁਰਮਾਨਾ ਆਪਣੇ ਤੋਂ ਠੀਕ ਪਹਿਲੇ ਦਿਨ ਦੇ ਜੁਰਮਾਨੇ ਨਾਲੋਂ ₹ 50 ਵੱਧ ਹੈ। ਇੱਕ

ਠੇਕੇਦਾਰ ਨੂੰ ਜੁਰਮਾਨੇ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਕਿੰਨੀ ਰਕਮ ਦੇਣੀ ਪਵੇਗੀ, ਜੇਕਰ ਉਹ ਇਸ ਕੰਮ ਵਿੱਚ 30 ਦਿਨ ਦੀ ਦੇਰੀ ਕਰ ਦਿੰਦਾ ਹੈ?

16. ਕਿਸੇ ਸਕੂਲ ਦੇ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਨੂੰ ਉਨ੍ਹਾਂ ਦੇ ਸਮੁੱਚੇ ਵਿਦਿਅਕ ਪ੍ਰਦਰਸ਼ਨ ਲਈ 7 ਨਕਦ ਇਨਾਮ ਦੇਣ ਲਈ ₹ 700 ਦੀ ਰਾਸ਼ੀ ਰੱਖੀ ਗਈ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਹਰੇਕ ਇਨਾਮ ਆਪਣੇ ਤੋਂ ਠੀਕ ਪਹਿਲੇ ਇਨਾਮ ਤੋਂ ₹ 20 ਘੱਟ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਹਰੇਕ ਇਨਾਮ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

17. ਇੱਕ ਸਕੂਲ ਦੇ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਨੇ ਹਵਾ ਪ੍ਰਦੂਸ਼ਣ ਘਟਾਉਣ ਲਈ ਸਕੂਲ ਦੇ ਅੰਦਰ ਅਤੇ ਬਾਹਰ ਪੌਦੇ ਲਗਾਉਣ ਬਾਰੇ ਸੋਚਿਆ। ਇਹ ਫੈਸਲਾ ਲਿਆ ਗਿਆ ਕਿ ਹਰੇਕ ਸ਼੍ਰੇਣੀ ਦਾ ਹਰੇਕ ਸੈਕਸ਼ਨ ਆਪਣੀ ਸ਼੍ਰੇਣੀ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਪੌਦੇ ਲਗਾਵੇਗਾ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ ਪਹਿਲੀ ਸ਼੍ਰੇਣੀ ਦਾ ਇੱਕ ਸੈਕਸ਼ਨ 1 ਪੌਦਾ ਲਗਾਵੇਗਾ, ਸ਼੍ਰੇਣੀ II ਦਾ ਇੱਕ ਸੈਕਸ਼ਨ 2 ਪੌਦੇ ਲਗਾਵੇਗਾ, ਸ਼੍ਰੇਣੀ III ਦਾ ਇੱਕ ਸੈਕਸ਼ਨ 3 ਪੌਦੇ ਲਗਾਵੇਗਾ, ਆਦਿ, ਅਤੇ ਅਜਿਹਾ ਸ਼੍ਰੇਣੀ XII ਤਕ ਚਲਦਾ ਰਹੇਗਾ। ਹਰੇਕ ਸ਼੍ਰੇਣੀ ਦੇ 3 ਸੈਕਸ਼ਨ ਹਨ। ਇਸ ਸਕੂਲ ਦੇ ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੁਆਰਾ ਲਗਾਏ ਗਏ ਪੌਦਿਆਂ ਦੀ ਕੁੱਲ ਸੰਖਿਆ ਕਿੰਨੀ ਹੋਵੇਗੀ?

18. ਕੇਂਦਰ A ਤੋਂ ਸ਼ੁਰੂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ, ਵਾਰੀ-ਵਾਰੀ ਨਾਲ A ਅਤੇ B ਨੂੰ ਕੇਂਦਰ ਮੰਨਦੇ ਹੋਏ, ਅਰਧਵਿਆਸ 0.5 cm, 1.0 cm, 1.5 cm, 2.0 cm, ... ਵਾਲੇ ਲਗਾਤਾਰ, ਅਰਧ ਚੱਕਰਾਂ ਨੂੰ ਖਿੱਚ ਕੇ ਇੱਕ ਕੁੰਡਲਦਾਰ (spiral) ਬਣਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ, (ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਚਿੱਤਰ 5.4 ਵਿੱਚ ਦਿਖਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਤੇਰਾਂ ਲਗਾਤਾਰ ਅਰਧ ਚੱਕਰਾਂ ਤੋਂ ਬਣੇ ਇਸ ਕੁੰਡਲਦਾਰ (Spiral) ਦੀ ਕੁੱਲ ਲੰਬਾਈ ਕੀ ਹੈ? ($\pi = \frac{22}{7}$ ਲਓ)



ਚਿੱਤਰ 5.4

[ਸੰਕੇਤ : ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਕੇਂਦਰ A, B, A, B, ... ਵਾਲੇ ਅਰਧ ਚੱਕਰਾਂ ਦੀਆਂ ਲੰਬਾਈਆਂ l_1, l_2, l_3, l_4 ਹਨ।]

19. 200 ਮੋਟੀਆਂ ਲੱਕੜਾਂ (Logs) ਦੀ ਢੇਰੀ ਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਰੱਖਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਕਿ ਸਭ ਤੋਂ ਹੇਠਾਂ ਵਾਲੀ ਕਤਾਰ ਵਿੱਚ 20 ਮੋਟੀਆਂ ਲੱਕੜਾਂ ਉਸਤੋਂ ਅਗਲੀ ਕਰਤਾਰ ਵਿੱਚ 19 ਮੋਟੀਆਂ ਲੱਕੜਾਂ ਉਸ ਤੋਂ ਅਗਲੀ ਕਤਾਰ ਵਿੱਚ 18 ਮੋਟੀਆਂ ਲੱਕੜਾਂ ਆਦਿ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 5.5)। ਇਹ 200 ਮੋਟੀਆਂ ਲੱਕੜਾਂ ਕਿੰਨੀਆਂ ਕਤਾਰਾ ਵਿੱਚ ਰੱਖੀਆਂ ਗਈਆਂ ਹਨ ਅਤੇ ਸਭ ਤੋਂ ਉਪਰਲੀ ਕਤਾਰ ਵਿੱਚ ਕਿੰਨੀਆਂ ਮੋਟੀਆਂ ਲੱਕੜਾਂ ਹਨ?

ਚਿੱਤਰ 5.5

20. ਇੱਕ ਆਲੂ ਦੌੜ (potato race) ਵਿੱਚ ਆਰੰਭਿਕ ਸਥਾਨ 'ਤੇ ਇੱਕ ਬਾਲਟੀ ਰੱਖੀ ਹੋਈ ਹੈ ਜੋ ਪਹਿਲੇ ਆਲੂ ਤੋਂ 5 ਮੀਟਰ ਦੂਰ ਹੈ ਅਤੇ ਬਾਕੀ ਆਲੂਆਂ ਨੂੰ ਸਰਲ ਰੇਖਾ ਵਿੱਚ 3 m ਦੀ ਆਪਸੀ ਦੂਰੀ 'ਤੇ ਰੱਖਿਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਇਸ ਰੇਖਾ ਉੱਤੇ 10 ਆਲੂ ਰੱਖੇ ਗਏ ਹਨ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 5.6)।

ਚਿੱਤਰ 5.6

ਹਰੇਕ ਪ੍ਰਤਿਯੋਗੀ ਬਾਲਟੀ ਤੋਂ ਚਲਣਾ ਸ਼ੁਰੂ ਕਰਦੀ ਹੈ, ਨਜ਼ਦੀਕ ਤੋਂ ਨਜ਼ਦੀਕ ਵਾਲੇ ਆਲੂ ਨੂੰ ਚੁੱਕਦੀ ਹੈ, ਉਸਨੂੰ ਲੈ ਕੇ ਵਾਪਿਸ ਆ ਕੇ (ਦੌੜ ਕੇ) ਬਾਲਟੀ ਵਿੱਚ ਪਾ ਦਿੰਦੀ ਹੈ, ਦੂਸਰਾ ਆਲੂ ਚੁੱਕਣ ਲਈ ਵਾਪਸ ਦੌੜਦੀ ਹੈ, ਉਸ ਨੂੰ ਚੁੱਕ ਕੇ ਵਾਪਿਸ ਬਾਲਟੀ ਵਿੱਚ ਪਾ ਦਿੰਦੀ ਹੈ, ਅਤੇ ਉਹ ਅਜਿਹਾ ਉਦੋਂ ਤੱਕ ਕਰਦੀ ਹੈ ਜਦੋਂ ਤੱਕ ਸਾਰੇ ਆਲੂ ਬਾਲਟੀ ਵਿੱਚ ਨਾ ਆ ਜਾਣ। ਇਸ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਤਿਯੋਗੀ ਨੂੰ ਕੁੱਲ ਕਿੰਨੀ ਦੂਰੀ ਤੈਅ ਕਰਨੀ ਪਵੇਗੀ?

[ਸੰਕੇਤ : ਪਹਿਲੇ ਅਤੇ ਦੂਜੇ ਆਲੂਆਂ ਨੂੰ ਚੁੱਕ ਕੇ ਬਾਲਟੀ ਵਿੱਚ ਪਾਉਣ ਲਈ ਦੌੜੀ ਗਈ ਦੂਰੀ $= 2 \times 5 + 2 \times (5 + 3)$ ਹੈ।]

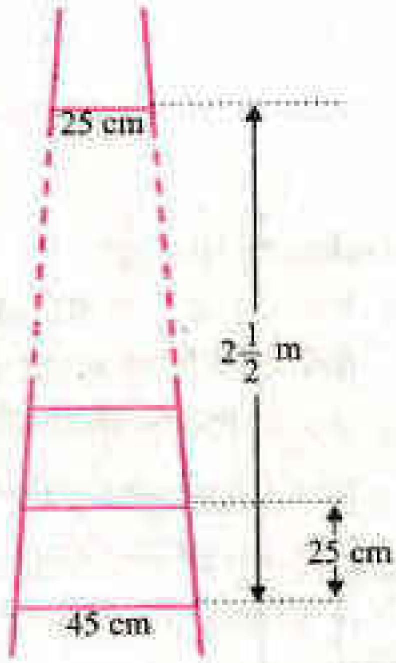
ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 5.4 (ਇੱਛਾ ਅਨੁਸਾਰ)*

1. A.P. : 121, 117, 113, . . ., ਦਾ ਕਿਹੜਾ ਪਦ ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾ ਰਿਣਾਤਮਕ ਪਦ ਹੋਵੇਗਾ?
[ਸੰਕੇਤ : $a_n < 0$ ਦੇ ਲਈ n ਪਤਾ ਕਰੋ।]

2. ਕਿਸੇ A.P. ਦੇ ਤੀਸਰੇ ਅਤੇ ਸੱਤਵੇਂ ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜ 6 ਹੈ ਅਤੇ ਉਨ੍ਹਾਂ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ 8 ਹੈ। ਇਸ A.P. ਦੇ ਪਹਿਲੇ 16 ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

* ਇਹ ਅਭਿਆਸ ਪ੍ਰੀਖਿਆਂ ਦੀ ਦ੍ਰਿਸ਼ਟੀ ਤੋਂ ਨਹੀਂ ਹੈ।

3. ਇੱਕ ਪੌੜੀ ਦੇ ਲਗਾਤਾਰ ਡੰਡੇ ਆਪਸ ਵਿੱਚ 25 cm ਦੀ ਦੂਰੀ 'ਤੇ ਹਨ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 5.7)। ਡੰਡਿਆਂ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਇੱਕ ਸਮਾਨ ਰੂਪ ਨਾਲ ਘਟਦੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਸਭ ਤੋਂ ਹੇਠਲੇ ਡੰਡੇ ਦੀ ਲੰਬਾਈ 45 cm ਹੈ ਅਤੇ ਸਭ ਤੋਂ ਉਪਰਲੇ ਡੰਡੇ ਦੀ ਲੰਬਾਈ 25 cm ਹੈ। ਜੇਕਰ ਉਪਰਲੇ ਅਤੇ ਹੇਠਲੇ ਡੰਡੇ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਦੀ ਦੂਰੀ $2\frac{1}{2}$ m ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਡੰਡਿਆਂ ਨੂੰ ਬਣਾਉਣ ਲਈ ਲੱਕੜੀ ਦੀ ਕਿੰਨੀ ਲੰਬਾਈ ਦੀ ਲੋੜ ਹੋਵੇਗੀ?



ਚਿੱਤਰ 5.7

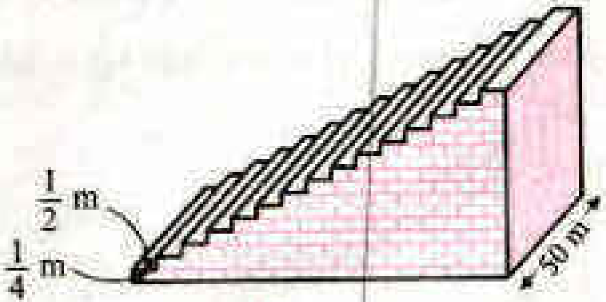
[ਸੰਕੇਤ : ਡੰਡਿਆਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ = $\frac{250}{25} + 1$ ਹੈ।]

4. ਇੱਕ ਕਤਾਰ ਵਿੱਚ ਮਕਾਨਾਂ ਨੂੰ ਲਗਾਤਾਰ ਸੰਖਿਆ 1 ਤੋਂ 49 ਨਾਲ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਦਿਖਾਉ ਕਿ x ਦਾ ਇੱਕ ਅਜਿਹਾ ਮੁੱਲ ਹੈ ਕਿ x ਨਾਲ ਦਰਸਾਏ ਮਕਾਨ ਤੋਂ ਪਹਿਲੇ ਦੇ ਮਕਾਨਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਉਸ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਵਾਲੇ ਮਕਾਨਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ। x ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

[ਸੰਕੇਤ : $S_{x-1} = S_{49} - S_x$ ਹੈ]

5. ਇੱਕ ਫੁੱਟਬਾਲ ਦੇ ਮੈਦਾਨ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਛੋਟਾ ਚਬੂਤਰਾ ਹੈ ਜਿਸ ਵਿੱਚ 15 ਪੌੜੀਆਂ ਬਣੀਆਂ ਹੋਈਆਂ ਹਨ। ਇਨ੍ਹਾਂ ਪੌੜੀਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਦੀ ਲੰਬਾਈ 50 m ਹੈ ਅਤੇ ਉਹ ਠੋਸ ਕੰਕਰੀਟ ਦੀ ਬਣੀ ਹੋਈ ਹੈ। ਹਰੇਕ ਪੌੜੀ ਵਿੱਚ $\frac{1}{4}$ m ਦੀ ਚੜ੍ਹਾਈ ਅਤੇ $\frac{1}{2}$ m ਦਾ ਫੈਲਾਵ (ਚੌੜਾਈ) ਹੈ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 5.8)। ਇਸ ਚਬੂਤਰੇ ਨੂੰ ਬਣਾਉਣ ਲਈ ਲੱਗੀ ਕੰਕਰੀਟ ਦਾ ਕੁੱਲ ਆਇਤਨ ਪਤਾ ਕਰੋ।

[ਸੰਕੇਤ : ਪਹਿਲੀ ਪੌੜੀ ਨੂੰ ਬਣਾਉਣ ਲਈ ਲੱਗੀ ਕੰਕਰੀਟ ਦਾ ਆਇਤਨ = $\frac{1}{4} \times \frac{1}{2} \times 50\ m^3$ ਹੈ]



ਚਿੱਤਰ 5.8

5.5 ਸਾਰ-ਅੰਸ਼

ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ, ਤੁਸੀਂ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਨੁਕਤਿਆਂ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕੀਤਾ ਹੈ :

1. ਇੱਕ ਅੰਕ ਗਣਿਤਕ ਲੜੀ, ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਇੱਕ ਅਜਿਹੀ ਸੂਚੀ ਹੁੰਦੀ ਹੈ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ ਪਦ (ਪਹਿਲੇ ਤੋਂ ਬਿਨਾਂ) ਆਪਣੇ ਤੋਂ ਠੀਕ ਪਹਿਲੇ ਪਦ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਸੰਖਿਆ (d) ਜੋੜ ਕੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਹ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਸੰਖਿਆ d ਇਸ ਅੰਕ ਗਣਿਤਕ ਲੜੀ ਦਾ ਸਾਂਝਾ ਅੰਤਰ ਕਹਾਉਂਦੀ ਹੈ।

   ਇੱਕ A.P. ਦਾ ਆਮ ਰੂਪ $a, a+d, a+2d, a+3d, \ldots$ ਹੈ।

2. ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਇੱਕ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਸੂਚੀ A.P. ਹੁੰਦੀ ਹੈ, ਜੇਕਰ ਅੰਤਰ $a_2 - a_1, a_3 - a_2, a_4 - a_3, \ldots$ ਤੋਂ ਇੱਕ ਹੀ ਮੁੱਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਵੇ ਭਾਵ k ਦੇ ਭਿੰਨ-ਭਿੰਨ ਮੁੱਲਾਂ ਦੇ ਲਈ $a_{k+1} - a_k$ ਇੱਕੋ ਹੋਵੇ।

3. ਪਹਿਲਾ ਪਦ a ਅਤੇ ਸਾਂਝੇ ਅੰਤਰ d ਵਾਲੀ A.P. ਦਾ nਵਾਂ ਪਦ (ਜਾਂ ਵਿਆਪਕ ਪਦ) a_n ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਸੂਤਰ ਦੁਆਰਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :

$$a_n = a + (n-1)d$$

4. ਕਿਸੇ A.P. ਦੇ ਪਹਿਲੇ n ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜ S ਸੂਤਰ

$$S = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$ ਨਾਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

5. ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਸੀਮਿਤ A.P. ਦਾ ਅੰਤਿਮ ਪਦ (ਮੰਨ ਲਉ n ਵਾਂ ਪਦ) l ਹੈ, ਤਾਂ ਇਸ A.P. ਦੇ ਸਾਰੇ ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜ S ਸੂਤਰ

$$S = \frac{n}{2}(a + l)$$ ਨਾਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਪਾਠਕਾਂ ਦੇ ਲਈ ਵਿਸ਼ੇਸ਼

ਜੇਕਰ a, b, c, A.P. ਵਿੱਚ ਹਨ ਤਾਂ $b = \frac{a+c}{2}$ ਅਤੇ b, a ਅਤੇ c ਦਾ ਅੰਕ ਗਣਿਤਕ ਮੱਧਮਾਨ ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ।

ਤ੍ਰਿਭੁਜ 6

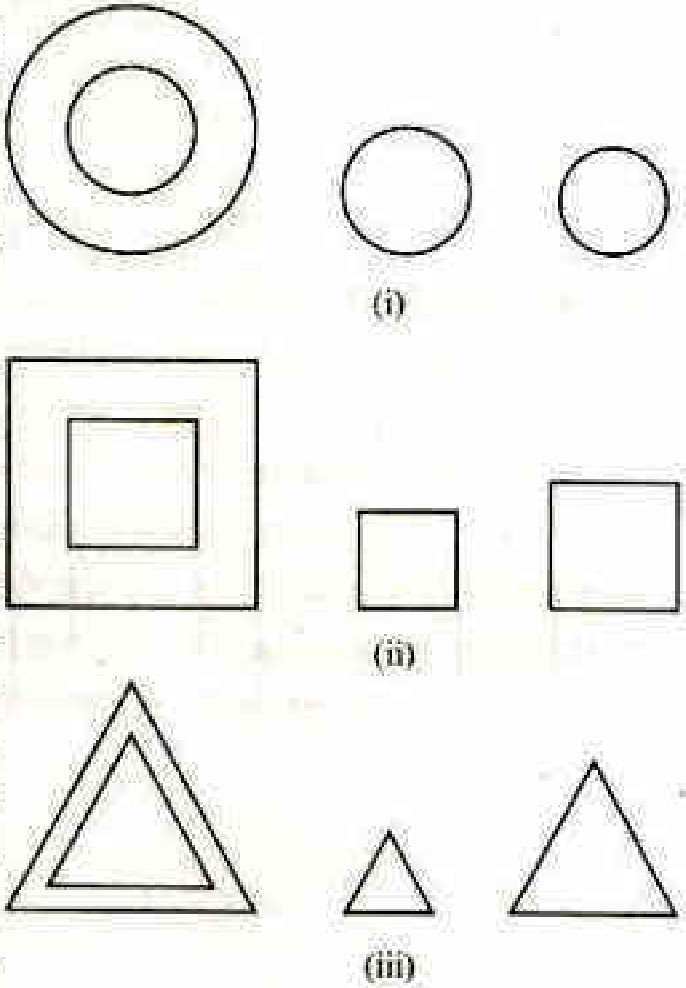
6.1 ਭੂਮਿਕਾ

ਤੁਸੀਂ ਆਪਣੀ ਪਿਛਲੀਆਂ ਜਮਾਤਾਂ ਤੋਂ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਅਤੇ ਉਨ੍ਹਾਂ ਦੇ ਗੁਣਾਂ ਤੋਂ ਚੰਗੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਜਾਣੂੰ ਹੋ। ਜਮਾਤ ਨੌਵੀਂ ਵਿੱਚ, ਤੁਸੀਂ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦੀ ਸਰਬੰਗਸਮਤਾ ਦੇ ਬਾਰੇ (ਵਿਸਥਾਰ) ਨਾਲ ਅਧਿਐਨ ਕਰ ਚੁੱਕੇ ਹੋ। ਯਾਦ ਕਰੋ ਕਿ ਦੋ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਨੂੰ ਸਰਬੰਗਸਮ ਉਦੋਂ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਜਦੋਂ ਉਨ੍ਹਾਂ ਦਾ ਸਮਾਨ ਆਕਾਰ ਅਤੇ ਸਮਾਨ ਮਾਪ ਹੋਵੇ। ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ ਅਜਿਹੀਆਂ ਆਕ੍ਰਿਤੀਆਂ ਬਾਰੇ ਅਧਿਐਨ ਕਰਾਂਗੇ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਦੇ ਆਕਾਰ (shape) ਸਮਾਨ ਹੋਣ ਪ੍ਰੰਤੂ ਮਾਪ (size) ਦਾ ਸਮਾਨ ਹੋਣਾ ਜ਼ਰੂਰੀ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਦੋ ਚਿੱਤਰ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਦੇ ਆਕਾਰ ਸਮਾਨ ਹੋਣ (ਪ੍ਰੰਤੂ ਮਾਪ ਸਮਾਨ ਹੋਣਾ ਜ਼ਰੂਰੀ ਨਹੀਂ ਹੈ) ਸਮਰੂਪ ਚਿੱਤਰ (similar figures) ਕਹਾਉਂਦੇ ਹਨ। ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਸਮਰੂਪ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦੀ ਚਰਚਾ ਕਰਾਂਗੇ ਅਤੇ ਇਸ ਜਾਣਕਾਰੀ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਪਹਿਲਾਂ ਪੜ੍ਹੀ ਹੋਈ ਪਾਈਥਾਗੋਰਸ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦਾ ਆਸਾਨ ਪ੍ਰਮਾਣ ਦੇਵਾਂਗੇ।

ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਅੰਦਾਜ਼ਾ ਲਗਾ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ ਪਹਾੜਾਂ (ਜਿਵੇਂ ਮਾਊਂਟ ਐਵਰੇਸਟ) ਦੀ ਉੱਚਾਈ ਜਾਂ ਦੂਰ ਦੀਆਂ ਵਸਤੂਆਂ (ਜਿਵੇਂ ਚੰਦਰਮਾਂ) ਦੀਆਂ ਦੂਰੀਆਂ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪਤਾ ਕੀਤੀਆਂ ਜਾਂਦੀਆਂ ਹਨ? ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਸੋਚਦੇ ਹੋ ਕਿ ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ ਇੱਕ ਮਾਪਣ ਵਾਲੇ ਫੀਤੇ ਨਾਲ ਸਿੱਧਾ ਮਾਪਿਆ ਗਿਆ ਹੈ? ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਇਨ੍ਹਾਂ ਸਾਰੀਆਂ ਉੱਚਾਈਆਂ ਅਤੇ ਦੂਰੀਆਂ ਨੂੰ ਅਪ੍ਰਤੱਖ ਮਾਪਣ ਵਿਧੀ (indirect measurement) ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ ਮਾਪਿਆ ਗਿਆ ਹੈ, ਜੋ ਚਿੱਤਰਾਂ ਦੀ ਸਮਰੂਪਤਾ ਦੇ ਸਿਧਾਂਤ ਉੱਤੇ ਨਿਰਭਰ ਹੈ (ਦੇਖੋ ਉਦਾਹਰਣ 7, ਅਭਿਆਸ 6.3 ਦਾ ਪ੍ਰਸ਼ਨ 15 ਅਤੇ ਇਸੇ ਪੁਸਤਕ ਦੇ ਅਧਿਆਇ 8 ਅਤੇ 9)।

6.2 ਸਮਰੂਪ ਚਿੱਤਰ

ਜਮਾਤ ਨੌਵੀਂ ਵਿੱਚ, ਤੁਸੀਂ ਦੇਖਿਆ ਕਿ ਬਰਾਬਰ ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਵਾਲੇ ਸਾਰੇ ਚੱਕਰ ਸਰਬੰਗਸਮ ਹੁੰਦੇ ਹਨ, ਬਰਾਬਰ ਲੰਬਾਈ ਦੀ ਭੁਜਾ ਵਾਲੇ ਸਾਰੇ ਵਰਗ ਸਰਬੰਗਸਮ ਹੁੰਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਬਰਾਬਰ ਲੰਬਾਈ ਦੀ ਭੁਜਾ ਵਾਲੇ ਸਾਰੇ ਸਮਭੁਜੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਸਰਬੰਗਸਮ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।



ਚਿੱਤਰ 6.1

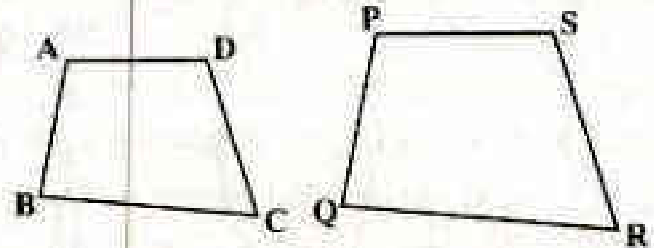
ਹੁਣ ਕਿਸੇ ਦੋ (ਜਾਂ ਅਧਿਕ) ਚੱਕਰਾਂ ਉੱਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ [ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 6.1 (i)]। ਕੀ ਇਹ ਸਰਬੰਗਸਮ ਹਨ? ਕਿਉਂਕਿ ਇਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਸਾਰਿਆਂ ਦੇ ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਇੱਕ ਸਮਾਨ ਨਹੀਂ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ, ਇਹ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਸਰਬੰਗਸਮ ਨਹੀਂ ਹਨ। ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਇਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕੁਝ ਸਰਬੰਗਸਮ ਹਨ ਅਤੇ ਕੁਝ ਨਹੀਂ ਹਨ, ਪ੍ਰੰਤੂ ਇਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਦੇ ਆਕਾਰ ਇੱਕੋ ਜਿਹੇ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ, ਇਹ ਸਾਰੇ ਉਹ ਚਿੱਤਰ ਹਨ ਜਿਨਾਂ ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਸਮਰੂਪ (similar) ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ। ਦੋ ਸਮਰੂਪ ਚਿੱਤਰਾਂ ਦੇ ਆਕਾਰ ਸਮਾਨ ਹੁੰਦੇ ਹਨ ਪ੍ਰੰਤੂ ਇਨਾਂ ਦੇ ਮਾਪ ਸਮਾਨ ਹੋਣਾ ਜਰੂਰੀ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ, ਸਾਰੇ ਚੱਕਰ ਸਮਰੂਪ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

ਦੋ ਜਾਂ ਅਧਿਕ ਵਰਗਾਂ ਬਾਰੇ ਜਾਂ ਦੋ ਅਧਿਕ ਸਮਭੁਜੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਬਾਰੇ ਤੁਸੀਂ ਕੀ ਸੋਚਦੇ ਹੋ? [ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 6.1 (ii) ਅਤੇ (iii)] ਸਾਰੇ ਚੱਕਰਾਂ ਦੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੀ, ਇਥੇ ਸਾਰੇ ਵਰਗ ਸਮਰੂਪ ਹਨ ਅਤੇ ਸਾਰੀਆਂ ਸਮਭੁਜੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਸਮਰੂਪ ਹਨ।

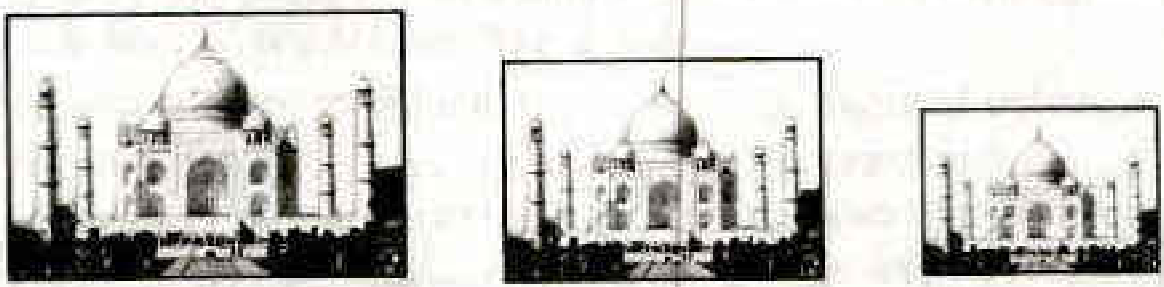
ਉਪਰੋਕਤ ਚਰਚਾ ਤੋਂ, ਅਸੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਸਾਰੇ ਸਰਬੰਗਸਮ ਚਿੱਤਰ ਸਮਰੂਪ ਹੁੰਦੇ ਹਨ, ਪ੍ਰੰਤੂ ਸਾਰੇ ਸਮਰੂਪ ਚਿੱਤਰਾਂ ਦਾ ਸਰਬੰਗਸਮ ਹੋਣਾ ਜਰੂਰੀ ਨਹੀਂ ਹੈ।

ਕੀ ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਅਤੇ ਇੱਕ ਵਰਗ ਸਮਰੂਪ ਹੋ ਸਕਦੇ ਹਨ? ਕੀ ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਅਤੇ ਇੱਕ ਵਰਗ ਸਮਰੂਪ ਹੋ ਸਕਦੇ ਹਨ? ਇਨਾਂ ਚਿੱਤਰਾਂ ਨੂੰ ਦੇਖਦਿਆਂ ਹੀ ਤੁਸੀਂ ਉੱਤਰ ਦੇ ਸਕਦੇ ਹੋ [ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 6.1]। ਸਪਸ਼ਟ ਸ਼ਬਦਾਂ ਵਿੱਚ, ਇਹ ਚਿੱਤਰ ਸਮਰੂਪ ਨਹੀਂ ਹਨ। (ਕਿਉਂ?)

ਤੁਸੀਂ ਦੋ ਚਤੁਰਭੁਜਾਂ ABCD ਅਤੇ PQRS ਦੇ ਬਾਰੇ ਵਿੱਚ ਕੀ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹੋ? [ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 6.2] ਕੀ ਇਹ ਚਿੱਤਰ ਸਮਰੂਪ ਹਨ? ਇਹ ਚਿੱਤਰ ਸਮਰੂਪ ਜਾਪਦੇ ਹਨ ਪ੍ਰੰਤੂ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਰੂਪ ਨਾਲ ਅਸੀਂ ਕੁਝ ਨਹੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ। ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਜਰੂਰੀ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਕਿ ਅਸੀਂ ਸਮਰੂਪ ਚਿੱਤਰਾਂ ਦੇ ਬਾਰੇ ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਪਤਾ ਕਰੀਏ ਅਤੇ ਇਸ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਦੇ ਆਧਾਰ ਤੇ ਇਹ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਕਰਨ ਲਈ ਕਿ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਦੋ ਚਿੱਤਰ ਸਮਰੂਪ ਹਨ ਜਾਂ ਨਹੀਂ, ਕੁਝ ਨਿਯਮ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਆਓ ਚਿੱਤਰ 6.3 ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਚਿੱਤਰਾਂ ਨੂੰ ਦੇਖੀਏ :



ਚਿੱਤਰ 6.2



ਚਿੱਤਰ 6.3

ਤੁਸੀਂ ਤਰੁੰਤ ਹੀ ਕਹੋਗੇ ਕਿ ਇਹ ਇੱਕ ਹੀ ਯਾਦਗਾਰ (ਤਾਜ ਮਹਿਲ) ਦੇ ਚਿੱਤਰ ਹਨ ਪ੍ਰੰਤੂ ਇਹ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਮਾਪ ਦੇ ਹਨ। ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਇਹ ਕਹੋਗੇ ਕਿ ਇਹ ਚਿੱਤਰ ਸਮਰੂਪ ਹਨ? ਹਾਂ, ਇਹ ਹਨ। ਤੁਸੀਂ ਇਕੋ ਵਿਅਕਤੀ ਦੇ ਇਕੋ ਮਾਪ ਵਾਲੇ ਉਨਾਂ ਦੇ ਚਿੱਤਰਾਂ ਬਾਰੇ ਕੀ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹੋ ਜਿਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਉਸਦੀ 10 ਸਾਲ ਦੀ ਉਮਰ ਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਦੂਜਾ ਉਸਦੀ 40 ਸਾਲ ਦੀ ਉਮਰ ਦਾ ਹੈ। ਕੀ ਇਹ ਦੋਵੇਂ ਚਿੱਤਰ ਸਮਰੂਪ ਹਨ? ਇਹ ਚਿੱਤਰ ਸਮਾਨ ਮਾਪ ਦੇ ਹਨ, ਪ੍ਰੰਤੂ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਰੂਪ ਨਾਲ ਇਹ ਸਮਾਨ ਆਕਾਰ ਵਾਲੇ ਨਹੀਂ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ, ਇਹ ਸਮਰੂਪ ਨਹੀਂ ਹਨ।

ਜਦੋਂ ਕੋਈ ਫੋਟੋਗ੍ਰਾਫਰ ਇੱਕ ਹੀ ਨੈਗੇਟਿਵ ਨਾਲ ਭਿੰਨ-2 ਮਾਪਾਂ ਵਾਲੇ ਫੋਟੋ ਪ੍ਰਿੰਟ ਕੱਢਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਉਹ ਕੀ ਕਰਦਾ ਹੈ? ਤੁਸੀਂ ਟਿਕਟ ਸਾਈਜ, ਪਾਸਪੋਰਟ ਸਾਈਜ ਅਤੇ ਪੋਸਟ ਕਾਰਡ ਸਾਈਜ ਫੋਟੋ (ਜਾਂ ਚਿੱਤਰਾਂ) ਬਾਰੇ ਜ਼ਰੂਰ ਸੁਣਿਆ ਹੋਵੇਗਾ। ਉਹ ਸਾਧਾਰਣ ਰੂਪ ਵਿੱਚ, ਇੱਕ ਛੋਟੇ ਮਾਪ (size) ਦੀ ਫਿਲਮ (film), ਮੰਨ ਲਓ 35 mm ਮਾਪ ਦੀ ਫਿਲਮ ਹੈ, ਉਤੇ ਫੋਟੋ ਖਿੱਚਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਫਿਰ ਉਸ ਨੂੰ ਇੱਕ ਵੱਡੇ ਮਾਪ, ਜਿਵੇਂ 45 mm (ਜਾਂ 55 mm) ਮਾਪ ਵਾਲੀ ਫੋਟੋ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਵਧਾਉਂਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ, ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਛੋਟੇ ਚਿੱਤਰ ਦੇ ਕਿਸੇ ਇੱਕ ਰੇਖਾ-ਖੰਡ ਨੂੰ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ, ਤਾਂ ਵੱਡੇ ਚਿੱਤਰ ਵਿੱਚ ਇਸ ਦਾ ਸੰਗਤ

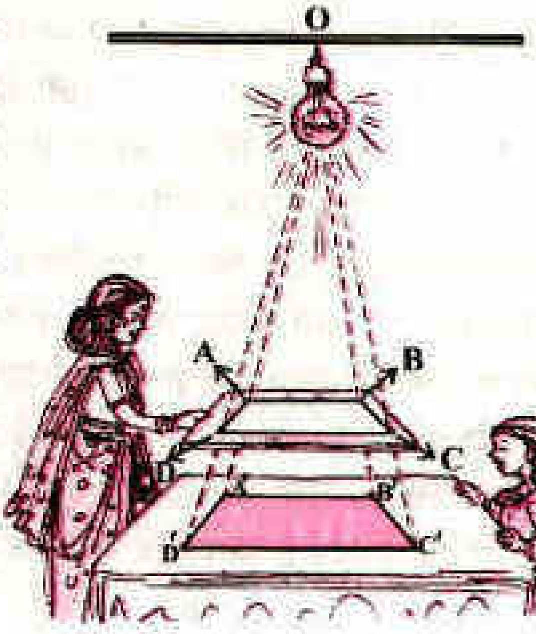
ਰੇਖਾਖੰਡ ਲੰਬਾਈ ਵਿੱਚ ਪਹਿਲੇ ਰੇਖਾਖੰਡ ਦਾ $\frac{45}{35}$ $\left(\text{ਜਾਂ } \frac{55}{35}\right)$ ਗੁਣਾ ਹੋਵੇਗਾ। ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਇਸ ਦਾ ਅਰਥ ਇਹ ਹੈ ਕਿ ਛੋਟੇ ਚਿੱਤਰ ਦਾ ਹਰੇਕ ਰੇਖਾਖੰਡ 35 : 45 (ਜਾਂ 35 : 55) ਦੇ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਵੱਧ ਗਿਆ ਹੈ। ਇਸ ਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਵੀ ਕਿਹਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਕਿ ਵੱਡੇ ਚਿੱਤਰ ਦਾ ਹਰੇਕ ਰੇਖਾਖੰਡ 45 : 35 (ਜਾਂ 55 :35) ਦੇ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਘੱਟ ਗਿਆ ਹੈ। ਇਸ ਦੇ ਨਾਲ-2 ਜੇਕਰ ਤੁਸੀਂ ਭਿੰਨ-2 ਮਾਪ ਵਾਲੇ ਦੋ ਚਿੱਤਰਾਂ ਵਿੱਚ ਸੰਗਤ ਰੇਖਾਖੰਡਾਂ ਦੇ ਕਿਸੇ ਵੀ ਜੋੜੇ ਦੇ ਵਿੱਚਕਾਰ ਬਣੇ ਕੋਣਾਂ ਨੂੰ ਲਵੋਗੇ ਤਾਂ ਤੁਸੀਂ ਦੇਖੋਗੇ ਕਿ ਇਹ ਕੋਣ ਹਮੇਸ਼ਾ ਬਰਾਬਰ ਹੋਣਗੇ। ਇਹੀ ਦੋ ਚਿੱਤਰਾਂ ਅਤੇ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਕਰਕੇ ਦੋ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦੀ ਸਮਰੂਪਤਾ ਦਾ ਸਾਰ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ:

ਭੁਜਾਵਾਂ ਦੀ ਸਮਾਨ ਸੰਖਿਆ ਵਾਲੇ ਦੋ ਬਹੁਭੁਜ ਸਮਰੂਪ ਹੁੰਦੇ ਹਨ, ਜੇਕਰ (i) ਉਨ੍ਹਾਂ ਦੇ ਸੰਗਤ ਕੋਣ ਬਰਾਬਰ ਹੋਣ (ii) ਉਨ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਸੰਗਤ ਭੁਜਾਵਾਂ ਇੱਕ ਹੀ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਹੋਣ (ਭਾਵ ਸਮਾਨ ਅਨੁਪਾਤੀ) ਹੋਣ।

ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ ਬਹੁਭੁਜਾਂ ਲਈ ਸੰਗਤ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦੇ ਇਸ ਇੱਕ ਹੀ ਅਨੁਪਾਤ ਨੂੰ *ਸਕੇਲ ਗੁਣਕ (scale factor)*[ਜਾਂ *ਪ੍ਰਤੀਨਿਧਤਵ ਭਿੰਨ (Representative Fraction)*] ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਤੁਸੀਂ ਇਹ ਜਰੂਰ ਸੁਣਿਆ ਹੋਵੇਗਾ ਕਿ *ਸੰਸਾਰ ਦਾ ਨਕਸ਼ਾ* ਅਤੇ ਭਵਨਾਂ ਦੇ ਨਿਰਮਾਣ ਲਈ ਬਣਾਈ ਜਾਣ ਵਾਲੀ ਰੂਪ ਰੇਖਾ ਇੱਕ ਉਪਯੁਕਤ ਸਕੇਲ ਗੁਣਕ ਅਤੇ ਕੁਝ ਰਿਵਾਇਤਾਂ (conventions) ਨੂੰ ਧਿਆਨ ਵਿੱਚ ਰੱਖ ਕੇ ਬਣਾਏ ਜਾਂਦੇ ਹਨ।

ਚਿੱਤਰਾਂ ਦੀ ਸਮਰੂਪਤਾ ਨੂੰ ਵੱਧ ਸਪਸ਼ਟ ਰੂਪ ਨਾਲ ਸਮਝਾਉਣ ਲਈ ਆਉ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀ ਕਿਰਿਆ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਕਿਰਿਆ 1 : ਆਪਣੀ ਜਮਾਤ ਦੇ ਕਮਰੇ ਦੀ ਛੱਤ ਦੇ ਕਿਸੇ ਬਿੰਦੂ O 'ਤੇ ਰੋਸ਼ਨੀਵਾਲਾ ਬੱਲਬ ਲਗਾਉ ਅਤੇ ਉਸਦੇ ਠੀਕ ਹੇਠਾਂ ਇੱਕ ਮੇਜ਼ ਰੱਖੋ। ਇੱਕ ਸਮਤਲ ਗੱਤੇ ਵਿਚੋਂ ਇੱਕ ਬਹੁਭੁਜ, ਮੰਨ ਲਉ ਚਤੁਰਭੁਜ ABCD, ਕੱਟੋ ਅਤੇ ਇਸ ਗੱਤੇ ਨੂੰ ਜ਼ਮੀਨ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਮੇਜ਼ ਅਤੇ ਜਗਦੇ ਹੋਏ ਬੱਲਬ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਰੱਖੋ। ਮੇਜ਼ 'ਤੇ ABCD ਦਾ ਇੱਕ ਪਰਛਾਵਾਂ ਬਣੇਗਾ। ਇਸ ਦੀ ਬਾਹਰੀ ਰੂਪ ਰੇਖਾ ਨੂੰ A'B'C'D' ਨਾਲ ਦਰਸਾਓ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 6.4)।



ਚਿੱਤਰ 6.4

ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ਚਤੁਰਭੁਜ A'B'C'D' ਚਤੁਰਭੁਜ ABCD ਦਾ ਇੱਕ ਆਕਾਰ ਵਡਿਆਉਣਾ

(Enlargement) ਜਾਂ ਵੱਡਾ ਰੂਪ ਹੈ। ਇਹ ਪ੍ਰਕਾਸ਼ ਦੇ ਇਸ ਗੁਣ ਕਾਰਣ ਹੈ ਕਿ ਪ੍ਰਕਾਸ਼ ਸਿਧੀ ਰੇਖਾ ਵਿੱਚ ਚੱਲਦਾ ਹੈ। ਤੁਸੀਂ ਇਹ ਵੀ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ A′ ਕਿਰਨ OA ਉੱਤੇ ਸਥਿਤ ਹੈ, B′ ਕਿਰਨ OB ਉੱਤੇ ਸਥਿਤ ਹੈ, C′ ਕਿਰਣ OC ਉੱਤੇ ਸਥਿਤ ਹੈ ਅਤੇ D′ ਕਿਰਣ OD ਉੱਤੇ ਸਥਿਤ ਹੈ। ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਚਤੁਰਭੁਜ A′B′C′D′ ਅਤੇ ABCD ਸਮਾਨ ਆਕਾਰ ਦੇ ਹਨ, ਪ੍ਰੰਤੂ ਇਨ੍ਹਾਂ ਦੇ ਮਾਪ ਭਿੰਨ-ਭਿੰਨ ਹਨ।

ਇਸ ਲਈ, ਚਤੁਰਭੁਜ A′B′C′D′ ਚਤੁਰਭੁਜ ABCD ਦੇ ਸਮਰੂਪ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਇਹ ਵੀ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ABCD ਚਤੁਰਭੁਜ A′B′C′D′ ਦੇ ਸਮਰੂਪ ਹੈ।

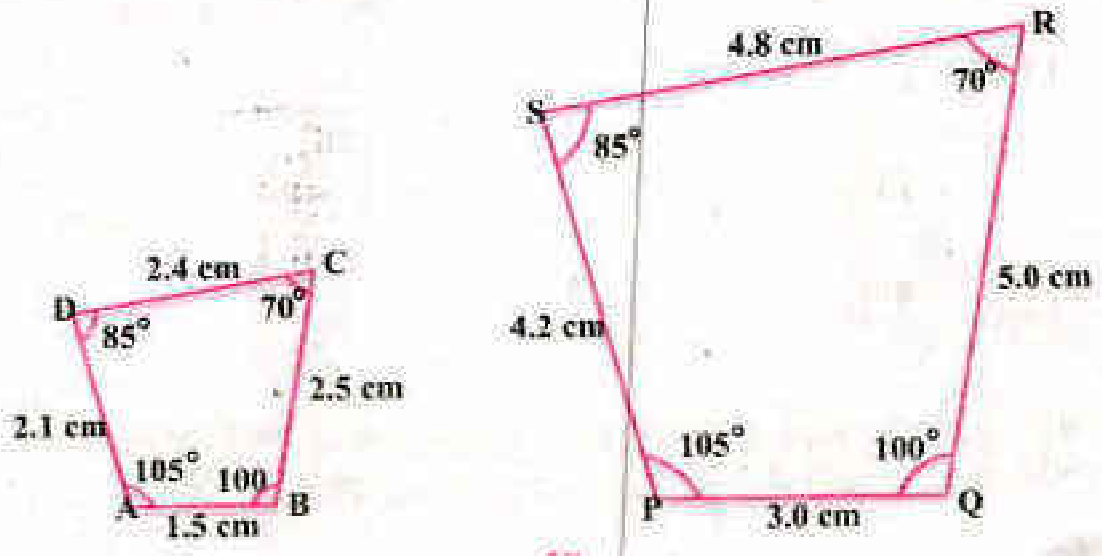
ਇੱਥੇ ਤੁਸੀਂ ਇਹ ਵੀ ਦੇਖ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ ਸਿਖਰ A′ ਸਿਖਰ A ਦੇ ਸੰਗਤ ਹੈ, ਸਿਖ਼ਰ B′ ਸਿਖ਼ਰ B ਦੇ ਸੰਗਤ ਹੈ, ਸਿਖ਼ਰ C′ ਸਿਖ਼ਰ C ਦੇ ਸੰਗਤ ਹੈ ਅਤੇ ਸਿਖ਼ਰ D′ ਸਿਖ਼ਰ D ਦੇ ਸੰਗਤ ਹੈ। ਸੰਕੇਤਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਇਨ੍ਹਾਂ ਸੰਗਤਤਾਵਾਂ (correspondences) ਨੂੰ $A' \leftrightarrow A$, $B' \leftrightarrow B$, $C' \leftrightarrow C$ ਅਤੇ $D' \leftrightarrow D$ ਨਾਲ ਨਿਰੂਪਤ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਦੋਵੇਂ ਚਤੁਰਭੁਜਾਂ ਦੇ ਕੋਣਾਂ ਅਤੇ ਭੁਜਾਵਾਂ ਨੂੰ ਅਸਲ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਮਾਪ ਕੇ, ਤੁਸੀਂ ਇਹ ਦਿਖਾ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ

(i) $\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$, $\angle C = \angle C'$, $\angle D = \angle D'$ ਅਤੇ

(ii) $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{BC}{B'C'} = \dfrac{CD}{C'D'} = \dfrac{DA}{D'A'}$.

ਇਸ ਨਾਲ ਦੁਬਾਰਾ ਇਹ ਗੱਲ ਸਪਸ਼ਟ ਹੋ ਜਾਂਦੀ ਹੈ ਕਿ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦੀ ਸਮਾਨ ਸੰਖਿਆ ਵਾਲੇ ਦੋ ਬਹੁਭੁਜ ਸਮਰੂਪ ਹੁੰਦੇ ਹਨ, ਜੇਕਰ (i) ਉਨ੍ਹਾਂ ਦੇ ਸਾਰੇ ਸੰਗਤ ਕੋਣ ਬਰਾਬਰ ਹੋਣ ਅਤੇ (ii) ਉਨ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਸਾਰੀਆਂ ਸੰਗਤ ਭੁਜਾਵਾਂ ਇੱਕ ਹੀ ਅਨੁਪਾਤ (ਸਮਾਨ-ਅਨੁਪਾਤ) ਵਿੱਚ ਹੋਣ।

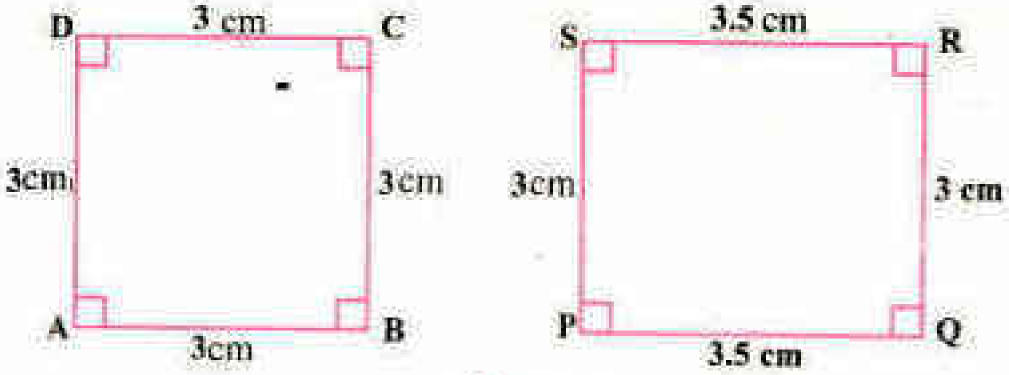
ਉਪਰੋਕਤ ਦੇ ਆਧਾਰ 'ਤੇ, ਤੁਸੀਂ ਆਸਾਨੀ ਨਾਲ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ ਚਿੱਤਰ 6.5 ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਚਤੁਰਭੁਜ ABCD ਅਤੇ PQRS ਸਮਰੂਪ ਹਨ।



ਚਿੱਤਰ 6.5

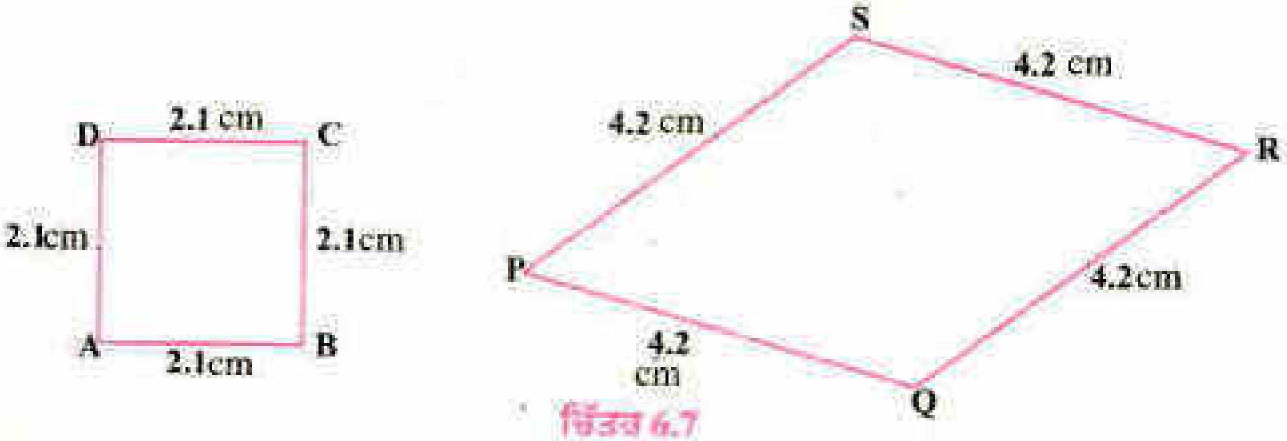
ਟਿੱਪਣੀ : ਤੁਸੀਂ ਇਹ ਵੀ ਵਿਖਾ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਬਹੁਭੁਜ ਕਿਸੇ ਹੋਰ ਬਹੁਭੁਜ ਦੇ ਸਮਰੂਪ ਹੋਵੇ ਅਤੇ ਇਹ ਦੂਸਰਾ ਬਹੁਭੁਜ ਇੱਕ ਤੀਸਰੇ ਬਹੁਭੁਜ ਦੇ ਸਮਰੂਪ ਹੋਵੇ, ਤਾਂ ਪਹਿਲਾ ਬਹੁਭੁਜ ਤੀਸਰੇ ਬਹੁਭੁਜ ਦੇ ਸਮਰੂਪ ਹੋਵੇਗਾ।

ਤੁਸੀਂ ਦੇਖ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ ਚਿੱਤਰ 6.6 ਵਿੱਚ ਦੋ ਚਤੁਰਭੁਜਾਂ (ਵਿੱਚ ਵਰਗ ਅਤੇ ਇੱਕ ਆਇਤ) ਵਿੱਚ ਸੰਗਤ ਕੋਣ ਬਰਾਬਰ ਹਨ ਪ੍ਰੰਤੂ ਇਨ੍ਹਾਂ ਦੀਆ ਸੰਗਤ ਭੁਜਾਵਾਂ ਇੱਕੋ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਨਹੀਂ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ, ਇਹ ਦੋਵੇਂ ਚਤੁਰਭੁਜ ਸਮਰੂਪ ਨਹੀਂ ਹਨ।



ਚਿੱਤਰ 6.6

ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਤੁਸੀਂ ਦੇਖ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ ਚਿੱਤਰ 6.7 ਦੀਆਂ ਦੋ ਚਤੁਰਭੁਜਾਂ (ਇੱਕ ਵਰਗ ਅਤੇ ਇੱਕ ਸਮਚਤੁਰਭੁਜ) ਵਿੱਚ, ਸੰਗਤ ਭੁਜਾਵਾਂ ਇੱਕ ਹੀ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਹਨ ਪ੍ਰੰਤੂ ਇਨਾਂ ਦੇ ਸੰਗਤ ਕੋਣ ਬਰਾਬਰ ਨਹੀਂ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ,ਇਹ ਦੋਵੇਂ ਬਹੁਭੁਜਾਂ (ਚਤੁਰਭੁਜਾਂ) ਵੀ ਸਮਰੂਪ ਨਹੀਂ ਹਨ।



ਚਿੱਤਰ 6.7

ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ, ਤੁਸੀਂ ਦੇਖ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ ਦੋ ਬਹੁਭੁਜਾਂ ਦੀ ਸਮਰੂਪਤਾ ਦੇ ਲਈ ਸ਼ਰਤਾਂ *(i)* ਅਤੇ *(ii)* *ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਸੇ ਇੱਕ ਦਾ ਹੀ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਹੋਣਾ ਉਨ੍ਹਾਂ ਦੀ ਸਮਰੂਪਤਾ ਲਈ ਕਾਫ਼ੀ ਨਹੀਂ ਹੈ।*

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 6.1

1. ਬਰੈਕਟਾਂ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਸ਼ਬਦਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਸਹੀ ਸ਼ਬਦਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ, ਖ਼ਾਲੀ ਸਥਾਨ ਭਰੋ :
   (i) ਸਾਰੇ ਚੱਕਰ ——— ਹੁੰਦੇ ਹਨ। (ਸਰਬੰਗਸਮ, ਸਮਰੂਪ)

(ii) ਸਾਰੇ ਵਰਗ——— ਹੁੰਦੇ ਹਨ। (ਸਮਰੂਪ, ਸਰਬੰਗਸਮ)

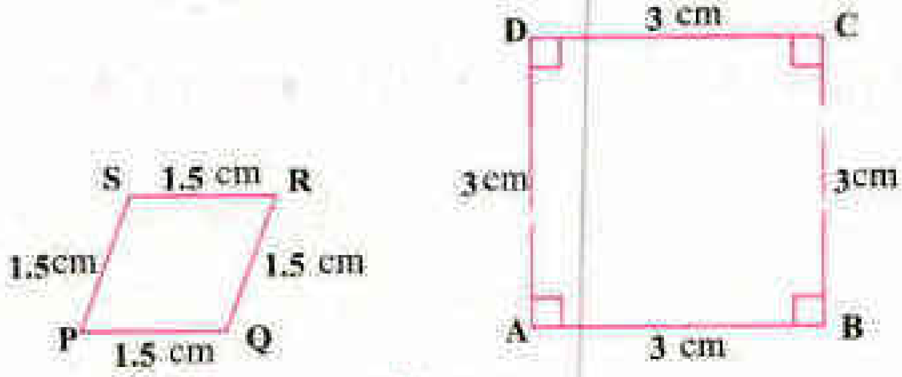
(iii) ਸਾਰੇ ——— ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਸਮਰੂਪ ਹੁੰਦੇ ਹਨ (ਸਮਦੋਭੁਜੀ, ਸਮਭੁਜੀ)

(iv) ਭੁਜਾਵਾਂ ਦੀ ਇੱਕ ਸਮਾਨ ਸੰਖਿਆ ਵਾਲੇ ਦੋ ਬਹੁਭੁਜ ਸਮਰੂਪ ਹੁੰਦੇ ਹਨ ਜੇਕਰ (i) ਉਨ੍ਹਾਂ ਦੇ ਸੰਗਤ ਕੋਣ——— ਹੋਣ ਅਤੇ (ii) ਉਨ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਸੰਗਤ ਭੁਜਾਵਾਂ ——— ਹੋਣ। (ਬਰਾਬਰ, ਸਮਾਨੁਪਾਤੀ)

2. ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਜੋੜਿਆਂ ਦੀਆਂ ਦੋ ਭਿੰਨ-ਭਿੰਨ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਦਿਉ :

(i) ਸਮਰੂਪ ਚਿੱਤਰ (ii) ਅਜਿਹੇ ਚਿੱਤਰ ਜੋ ਸਮਰੂਪ ਨਹੀਂ ਹਨ।

3. ਦੱਸੋ ਕਿ ਹੇਠ ਦਿੱਤੇ ਚਤੁਰਭੁਜ ਸਮਰੂਪ ਹਨ ਜਾਂ ਨਹੀਂ



ਚਿੱਤਰ 6.8

6.3 ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦੀ ਸਮਰੂਪਤਾ

ਤੁਸੀਂ ਦੋ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦੀ ਸਮਰੂਪਤਾ ਦੇ ਬਾਰੇ ਵਿੱਚ ਕੀ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹੋ?

ਤੁਹਾਨੂੰ ਯਾਦ ਹੋਵੇਗਾ ਕਿ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਵੀ ਇੱਕ ਬਹੁਭੁਜ ਹੀ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ, ਅਸੀਂ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦੀ ਸਮਰੂਪਤਾ ਲਈ ਵੀ ਉਹੀ ਸ਼ਰਤਾਂ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ, ਜੋ ਬਹੁਭੁਜਾਂ ਦੀ ਸਮਰੂਪਤਾਂ ਲਈ ਲਿਖੀਆਂ ਸਨ। ਭਾਵ

ਦੋ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਸਮਰੂਪ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ, ਜੇਕਰ

(i) ਉਨਾਂ ਦੇ ਸੰਗਤ ਕੋਣ ਬਰਾਬਰ ਹੋਣ ਅਤੇ

(ii) ਉਨਾਂ ਦੀਆਂ ਸੰਗਤ ਭੁਜਾਵਾਂ ਇੱਕ ਹੀ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ (ਭਾਵ ਸਮਾਨ-ਅਨੁਪਾਤੀ) ਹੋਣ

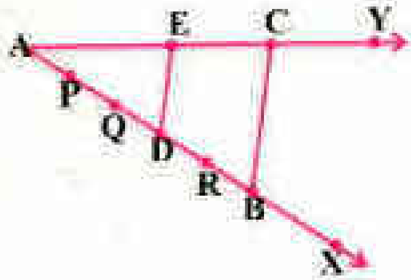
ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ਜੇਕਰ ਦੋ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦੇ ਸੰਗਤ ਕੋਣ ਬਰਾਬਰ ਹੋਣ, ਤਾਂ ਉਹ ਸਮਾਨ ਕੋਣੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ (equiangular triangles) ਕਹਾਉਂਦੀਆਂ ਹਨ। ਇੱਕ ਪ੍ਰਸਿੱਧ ਯੂਨਾਨੀ ਗਣਿਤ ਸ਼ਾਸਤਰੀ ਥੇਲਸ (Thales) ਨੇ ਦੋ ਸਮਾਨ ਕੋਣੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਲਈ ਇੱਕ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਤੱਥ ਬਾਰੇ ਦੱਸਿਆ ਜੋ ਅੱਗੇ ਲਿਖੇ ਅਨੁਸਾਰ ਹੈ:

ਥੇਲਸ
(ਈ.ਪੂ. 640 – 546)

ਦੋ ਸਮਾਨ ਕੋਣੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਵਿੱਚ ਉਨ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਸੰਗਤ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦਾ ਅਨੁਪਾਤ ਹਮੇਸ਼ਾ ਸਮਾਨ ਰਹਿੰਦਾ ਹੈ।

ਅਜਿਹਾ ਵਿਸ਼ਵਾਸ਼ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਕਿ ਇਸ ਦੇ ਲਈ ਉਨ੍ਹਾਂ ਨੇ ਇੱਕ ਪਰਿਣਾਮ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤਾ ਜਿਸਨੂੰ ਮੂਲ ਸਮਾਨ ਅਨੁਪਾਤਤਾ ਪ੍ਰਮੇਯ (ਅੱਜਕਲ ਥੇਲਸ ਪ੍ਰਮੇਯ) ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਮੂਲ ਸਮਾਨ ਅਨੁਪਾਤਤਾ ਪ੍ਰਮੇਯ (Basic Proportionality Theorem) ਨੂੰ ਸਮਝਣ ਲਈ ਆਉ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੀ ਕਿਰਿਆ ਕਰੀਏ:



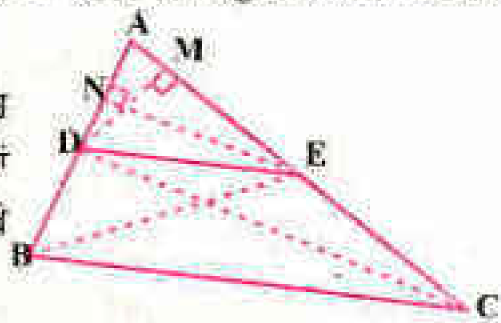
ਚਿੱਤਰ 6.9

ਕਿਰਿਆ 2 : ਕੋਈ ਕੋਣ XAY ਖਿਚੋ ਅਤੇ ਉਸਦੀ ਇੱਕ ਭੁਜਾ AX ਉੱਤੇ ਕੁਝ ਬਿੰਦੂ (ਮੰਨ ਲਉ ਪੰਜ ਬਿੰਦੂ) P, Q, D, R ਅਤੇ B ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅੰਕਿਤ ਕਰੋ ਕਿ AP = PQ = QD = DR = RB ਹੋਵੇ।

ਹੁਣ ਬਿੰਦੂ B ਤੋਂ ਹੁੰਦੀ ਹੋਈ ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਖਿੱਚੋ, ਜੋ ਭੁਜਾ AY ਨੂੰ ਬਿੰਦੂ C 'ਤੇ ਕੱਟੇ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 6.9)।

ਇਸ ਦੇ ਨਾਲ ਨਾਲ, ਬਿੰਦੂ D ਤੋਂ BC ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਖਿੱਚੋ, ਜੋ AC ਨੂੰ E 'ਤੇ ਕੱਟੇ। ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਆਪਣੀਆਂ ਰਚਨਾਵਾਂ ਤੋਂ ਦੇਖ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ $\frac{AD}{DB} = \frac{3}{2}$ ਹੈ? AE ਅਤੇ EC ਨੂੰ ਮਾਪੋ। $\frac{AE}{EC}$ ਕੀ ਹੈ? ਦੇਖੋ $\frac{AE}{EC}$ ਵੀ $\frac{3}{2}$ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ। ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ, ਤੁਸੀਂ ਦੇਖ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ ΔABC ਵਿੱਚ $DE \parallel BC$ ਹੈ ਅਤੇ $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ ਹੈ। ਕੀ ਇਹ ਸਿਰਫ਼ ਸੰਜੋਗ ਹੈ? ਨਹੀਂ, ਇਹ ਹੇਠ ਦਿੱਤੀ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦੇ ਕਾਰਨ ਹੈ (ਜਿਸ ਨੂੰ ਮੂਲ ਸਮਾਨ ਅਨੁਪਾਤਤਾ ਪ੍ਰਮੇਯ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ) :

ਪ੍ਰਮੇਯ 6.1: *ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀ ਇੱਕ ਭੁਜਾ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਬਾਕੀ ਦੋ ਭੁਜਾਵਾਂ ਨੂੰ ਭਿੰਨ-ਭਿੰਨ ਬਿੰਦੂਆਂ 'ਤੇ ਕੱਟਦੀ ਹੋਈ ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਖਿੱਚੀ ਜਾਵੇ, ਤਾਂ ਬਾਕੀ ਦੋ ਭੁਜਾਵਾਂ ਇੱਕ ਹੀ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਵੰਡੀਆਂ ਜਾਂਦੀਆਂ ਹਨ।*



ਚਿੱਤਰ 6.10

ਸਬੂਤ : ਸਾਨੂੰ ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਹੈ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਭੁਜਾ BC ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਖਿੱਚੀ ਗਈ ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਬਾਕੀ ਦੋ ਭੁਜਾਵਾਂ AB ਅਤੇ AC ਨੂੰ ਕ੍ਰਮਵਾਰ D ਅਤੇ E ਉੱਤੇ ਕੱਟਦੀ ਹੈ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 6.10)।

ਅਸੀਂ ਸਿੱਧ ਕਰਨਾ ਹੈ ਕਿ $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$

ਆਉ B ਅਤੇ E ਅਤੇ C ਅਤੇ D ਨੂੰ ਮਿਲਾਈਏ ਅਤੇ ਫਿਰ $DM \perp AC$ ਅਤੇ $EN \perp AB$ ਖਿੱਚੀਏ।

ਹੁਣ, Δ ADE ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ = ($\frac{1}{2}$ ਆਧਾਰ × ਉੱਚਾਈ) = $\frac{1}{2}$ AD × EN

ਜਮਾਤ ਨੌਵੀਂ ਤੋਂ ਯਾਦ ਕਰੋ ਕਿ Δ ADE ਦੇ ਖੇਤਰਫਲ ਨੂੰ ar (ADE) ਨਾਲ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ $\quad \text{ar(ADE)} = \frac{1}{2}\, \text{AD} \times \text{EN}$

ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ $\quad \text{ar (BDE)} = \frac{1}{2}\, \text{DB} \times \text{EN},$

$\text{ar (ADE)} = \frac{1}{2}\, \text{AE} \times \text{DM}$ ਅਤੇ $\text{ar(DEC)} = \frac{1}{2}\, \text{EC} \times \text{DM}$

ਇਸ ਲਈ
$$\frac{\text{ar(ADE)}}{\text{ar(BDE)}} = \frac{\frac{1}{2}\, \text{AD} \times \text{EN}}{\frac{1}{2}\, \text{DB} \times \text{EN}} = \frac{\text{AD}}{\text{DB}} \qquad (1)$$

ਅਤੇ
$$\frac{\text{ar(ADE)}}{\text{ar(DEC)}} = \frac{\frac{1}{2}\, \text{AE} \times \text{DM}}{\frac{1}{2}\, \text{EC} \times \text{DM}} = \frac{\text{AE}}{\text{EC}} \qquad (2)$$

ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ Δ BDE ਅਤੇ Δ DEC ਇੱਕ ਹੀ ਆਧਾਰ DE ਅਤੇ ਸਮਾਂਤਰ ਰੇਖਾਵਾਂ BC ਅਤੇ DE ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਬਣੇ ਦੋ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਹਨ।

ਇਸ ਲਈ $\quad \text{ar(BDE)} = \text{ar(DEC)} \qquad (3)$

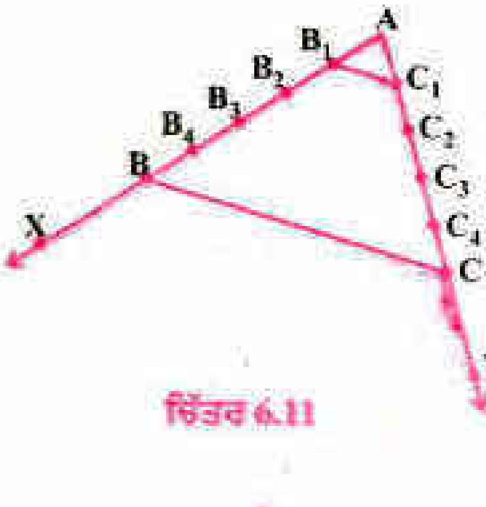
ਇਸ ਲਈ (1), (2) ਅਤੇ (3), ਤੋਂ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ:

$$\frac{\text{AD}}{\text{DB}} = \frac{\text{AE}}{\text{EC}}$$

ਕੀ ਇਸ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦਾ ਉਲਟ (ਵਿਲੋਮ) ਵੀ ਸੱਚ ਹੈ (ਉਲਟ ਦੇ ਅਰਥ ਲਈ ਅੰਤਿਕਾ 1 ਦੇਖੋ) ਇਸ ਦੀ ਜਾਂਚ ਲਈ, ਆਓ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀ ਕਿਰਿਆ ਕਰੀਏ :

ਕਿਰਿਆ 3 : ਆਪਣੀ ਕਾਪੀ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਕੋਣ XAY ਖਿੱਚੋ ਅਤੇ ਕਿਰਣ AX 'ਤੇ ਬਿੰਦੂ B_1, B_2, B_3, B_4 ਅਤੇ B ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅੰਕਿਤ ਕਰੋ ਕਿ $AB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4 = B_4B$ ਹੋਵੇ।

ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ, ਕਿਰਣ AY, ਉੱਤੇ ਬਿੰਦੂ C_1, C_2, C_3, C_4 ਅਤੇ C ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅੰਕਿਤ ਕਰੋ ਕਿ $AC_1 = C_1C_2 = C_2C_3 = C_3C_4 = C_4C$ ਹੋਵੇ। ਫਿਰ B_1C_1 ਅਤੇ BC ਨੂੰ ਮਿਲਾਉ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 6.11)।



ਚਿੱਤਰ 6.11

ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ $\frac{AB_1}{B_1B} = \frac{AC_1}{C_1C}$ (ਹਰੇਕ $\frac{1}{4}$ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ)

ਤੁਸੀਂ ਇਹ ਵੀ ਦੇਖ ਸਕਦੇ ਹੋ ਰੇਖਾਵਾਂ B_1C_1 ਅਤੇ BC ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਸਮਾਂਤਰ ਹਨ, ਭਾਵ

$$B_1C_1 \parallel BC \qquad (1)$$

ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ, ਕ੍ਰਮਵਾਰ B_2C_2, B_3C_3 ਅਤੇ B_4C_4 ਨੂੰ ਮਿਲਾ ਕੇ ਤੁਸੀਂ ਦੇਖ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ

$$\frac{AB_2}{B_2B} = \frac{AC_2}{C_2C}\left(=\frac{2}{3}\right) \text{ ਅਤੇ } B_2C_2 \parallel BC \qquad (2)$$

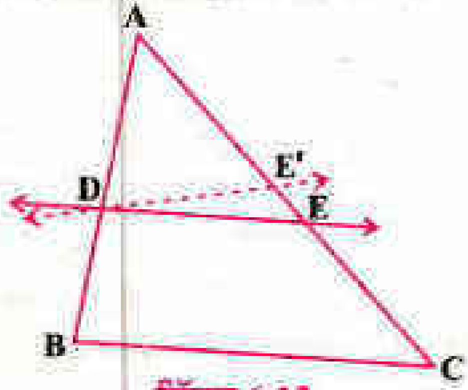
$$\frac{AB_3}{B_3B} = \frac{AC_3}{C_3C}\left(=\frac{3}{2}\right) \text{ ਅਤੇ } B_3C_3 \parallel BC, \qquad (3)$$

$$\frac{AB_4}{B_4B} = \frac{AC_4}{C_4C}\left(=\frac{4}{1}\right) \text{ ਅਤੇ } B_4C_4 \parallel BC \qquad (4)$$

(1), (2), (3) ਅਤੇ (4) ਤੋਂ, ਇਹ ਦੇਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਕਿ ਜੇਕਰ ਕੋਈ ਰੇਖਾ ਕਿਸੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀਆਂ ਦੋ ਭੁਜਾਵਾਂ ਨੂੰ ਇੱਕੋ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਵੰਡੇ, ਤਾਂ ਉਹ ਤੀਸਰੀ ਭੁਜਾ ਦੇ ਸਮਾਨ ਅੰਤਰ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

ਤੁਸੀਂ ਕੋਈ ਹੋਰ ਮਾਪ ਦਾ ਕੋਣ XAY ਖਿੱਚ ਕੇ ਅਤੇ ਭੁਜਾਵਾਂ AX ਅਤੇ AY ਉਤੇ ਕਿੰਨੇ ਵੀ ਸਮਾਨ ਭਾਗ ਅੰਕਿਤ ਕਰਕੇ ਇਸ ਕਿਰਿਆ ਨੂੰ ਦੁਹਰਾ ਸਕਦੇ ਹੋ। ਹਰੇਕ ਵਾਰ ਤੁਸੀਂ ਇੱਕ ਹੀ ਸਿੱਟੇ 'ਤੇ ਪਹੁੰਚੋਗੇ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਸੀਂ ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਪ੍ਰਮੇਯ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਜੋ ਪ੍ਰਮੇਯ 6.1 ਦਾ ਉਲਟ ਹੈ:

ਪ੍ਰਮੇਯ 6.2 : *ਜੇਕਰ ਕੋਈ ਰੇਖਾ ਕਿਸੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀਆਂ ਦੋ ਭੁਜਾਵਾਂ ਨੂੰ ਇੱਕ ਹੀ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਵੰਡੇ ਤਾਂ ਉਹ ਤੀਸਰੀ ਭੁਜਾ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।*



ਚਿੱਤਰ 6.12

ਇਸ ਪ੍ਰਮੇਯ ਨੂੰ ਸਿੱਧ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ, ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਰੇਖਾ DE ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲਈਏ ਤਾਂ ਕਿ $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ ਹੋਵੇ ਅਤੇ DE ਭੁਜਾ BC ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਨਾ ਹੋਵੇ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 6.12)।

ਹੁਣ ਜੇਕਰ DE ਭੁਜਾ BC ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਨਹੀਂ ਹੈ, ਤਾਂ BC ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਇੱਕ ਰੇਖਾ DE' ਖਿਚੋ।

ਇਸ ਲਈ $\qquad \frac{AD}{DB} = \frac{AE'}{E'C}$ (ਕਿਉਂ?)

ਇਸ ਲਈ $\qquad \frac{AE}{EC} = \frac{AE'}{E'C}$ (ਕਿਉਂ?)

ਉਪਰੋਕਤ ਦੇ ਦੋਵੇਂ ਪਾਸਿਆਂ ਵਿੱਚ 1 ਜੋੜ ਕੇ, ਤੁਸੀਂ ਇਹ ਦੇਖ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ E ਅਤੇ E′ ਨੂੰ ਜਰੂਰ ਹੀ ਸੰਪਾਤੀ ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ (ਕਿਉਂ?) ਉਪਰੋਕਤ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਸਪਸ਼ਟ ਕਰਨ ਲਈ ਆਓ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ।

ਉਦਾਹਰਣ 1 : ਜੇਕਰ ਕੋਈ ਰੇਖਾ ਕਿਸੇ ΔABC ਦੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ AB ਅਤੇ AC ਨੂੰ ਕ੍ਰਮਵਾਰ D ਅਤੇ E ਉਤੇ ਕੱਟੇ ਅਤੇ ਭੁਜਾ BC ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ ਹੋਵੇਗਾ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 6.13)।

ਹੱਲ : $DE \parallel BC$ (ਦਿੱਤਾ ਹੈ)

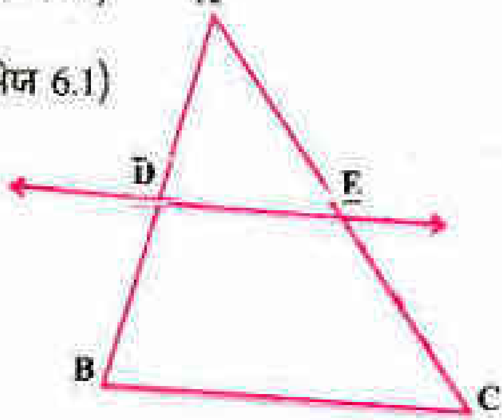
ਇਸ ਲਈ $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$ (ਪ੍ਰਮੇਯ 6.1)

ਭਾਵ $\frac{DB}{AD} = \frac{EC}{AE}$

ਜਾਂ $\frac{DB}{AD} + 1 = \frac{EC}{AE} + 1$

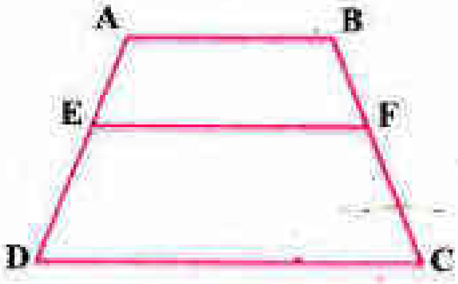
ਜਾਂ $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$

ਇਸ ਲਈ $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$



ਚਿੱਤਰ 6.13

ਉਦਾਹਰਣ 2 : ABCD ਇੱਕ ਸਮਲੰਬ ਚਤੁਰਭੁਜ ਹੈ ਜਿਸ ਵਿੱਚ $AB \parallel DC$ ਹੈ। ਸਮਾਂਤਰ ਭੁਜਾਵਾਂ AD ਅਤੇ BC ਉਤੇ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਬਿੰਦੂ E ਅਤੇ F ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਸਥਿਤ ਹਨ ਕਿ EF ਭੁਜਾ AB ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਹੈ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 6.14)।



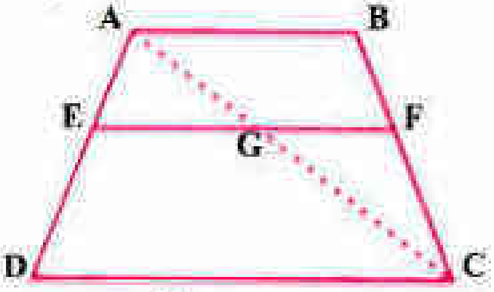
ਚਿੱਤਰ 6.14

ਦਿਖਾਓ ਕਿ $\frac{AE}{ED} = \frac{BF}{FC}$ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਆਓ A ਅਤੇ C ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਂਦੇ ਹਾਂ ਜੋ EF ਨੂੰ G 'ਤੇ ਕੱਟਦੀ ਹੈ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 6.15)।

$AB \parallel DC$ ਅਤੇ $EF \parallel AB$ (ਦਿੱਤਾ ਹੈ)

ਇਸ ਲਈ $EF \parallel DC$ (ਇੱਕੋ ਰੇਖਾ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਰੇਖਾਵਾਂ, ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਵੀ ਸਮਾਂਤਰ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ)



ਚਿੱਤਰ 6.15

ਹੁਣ Δ ADC ਵਿੱਚ,

EG ∥ DC (ਕਿਉਂਕਿ EF ∥ DC)

ਇਸ ਲਈ $\frac{AE}{ED} = \frac{AG}{GC}$ (ਪ੍ਰਮੇਯ 6.1) (1)

ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ, Δ CAB ਵਿੱਚ

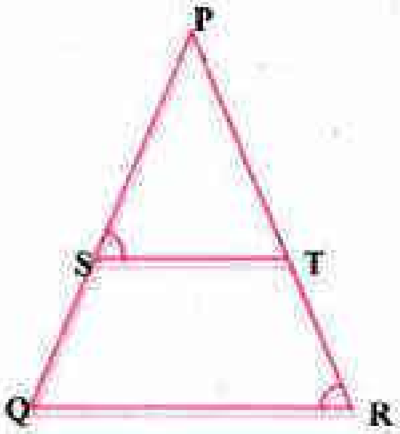
$$\frac{CG}{AG} = \frac{CF}{BF}$$

ਭਾਵ $$\frac{AG}{GC} = \frac{BF}{FC} \quad (2)$$

ਇਸ ਲਈ (1) ਅਤੇ (2) ਤੋਂ

$$\frac{AE}{ED} = \frac{BF}{FC}$$

ਉਦਾਹਰਣ 3 : ਚਿੱਤਰ 6.16 ਵਿੱਚ $\frac{PS}{SQ} = \frac{PT}{TR}$ ਹੈ ਅਤੇ $\angle PST = \angle PRQ$ ਹੈ। ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ΔPQR ਇੱਕ ਸਮਦੋਭੁਜੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 6.16

ਹੱਲ : ਦਿੱਤਾ ਹੈ ਕਿ, $\frac{PS}{SQ} = \frac{PT}{TR}$

ਇਸ ਲਈ ST ∥ QR (ਪ੍ਰਮੇਯ 6.2)

ਇਸ ਲਈ $\angle PST = \angle PQR$ (ਸੰਗਤ ਕੋਣ) (1)

ਇਸ ਦੇ ਨਾਲ-ਨਾਲ ਇਹ ਵੀ ਦਿੱਤਾ ਹੈ ਕਿ

$$\angle PST = \angle PRQ \quad (2)$$

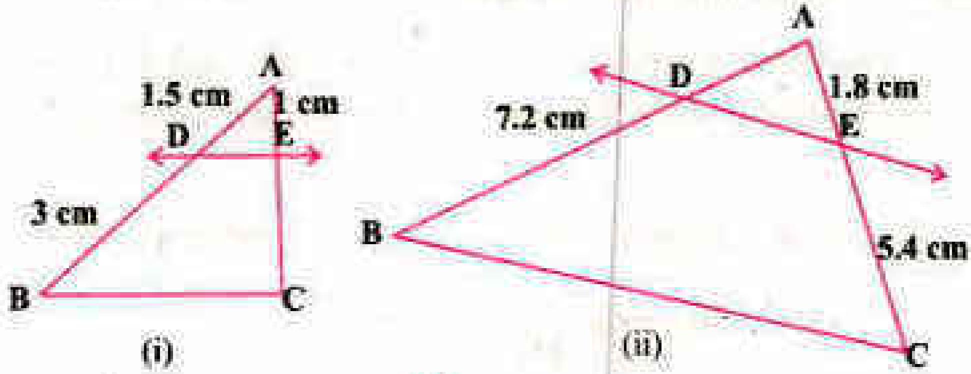
ਇਸ ਲਈ $\angle PRQ = \angle PQR$ [(1) ਅਤੇ (2) ਤੋਂ]

ਇਸ ਲਈ PQ = PR (ਬਰਾਬਰ ਕੋਣਾਂ ਦੀਆਂ ਸਨਮੁੱਖ ਭੁਜਾਵਾਂ)

ਭਾਵ ΔPQR ਇੱਕ ਸਮਦੋਭੁਜੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਹੈ।

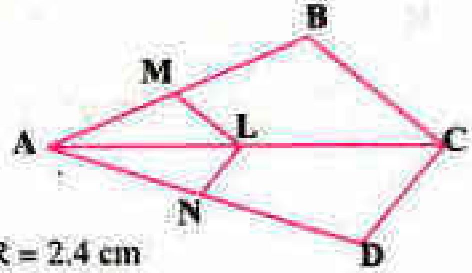
ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 6.2

1. ਚਿੱਤਰ 6.17 (i) ਅਤੇ (ii) ਵਿੱਚ, DE ॥ BC ਹੈ। (i) ਵਿੱਚ EC ਅਤੇ (ii) ਵਿੱਚ AD ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ:



ਚਿੱਤਰ 6.17

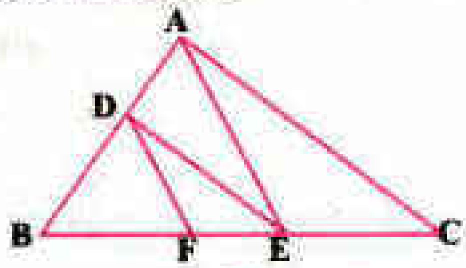
2. ਕਿਸੇ Δ PQR ਦੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ PQ ਅਤੇ PR ਉੱਤੇ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਬਿੰਦੂ E ਅਤੇ F ਸਥਿਤ ਹਨ। ਹੇਠ ਲਿਖਿਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਹਰੇਕ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਦੱਸੋ ਕਿ, ਕੀ EF ॥ QR ਹੈ:
   (i) PE = 3.9 cm, EQ = 3 cm, PF = 3.6 cm ਅਤੇ FR = 2.4 cm
   (ii) PE = 4 cm, QE = 4.5 cm, PF = 8 cm ਅਤੇ RF = 9 cm
   (iii) PQ = 1.28 cm, PR = 2.56 cm, PE = 0.18 cm ਅਤੇ PF = 0.36 cm



ਚਿੱਤਰ 6.18

3. ਚਿੱਤਰ 6.18 ਵਿੱਚ ਜੇਕਰ LM ॥ CB ਅਤੇ LN ॥ CD ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AD}$ ਹੈ।

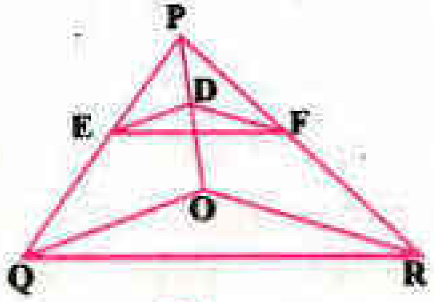
4. ਚਿੱਤਰ 6.19 ਵਿੱਚ DE ॥ AC ਅਤੇ DF ॥ AE ਹੈ। ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $\frac{BF}{FE} = \frac{BE}{EC}$ ਹੈ।



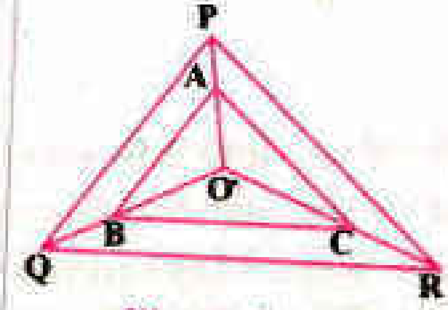
ਚਿੱਤਰ 6.19

5. ਚਿੱਤਰ 6.20 ਵਿੱਚ DE ॥ OQ ਅਤੇ DF ॥ OR ਹੈ। ਦਿਖਾਉ ਕਿ EF ॥ QR ਹੈ।

6. ਚਿੱਤਰ 6.21 ਵਿੱਚ ਕ੍ਰਮਵਾਰ OP, OQ ਅਤੇ OR ਉੱਤੇ ਸਥਿਤ ਬਿੰਦੂ A, B ਅਤੇ C ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹਨ ਕਿ AB ॥ PQ ਅਤੇ AC ॥ PR ਹੈ। ਦਰਸਾਓ ਕਿ BC ॥ QR ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 6.20



ਚਿੱਤਰ 6.21

7. ਪ੍ਰਮੇਯ 6.1 ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀ ਇੱਕ ਭੁਜਾ ਦੇ ਮੱਧ ਬਿੰਦੂ ਵਿੱਚੋਂ ਦੂਸਰੀ ਭੁਜਾ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਖਿੱਚੀ ਗਈ ਰੇਖਾ ਤੀਸਰੀ ਭੁਜਾ ਨੂੰ ਸਮਦੁਭਾਜਿਤ ਕਰਦੀ ਹੈ। (ਯਾਦ ਕਰੋ ਕਿ ਤੁਸੀਂ ਇਸ ਨੂੰ ਜਮਾਤ IX ਵਿੱਚ ਸਿੱਧ ਕਰ ਚੁੱਕੇ ਹੋ)।

8. ਪ੍ਰਮੇਯ 6.2 ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀਆਂ ਕਿਸੇ ਦੋ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦੇ ਮੱਧ ਬਿੰਦੂਆਂ ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਤੀਸਰੀ ਭੁਜਾ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। (ਯਾਦ ਕਰੋ ਕਿ ਤੁਸੀਂ ਜਮਾਤ IX ਵਿੱਚ ਅਜਿਹਾ ਕਰ ਚੁੱਕੇ ਹੋ)।

9. ABCD ਇੱਕ ਸਮਲੰਬ ਚਤੁਰਭੁਜ ਹੈ ਜਿਸ ਵਿੱਚ $AB \parallel DC$ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਦੇ ਵਿਕਰਣ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਬਿੰਦੂ O 'ਤੇ ਕੱਟਦੇ ਹਨ। ਦਿਖਾਓ ਕਿ $\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$ ਹੈ।

10. ਇੱਕ ਚਤੁਰਭੁਜ ABCD ਦੇ ਵਿਕਰਣ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਬਿੰਦੂ O ਉੱਤੇ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕੱਟਦੇ ਹਨ ਕਿ $\frac{AO}{BO} = \frac{CO}{DO}$ ਹੈ। ਦਿਖਾਓ ਕਿ ABCD ਇੱਕ ਸਮਲੰਬ ਚਤੁਰਭੁਜ ਹੈ।

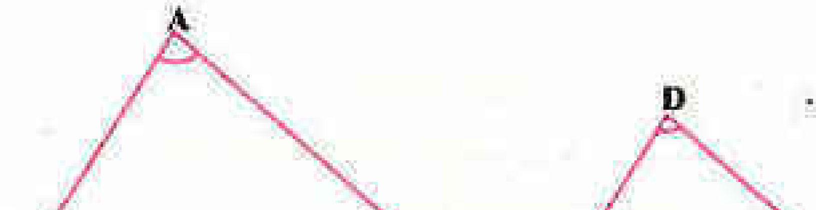
6.4 ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦੀ ਸਮਰੂਪਤਾ ਲਈ ਮਾਪਦੰਡ (ਕਸੌਟੀਆਂ)

ਪਿਛਲੇ ਭਾਗ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਕਿਹਾ ਸੀ ਕਿ ਦੋ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਸਮਰੂਪ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ ਜੇਕਰ (i) ਉਨਾਂ ਦੇ ਸੰਗਤ ਕੋਣ ਬਰਾਬਰ ਹੋਣ ਅਤੇ (ii) ਉਨ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਸੰਗਤ ਭੁਜਾਵਾਂ ਇੱਕ ਹੀ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ (ਸਮਾਨ-ਅਨੁਪਾਤ) ਹੋਣ। ਭਾਵ

ਜੇਕਰ ΔABC ਅਤੇ ΔDEF ਵਿੱਚ,

(i) $\angle A = \angle D, \angle B = \angle E, \angle C = \angle F$ ਹੈ ਅਤੇ

(ii) $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}$ ਹੈ, ਤਾਂ ਦੋਵੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਸਮਰੂਪ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 6.22)।



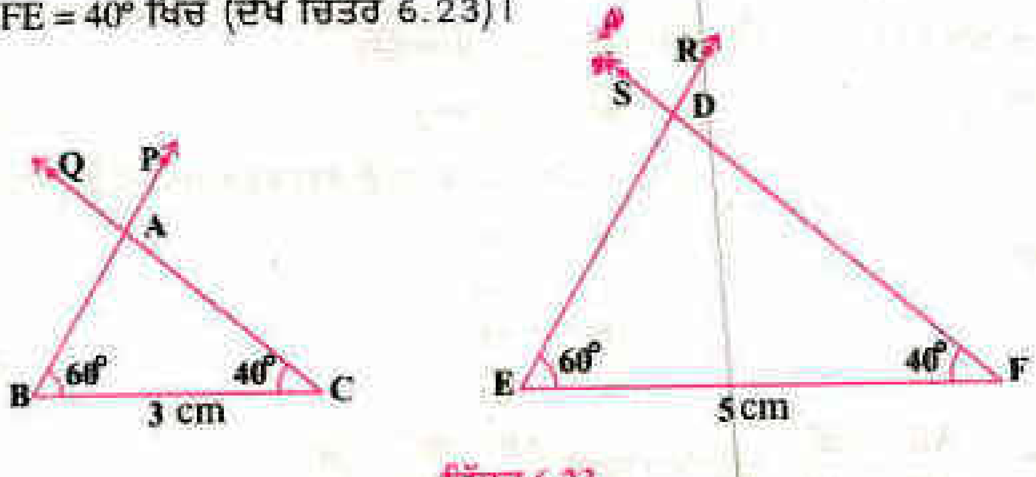
ਚਿੱਤਰ 6.22

ਇੱਥੇ ਤੁਸੀਂ ਦੇਖ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ A, D ਦੇ ਸੰਗਤ ਹੈ ; B, E ਦੇ ਸੰਗਤ ਹੈ ਅਤੇ C, F ਦੇ ਸੰਗਤ ਹੈ। ਸੰਕੇਤਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ ਇਨਾਂ ਤ੍ਰਿਭਜਾਂ ਦੀ ਸਮਰੂਪਤਾ ਨੂੰ '$\Delta ABC \sim \Delta DEF$' ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ 'ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਸਮਰੂਪ ਹੈ ਤ੍ਰਿਭੁਜ DEF ਦੇ' ਪੜਦੇ ਹਾਂ। ਸੰਕੇਤ '$\sim$' 'ਸਮਰੂਪ' ਨੂੰ ਪ੍ਰਗਟ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਯਾਦ ਕਰੋ ਕਿ ਜਮਾਤ IX ਵਿੱਚ ਤੁਸੀਂ 'ਸਰਬਗਸਮ' ਦੇ ਲਈ ਸੰਕੇਤ '$\cong$' ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤਾ ਸੀ।

ਇਸ ਗੱਲ ਵੱਲ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਧਿਆਨ ਦੇਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦੀ ਸਰਬੰਗਸਮਤਾ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਸੀ, ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦੀ ਸਮਰੂਪਤਾ ਨੂੰ ਵੀ ਸੰਕੇਤਕ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਉਣ ਲਈ ਉਨ੍ਹਾਂ ਦੇ ਸਿਖਰਾਂ ਦੀ ਸੰਗਤਤਾਵਾਂ ਨੂੰ ਸਹੀ ਕ੍ਰਮ ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਜਾਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਲਈ, ਚਿੱਤਰ 6.22 ਦੀਆਂ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ABC ਅਤੇ DEF ਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ $\Delta ABC \sim \Delta EDF$ ਜਾਂ $\Delta ABC \sim \Delta FED$ ਨਹੀਂ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਪ੍ਰੰਤੂ ਅਸੀਂ $\Delta BAC \sim \Delta EDF$ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

ਹੁਣ ਇੱਕ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਉਠਦਾ ਹੈ: ਦੋ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਮੰਨ ਲਓ ABC ਅਤੇ DEF ਦੀ ਸਮਰੂਪਤਾ ਦੀ ਜਾਂਚ ਲਈ ਕੀ ਅਸੀਂ ਹਮੇਸ਼ਾ ਉਸ ਦੇ ਸੰਗਤ ਕੋਣਾਂ ਦੇ ਸਾਰੇ ਜੋੜਿਆਂ ਦੀ ਸਮਾਨਤਾ ($\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$, $\angle C = \angle F$) ਅਤੇ ਉਨ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਸੰਗਤ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦੇ ਸਾਰੇ ਜੋੜਿਆਂ ਦੇ ਅਨੁਪਾਤਾਂ ਦੀ ਸਮਾਨਤਾ $\left(\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}\right)$ ਉੱਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰਦੇ ਹਾਂ? ਆਉ ਇਸ ਦੀ ਜਾਂਚ ਕਰੀਏ। ਤੁਹਾਨੂੰ ਯਾਦ ਹੋਵੇਗਾ ਕਿ ਜਮਾਤ IX ਵਿੱਚ ਤੁਸੀਂ ਦੋ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦੀ ਸਰਬੰਗਸਮਤਾ ਲਈ ਕੁਝ ਅਜਿਹੇ ਮਾਪਦੰਡ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੇ ਸਨ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਵਿੱਚ ਦੋਵੇਂ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦੇ ਸੰਗਤ ਭਾਗਾਂ ਦੇ ਸਿਰਫ਼ ਤਿੰਨ ਜੋੜੇ ਹੀ ਸ਼ਾਮਿਲ ਹੁੰਦੇ ਸਨ। ਇਥੇ ਵੀ ਆਉ ਅਸੀਂ ਦੋ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦੀ ਸਮਰੂਪਤਾ ਲਈ ਕੁਝ ਅਜਿਹੀਆਂ ਕਸੌਟੀਆਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਦੀ ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਜਿਨ੍ਹਾ ਵਿੱਚ ਇਨ੍ਹਾਂ ਦੋਵੇਂ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦੇ ਸਾਰੇ ਛੇ ਜੋੜਿਆਂ ਦੀ ਥਾਂ 'ਤੇ ਇਨ੍ਹਾਂ ਸੰਗਤ ਭਾਗਾਂ ਦੇ ਘੱਟ ਜੋੜਿਆਂ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਹੀ ਸੰਬੰਧ ਸਥਾਪਿਤ ਹੋਵੇ। ਇਸ ਦੇ ਲਈ ਆਉ ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਕਿਰਿਆ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

ਕਿਰਿਆ 4 : ਭਿੰਨ-ਭਿੰਨ ਲੰਬਾਈ ਵਾਲੇ, ਮੰਨ ਲਓ 3 cm ਅਤੇ 5 cm ਵਾਲੇ, ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਦੋ ਰੇਖਾਖੰਡ BC ਅਤੇ EF ਖਿੱਚੋ। ਫਿਰ ਬਿੰਦੂਆਂ B ਅਤੇ C ਉੱਤੇ ਕ੍ਰਮਵਾਰ $\angle PBC$ ਅਤੇ $\angle QCB$ ਕੋਈ ਵੀ ਮਾਪ, ਮੰਨ ਲਓ $60°$ ਅਤੇ $40°$ ਦੇ ਬਣਾਉ। ਇਸ ਦੇ ਨਾਲ ਬਿੰਦੂਆਂ E ਅਤੇ F 'ਤੇ ਕ੍ਰਮਵਾਰ $\angle REF = 60°$ ਅਤੇ $\angle SFE = 40°$ ਖਿੱਚੋ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 6.23)।



ਚਿੱਤਰ 6.23

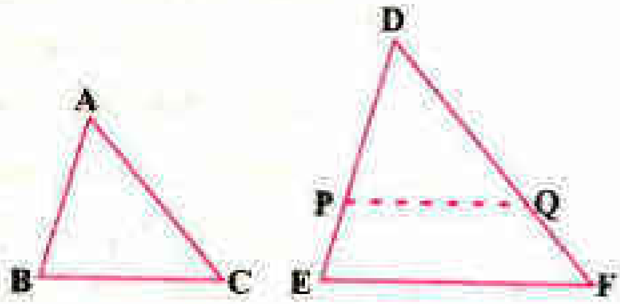
ਮੰਨ ਲਓ ਕਿਰਣਾਂ BP ਅਤੇ CQ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਬਿੰਦੂ A ਉੱਤੇ ਕੱਟਦੀਆਂ ਹਨ ਅਤੇ ਕਿਰਣ ER ਅਤੇ FS ਆਪਸ ਵਿੱਚ D 'ਤੇ ਕਟਦੀਆਂ ਹਨ। ਇਨ੍ਹਾਂ ਦੋਵੇਂ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਅਤੇ DEF ਵਿੱਚ ਤੁਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹੋ ਕਿ $\angle B = \angle E$, $\angle C = \angle F$ ਅਤੇ $\angle A = \angle D$ ਹਨ ਭਾਵ ਇਨ੍ਹਾਂ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦੇ ਸੰਗਤ ਕੋਣ ਬਰਾਬਰ

ਹਨ। ਇਨ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਸੰਗਤ ਭੁਜਾਵਾਂ ਬਾਰੇ ਤੁਸੀਂ ਕੀ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹੋ? ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ $\frac{BC}{EF} = \frac{3}{5} = 0.6$ ਹੈ। $\frac{AB}{DE}$ ਅਤੇ $\frac{CA}{FD}$ ਦੇ ਬਾਰੇ ਵਿੱਚ ਤੁਸੀਂ ਕੀ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹੋ? AB, DE, CA ਅਤੇ FD ਨੂੰ ਮਾਪਣ 'ਤੇ ਤੁਸੀਂ ਦੇਖੋਗੇ ਕਿ $\frac{AB}{DE}$ ਅਤੇ $\frac{CA}{FD}$ ਵੀ 0.6 ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹਨ (ਜਾਂ ਲਗਭਗ 0.6 ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹਨ, ਜੇਕਰ ਮਾਪਣ ਵਿੱਚ ਗਲਤੀ ਹੋਵੇ)। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}$ ਹੈ। ਤੁਸੀਂ ਸਮਾਨ ਸੰਗਤ ਕੋਣ ਵਾਲੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦੇ ਅਨੇਕਾਂ ਜੋੜੇ ਖਿੱਚ ਕੇ ਇਸ ਕਿਰਿਆ ਨੂੰ ਦੁਹਰਾ ਸਕਦੇ ਹੋ। ਹਰੇਕ ਵਾਰ ਤੁਸੀਂ ਵੇਖੋਗੇ ਕਿ ਉਨ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਸੰਗਤ ਭੁਜਾਵਾਂ ਇੱਕ ਹੀ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਸਮਾਨ ਅਨੁਪਾਤੀ ਹਨ। ਇਸ ਕਿਰਿਆ ਤੋਂ ਸਾਨੂੰ ਦੋ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦੀ ਸਮਰੂਪਤਾ ਲਈ ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਕਸੌਟੀ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ:

ਪ੍ਰਮੇਯ 6.3 : *ਜੇਕਰ ਦੋ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਵਿੱਚ ਸੰਗਤ ਕੋਣ ਬਰਾਬਰ ਹੋਣ, ਤਾਂ ਉਨ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਸੰਗਤ ਭੁਜਾਵਾਂ ਵੀ ਸਮਾਨ-ਅਨੁਪਾਤੀ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ ਅਤੇ ਇਸ ਲਈ ਇਹ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਸਮਰੂਪ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।*

ਉਪਰੋਕਤ ਕਸੌਟੀ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧ ਨੂੰ ਦੋ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦੀ *ਸਮਰੂਪਤਾ ਲਈ* AAA (ਕੋਣ-ਕੋਣ-ਕੋਣ) ਕਸੌਟੀ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਪ੍ਰਮੇਯ ਨੂੰ ਦੋ ਅਜਿਹੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਅਤੇ DEF ਲੈ ਕੇ, ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਵਿੱਚ $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$ ਅਤੇ $\angle C = \angle F$ ਹੋਵੇ, ਸਿੱਧ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 6.24)।



ਚਿੱਤਰ 6.24

DP = AB ਅਤੇ DQ = AC ਕੱਟੋ ਅਤੇ P ਅਤੇ Q ਨੂੰ ਮਿਲਾਉ।

ਇਸ ਲਈ $\Delta ABC \cong \Delta DPQ$ (ਕਿਉਂ?)

ਇਸ ਤੋਂ $\angle B = \angle P = \angle E$ ਅਤੇ PQ ∥ EF ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੇ ਹਨ(ਕਿਵੇਂ?)

ਇਸ ਲਈ $$\frac{DP}{PE} = \frac{DQ}{QF}$$ (ਕਿਉਂ?)

ਭਾਵ $$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$$ (ਕਿਉਂ?)

ਇਸ ਤਰਾਂ, $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$ ਅਤੇ ਇਸ ਲਈ $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$

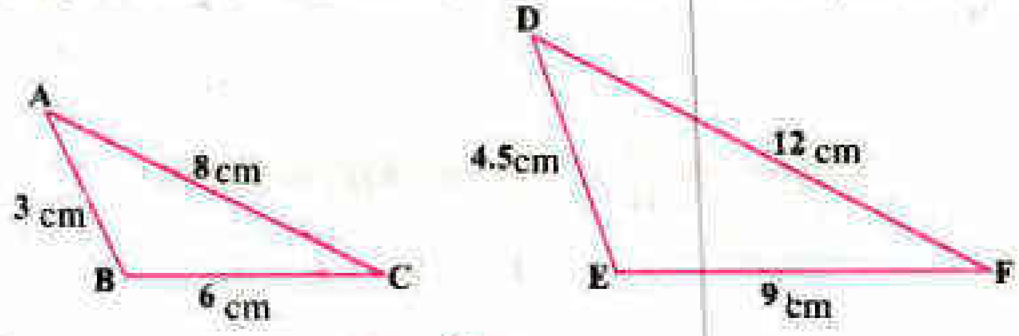
ਟਿੱਪਣੀ : ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੇ ਦੋ ਕੋਣ ਕਿਸੇ ਹੋਰ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੇ ਦੋ ਕੋਣਾਂ ਦੇ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਬਰਾਬਰ ਹੋਣ ਤਾਂ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੇ ਕੋਣ ਜੋੜ ਗੁਣ ਦੇ ਕਾਰਣ, ਇਨ੍ਹਾਂ ਦੇ ਤੀਸਰੇ ਕੋਣ ਵੀ ਬਰਾਬਰ ਹੋਣਗੇ। ਇਸ ਲਈ AAA ਕਸੌਟੀ ਨੂੰ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਵੀ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ:

ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੇ ਦੋ ਕੋਣ ਇੱਕ ਹੋਰ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੇ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਦੋ ਕੋਣਾਂ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੋਣ, ਤਾਂ ਦੋਵੇਂ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਸਮਰੂਪ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ।

ਉਪਰੋਕਤ ਨੂੰ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦੀ ਸਮਰੂਪਤਾ ਲਈ AA ਕਸੌਟੀ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਉੱਪਰ ਤੁਸੀਂ ਦੇਖਿਆ ਕਿ ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੇ ਤਿੰਨੇ ਕੋਣ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਦੂਸਰੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੇ ਤਿੰਨੇ ਕੋਣਾਂ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੋਣ ਤਾਂ ਉਨ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਸੰਗਤ ਭੁਜਾਵਾਂ ਸਮਾਨੁਪਾਤੀ (ਇੱਕ ਹੀ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ) ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ। ਇਸ ਕਥਨ ਦੇ ਉਲਟ ਦੇ ਬਾਰੇ ਵਿੱਚ ਤੁਸੀਂ ਕੀ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹੋ? ਕੀ ਇਹ ਉਲਟ ਸੱਚ ਹੈ ? ਦੂਜੇ ਸ਼ਬਦਾਂ ਵਿੱਚ ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਦੂਸਰੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦੇ ਸਮਾਨ ਅਨੁਪਾਤੀ ਹੋਣ, ਤਾਂ ਕੀ ਇਹ ਸੱਚ ਹੈ ਕਿ ਇਨ੍ਹਾਂ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦੇ ਸੰਗਤ ਕੋਣ ਬਰਾਬਰ ਹਨ? ਆਉ ਇੱਕ ਕਿਰਿਆ ਰਾਹੀਂ ਜਾਂਚ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਕਿਰਿਆ 5 : ਦੋ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ABC ਅਤੇ DEF ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਬਣਾਓ ਕਿ AB = 3 cm, BC = 6 cm, CA = 8 cm, DE = 4.5 cm, EF = 9 cm ਅਤੇ FD = 12 cm ਹੋਵੇ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 6.25)।



ਚਿੱਤਰ 6.25

ਤਾਂ ਤੁਹਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ: $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}$ (ਹਰੇਕ $\frac{2}{3}$ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ)

ਹੁਣ $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$, $\angle D$, $\angle E$ ਅਤੇ $\angle F$ ਨੂੰ ਮਾਪੋ। ਤੁਸੀਂ ਦੇਖੋਗੇ ਕਿ $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$ ਅਤੇ $\angle C = \angle F$ ਹੈ, ਭਾਵ ਦੋਵੇਂ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦੇ ਸੰਗਤ ਕੋਣ ਬਰਾਬਰ ਹਨ।

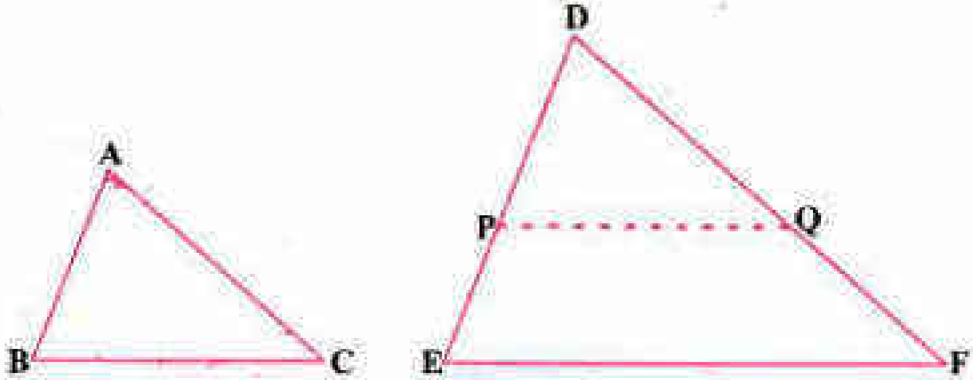
ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਅਨੇਕਾਂ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦੇ ਜੋੜੇ ਖਿੱਚ ਕੇ (ਜਿੰਨ੍ਹਾ ਵਿੱਚ ਸੰਗਤ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦੇ ਅਨੁਪਾਤ ਇੱਕ ਹੀ ਹੋਣ), ਤੁਸੀਂ ਇਸ ਕਿਰਿਆ ਨੂੰ ਦੁਬਾਰਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ। ਹਰੇਕ ਵਾਰ ਤੁਸੀਂ ਇਹ ਪਾਉਗੇ ਕਿ ਇਨ੍ਹਾਂ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦੇ ਸੰਗਤ ਕੋਣ ਬਰਾਬਰ ਹਨ। ਇਹ ਦੋ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦੀ ਸਮਰੂਪਤਾ ਦੀ ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਕਸੌਟੀ ਦੇ ਕਾਰਣ ਹੈ:

ਪ੍ਰਮੇਯ 6.4 : ਜੇਕਰ ਦੋ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦੂਸਰੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦੇ ਸਮਾਨ-ਅਨੁਪਾਤੀ (ਭਾਵ ਇੱਕ ਹੀ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ) ਹੋਣ, ਤਾਂ ਇਨ੍ਹਾਂ ਦੇ ਸੰਗਤ ਕੋਣ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੇ ਹਨ, ਅਤੇ ਇਸ ਲਈ ਦੋਵੇਂ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਸਮਰੂਪ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ।

ਇਸ ਕਸੌਟੀ ਨੂੰ ਦੋ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦੀ *ਸਮਰੂਪਤਾ* ਦੀ SSS (ਭੁਜਾ-ਭੁਜਾ-ਭੁਜਾ) *ਕਸੌਟੀ* ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਉਪਰੋਕਤ ਪ੍ਰਮੇਯ ਨੂੰ ਅਜਿਹੀਆਂ ਦੋ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ABC ਅਤੇ DEF ਲੈ ਕੇ, ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਵਿੱਚ $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{CA}{FD}$ ਹੋਵੇ, ਸਿੱਧ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 6.26) :

Δ DEF ਵਿੱਚ DP = AB ਅਤੇ DQ = AC ਕੱਟੋ ਅਤੇ P ਅਤੇ Q ਨੂੰ ਮਿਲਾਉ।



ਚਿੱਤਰ 6.26

ਇਥੇ ਇਹ ਦੇਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਕਿ $\frac{DP}{PE} = \frac{DQ}{QF}$ ਅਤੇ PQ $\parallel$ EF ਹੈ (ਕਿਵੇਂ?)

ਇਸ ਲਈ $\angle P = \angle E$ ਅਤੇ $\angle Q = \angle F$.

ਇਸ ਲਈ $\frac{DP}{DE} = \frac{DQ}{DF} = \frac{PQ}{EF}$

ਜਿਸ ਤੋਂ $\frac{DP}{DE} = \frac{DQ}{DF} = \frac{BC}{EF}$ (ਕਿਉਂ?)

ਇਸ ਲਈ BC = PQ (ਕਿਉਂ?)

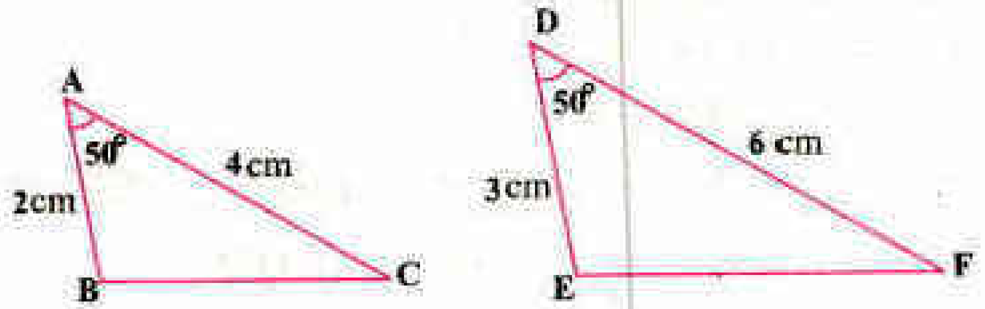
ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ $\Delta ABC \cong \Delta DPQ$ (ਕਿਉਂ?)

ਇਸ ਲਈ $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$ ਅਤੇ $\angle C = \angle F$ (ਕਿਵੇਂ?)

ਟਿੱਪਣੀ : ਤੁਹਾਨੂੰ ਯਾਦ ਹੋਵੇਗਾ ਕਿ ਦੋ ਬਹੁਭੁਜਾਂ ਦੀ ਸਮਰੂਪਤਾ ਦੇ ਦੋਵੇਂ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧਾਂ (ਸ਼ਰਤਾਂ) ਭਾਵ (i) ਸੰਗਤ ਕੋਣ ਬਰਾਬਰ ਹੋਣ ਅਤੇ (ii) ਸੰਗਤ ਭੁਜਾਵਾਂ ਇੱਕ ਹੀ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਹੋਣ, ਵਿਚੋਂ ਕੇਵਲ ਕਿਸੇ ਇੱਕ ਦਾ ਹੀ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਹੋਣਾ ਉਨ੍ਹਾਂ ਦੀ ਸਮਰੂਪਤਾ ਦੇ ਲਈ ਕਾਫ਼ੀ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਪ੍ਰੰਤੂ ਪ੍ਰਮੇਯ 6.3 ਅਤੇ 6.4 ਦੇ ਆਧਾਰ ਤੇ ਹੁਣ ਤੁਸੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ ਦੋ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦੀ ਸਮਰੂਪਤਾ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ, ਇਨ੍ਹਾਂ ਦੋਵੇਂ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧਾਂ ਦੀ ਜਾਂਚ ਕਰਨ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਨਹੀਂ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ ਇੱਕ ਪ੍ਰਤਿਬੰਧ ਨਾਲ ਦੂਸਰਾ ਆਪਣੇ ਆਪ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਆਉ ਹੁਣ ਦੋ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦੀ ਸਰਬੰਗਸਮਤਾ ਦੀਆਂ ਉਨ੍ਹਾਂ ਕਸੌਟੀਆਂ ਨੂੰ ਯਾਦ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਜੋ ਅਸੀਂ ਜਮਾਤ IX ਵਿੱਚ ਪੜ੍ਹੀਆਂ ਸਨ। ਤੁਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹੋ ਕਿ SSS ਸਮਰੂਪਤਾ ਕਸੌਟੀ ਦੀ ਤੁਲਨਾ, SSS ਸਰਬੰਗਸਮਤਾ ਕਸੌਟੀ ਨਾਲ ਕੀਤੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਤੋਂ ਸਾਨੂੰ ਇਹ ਸੰਕੇਤ ਮਿਲਦਾ ਹੈ ਕਿ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦੀ ਸਮਰੂਪਤਾ ਲਈ ਅਜਿਹੀ ਕਸੌਟੀ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਦੀ ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕੀਤੀ ਜਾਵੇ ਜਿਸਦੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਲਈ SAS ਸਰਬੰਗਸਮਤਾ ਕਸੌਟੀ ਨਾਲ ਤੁਲਨਾ ਕੀਤੀ ਜਾ ਸਕੇ। ਇਸ ਦੇ ਲਈ ਆਉ ਇੱਕ ਕਿਰਿਆ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਕਿਰਿਆ 6 : ਦੋ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ABC ਅਤੇ DEF ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਬਣਾਓ ਕਿ AB = 2 cm, $\angle A = 50°$, AC = 4 cm, DE = 3 cm, $\angle D = 50°$ ਅਤੇ DF = 6 cm ਹੋਵੇ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 6.27)।



ਚਿੱਤਰ 6.27

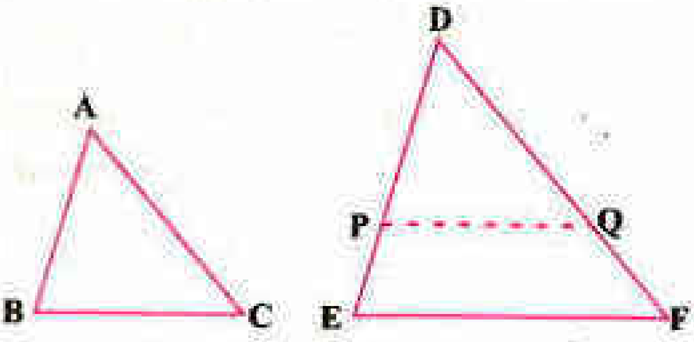
ਇਥੇ, ਤੁਸੀਂ ਦੇਖ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$ (ਹਰੇਕ $\frac{2}{3}$ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ) ਅਤੇ $\angle A$(ਭੁਜਾਵਾਂ AB ਅਤੇ AC ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਕੋਣ) = $\angle D$(ਭੁਜਾਵਾਂ DE ਅਤੇ DF ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਕੋਣ) ਹੈ। ਭਾਵ ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦਾ ਇੱਕ ਕੋਣ ਦੂਸਰੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੇ ਇੱਕ ਕੋਣ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ ਅਤੇ ਇਨ੍ਹਾਂ ਕੋਣਾਂ ਨੂੰ ਬਣਾਉਣ ਵਾਲੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਸਮਾਨ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ (ਸਮਾਨ-ਅਨੁਪਾਤੀ) ਹਨ। ਹੁਣ, ਆਉ $\angle B, \angle C, \angle E$ ਅਤੇ $\angle F$ ਨੂੰ ਮਾਪੋ।

ਤੁਸੀਂ ਵੇਖੋਗੇ ਕਿ $\angle B = \angle E$ ਅਤੇ $\angle C = \angle F$ ਹੈ। ਭਾਵ, $\angle A = \angle D, \angle B = \angle E$ ਅਤੇ $\angle C = \angle F$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ AAA ਸਮਰੂਪਤਾ ਕਸੌਟੀ ਤੋਂ $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ ਹੈ। ਤੁਸੀਂ ਅਜਿਹੇ ਅਨੇਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦੇ ਜੋੜੇ ਖਿੱਚ ਕੇ, ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦਾ ਇੱਕ ਕੋਣ ਦੂਸਰੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੇ ਇੱਕ ਕੋਣ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੋਵੇ ਅਤੇ ਇਨ੍ਹਾਂ ਕੋਣਾਂ ਨੂੰ ਬਣਾਉਣ ਵਾਲੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਇੱਕ ਹੀ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ (ਸਮਾਨ-ਅਨੁਪਾਤੀ) ਹੋਣ, ਇਸ ਕਿਰਿਆ ਨੂੰ ਦੁਹਰਾ ਸਕਦੇ ਹੋ। ਹਰੇਕ ਵਾਰ ਤੁਸੀਂ ਇਹ ਦੇਖੋਗੇ ਕਿ ਦੋਵੇਂ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਸਮਰੂਪ ਹਨ। ਇਹ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦੀ ਸਮਰੂਪਤਾ ਦੀ ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਕਸੌਟੀ ਦੇ ਕਾਰਣ ਹਨ:

ਪ੍ਰਮੇਯ 6.5 : *ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦਾ ਇੱਕ ਕੋਣ ਦੂਸਰੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੇ ਇੱਕ ਕੋਣ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੋਵੇ ਅਤੇ ਇਨ੍ਹਾਂ ਕੋਣਾਂ ਨੂੰ ਬਣਾਉਣ ਵਾਲੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਸਮਾਨ ਅਨੁਪਾਤੀ ਹੋਣ ਤਾਂ ਦੋਵੇਂ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਸਮਰੂਪ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ।*

ਇਸ ਕਸੌਟੀ ਨੂੰ ਦੋ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦੀ *ਸਮਰੂਪਤਾ* ਲਈ *SAS* (ਭੁਜਾ-ਕੋਣ-ਭੁਜਾ) *ਕਸੌਟੀ* ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਪਹਿਲਾਂ ਦੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਇਸ ਪ੍ਰਮੇਯ ਨੂੰ ਵੀ ਦੋ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਅਤੇ DEF ਅਜਿਹੇ ਲੈ ਕੇ ਕਿ $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$ (< 1) ਹੋਵੇ ਅਤੇ $\angle A = \angle D$ ਹੋਵੇ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 6.28) ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। Δ DEF ਵਿੱਚ DP = AB ਅਤੇ DQ = AC ਕੱਟੋ ਅਤੇ P ਅਤੇ Q ਨੂੰ ਮਿਲਾਉ।



ਚਿੱਤਰ 6.28

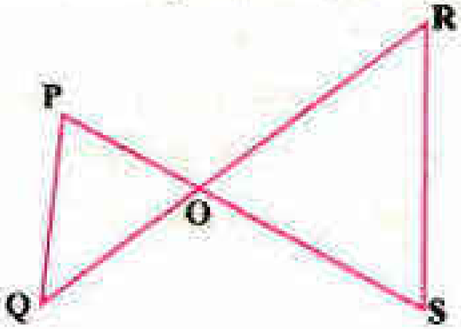
ਹੁਣ PQ $\parallel$ EF ਅਤੇ $\Delta ABC \cong \Delta DPQ$ (ਕਿਵੇਂ?)

ਇਸ ਲਈ $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle P$ ਅਤੇ $\angle C = \angle Q$ ਹੈ

ਇਸ ਲਈ $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ (ਕਿਉਂ?)

ਆਉ ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਇਨ੍ਹਾਂ ਕਸੌਟੀਆਂ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਣ ਲਈ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਲਈਏ।

ਉਦਾਹਰਣ 4 : ਚਿੱਤਰ 6.29 ਵਿੱਚ, ਜੇਕਰ PQ $\parallel$ RS ਹੋਵੇ, ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $\Delta POQ \sim \Delta SOR$ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 6.29

ਹੱਲ : PQ $\parallel$ RS (ਦਿੱਤਾ ਹੈ)

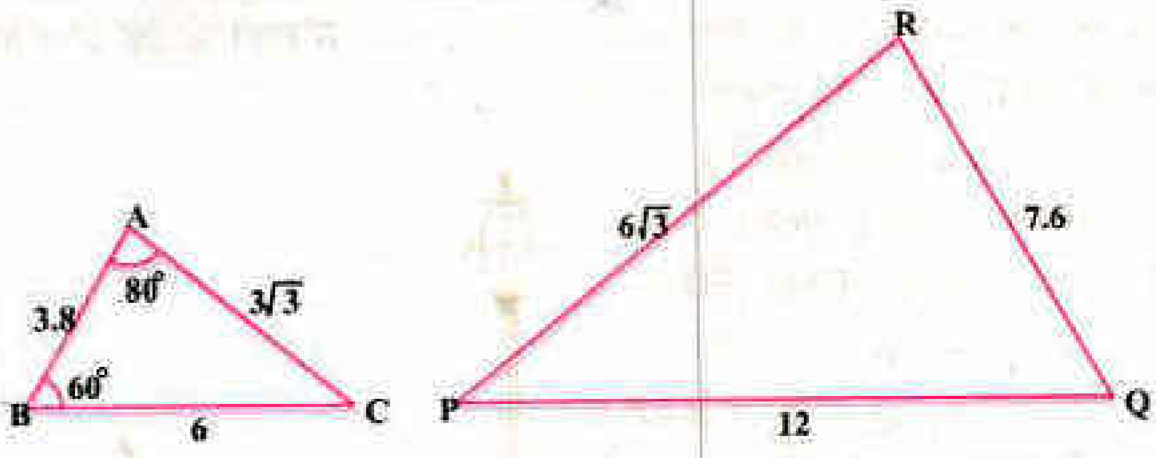
ਇਸ ਲਈ $\angle P = \angle S$ (ਇਕਾਂਤਰ ਕੋਣ)

ਅਤੇ $\angle Q = \angle R$ (ਇਕਾਂਤਰ ਕੋਣ)

ਨਾਲ ਹੀ $\angle POQ = \angle SOR$ (ਸਿਖਰ ਸਨਮੁੱਖ ਕੋਣ)

ਇਸ ਲਈ $\Delta POQ \sim \Delta SOR$ (AAA ਸਮਰੂਪਤਾ ਕਸੌਟੀ)

ਉਦਾਹਰਣ 5 : ਚਿੱਤਰ 6.30 ਵਿੱਚ $\angle P$ ਪਤਾ ਕਰੋ।



ਚਿੱਤਰ 6.30

ਹੱਲ : ΔABC ਅਤੇ ΔPQR ਵਿੱਚ,

$$\frac{AB}{RQ} = \frac{3.8}{7.6} = \frac{1}{2},\ \frac{BC}{QP} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \text{ ਅਤੇ } \frac{CA}{PR} = \frac{3\sqrt{3}}{6\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$$

ਭਾਵ $\frac{AB}{RQ} = \frac{BC}{QP} = \frac{CA}{PR}$

ਇਸ ਲਈ $\Delta ABC \sim \Delta RQP$ (SSS ਸਮਰੂਪਤਾ)

ਇਸ ਲਈ $\angle C = \angle P$

(ਸਮਰੂਪਤਾ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦੇ ਸੰਗਤ ਕੋਣ)

ਪਰੰਤੂ $\angle C = 180° - \angle A - \angle B$ (ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੇ ਕੋਣਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਗੁਣ ਤੋਂ)

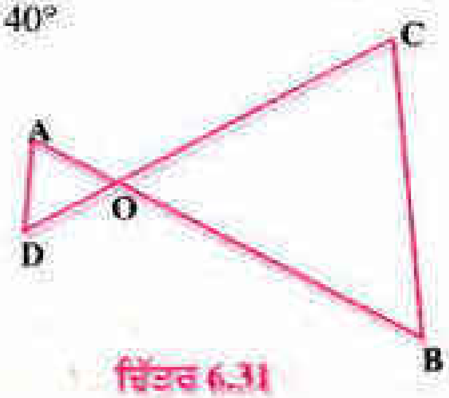
$= 180° - 80° - 60° = 40°$

ਇਸ ਲਈ $\angle P = 40°$

ਉਦਾਹਰਣ 6 : ਚਿੱਤਰ 6.31 ਵਿੱਚ,

$OA \cdot OB = OC \cdot OD$ ਹੈ।

ਦਿਖਾਉ ਕਿ $\angle A = \angle C$ ਅਤੇ $\angle B = \angle D$ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 6.31

ਹੱਲ : $OA \cdot OB = OC \cdot OD$ (ਦਿੱਤਾ ਹੈ)

ਇਸ ਲਈ $\frac{OA}{OC} = \frac{OD}{OB}$ (1)

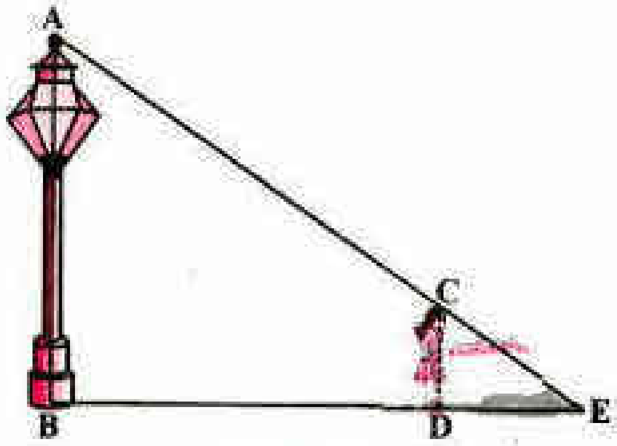
ਨਾਲ ਹੀ, ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੈ $\angle AOD = \angle COB$ (ਸਿਖਰ ਸਨਮੁੱਖ ਕੋਣ) (2)

ਇਸ ਲਈ (1) ਅਤੇ (2) ਤੋਂ $\Delta AOD \sim \Delta COB$ (SAS ਸਮਰੂਪਤਾ ਕਸੌਟੀ)

ਇਸ ਲਈ $\angle A = \angle C$ ਅਤੇ $\angle D = \angle B$ (ਸਮਰੂਪ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦੇ ਸੰਗਤ ਕੋਣ)

ਉਦਾਹਰਣ 7 : 90 cm ਲੰਬਾਈ ਵਾਲੀ ਇੱਕ ਲੜਕੀ ਬਲਬ ਲੱਗੇ ਇੱਕ ਖੰਭੇ ਦੇ ਆਧਾਰ ਤੋਂ 1.2 m/s ਦੀ ਚਾਲ ਨਾਲ ਦੂਰ ਜਾ ਰਹੀ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਬਲਬ ਜ਼ਮੀਨ ਤੋਂ 3.6 m ਉੱਚਾਈ 'ਤੇ ਹੋਵੇ ਤਾਂ 4 ਸੈਕਿੰਡ ਬਾਅਦ ਉਸ ਲੜਕੀ ਦੀ ਛਾਂ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ AB ਬਲਬ ਲੱਗੇ ਖੰਭੇ ਨੂੰ ਅਤੇ CD ਲੜਕੀ ਦੁਆਰਾ ਖੰਭੇ ਦੇ ਆਧਾਰ ਤੋਂ ਦੂਰ 4 ਸੈਕਿੰਡ ਚੱਲਣ ਬਾਅਦ ਉਸਦੀ ਸਥਿਤੀ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਨ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 6.32)।



ਚਿੱਤਰ 6.32

ਚਿੱਤਰ ਤੋਂ ਤੁਸੀਂ ਦੇਖ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ DE ਲੜਕੀ ਦੇ ਪਰਛਾਵੇਂ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਹੈ। ਮੰਨ ਲਉ DE, x m ਹੈ।

ਹੁਣ, $BD = 1.2 \text{ m} \times 4 = 4.8 \text{ m}$

ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ΔABE ਅਤੇ ΔCDE ਵਿੱਚ,

$\angle B = \angle D$ (ਹਰੇਕ 90° ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ ਖੰਭਾ ਅਤੇ ਲੜਕੀ ਦੋਵੇਂ ਜ਼ਮੀਨ ਦੇ ਲੰਬ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਖੜੇ ਹਨ)

ਅਤੇ $\angle E = \angle E$ (ਸਮਾਨ ਕੋਣ)

ਇਸ ਲਈ $\Delta ABE \sim \Delta CDE$ (AA ਸਮਰੂਪਤਾ ਕਸੌਟੀ)

ਇਸ ਲਈ $\frac{BE}{DE} = \frac{AB}{CD}$ (ਸਮਰੂਪ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀਆਂ ਸੰਗਤ ਭੁਜਾਵਾਂ)

ਭਾਵ $\frac{4.8 + x}{x} = \frac{3.6}{0.9}$ $\left(90 \text{ cm} = \frac{90}{100} \text{ m} = 0.9 \text{ m}\right)$

ਭਾਵ $4.8 + x = 4x$

ਭਾਵ $3x = 4.8$

ਭਾਵ $x = 1.6$

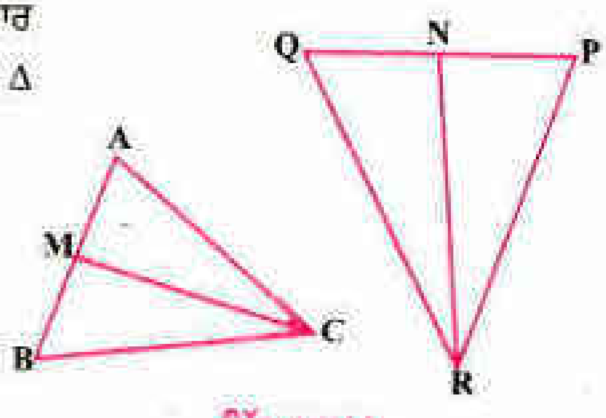
ਇਸ ਲਈ 4 ਸੈਕਿੰਡ ਚੱਲਣ ਦੇ ਬਾਅਦ ਲੜਕੀ ਦੇ ਪਰਛਾਵੇਂ ਦੀ ਲੰਬਾਈ 1.6 m ਹੋਵੇਗੀ।

ਉਦਾਹਰਣ 8 : ਚਿੱਤਰ 6.33 ਵਿੱਚ CM ਅਤੇ RN ਕ੍ਰਮਵਾਰ ΔABC ਅਤੇ ΔPQR ਦੀਆਂ ਮੱਧਿਕਾਵਾਂ ਹਨ। ਜੇਕਰ $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ

(i) $\Delta AMC \sim \Delta PNR$

(ii) $\frac{CM}{RN} = \frac{AB}{PQ}$

(iii) $\Delta CMB \sim \Delta RNQ$



ਚਿੱਤਰ 6.33

ਹੱਲ : (i) $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ (ਦਿੱਤਾ ਹੈ)

ਇਸ ਲਈ $\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{CA}{RP}$ (1)

ਅਤੇ $\angle A = \angle P, \angle B = \angle Q$ ਅਤੇ $\angle C = \angle R$ (2)

ਪਰੰਤੂ $AB = 2\,AM$ ਅਤੇ $PQ = 2\,PN$

(ਕਿਉਂਕਿ CM ਅਤੇ RN ਮੱਧਿਕਾਵਾਂ ਹਨ)

ਇਸ ਲਈ (1) ਤੋਂ $\frac{2AM}{2PN} = \frac{CA}{RP}$

ਭਾਵ $\frac{AM}{PN} = \frac{CA}{RP}$ (3)

ਨਾਲ ਹੀ $\angle MAC = \angle NPR$ [(2) ਤੋਂ] (4)

ਇਸ ਲਈ (3) ਅਤੇ (4) ਤੋਂ,

$\Delta AMC \sim \Delta PNR$ (SAS ਸਮਰੂਪਤਾ) (5)

(ii) (5) ਤੋਂ $\frac{CM}{RN} = \frac{CA}{RP}$ (6)

ਪਰੰਤੂ $\frac{CA}{RP} = \frac{AB}{PQ}$ [(1) ਤੋਂ] (7)

ਇਸ ਲਈ $\frac{CM}{RN} = \frac{AB}{PQ}$ [(6) ਅਤੇ (7) ਤੋਂ] (8)

(iii) (1) ਤੋਂ $\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR}$ [(1) ਤੋਂ]

ਇਸ ਲਈ $\frac{CM}{RN} = \frac{BC}{QR}$ [(8) ਤੋਂ] (9)

ਨਾਲ ਹੀ $\frac{CM}{RN} = \frac{AB}{PQ} = \frac{2\,BM}{2\,QN}$

ਭਾਵ $\frac{CM}{RN} = \frac{BM}{QN}$ (10)

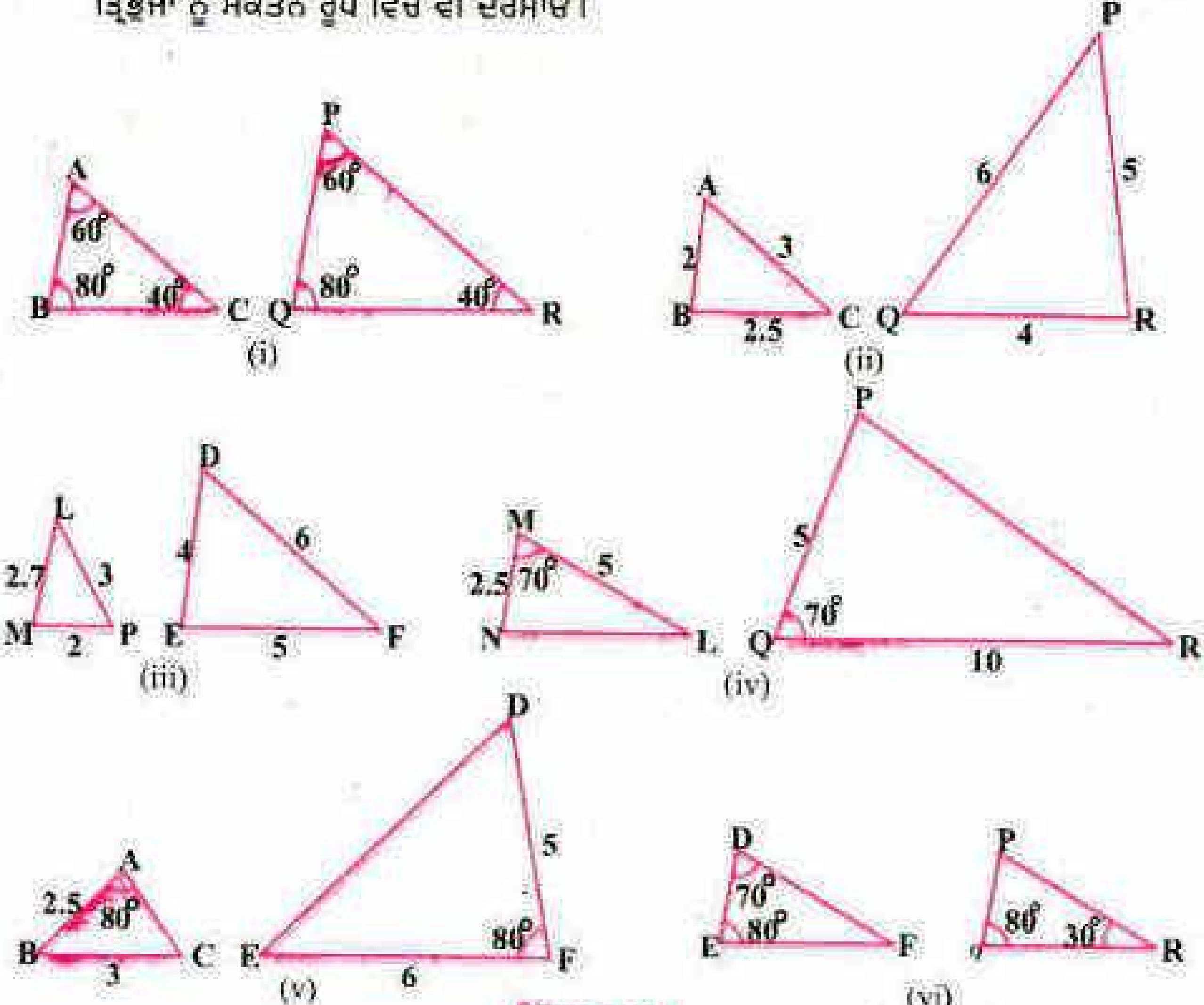
ਭਾਵ $\frac{CM}{RN} = \frac{BC}{QR} = \frac{BM}{QN}$ [(9) ਅਤੇ (10) ਤੋਂ]

ਇਸ ਲਈ $\Delta CMB \sim \Delta RNQ$ (SSS ਸਮਰੂਪਤਾ)

[**ਟਿੱਪਣੀ :** ਤੁਸੀਂ ਇਸ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਦੇ ਭਾਗ (iii) ਨੂੰ ਭਾਗ (i) ਵਿੱਚ ਵਰਤੀ ਗਈ ਵਿਧੀ ਨਾਲ ਵੀ ਸਿੱਧ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ।]

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 6.3

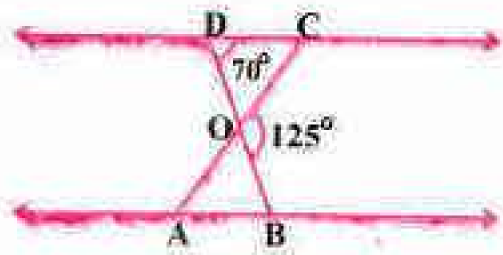
1. ਦੱਸੋ ਕਿ ਚਿੱਤਰ 6.34 ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੇ ਜੋੜਿਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਹੜੇ-ਕਿਹੜੇ ਜੋੜੇ ਸਮਰੂਪ ਹਨ। ਉਸ ਸਮਰੂਪਤਾ ਕਸੌਟੀ ਨੂੰ ਲਿਖੋ ਜਿਸ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਤੁਸੀਂ ਉੱਤਰ ਦੇਣ ਲਈ ਕੀਤਾ ਹੈ ਅਤੇ ਸਮਰੂਪ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਨੂੰ ਸੰਕੇਤਨ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਵੀ ਦਰਸਾਓ।



ਚਿੱਤਰ 6.34

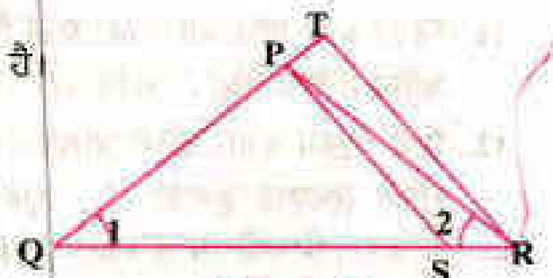
2. ਚਿੱਤਰ 6.35 ਵਿੱਚ $\Delta ODC \sim \Delta OBA$, $\angle BOC = 125^\circ$ ਅਤੇ $\angle CDO = 70^\circ$ ਹੈ। $\angle DOC$, $\angle DCO$ ਅਤੇ $\angle OAB$ ਪਤਾ ਕਰੋ।

3. ਸਮਲੰਬ ਚਤੁਰਭੁਜ ABCD, ਜਿਸ ਵਿੱਚ $AB \parallel DC$ ਹੈ, ਦੇ ਵਿਕਰਣ AC ਅਤੇ BD ਆਪਸ ਵਿੱਚ O 'ਤੇ ਕੱਟਦੇ ਹਨ। ਦੋ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦੀ ਸਮਰੂਪਤਾ ਕਸੌਟੀ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਦਿਖਾਓ ਕਿ $\frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD}$ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 6.35

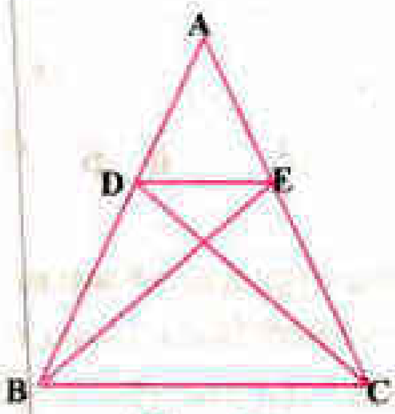
4. ਚਿੱਤਰ 6.36 ਵਿੱਚ, $\frac{QR}{QS} = \frac{QT}{PR}$ ਅਤੇ $\angle 1 = \angle 2$ ਹੈ। ਦਿਖਾਉ ਕਿ $\Delta PQS \sim \Delta TQR$ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 6.36

5. ΔPQR ਦੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ PR ਅਤੇ QR ਉਤੇ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਬਿੰਦੂ S ਅਤੇ T ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸਥਿਤ ਹਨ ਕਿ $\angle P = \angle RTS$ ਹੈ। ਦਿਖਾਉ ਕਿ $\Delta RPQ \sim \Delta RTS$ ਹੈ।

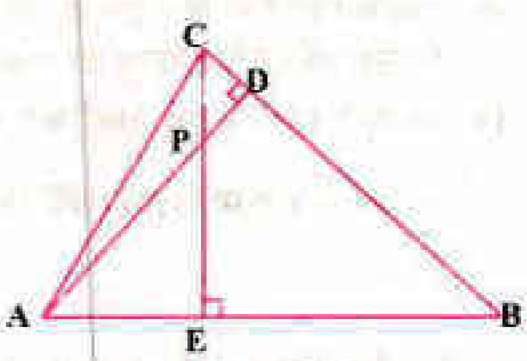
6. ਚਿੱਤਰ 6.37 ਵਿੱਚ, ਜੇਕਰ $\Delta ABE \cong \Delta ACD$ ਹੈ ਤਾਂ ਦਿਖਾਉ ਕਿ $\Delta ADE \sim \Delta ABC$ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 6.37

7. ਚਿੱਤਰ 6.38 ਵਿੱਚ, ΔABC ਦੇ ਸਿਖਰ ਲੰਬ AD ਅਤੇ CE ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਬਿੰਦੂ P ਉੱਤੇ ਕੱਟਦੇ ਹਨ ਦਿਖਾਉ ਕਿ:
   (i) $\Delta AEP \sim \Delta CDP$
   (ii) $\Delta ABD \sim \Delta CBE$
   (iii) $\Delta AEP \sim \Delta ADB$
   (iv) $\Delta PDC \sim \Delta BEC$

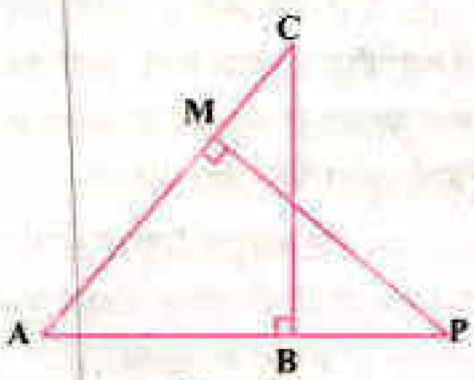
8. ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ABCD ਦੀ ਵਧਾਈ ਗਈ ਭੁਜਾ AD ਉੱਤੇ ਸਥਿਤ E ਕੋਈ ਬਿੰਦੂ ਹੈ ਅਤੇ BE ਭੁਜਾ CD ਨੂੰ F 'ਤੇ ਕੱਟਦੀ ਹੈ। ਦਿਖਾਉ ਕਿ $\Delta ABE \sim \Delta CFB$ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 6.38

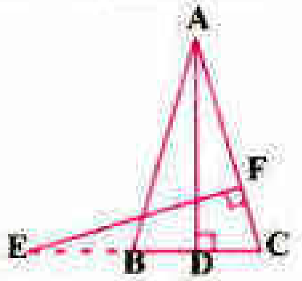
9. ਚਿੱਤਰ 6.39 ਵਿੱਚ, ABC ਅਤੇ AMP ਦੋ ਸਮਕੋਣ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਹਨ, ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਦੇ ਕੋਣ B ਅਤੇ M ਸਮਕੋਣ ਹਨ। ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ:
   (i) $\Delta ABC \sim \Delta AMP$
   (ii) $\frac{CA}{PA} = \frac{BC}{MP}$

10. CD ਅਤੇ GH ਕ੍ਰਮਵਾਰ $\angle ACB$ ਅਤੇ $\angle EGF$ ਦੇ ਅਜਿਹੇ ਸਮਦੁਭਾਜਕ ਹਨ ਕਿ ਬਿੰਦੂ D ਅਤੇ H ਕ੍ਰਮਵਾਰ ΔABC ਅਤੇ ΔFEG ਦੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ AB ਅਤੇ FE ਉੱਤੇ ਸਥਿਤ ਹਨ। ਜੇਕਰ $\Delta ABC \sim \Delta FEG$ ਹੋਵੇ, ਤਾਂ ਦਿਖਾਉ ਕਿ:
   (i) $\frac{CD}{GH} = \frac{AC}{FG}$
   (ii) $\Delta DCB \sim \Delta HGE$
   (iii) $\Delta DCA \sim \Delta HGF$

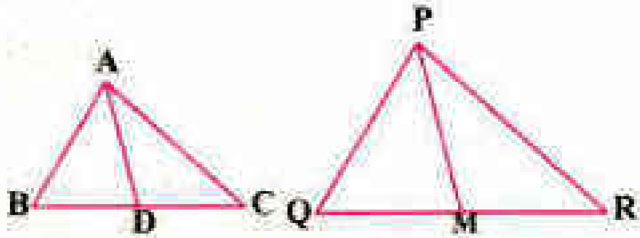


ਚਿੱਤਰ 6.39

11. ਚਿੱਤਰ 6.40 ਵਿੱਚ, AB = AC ਵਾਲੇ ਇੱਕ ਸਮਦੋਭੁਜੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਦੀ ਵਧਾਈ ਗਈ ਭੁਜਾ CB ਉੱਤੇ ਸਥਿਤ E ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਹੈ। ਜੇਕਰ $AD \perp BC$ ਅਤੇ $EF \perp AC$ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $\Delta ABD \sim \Delta ECF$ ਹੈ।
12. ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਦੀਆਂ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਭੁਜਾਵਾਂ AB, BC ਅਤੇ ਮੱਧਿਕਾ AD ਕਿਸੇ ਹੋਰ ਤ੍ਰਿਭੁਜ PQR ਦੀਆਂ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਭੁਜਾਵਾਂ PQ, QR ਅਤੇ ਮਧਿੱਕਾ PM ਦੇ ਸਮਾਨ-ਅਨੁਪਾਤੀ ਹਨ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 6.41)। ਦਿਖਾਉ ਕਿ $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 6.40



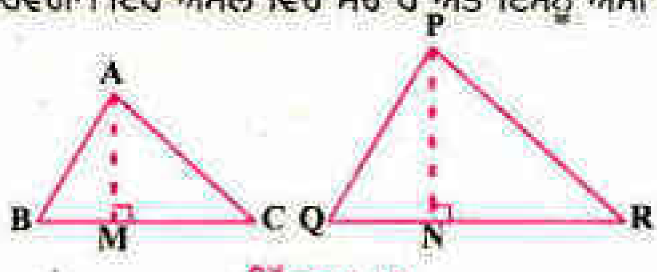
ਚਿੱਤਰ 6.41

13. ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਦੀ ਭੁਜਾ BC ਉੱਤੇ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ D ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸਥਿਤ ਹੈ ਕਿ $\angle ADC = \angle BAC$ ਹੈ। ਦਿਖਾਉ ਕਿ $CA^2 = CB.CD$ ਹੈ।
14. ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਦੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ AB, AC ਅਤੇ ਮੱਧਿਕਾ AD ਇੱਕ ਹੋਰ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ PQ, PR ਮੱਧਿਕਾ PM ਦੇ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਸਮਾਨ-ਅਨੁਪਾਤੀ। ਦਰਸਾਉ ਕਿ $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ ਹੈ।
15. 6 m ਲੰਬਾਈ ਵਾਲੇ ਇੱਕ ਲੰਬ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਖੜੇ ਖੰਭੇ ਦੀ ਜਮੀਨ 'ਤੇ ਪਰਛਾਵੇਂ ਦੀ ਲੰਬਾਈ 4 m ਹੈ, ਜਦੋਂ ਕਿ ਉਸੇ ਸਮੇਂ ਇੱਕ ਮੀਨਾਰ ਦੀ ਪਰਛਾਵੇਂ ਦੀ ਲੰਬਾਈ 28 m ਹੈ। ਮੀਨਾਰ ਦੀ ਉਚਾਈ ਪਤਾ ਕਰੋ।
16. AD ਅਤੇ PM ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ABC ਅਤੇ PQR ਦੀਆਂ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਮੱਧਿਕਾਵਾਂ ਹਨ, ਜਦੋਂ ਕਿ $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ ਹੈ। ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $\frac{AB}{PQ} = \frac{AD}{PM}$ ਹੈ।

6.5 ਸਮਰੂਪ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦੇ ਖੇਤਰਫਲ

ਤੁਸੀਂ ਇਹ ਸਿੱਖ ਲਿਆ ਹੈ ਕਿ ਦੋ ਸਮਰੂਪ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਵਿੱਚ ਉਨ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਸੰਗਤ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦੇ ਅਨੁਪਾਤ ਇੱਕ ਹੀ (ਸਮਾਨ) ਰਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਸੋਚਦੇ ਹੋ ਕਿ ਇਨ੍ਹਾਂ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦੇ ਖੇਤਰਫਲਾਂ ਦੇ ਅਨੁਪਾਤ ਅਤੇ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦੇ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਸੰਬੰਧ ਹੈ? ਤੁਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹੋ ਕਿ ਖੇਤਰਫਲ ਨੂੰ ਵਰਗ ਇਕਾਈਆਂ (square units) ਵਿੱਚ ਮਾਪਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ, ਤੁਸੀਂ ਇਹ ਉਮੀਦ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ ਖੇਤਰਫਲਾਂ ਦਾ ਅਨੁਪਾਤ ਇਨ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਸੰਗਤ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦੇ ਅਨੁਪਾਤ ਦੇ ਵਰਗ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੋਵੇਗਾ। ਇਹ ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਸੱਚ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸਨੂੰ ਅਸੀਂ ਅਗਲੀ ਪ੍ਰਮੇਯ ਵਿੱਚ ਸਿੱਧ ਕਰਾਂਗੇ।

ਪ੍ਰਮੇਯ 6.6 : *ਦੋ ਸਮਰੂਪ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦੇ ਖੇਤਰਫਲਾਂ ਦਾ ਅਨੁਪਾਤ ਇਨ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਸੰਗਤ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦੇ ਅਨੁਪਾਤ ਦੇ ਵਰਗ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।*



ਚਿੱਤਰ 6.42

ਸਬੂਤ : ਸਾਨੂੰ ਦੋ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਅਤੇ PQR ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦਿੱਤੇ ਹਨ ਕਿ $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ ਹੈ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 6.42)।

ਅਸੀਂ ਸਿੱਧ ਕਰਨਾ ਹੈ ਕਿ $\dfrac{ar(ABC)}{ar(PQR)} = \left(\dfrac{AB}{PQ}\right)^2 = \left(\dfrac{BC}{QR}\right)^2 = \left(\dfrac{CA}{RP}\right)^2$

ਦੋਵੇਂ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦੇ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਅਸੀਂ ਇਨ੍ਹਾਂ ਦੇ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਸਿਖਰ ਲੰਬ AM ਅਤੇ PN ਖਿੱਚਦੇ ਹਾਂ।

ਹੁਣ $$ar(ABC) = \frac{1}{2} BC \times AM$$

ਅਤੇ $$ar(PQR) = \frac{1}{2} QR \times PN$$

ਇਸ ਲਈ $$\frac{ar(ABC)}{ar(PQR)} = \frac{\frac{1}{2} \times BC \times AM}{\frac{1}{2} \times QR \times PN} = \frac{BC \times AM}{QR \times PN} \qquad (1)$$

ਹੁਣ, ΔABM ਅਤੇ ΔPQN ਵਿੱਚ,

$\angle B = \angle Q$ (ਕਿਉਂਕਿ $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ ਹੈ)

ਅਤੇ $\angle M = \angle N$ (ਹਰੇਕ 90° ਦਾ ਹੈ)

ਇਸ ਲਈ $\Delta ABM \sim \Delta PQN$ (AA ਸਮਰੂਪਤਾ ਕਸੌਟੀ)

ਇਸ ਲਈ $$\frac{AM}{PN} = \frac{AB}{PQ} \qquad (2)$$

ਨਾਲ ਹੀ $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ (ਦਿੱਤਾ ਹੈ)

ਇਸ ਲਈ $$\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{CA}{RP} \qquad (3)$$

ਇਸ ਲਈ $$\frac{ar(ABC)}{ar(PQR)} = \frac{AB}{PQ} \times \frac{AM}{PN} \qquad [(1) \text{ ਅਤੇ } (3) \text{ ਤੋਂ}]$$

$$= \frac{AB}{PQ} \times \frac{AB}{PQ} \qquad [(2) \text{ ਤੋਂ}]$$

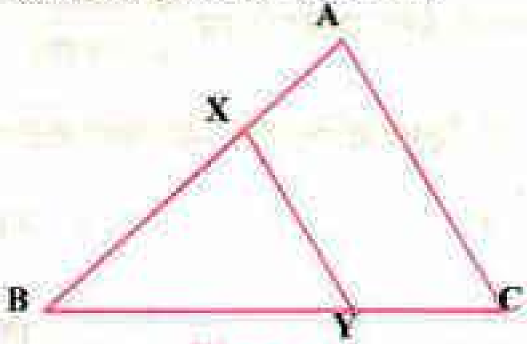
$$= \left(\frac{AB}{PQ}\right)^2$$

ਹੁਣ (3) ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ, ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ

$$\frac{ar\,(ABC)}{ar\,(PQR)} = \left(\frac{AB}{PQ}\right)^2 = \left(\frac{BC}{QR}\right)^2 = \left(\frac{CA}{RP}\right)^2$$

ਆਉ ਅਸੀਂ ਇਸ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਣ ਲਈ ਇੱਕ ਉਦਾਹਰਣ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ।

ਉਦਾਹਰਣ 9 : ਚਿੱਤਰ 6.43 ਵਿੱਚ, ਰੇਖਾਖੰਡ XY ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਦੀ ਭੁਜਾ AC ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਹੈ ਅਤੇ ਇਹ ਇਸ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਨੂੰ ਬਰਾਬਰ ਖੇਤਰਫਲ ਵਾਲੇ ਦੋ ਭਾਗਾਂ ਵਿੱਚ ਵੰਡਦਾ ਹੈ। ਅਨੁਪਾਤ $\frac{AX}{AB}$ ਪਤਾ ਕਰੋ।



ਚਿੱਤਰ 6.43

ਹੱਲ : ਸਾਨੂੰ ਦਿੱਤਾ ਹੈ $\quad XY \parallel AC \quad$ (ਦਿੱਤਾ ਹੈ)

ਇਸ ਲਈ $\quad \angle BXY = \angle A$ ਅਤੇ $\angle BYX = \angle C \quad$ (ਸੰਗਤ ਕੋਣ)

ਇਸ ਲਈ $\quad \Delta ABC \sim \Delta XBY \quad$ (AA ਸਮਰੂਪਤਾ ਕਸੌਟੀ)

ਇਸ ਲਈ $$\frac{ar\,(ABC)}{ar\,(XBY)} = \left(\frac{AB}{XB}\right)^2 \quad \text{(ਪ੍ਰਮੇਯ 6.6)} \quad (1)$$

ਨਾਲ ਹੀ $\quad ar\,(ABC) = 2\,ar\,(XBY) \quad$ (ਦਿੱਤਾ ਹੈ)

ਇਸ ਲਈ $$\frac{ar\,(ABC)}{ar\,(XBY)} = \frac{2}{1} \quad (2)$$

ਇਸ ਲਈ (1) ਅਤੇ (2) ਤੋਂ

$$\left(\frac{AB}{XB}\right)^2 = \frac{2}{1}, \text{ ਭਾਵ } \frac{AB}{XB} = \frac{\sqrt{2}}{1} \text{ ਹੈ।}$$

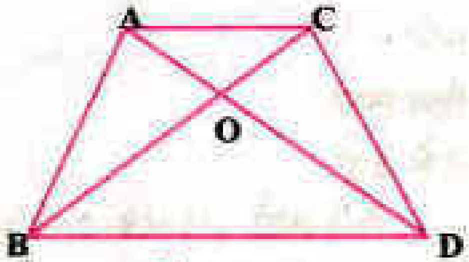
ਜਾਂ $$\frac{XB}{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

ਜਾਂ $$1 - \frac{XB}{AB} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$$

ਜਾਂ $$\frac{AB - XB}{AB} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}, \text{ ਭਾਵ } \frac{AX}{AB} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} = \frac{2-\sqrt{2}}{2} \text{ ਹੈ।}$$

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 6.4

1. ਮੰਨ ਲਉ $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ ਹੈ ਅਤੇ ਇਨ੍ਹਾਂ ਦੇ ਖੇਤਰਫਲ ਕ੍ਰਮਵਾਰ 64 cm^2 ਅਤੇ 121 cm^2 ਹਨ। ਜੇਕਰ $EF = 15.4$ cm ਹੋਵੇ ਤਾਂ BC ਪਤਾ ਕਰੋ।
2. ਇੱਕ ਸਮਲੰਬ ਚਤੁਰਭੁਜ ABCD ਜਿਸ ਵਿੱਚ $AB \parallel DC$ ਹੈ, ਦੇ ਵਿਕਰਣ ਆਪਸ ਵਿੱਚ O ਬਿੰਦੂ ਉੱਤੇ ਕੱਟਦੇ ਹਨ। ਜੇਕਰ $AB = 2\,CD$ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ AOB ਅਤੇ COD ਦੇ ਖੇਤਰਫਲਾਂ ਦਾ ਅਨੁਪਾਤ ਪਤਾ ਕਰੋ।
3. ਚਿੱਤਰ 6.44 ਵਿੱਚ ਇੱਕੋ ਆਧਾਰ BC ਉੱਤੇ ਦੋ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਅਤੇ DBC ਬਣੇ ਹੋਏ ਹਨ। ਜੇਕਰ AD, BC ਨੂੰ O 'ਤੇ ਕੱਟੇ ਤਾਂ ਦਰਸਾਉ ਕਿ $\frac{ar(ABC)}{ar(DBC)} = \frac{AO}{DO}$ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 6.44

4. ਜੇਕਰ ਦੋ ਸਮਰੂਪ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦੇ ਖੇਤਰਫਲ ਬਰਾਬਰ ਹੋਣ ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਉਹ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਸਰਬੰਗਸਮ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।
5. ਇਸ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਦੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ AB, BC ਅਤੇ CA ਦੇ ਮੱਧ ਬਿੰਦੂ ਕ੍ਰਮਵਾਰ D, E ਅਤੇ F ਹਨ। ΔDEF ਅਤੇ ΔABC ਦੇ ਖੇਤਰਫਲਾਂ ਦਾ ਅਨੁਪਾਤ ਪਤਾ ਕਰੋ।
6. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਦੋ ਸਮਰੂਪ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦੇ ਖੇਤਰਫਲਾਂ ਦਾ ਅਨੁਪਾਤ ਇਨ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਸੰਗਤ ਮੱਧਿਕਾਵਾਂ ਦੇ ਅਨੁਪਾਤ ਦਾ ਵਰਗ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।
7. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਇੱਕ ਵਰਗ ਦੀ ਕਿਸੇ ਭੁਜਾ 'ਤੇ ਬਣਾਏ ਗਏ ਸਮਭੁਜੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਉਸੇ ਵਰਗ ਦੇ ਇੱਕ ਵਿਕਰਣ 'ਤੇ ਬਣੇ ਸਮਭੁਜੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੇ ਖੇਤਰਫਲ ਦਾ ਅੱਧਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਸਹੀ ਉੱਤਰ ਚੁਣੋ ਅਤੇ ਆਪਣੇ ਉੱਤਰ ਸਪਸ਼ਟੀਕਰਣ ਵੀ ਦਿਉ

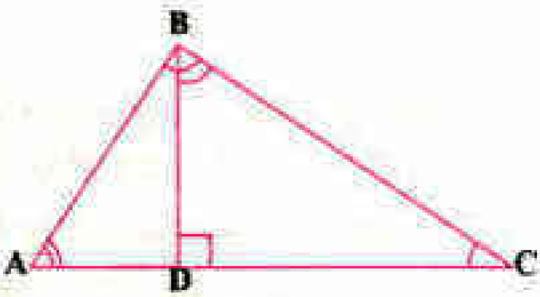
8. ABC ਅਤੇ BDE ਦੋ ਸਮਭੁਜੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਹਨ ਕਿ D ਭੁਜਾ BC ਦਾ ਮੱਧ ਬਿੰਦੂ ਹੈ। ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ABC ਅਤੇ BDE ਦੇ ਖੇਤਰਫਲਾਂ ਦਾ ਅਨੁਪਾਤ ਹੈ :

   (A) 2 : 1 (B) 1 : 2 (C) 4 : 1 (D) 1 : 4
9. ਦੋ ਸਮਰੂਪ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ 4 : 9 ਦੇ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਹਨ। ਇਨ੍ਹਾਂ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦੇ ਖੇਤਰਫਲਾ ਦਾ ਅਨੁਪਾਤ ਹੈ:

   (A) 2 : 3 (B) 4 : 9 (C) 81 : 16 (D) 16 : 81

6.6 ਪਾਈਥਾਗੋਰਸ ਪ੍ਰਮੇਯ

ਪਿਛਲੀਆਂ ਜਮਾਤਾਂ ਵਿੱਚ ਤੁਸੀਂ ਪਾਈਥਾਗੋਰਸ ਪ੍ਰਮੇਯ ਨਾਲ ਚੰਗੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਜਾਣੂੰ ਹੋ ਚੁੱਕੇ ਹੋ। ਤੁਸੀਂ ਕੁਝ ਕ੍ਰਿਆਵਾਂ ਦੁਆਰਾ ਇਸ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦੀ ਜਾਂਚ ਕੀਤੀ ਸੀ ਅਤੇ ਇਸਦੇ ਆਧਾਰ 'ਤੇ ਕੁਝ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਹੱਲ ਕੀਤੇ ਸਨ। ਤੁਸੀਂ ਜਮਾਤ IX ਵਿੱਚ ਇਸ ਦੇ ਸਬੂਤ ਬਾਰੇ ਵੀ ਪੜ੍ਹਿਆ ਸੀ। ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਇਸ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦਾ ਸਿੱਟਾ, ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦੀ ਸਮਰੂਪਤਾ ਦੀ ਧਾਰਨਾ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ ਦੇਵਾਂਗੇ। ਇਸ ਨੂੰ ਸਿੱਧ ਕਰਨ ਲਈ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਸਮਕੋਣ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੇ ਕਰਣ 'ਤੇ ਸਨਮੁੱਖ ਸਿਖ਼ਰ ਤੋਂ ਖਿੱਚੇ ਗਏ ਲੰਬ ਦੇ ਦੋਵੇਂ ਪਾਸ ਬਣੇ ਸਮਰੂਪ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ



ਚਿੱਤਰ 6.45

ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਤ ਇੱਕ ਸਿੱਟੇ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਾਂਗੇ।

ਹੁਣ ਆਉ ਇੱਕ ਸਮਕੋਣ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਲਈਏ ਜਿਸਦਾ ਕੋਣ B ਸਮਕੋਣ ਹੈ। ਮੰਨ ਲਉ BD ਕਰਣ AC ਉੱਤੇ ਲੰਬ ਹੈ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 6.45)। ਤੁਸੀਂ ਦੇਖ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ ΔADB ਅਤੇ ΔABC ਵਿੱਚ,

$\angle A = \angle A$

ਅਤੇ $\angle ADB = \angle ABC$ (ਕਿਉਂ?)

ਇਸ ਲਈ $\Delta ADB \sim \Delta ABC$ (ਕਿਵੇਂ?) (1)

ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ $\Delta BDC \sim \Delta ABC$ (ਕਿਵੇਂ?) (2)

ਇਸ ਲਈ, (1) ਅਤੇ (2) ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਲੰਬ BD ਦੇ ਦੋਵੇਂ ਪਾਸੇ ਦੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਸੰਪੂਰਨ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਦੇ ਸਮਰੂਪ ਹਨ।

ਨਾਲ ਹੀ, ਕਿਉਂਕਿ $\Delta ADB \sim \Delta ABC$ ਹੈ

ਅਤੇ $\Delta BDC \sim \Delta ABC$ ਹੈ

ਇਸ ਲਈ $\Delta ADB \sim \Delta BDC$ (ਭਾਗ 6.2 ਦੀ ਟਿੱਪਣੀ ਤੋਂ)

ਉਪਰੋਕਤ ਚਰਚਾ ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਪ੍ਰਮੇਯ 'ਤੇ ਪਹੁੰਚਦੇ ਹਾਂ :

ਪ੍ਰਮੇਯ 6.7 : *ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ ਸਮਕੋਣ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੇ ਸਮਕੋਣ ਵਾਲੇ ਸਿਖਰ ਤੋਂ ਕਰਣ 'ਤੇ ਲੰਬ ਖਿੱਚਿਆ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਇਸ ਲੰਬ ਦੇ ਦੋਵੇਂ ਪਾਸੇ ਬਣੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਮੂਲ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੇ ਸਮਰੂਪ ਹੁੰਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਵੀ ਸਮਰੂਪ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।*

ਆਉ ਪਾਈਥਾਗੋਰਸ ਪ੍ਰਮੇਯ ਨੂੰ ਸਿੱਧ ਕਰਨ ਲਈ ਉਪਰੋਕਤ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰੀਏ।


ਪਾਈਥਾਗੋਰਸ
(569-479 ਈ.)

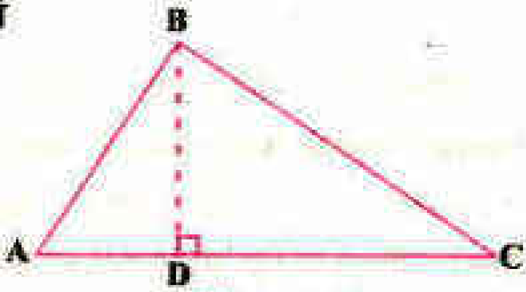
ਪ੍ਰਮੇਯ 6.8 : *ਇੱਕ ਸਮਕੋਣ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਵਿੱਚ ਕਰਣ ਦਾ ਵਰਗ ਬਾਕੀ ਦੋ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦੇ ਵਰਗਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।*

ਸਬੂਤ : ਸਾਨੂੰ ਇੱਕ ਸਮਕੋਣ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਹੈ ਜਿਸ ਦਾ $\angle B$ ਸਮਕੋਣ ਹੈ।

ਅਸੀਂ ਸਿੱਧ ਕਰਨਾ ਹੈ ਕਿ $AC^2 = AB^2 + BC^2$

ਆਉ $BD \perp AC$ ਖਿੱਚਦੇ ਹਾਂ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 6.46)

ਹੁਣ $\Delta ADB \sim \Delta ABC$ (ਪ੍ਰਮੇਯ 6.7)



ਚਿੱਤਰ 6.46

ਇਸ ਲਈ $\frac{AD}{AB} = \frac{AB}{AC}$ (ਭੁਜਾਵਾਂ ਸਮਾਨ-ਅਨੁਪਾਤੀ ਹਨ)

ਜਾਂ $AD \cdot AC = AB^2$ (1)

ਨਾਲ ਹੀ $\Delta BDC \sim \Delta ABC$ (ਪ੍ਰਮੇਯ 6.7)

ਇਸ ਲਈ $\frac{CD}{BC} = \frac{BC}{AC}$ (ਭੁਜਾਵਾਂ ਸਮਾਨ-ਅਨੁਪਾਤੀ ਹਨ)

ਜਾਂ $CD \cdot AC = BC^2$ (2)

(1) ਅਤੇ (2) ਨੂੰ ਜੋੜਨ 'ਤੇ

$$AD \cdot AC + CD \cdot AC = AB^2 + BC^2$$

ਜਾਂ $AC\,(AD + CD) = AB^2 + BC^2$

ਜਾਂ $AC \cdot AC = AB^2 + BC^2$

ਜਾਂ $AC^2 = AB^2 + BC^2$

ਉਪਰੋਕਤ ਪ੍ਰਮੇਯ ਨੂੰ ਇੱਕ ਪ੍ਰਾਚੀਨ ਭਾਰਤੀ ਗਣਿਤ ਵਿਗਿਆਨੀ ਬੋਧਾਯਨ (ਲਗਭਗ 800 ਈ. ਪੂ.) ਨੇ ਹੇਠਾਂ ਲਿਖੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤਾ ਸੀ :

ਇੱਕ ਆਇਤ ਦਾ ਵਿਕਰਣ ਖੁਦ ਉਨਾਂ ਹੀ ਖੇਤਰਫਲ ਬਣਾਉਂਦਾ ਹੈ, ਜਿਨਾਂ ਉਸ ਦੀਆਂ ਦੋਵੇਂ ਭੁਜਾਵਾਂ (ਭਾਵ ਲੰਬਾਈ ਅਤੇ ਚੌੜਾਈ) ਨਾਲ ਮਿਲ ਕੇ ਬਣਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਦਾ ਅਰਥ ਹੈ :

ਕਿਸੇ ਆਇਤ ਦੇ ਵਿਕਰਣ ਨਾਲ ਬਣੇ ਵਰਗ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਇਸ ਦੀਆਂ ਦੋਵੇਂ ਲਾਗਵੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ 'ਤੇ ਬਣੇ ਵਰਗਾਂ ਦੇ ਖੇਤਰਫਲਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੈ।

ਇਸੇ ਕਾਰਣ ਇਸ ਪ੍ਰਮੇਯ ਨੂੰ ਕਦੇ-ਕਦੇ ਬੋਧਾਯਨ ਪ੍ਰਮੇਯ ਵੀ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

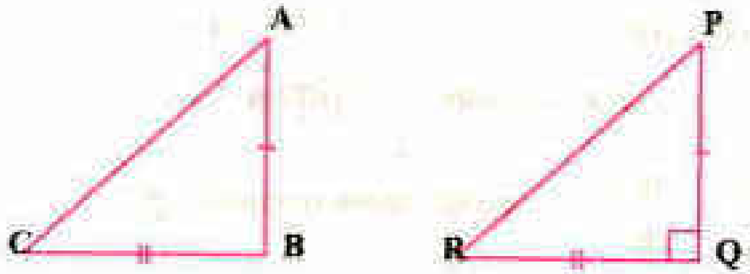
ਪਾਈਥਾਗੋਰਸ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦੇ ਉਲਟ ਦੇ ਬਾਰੇ ਵਿੱਚ ਕੀ ਕਿਹਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ? ਤੁਸੀਂ ਪਿਛਲੀਆਂ ਜਮਾਤਾਂ ਵਿੱਚ ਜਾਂਚ ਕਰ ਚੁੱਕੇ ਹੋ ਕਿ ਇਸ ਦਾ ਉਲਟ ਵੀ ਸੱਚ ਹੈ। ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਇਸ ਨੂੰ ਇੱਕ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਸਿੱਧ ਕਰਾਂਗੇ।

ਪ੍ਰਮੇਯ 6.9 : *ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਭੁਜਾ ਦਾ ਵਰਗ, ਦੂਸਰੀਆਂ ਦੋ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦੇ ਵਰਗਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਪਹਿਲੀ ਭੁਜਾ ਦੇ ਸਾਹਮਣੇ ਵਾਲਾ ਕੋਣ, ਸਮਕੋਣ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।*

ਸਬੂਤ : ਇੱਥੇ ਸਾਨੂੰ ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਦਿੱਤਾ ਹੈ, ਜਿਸ ਵਿੱਚ $AC^2 = AB^2 + BC^2$ ਹੈ।

ਅਸੀਂ ਸਿੱਧ ਕਰਨਾ ਹੈ $\angle B = 90^\circ$

ਇਸ ਨੂੰ ਸ਼ੁਰੂ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ ਇੱਕ Δ PQR ਦੀ ਰਚਨਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਜਿਸ ਵਿੱਚ, $\angle Q = 90°$, PQ = AB ਅਤੇ QR = BC (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 6.47)।



ਚਿੱਤਰ 6.47

ਹੁਣ Δ PQR ਤੋਂ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ:

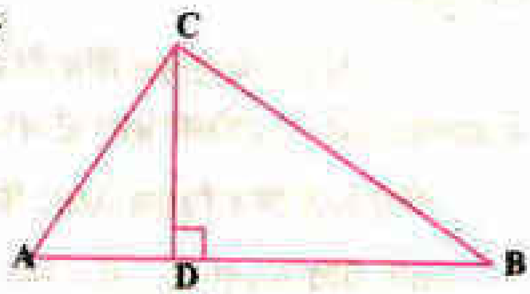
	$PR^2 = PQ^2 + QR^2$	(ਪਾਇਥਾਗੋਰਸ ਪ੍ਰਮੇਯ, ਕਿਉਂਕਿ $\angle Q = 90°$ ਹੈ)	
ਜਾਂ	$PR^2 = AB^2 + BC^2$	(ਰਚਨਾ ਤੋਂ)	(1)
ਪਰੰਤੂ	$AC^2 = AB^2 + BC^2$	(ਦਿੱਤਾ ਹੈ)	(2)
ਇਸ ਲਈ	AC = PR	[(1) ਅਤੇ (2) ਤੋਂ]	(3)

ਹੁਣ, Δ ABC ਅਤੇ Δ PQR ਵਿੱਚ

	AB = PQ	(ਰਚਨਾ ਤੋਂ)
	BC = QR	(ਰਚਨਾ ਤੋਂ)
	AC = PR	[ਉੱਪਰ (3) ਵਿੱਚ ਸਿੱਧ ਕੀਤਾ ਹੈ]
ਇਸ ਲਈ	$\Delta ABC \cong \Delta PQR$	(SSS ਸਰਬੰਗਸਮਤਾ)
ਇਸ ਲਈ	$\angle B = \angle Q$	(CPCT)
ਪਰੰਤੂ	$\angle Q = 90°$	(ਰਚਨਾ ਤੋਂ)
ਇਸ ਲਈ	$\angle B = 90°$	

ਟਿੱਪਣੀ : ਇਸ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦੇ ਇੱਕ ਹੋਰ ਸਬੂਤ ਦੇ ਲਈ ਅੰਤਿਕਾ 1 ਦੇਖੋ। ਆਓ ਇਨਾਂ ਪ੍ਰਮੇਯਾਂ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਦਰਸਾਉਣ ਦੇ ਲਈ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਲਈਏ।

ਉਦਾਹਰਣ 10 : ਚਿੱਤਰ 6.48 ਵਿੱਚ $\angle ACB = 90°$ ਅਤੇ $CD \perp AB$ ਹੈ। ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $\frac{BC^2}{AC^2} = \frac{BD}{AD}$ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 6.48

ਹੱਲ : $\Delta ACD \sim \Delta ABC$

(ਪ੍ਰਮੇਯ 6.7)

ਇਸ ਲਈ $$\frac{AC}{AB} = \frac{AD}{AC}$$

ਜਾਂ $$AC^2 = AB \cdot AD \quad (1)$$

ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ $$\Delta BCD \sim \Delta BAC \quad \text{(ਪ੍ਰਮੇਯ 6.7)}$$

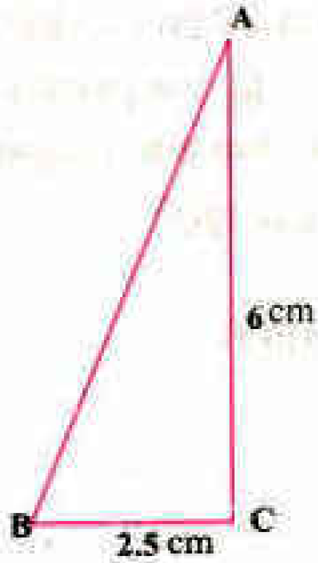
ਇਸ ਲਈ $$\frac{BC}{BA} = \frac{BD}{BC}$$

ਜਾਂ $$BC^2 = BA \cdot BD \quad (2)$$

ਇਸ ਲਈ (1) ਅਤੇ (2) ਤੋਂ

$$\frac{BC^2}{AC^2} = \frac{BA \cdot BD}{AB \cdot AD} = \frac{BD}{AD}$$

ਉਦਾਹਰਣ 11 . ਇੱਕ ਪੌੜੀ ਕਿਸੇ ਦੀਵਾਰ ਨਾਲ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਟਿਕੀ ਹੋਈ ਹੈ ਕਿ ਇਸਦਾ ਹੇਠਲਾ ਸਿਰਾ ਕੰਧ (ਦੀਵਾਰ) ਤੋਂ 2.5 m ਦੀ ਦੂਰੀ 'ਤੇ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸਦਾ ਉਪਰਲਾ ਸਿਰਾ ਜ਼ਮੀਨ ਤੋਂ 6 m ਦੀ ਉੱਚਾਈ 'ਤੇ ਬਣੀ ਇੱਕ ਖਿੜਕੀ ਤੱਕ ਪਹੁੰਚਦਾ ਹੈ। ਪੌੜੀ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਪਤਾ ਕਰੋ।



ਚਿੱਤਰ 6.49

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ AB ਪੌੜੀ ਹੈ ਅਤੇ CA ਕੰਧ (ਦੀਵਾਰ) ਹੈ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਖਿੜਕੀ A 'ਤੇ ਹੈ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 6.49)।

ਨਾਲ ਹੀ $BC = 2.5$ m ਅਤੇ $CA = 6$ m ਹੈ।

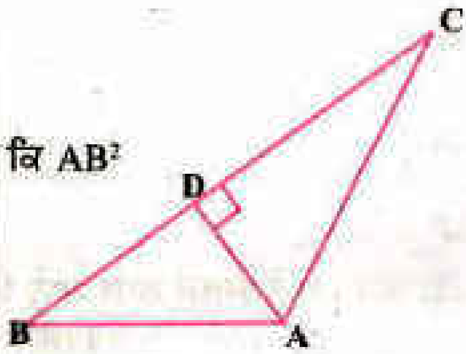
ਪਾਇਥਾਗੋਰਸ ਪ੍ਰਮੇਯ ਤੋਂ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ :

$$\begin{aligned} AB^2 &= BC^2 + CA^2 \\ &= (2.5)^2 + (6)^2 \\ &= 42.25 \end{aligned}$$

ਇਸ ਲਈ $AB = 6.5$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ, ਪੌੜੀ ਦੀ ਲੰਬਾਈ 6.5 m ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 12 : ਚਿੱਤਰ 6.50 ਵਿੱਚ $AD \perp BC$ ਹੈ। ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $AB^2 + CD^2 = BD^2 + AC^2$ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 6.50

ਹੱਲ : ΔADC ਤੋਂ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ :

$$AC^2 = AD^2 + CD^2 \quad (1)$$

(ਪਾਇਥਾਗੋਰਸ ਪ੍ਰਮੇਯ)

ΔADB ਤੋਂ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :

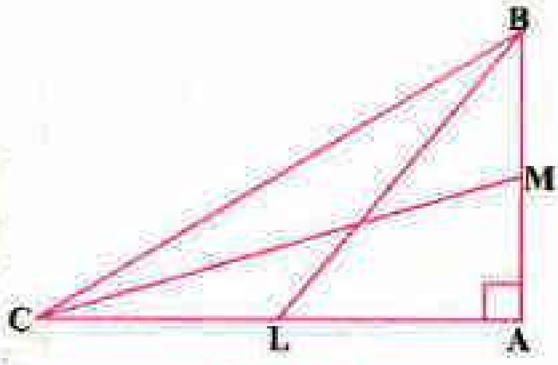
$$AB^2 = AD^2 + BD^2 \qquad (2) \qquad \text{(ਪਾਇਥਾਗੋਰਸ ਪ੍ਰਮੇਯ)}$$

(2) ਵਿੱਚੋਂ (1) ਨੂੰ ਘਟਾਉਣ 'ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ :

$$AB^2 - AC^2 = BD^2 - CD^2$$

ਜਾਂ $$AB^2 + CD^2 = BD^2 + AC^2$$

ਉਦਾਹਰਣ 13 : BL ਅਤੇ CM ਇੱਕ ਸਮਕੋਣ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਦੀਆਂ ਮੱਧਿਕਾਵਾਂ ਹਨ ਅਤੇ ਇਸ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦਾ ਕੋਣ A ਸਮਕੋਣ ਹੈ। ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $4(BL^2 + CM^2) = 5\,BC^2$



ਚਿੱਤਰ 6.51

ਹੱਲ : BL ਅਤੇ CM ਇੱਕ ΔABC ਦੀਆਂ ਮੱਧਿਕਾਵਾਂ ਹਨ : ਜਿਸ ਵਿੱਚ $\angle A = 90^\circ$ ਹੈ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 6.51)।

ΔABC ਵਿੱਚ

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \qquad \text{(ਪਾਇਥਾਗੋਰਸ ਪ੍ਰਮੇਯ)} \quad (1)$$

ΔABL ਤੋਂ

$$BL^2 = AL^2 + AB^2$$

ਜਾਂ $$BL^2 = \left(\frac{AC}{2}\right)^2 + AB^2 \qquad \text{(AC ਦਾ ਮੱਧ ਬਿੰਦੂ L ਹੈ)}$$

ਜਾਂ $$BL^2 = \frac{AC^2}{4} + AB^2$$

ਜਾਂ $$4\,BL^2 = AC^2 + 4\,AB^2 \qquad (2)$$

ΔCMA ਤੋਂ

$$CM^2 = AC^2 + AM^2$$

ਜਾਂ $$CM^2 = AC^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2 \qquad \text{(AB ਦਾ ਮੱਧ ਬਿੰਦੂ M ਹੈ)}$$

ਜਾਂ $$CM^2 = AC^2 + \frac{AB^2}{4}$$

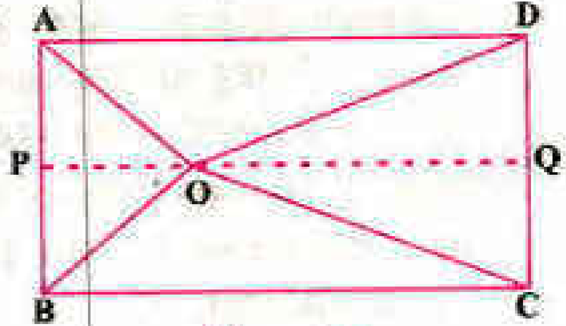
ਜਾਂ $$4\,CM^2 = 4\,AC^2 + AB^2 \qquad (3)$$

(2) ਅਤੇ (3) ਨੂੰ ਜੋੜਨ ਨਾਲ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ :

$$4(BL^2 + CM^2) = 5(AC^2 + AB^2)$$

ਜਾਂ $$4(BL^2 + CM^2) = 5\,BC^2 \qquad [(1) \text{ ਤੋਂ}]$$

ਉਦਾਹਰਣ 14 : ਆਇਤ ABCD ਦੇ ਅੰਦਰ ਸਥਿਤ O ਕੋਈ ਬਿੰਦੂ ਹੈ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 6.52)। ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $OB^2 + OD^2 = OA^2 + OC^2$ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 6.52

ਹੱਲ :

O ਤੋਂ ਹੋ ਕੇ ਜਾਂਦੀ ਹੋਈ $PQ \parallel BC$ ਖਿੱਚੋ ਜਿਸ ਨਾਲ ਕਿ P ਭੁਜਾ AB 'ਤੇ ਸਥਿਤ ਹੋਵੇ ਅਤੇ Q ਭੁਜਾ DC 'ਤੇ ਸਥਿਤ ਹੋਵੇ

ਹੁਣ $PQ \parallel BC$ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ $PQ \perp AB$ ਅਤੇ $PQ \perp DC$ ($\angle B = 90°$ ਅਤੇ $\angle C = 90°$)

ਇਸ ਲਈ $\angle BPQ = 90°$ ਅਤੇ $\angle CQP = 90°$ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ BPQC ਅਤੇ APQD ਦੋਨੋਂ ਆਇਤਾਂ ਹਨ।

ਹੁਣ ΔOPB ਤੋਂ

$$OB^2 = BP^2 + OP^2 \quad (1)$$

ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ΔOQD ਤੋਂ

$$OD^2 = OQ^2 + DQ^2 \quad (2)$$

ΔOQC ਤੋਂ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ

$$OC^2 = OQ^2 + CQ^2 \quad (3)$$

ਅਤੇ ΔOAP ਤੋਂ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ

$$OA^2 = AP^2 + OP^2 \quad (4)$$

(1) ਅਤੇ (2) ਨੂੰ ਜੋੜਨ ਤੇ

$$OB^2 + OD^2 = BP^2 + OP^2 + OQ^2 + DQ^2$$
$$= CQ^2 + OP^2 + OQ^2 + AP^2$$

(ਕਿਉਂ ਕਿ $BP = CQ$ ਅਤੇ $DQ = AP$ ਹੈ)

$$= CQ^2 + OQ^2 + OP^2 + AP^2$$
$$= OC^2 + OA^2$$ [(3) ਅਤੇ (4) ਤੋਂ]

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 6.5

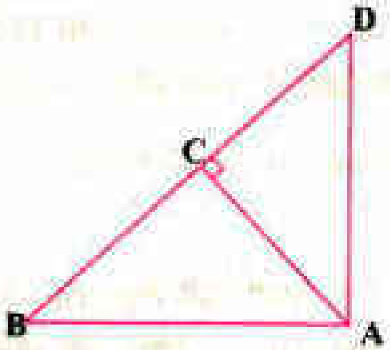
1. ਕੁਝ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਗਈਆਂ ਹਨ। ਨਿਰਧਾਰਿਤ ਕਰੋ ਕਿ ਇਹਨਾਂ ਵਿਚੋਂ ਕਿਹੜੀ-ਕਿਹੜੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਸਮਕੋਣ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਹੈ। ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਕਰਣ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਵੀ ਲਿਖੋ :

(i) 7 cm, 24 cm, 25 cm (ii) 3 cm, 8 cm, 6 cm

(iii) 50 cm, 80 cm, 100 cm (iv) 13 cm, , 12 cm, 5cm

2. PQR ਇੱਕ ਸਮਕੋਣ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਹੈ ਜਿਸਦਾ ਕੋਣ P ਸਮਕੋਣ ਹੈ ਅਤੇ QR 'ਤੇ ਬਿੰਦੂ M ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸਥਿਤ ਹੈ ਕਿ $PM \perp QR$ ਹੈ। ਦਰਸਾਉ ਕਿ $PM^2 = QM \cdot MR$ ਹੈ।

3. ਚਿੱਤਰ 6.53 ਵਿੱਚ ABD ਇੱਕ ਸਮਕੋਣ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਹੈ ਇਸਦਾ ਕੋਣ A ਸਮਕੋਣ ਹੈ ਅਤੇ $AC \perp BD$ ਹੈ। ਦਿਖਾਉ ਕਿ
   (i) $AB^2 = BC \cdot BD$
   (ii) $AC^2 = BC \cdot DC$
   (iii) $AD^2 = BD \cdot CD$



ਚਿੱਤਰ 6.53

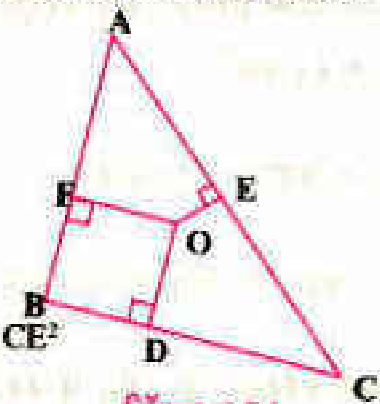
4. ABC ਇੱਕ ਸਮਦੋਭੁਜੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਹੈ ਜਿਸਦਾ ਕੋਣ C ਸਮਕੋਣ ਹੈ। ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $AB^2 = 2AC^2$ ਹੈ।

5. ABC ਇੱਕ ਸਮਦੋਭੁਜੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਹੈ ਜਿਸ ਵਿੱਚ $AC = BC$ ਹੈ। ਜੇਕਰ $AB^2 = 2AC^2$ ਹੈ ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ABC ਇੱਕ ਸਮਕੋਣ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਹੈ।

6. ਇੱਕ ਸਮਭੁਜੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਦੀ ਭੁਜਾ $2a$ ਹੈ। ਇਸਦੇ ਹਰੇਕ ਸਿਖਰ ਲੰਬ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਪਤਾ ਕਰੋ।

7. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਇੱਕ ਸਮਚਤੁਰਭੁਜ ਦੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦੇ ਵਰਗਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਉਸਦੇ ਵਿਕਰਣਾਂ ਦੇ ਵਰਗਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

8. ਚਿੱਤਰ 6.54 ਵਿੱਚ, ΔABC ਦੇ ਵਿੱਚ ਸਥਿਤ ਕੋਈ ਬਿੰਦੂ O ਹੈ ਅਤੇ $OD \perp BC$, $OE \perp AC$ ਅਤੇ $OF \perp AB$ ਹੈ। ਦਿਖਾਉ ਕਿ
   (i) $OA^2 + OB^2 + OC^2 - OD^2 - OE^2 - OF^2 = AF^2 + BD^2 + CE^2$
   (ii) $AF^2 + BD^2 + CE^2 = AE^2 + CD^2 + BF^2$



ਚਿੱਤਰ 6.54

9. 10 m ਲੰਬੀ ਇੱਕ ਪੌੜੀ ਇੱਕ ਕੰਧ ਨਾਲ ਲਗਾਉਣ 'ਤੇ ਜ਼ਮੀਨ ਨਾਲੋਂ 8 m ਦੀ ਉੱਚਾਈ 'ਤੇ ਸਥਿਤ ਇੱਕ ਖਿੜਕੀ ਤੱਕ ਪਹੁੰਚਦੀ ਹੈ। ਕੰਧ ਦੇ ਅਧਾਰ ਤੋਂ ਪੌੜੀ ਦੇ ਹੇਠਲੇ ਸਿਰੇ ਦੀ ਦੂਰੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।

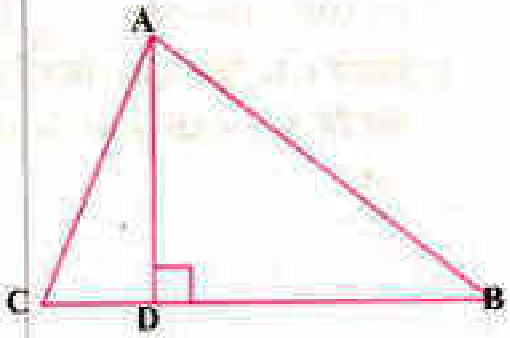
10. 18 m ਉੱਚੇ ਇੱਕ ਸਿੱਧੇ ਖੜੇ ਖੰਭੇ ਦੇ ਉਪਰਲੇ ਸਿਰੇ ਨਾਲ ਤਾਰ ਦਾ ਇੱਕ ਸਿਰਾ ਜੁੜਿਆ ਹੋਇਆ ਹੈ ਅਤੇ ਤਾਰ ਦਾ ਦੂਸਰਾ ਸਿਰਾ ਇੱਕ ਕਿੱਲੇ ਨਾਲ ਜੁੜਿਆ ਹੋਇਆ ਹੈ। ਖੰਭੇ ਦੇ ਅਧਾਰ ਤੋਂ ਕਿੱਲੇ ਨੂੰ ਕਿੰਨੀ ਦੂਰੀ 'ਤੇ ਗੱਡਿਆ ਜਾਵੇ ਕਿ ਤਾਰ ਤਣੀ ਰਹੇ ਜਦੋਂ ਕਿ ਤਾਰ ਦੀ ਲੰਬਾਈ 24 m ਹੈ।

11. ਇੱਕ ਹਵਾਈ ਜਹਾਜ਼ ਇੱਕ ਹਵਾਈ ਅੱਡੇ ਤੋਂ ਉੱਤਰ ਵੱਲ 1000 km/h ਦੀ ਚਾਲ ਨਾਲ ਉੱਡਦਾ ਹੈ। ਉਸੇ ਸਮੇਂ ਇੱਕ ਹੋਰ ਹਵਾਈ ਜਹਾਜ਼ ਉਸੇ ਹਵਾਈ ਅੱਡੇ ਤੋਂ ਪੱਛਮ ਵੱਲ 1200 km/h ਦੀ ਚਾਲ ਨਾਲ ਉੱਡਦਾ ਹੈ। $1\frac{1}{2}$ ਘੰਟੇ ਬਾਦ ਦੋਵਾਂ ਹਵਾਈ ਜਹਾਜ਼ਾਂ ਦੀ ਵਿਚਕਾਰਲੀ ਦੂਰੀ ਕਿੰਨੀ ਹੋਵੇਗੀ?

12. ਦੋ ਖੰਭੇ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਉੱਚਾਈਆਂ 6 m ਅਤੇ 11 m ਹਨ ਅਤੇ ਉਹ ਸਮਤਲ ਭੂਮੀ 'ਤੇ ਖੜ੍ਹੇ ਹਨ। ਜੇਕਰ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਹੇਠਲੇ ਸਿਰਿਆਂ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰਲੀ ਦੂਰੀ 12 m ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਉਪਰਲੇ ਸਿਰਿਆਂ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰਲੀ ਦੂਰੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।

13. ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਜਿਸਦਾਂ ਕੋਣ C ਸਮਕੋਣ ਹੈ, ਦੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ CA ਅਤੇ CB 'ਤੇ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਬਿੰਦੂ D ਅਤੇ E ਸਥਿਤ ਹਨ। ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $AE^2 + BD^2 = AB^2 + DE^2$ ਹੈ।

14. ਕਿਸੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਦੇ ਸਿਖਰ A ਤੋਂ BC 'ਤੇ ਸੁੱਟਿਆ ਗਿਆ ਲੰਬ BC ਨੂੰ ਬਿੰਦੂ D 'ਤੇ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕੱਟਦਾ ਹੈ ਕਿ DB = 3 CD ਹੈ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 6.55)। ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $2\,AB^2 = 2\,AC^2 + BC^2$ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 6.55

15. ਕਿਸੇ ਸਮਭੁਜੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਦੀ ਭੁਜਾ BC 'ਤੇ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ D ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸਥਿਤ ਹੈ ਕਿ $BD = \frac{1}{3}$ BC ਹੈ, ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $9\,AD^2 = 7\,AB^2$ ਹੈ।

16. ਕਿਸੇ ਸਮਭੁਜੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਵਿੱਚ, ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਉਸਦੀ ਇੱਕ ਭੁਜਾ ਦੇ ਵਰਗ ਦਾ ਤਿਗੁਣਾ (ਤਿੰਨ ਗੁਣਾ) ਉਸਦੇ ਇੱਕ ਸਿਖ਼ਰ ਲੰਬ ਦੇ ਵਰਗ ਦੇ ਚਾਰ ਗੁਣਾ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

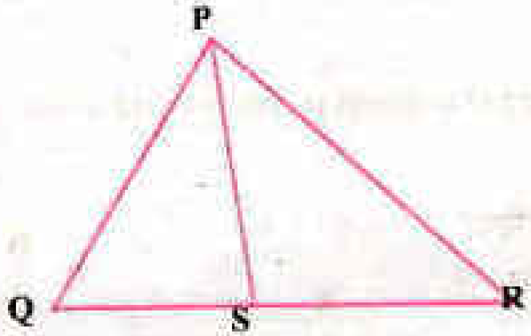
17. ਸਹੀ ਉੱਤਰ ਚੁਣ ਕੇ ਉਸਦਾ ਕਾਰਣ ਦੱਸੋ : ΔABC ਵਿੱਚ $AB = 6\sqrt{3}$ cm, AC = 12 cm ਅਤੇ BC = 6 cm ਹੈ। ਕੋਣ B ਹੈ :

(A) 120° (B) 60°

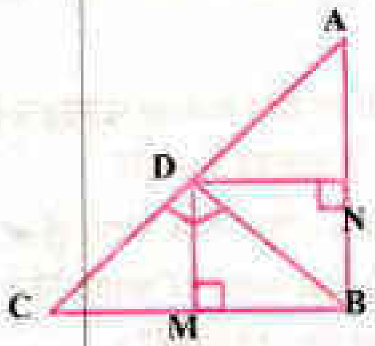
(C) 90° (D) 45°

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 6.6 (ਇੱਛਾ ਅਨੁਸਾਰ)*

1. ਚਿੱਤਰ 6.56 ਵਿੱਚ PS ਕੋਣ QPR ਦਾ ਸਮਦੋਭਾਜਕ ਹੈ। ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $\frac{QS}{SR} = \frac{PQ}{PR}$ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 6.56



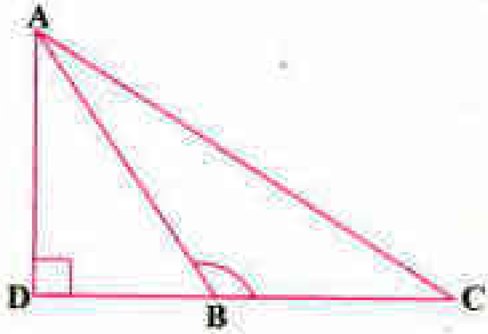
ਚਿੱਤਰ 6.57

2. ਚਿੱਤਰ 6.57 ਵਿੱਚ D ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਦੇ ਕਰਣ AC ਉੱਤੇ ਸਥਿਤ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਹੈ ਜਦ ਕਿ $BD \perp AC$ ਅਤੇ $DM \perp BC$ ਅਤੇ $DN \perp AB$ ਹੈ। ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ

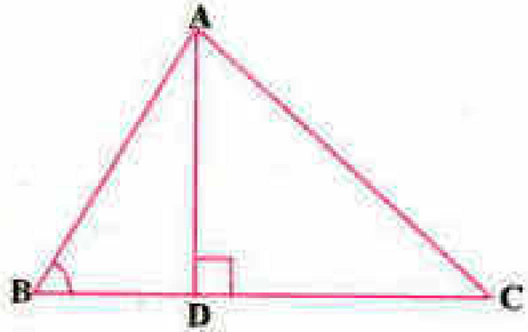
*ਇਹ ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ ਪ੍ਰੀਖਿਆ ਦੀ ਦ੍ਰਿਸ਼ਟੀ ਤੋਂ ਨਹੀਂ ਹੈ।

(i) $DM^2 = DN \cdot MC$ (ii) $DN^2 = DM \cdot AN$

3. ਚਿੱਤਰ 6.58 ਵਿੱਚ ABC ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਹੈ ਜਿਸ ਵਿੱਚ $\angle ABC > 90°$ ਹੈ ਅਤੇ $AD \perp CB$ ਹੈ। ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2\,BC \cdot BD$ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 6.58



ਚਿੱਤਰ 6.59

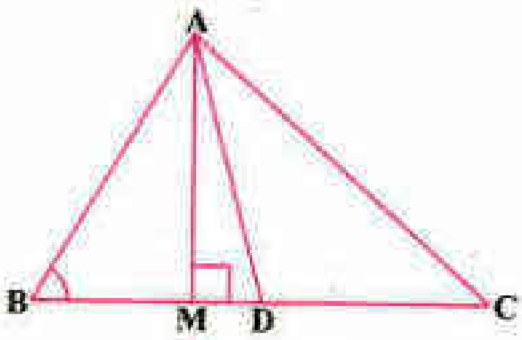
4. ਚਿੱਤਰ 6.59 ਵਿੱਚ ABC ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਹੈ ਜਿਸ ਵਿੱਚ $\angle ABC < 90°$ ਹੈ ਅਤੇ $AD \perp BC$ ਹੈ। ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2\,BC \cdot BD$ ਹੈ।

5. ਚਿੱਤਰ 6.60 ਵਿੱਚ AD ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਦੀ ਇੱਕ ਮੱਧਿਕਾ ਹੈ ਅਤੇ $AM \perp BC$ ਹੈ। ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ

(i) $AC^2 = AD^2 + BC \cdot DM + \left(\frac{BC}{2}\right)^2$

(ii) $AB^2 = AD^2 - BC \cdot DM + \left(\frac{BC}{2}\right)^2$

(iii) $AC^2 + AB^2 = 2\,AD^2 + \frac{1}{2}\,BC^2$



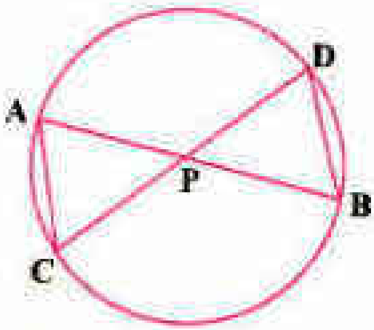
ਚਿੱਤਰ 6.60

6. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਇੱਕ ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੇ ਵਿਕਰਣਾਂ ਦੇ ਵਰਗਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਉਸਦੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦੇ ਵਰਗਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

7. ਚਿੱਤਰ 6.61 ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਦੀਆਂ ਦੋ ਜੀਵਾਵਾਂ (ਵਤਰਾਂ) AB ਅਤੇ CD ਆਪਸ ਵਿੱਚ P ਬਿੰਦੂ 'ਤੇ ਕੱਟਦੀਆਂ ਹਨ। ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ

(i) $\Delta APC \sim \Delta DPB$

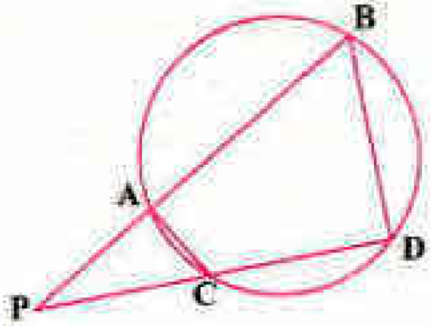
(ii) $AP \cdot PB = CP \cdot DP$



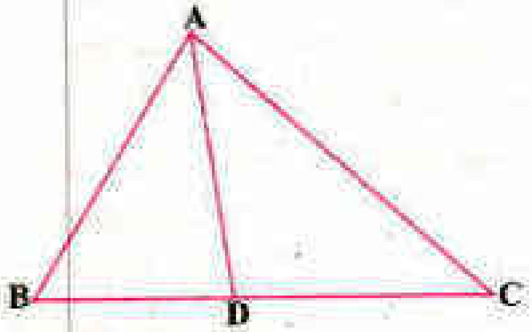
ਚਿੱਤਰ 6.61

8. ਚਿੱਤਰ 6.62 ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਦੀਆਂ ਦੋ ਵਤਰਾਂ AB ਅਤੇ CD ਵਧਾਉਣ 'ਤੇ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਬਿੰਦੂ P 'ਤੇ ਕੱਟਦੀਆਂ ਹਨ। ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ

(i) $\Delta PAC \sim \Delta PDB$ (ii) $PA \cdot PB = PC \cdot PD$



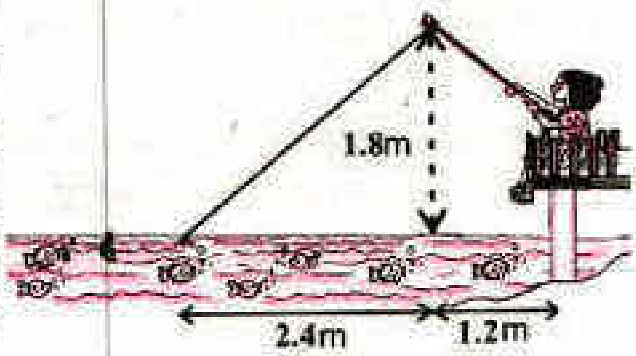
ਚਿੱਤਰ 6.62



ਚਿੱਤਰ 6.63

9. ਚਿੱਤਰ 6.63 ਵਿੱਚ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਦੀ ਭੁਜਾ BC 'ਤੇ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ D ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸਥਿਤ ਹੈ ਕਿ $\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC}$ ਹੈ। ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ AD, ਕੋਣ BAC ਦਾ ਸਮਦੋਭਾਜਕ ਹੈ।

10. ਨਾਜ਼ਿਮਾ ਇੱਕ ਨਦੀ ਦੀ ਧਾਰਾ ਵਿੱਚ ਮੱਛੀਆਂ ਪਕੜ ਰਹੀ ਹੈ। ਉਸਦੀ ਮੱਛੀਆਂ ਫੜਨ ਵਾਲੀ ਛੜ ਦਾ ਸਿਰਾ ਪਾਣੀ ਦੀ ਸਤ੍ਹਾ ਤੋਂ 1.8 m ਉੱਪਰ ਹੈ ਅਤੇ ਡੋਰੀ ਦੇ ਹੇਠਲੇ ਸਿਰੇ ਤੇ ਲੱਗਿਆ ਕੁੰਡਾ ਪਾਣੀ ਦੀ ਸਤ੍ਹਾ 'ਤੇ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸਥਿਤ ਹੈ ਕਿ ਉਸਦੀ ਨਾਜ਼ਿਮਾ ਤੋਂ ਦੂਰੀ 3.6 m ਹੈ ਅਤੇ ਛੜ ਦੇ ਸਿਰੇ ਦੇ ਠੀਕ ਹੇਠਾਂ ਪਾਣੀ ਦੀ ਸਤ੍ਹਾ 'ਤੇ ਸਥਿਤ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਉਸਦੀ ਦੂਰੀ 2.4 m ਹੈ। ਇਹ ਮੰਨਦੇ ਹੋਏ ਕਿ ਉਸਦੀ ਡੋਰੀ (ਉਸਦੀ ਛੜ ਦੇ ਸਿਰੇ ਤੋਂ ਕੁੰਡੇ ਤੱਕ) ਤਣੀ ਹੋਈ ਹੈ, ਉਸਨੇ ਕਿੰਨੀ ਡੋਰੀ ਬਾਹਰ ਕੱਢੀ ਹੋਈ ਹੈ। (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 6.64)? ਜੇਕਰ ਉਹੀ ਡੋਰੀ ਨੂੰ 5 cm/s ਦੀ ਦਰ ਨਾਲ ਅੰਦਰ ਖਿੱਚੇ ਤਾਂ 12 ਸੈਕਿੰਡਾਂ ਬਾਦ ਨਾਜ਼ਿਮਾ ਦੀ ਕੁੰਡੇ ਤੋਂ ਖਿਤਿਜੀ ਦੂਰੀ ਕਿੰਨੀ ਹੋਵੇਗੀ?



ਚਿੱਤਰ 6.64

6.7 ਸਾਰ-ਅੰਸ਼

ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ, ਤੁਸੀਂ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਨੁਕਤਿਆਂ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕੀਤਾ ਹੈ :

1. ਦੋ ਚਿੱਤਰ ਜਿੰਨ੍ਹਾਂ ਦੇ ਆਕਾਰ ਇੱਕੋ ਜਿਹੇ ਹੋਣ ਪਰੰਤੂ ਜ਼ਰੂਰੀ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਮਾਪ ਬਰਾਬਰ ਨਾ ਹੋਣ, ਸਮਰੂਪ ਚਿੱਤਰ ਕਹਾਉਂਦੇ ਹਨ।
2. ਸਾਰੇ ਸਰਬੰਗਸਮ ਚਿੱਤਰ ਸਮਰੂਪ ਹੁੰਦੇ ਹਨ ਪਰੰਤੂ ਇਸਦਾ ਉਲਟ ਸੱਚ ਨਹੀਂ ਹੈ।

3. ਭੁਜਾਵਾਂ ਦੀ ਬਰਾਬਰ ਸੰਖਿਆ ਵਾਲੇ ਦੋ ਬਹੁਭੁਜ ਸਮਰੂਪ ਹੁੰਦੇ ਹਨ ਜੇਕਰ (i) ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਸੰਗਤ ਕੋਣ ਬਰਾਬਰ ਹੋਣ ਅਤੇ (ii) ਉਹਨਾਂ ਦੀਆਂ ਸੰਗਤ ਭੁਜਾਵਾਂ ਇੱਕ ਹੀ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ (ਸਮਾਨ-ਅਨੁਪਾਤੀ) ਹੋਣ।
4. ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀ ਇੱਕ ਭੁਜਾ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਬਾਕੀ ਦੋ ਭੁਜਾਵਾਂ ਨੂੰ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਬਿੰਦੂਆਂ 'ਤੇ ਕੱਟਦੀ ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਖਿੱਚੀ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਇਹ ਬਾਕੀ ਦੋ ਭੁਜਾਵਾਂ ਇੱਕ ਹੀ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਵੰਡੀਆਂ ਜਾਂਦੀਆਂ ਹਨ।
5. ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਕਿਸੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀਆਂ ਦੋ ਭੁਜਾਵਾਂ ਨੂੰ ਇੱਕ ਹੀ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਵੰਡੇ, ਤਾਂ ਇਹ ਰੇਖਾ ਤੀਸਰੀ ਭੁਜਾ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।
6. ਜੇਕਰ ਦੋ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਵਿੱਚ ਸੰਗਤ ਕੋਣ ਬਰਾਬਰ ਹੋਣ ਤਾਂ ਉਹਨਾਂ ਦੀਆਂ ਸੰਗਤ ਭੁਜਾਵਾਂ ਇੱਕ ਹੀ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ ਅਤੇ ਇਸ ਲਈ ਦੋਵੇਂ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਸਮਰੂਪ ਹੁੰਦੇ ਹਨ (AAA ਸਮਰੂਪਤਾ ਕਸੌਟੀ)।
7. ਜੇਕਰ ਦੋ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੇ ਦੋ ਕੋਣ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਦੂਸਰੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੇ ਦੋ ਕੋਣਾਂ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੋਣ ਤਾਂ ਦੋਵੇਂ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਸਮਰੂਪ ਹੁੰਦੇ ਹਨ (AA ਸਮਰੂਪਤਾ ਕਸੌਟੀ)।
8. ਜੇਕਰ ਦੋ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਵਿੱਚ ਸੰਗਤ ਭੁਜਾਵਾਂ ਇੱਕ ਹੀ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਹੋਣ ਤਾਂ ਉਹਨਾ ਦੇ ਸੰਗਤ ਕੋਣ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਇਸ ਲਈ ਦੋਵੇਂ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਸਮਰੂਪ ਹੁੰਦੇ ਹਨ (SSS ਸਮਰੂਪਤਾ ਕਸੌਟੀ)।
9. ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦਾ ਇੱਕ ਕੋਣ ਦੂਸਰੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੇ ਇੱਕ ਕੋਣ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੋਵੇ ਅਤੇ ਇਹਨਾਂ ਕੋਣਾਂ ਨੂੰ ਬਣਾਉਣ ਵਾਲੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਇੱਕ ਹੀ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਹੋਣ ਤਾਂ ਦੋਵੇਂ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਸਮਰੂਪ ਹੁੰਦੇ ਹਨ (SAS ਸਮਰੂਪਤਾ ਕਸੌਟੀ)
10. ਦੋ ਸਮਰੂਪ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਦੇ ਖੇਤਰਫਲਾਂ ਦਾ ਅਨੁਪਾਤ ਉਹਨਾਂ ਦੀਆਂ ਸੰਗਤ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦੇ ਅਨੁਪਾਤ ਦੇ ਵਰਗ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।
11. ਜੇਕਰ ਸਮਕੋਣ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੇ ਵਿੱਚ ਸਮਕੋਣ ਵਾਲੇ ਸਿਖ਼ਰ ਤੋਂ ਉਸਦੇ ਕਰਣ 'ਤੇ ਲੰਬ ਸੁੱਟਿਆ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਲੰਬ ਦੇ ਦੋਵਾਂ ਪਾਸੇ ਬਣਨ ਵਾਲੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਸੰਪੂਰਨ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੇ ਸਮਰੂਪ ਹੁੰਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਵੀ ਸਮਰੂਪ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।
12. ਇੱਕ ਸਮਕੋਣ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਵਿੱਚ, ਕਰਣ ਦਾ ਵਰਗ ਬਾਕੀ ਦੋ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦੇ ਵਰਗਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ (ਪਾਇਥਾਗੋਰਸ ਪ੍ਰਮੇਯ)
13. ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਵਿੱਚ, ਕਿਸੇ ਇੱਕ ਭੁਜਾ ਦਾ ਵਰਗ ਬਾਕੀ ਦੋ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦੇ ਵਰਗਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਪਹਿਲੀ ਭੁਜਾ ਦੇ ਸਨਮੁੱਖ ਕੋਣ ਸਮਕੋਣ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਪਾਠਕਾਂ ਦੇ ਲਈ ਵਿਸ਼ੇਸ਼

ਜੇਕਰ ਦੋ ਸਮਕੋਣ ਤ੍ਰਿਭੁਜਾਂ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦਾ ਕਰਣ ਅਤੇ ਇੱਕ ਭੁਜਾ, ਦੂਸਰੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੇ ਕਰਣ ਅਤੇ ਇੱਕ ਭੁਜਾ ਦੇ ਸਮਾਨ-ਅਨੁਪਾਤੀ ਹੋਣ ਤਾਂ ਦੋਵੇਂ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਸਮਰੂਪ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਇਸਨੂੰ RHS ਸਮਰੂਪਤਾ ਕਸੌਟੀ ਕਿਹਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਜੇਕਰ ਤੁਸੀਂ ਇਸ ਕਸੌਟੀ ਨੂੰ ਅਧਿਆਇ 8 ਦੇ ਉਦਾਹਰਣ 2 ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹੋ ਤਾਂ ਸਬੂਤ ਹੋਰ ਵੀ ਸਰਲ ਹੋ ਜਾਵੇਗਾ।

ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਜਿਮਾਇਤੀ 7

7.1 ਭੂਮਿਕਾ

IX ਜਮਾਤ ਵਿੱਚ, ਤੁਸੀਂ ਪੜ੍ਹ ਚੁੱਕੇ ਹੋ ਕਿ ਇੱਕ ਤਲ 'ਤੇ ਕਿਸੇ ਬਿੰਦੂ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਨਿਰਧਾਰਿਤ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ, ਸਾਨੂੰ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਧੁਰਿਆਂ ਦੇ ਇੱਕ ਜੋੜੇ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਕਿਸੇ ਬਿੰਦੂ ਦੇ y-ਧੁਰੇ ਤੋਂ ਦੂਰੀ ਉਸ ਬਿੰਦੂ ਦਾ **x-ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਜਾਂ ਭੁਜ** (abscissa) ਕਹਾਉਂਦੀ ਹੈ। ਕਿਸੇ ਬਿੰਦੂ ਦੀ x-ਧੁਰੇ ਤੋਂ ਦੂਰੀ ਉਸ ਬਿੰਦੂ ਦਾ **y-ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਜਾਂ ਕੋਟੀ** (ordinate) ਕਹਾਉਂਦੀ ਹੈ। x-ਧੁਰੇ 'ਤੇ ਸਥਿਤ ਕਿਸੇ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ $(x,0)$ ਰੂਪ ਦੇ ਹੁੰਦੇ ਹਨ ਅਤੇ y-ਧੁਰੇ 'ਤੇ ਸਥਿਤ ਕਿਸੇ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ (0,y) ਰੂਪ ਦੇ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

ਇਥੇ ਤੁਹਾਨੂੰ ਇੱਕ ਖੇਡ ਦਿੱਤੀ ਜਾ ਰਹੀ ਹੈ। ਇੱਕ ਗ੍ਰਾਫ ਪੇਪਰ 'ਤੇ ਲੰਬ ਧੁਰਿਆਂ (perpendicular axes) ਦਾ ਇੱਕ ਜੋੜਾ ਖਿੱਚੋ। ਹੁਣ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਬਿੰਦੂਆਂ ਨੂੰ ਆਲੇਖਿਤ ਕਰੋ ਅਤੇ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਨਿਰਦੇਸ਼ਾਂ ਅਨੁਸਾਰ ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ ਮਿਲਾਉ। ਬਿੰਦੂ A(4, 8) ਨੂੰ ਬਿੰਦੂ B(3, 9) ਨਾਲ, B ਨੂੰ C(3, 8) ਨਾਲ, C ਨੂੰ D(1, 6) ਨਾਲ, D ਨੂੰ E(1, 5) ਨਾਲ, E ਨੂੰ F(3, 3) ਨਾਲ, F ਨੂੰ G(6, 3) ਨਾਲ, G ਨੂੰ H(8, 5) ਨਾਲ, H ਨੂੰ I(8, 6) ਨਾਲ, I ਨੂੰ J(6, 8) ਨਾਲ, J ਨੂੰ K(6, 9) ਨਾਲ, K ਨੂੰ L(5, 8) ਨਾਲ ਅਤੇ L ਨੂੰ A ਨਾਲ ਮਿਲਾਉ। ਇਸ ਤੋਂ ਬਾਦ ਬਿੰਦੂਆਂ P(3.5, 7), Q (3, 6) ਅਤੇ R(4, 6) ਨੂੰ ਜੋੜ ਕੇ ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਬਣਾਉ। ਨਾਲ ਹੀ, ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਬਣਾਉਣ ਦੇ ਲਈ ਬਿੰਦੂਆਂ X(5.5, 7), Y(5, 6) ਅਤੇ Z(6, 6) ਨੂੰ ਮਿਲਾਉ। ਹੁਣ ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਬਣਾਉਣ ਲਈ ਬਿੰਦੂਆਂ S(4, 5), T(4.5, 4) ਅਤੇ U (5,5) ਨੂੰ ਮਿਲਾਉ। ਅੰਤ ਵਿੱਚ, ਬਿੰਦੂ S ਨੂੰ ਬਿੰਦੂਆਂ (0,5) ਅਤੇ (0,6) ਨਾਲ ਮਿਲਾਉ ਅਤੇ ਬਿੰਦੂ U ਨੂੰ ਬਿੰਦੂਆਂ (9,5) ਅਤੇ (9,6) ਨਾਲ ਮਿਲਾਉ। ਤੁਹਾਨੂੰ ਕਿਹੜਾ ਚਿੱਤਰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ?

ਨਾਲ ਹੀ, ਤੁਸੀਂ ਇਹ ਵੀ ਦੇਖ ਚੁੱਕੇ ਹੋ ਕਿ $ax + by + c = 0$ (ਜਿਥੇ a ਅਤੇ b ਇਕੱਠੇ ਸਿਫ਼ਰ ਨਾਂ ਹੋਣ) ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦੋ ਚਲਾਂ ਵਾਲੀ ਇੱਕ ਸਮੀਕਰਣ ਨੂੰ ਜਦੋਂ ਆਲੇਖੀ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਨਿਰੂਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਤਾਂ ਸਾਨੂੰ ਇੱਕ ਸਰਲ ਰੇਖਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਨਾਲ ਹੀ ਤੁਸੀਂ ਅਧਿਆਇ 2 ਵਿੱਚ ਦੇਖ ਚੁੱਕੇ ਹੋ ਕਿ $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ ਦਾ ਆਲੇਖ ਇੱਕ ਪੈਰਾਬੋਲਾ (parabola) ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਅਸਲ ਵਿੱਚ,

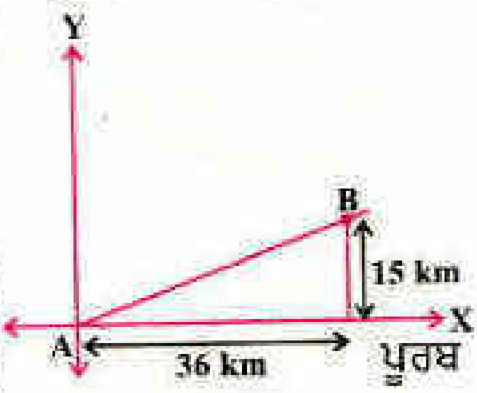
ਆਕ੍ਰਿਤੀਆਂ ਦਾ ਜਿਮਾਇਤੀ ਅਧਿਐਨ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ, ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਜਿਮਾਇਤੀ (coordinate geometry) ਇੱਕ ਬੀਜ ਗਣਿਤਿਕ ਸਾਧਨ (algebraic tool) ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਵਿਕਸਿਤ ਕੀਤੀ ਗਈ ਹੈ। ਇਹ ਬੀਜਗਣਿਤ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ ਜਿਮਾਇਤੀ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰਨ ਵਿੱਚ ਸਹਾਇਤਾ ਕਰਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਬੀਜਗਣਿਤ ਨੂੰ ਜਿਮਾਇਤੀ ਦੁਆਰਾ ਸਮਝਾਉਣ ਵਿੱਚ ਵੀ ਸਹਾਇਕ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਇਸੇ ਕਾਰਣ, ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਜਿਮਾਇਤੀ ਦੇ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਖੇਤਰਾਂ ਵਿੱਚ ਬਹੁਤ ਸਾਰੇ ਉਪਯੋਗ ਹਨ, ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਭੌਤਿਕੀ, ਇੰਜੀਨੀਰਿੰਗ, ਸਮੁੰਦਰੀ ਪਰਿਵਹਨ (navigation), ਭੁਚਾਲ ਸ਼ਾਸਤਰ ਸੰਬੰਧੀ (seismology) ਅਤੇ ਕਲਾ।

ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ, ਤੁਸੀਂ ਇਹ ਪੜ੍ਹੋਗੇ ਕਿ ਦੋ ਬਿੰਦੂਆਂ, ਜਿੰਨਾਂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਹੋਣ, ਦੀ ਵਿਚਕਾਰਲੀ ਦੂਰੀ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪਤਾ ਕੀਤੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਤਿੰਨ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਬਿੰਦੂਆਂ ਤੋਂ ਬਣੇ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪਤਾ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਤੁਸੀਂ ਇਹ ਵੀ ਪੜ੍ਹੋਗੇ ਕਿ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਦੋ ਬਿੰਦੂਆਂ ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਤੋਂ ਬਣੇ ਰੇਖਾਖੰਡ ਨੂੰ ਇੱਕ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਵੰਡਣ ਵਾਲੇ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪਤਾ ਕੀਤੇ ਜਾਂਦੇ ਹਨ।

7.2 ਦੂਰੀ ਸੂਤਰ

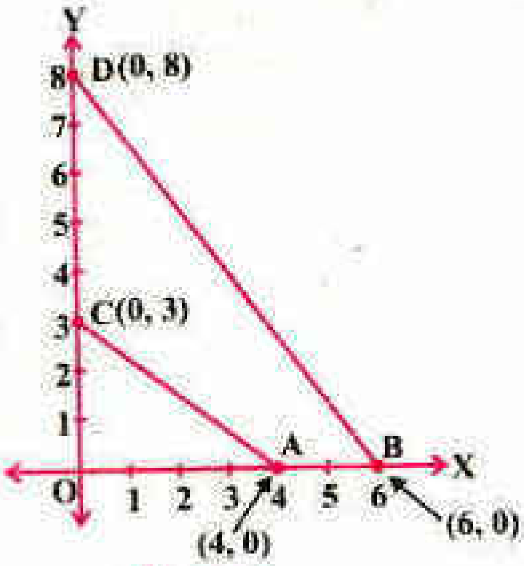
ਆਓ ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੀ ਸਥਿਤੀ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ :

ਇਕ ਸ਼ਹਿਰ B ਇਕ ਹੋਰ ਸ਼ਹਿਰ A ਤੋਂ 36 km ਪੂਰਬ (east) ਅਤੇ 15 km ਉੱਤਰ (north) ਵੱਲ ਹੈ। ਤੁਸੀਂ ਸ਼ਹਿਰ A ਦੀ ਸ਼ਹਿਰ B ਤੋਂ ਦੂਰੀ ਬਿਨਾਂ ਅਸਲ ਮਾਪ ਕਰਨ ਤੋਂ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ ? ਆਉ ਦੇਖੀਏ। ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਨੂੰ ਆਲੇਖੀ ਰੂਪ ਵਿੱਚ, ਚਿੱਤਰ 7.1 ਅਨੁਸਾਰ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਹੁਣ ਤੁਸੀਂ ਲੋੜੀਂਦੀ ਦੂਰੀ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ, ਪਾਇਥਾਗੋਰਸ ਥਿਊਰਮ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ।



ਚਿੱਤਰ 7.1

ਹੁਣ ਮੰਨ ਲਉ ਦੋ ਬਿੰਦੂ x ਧੁਰੇ ਤੇ ਸਥਿਤ ਹਨ। ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰਲੀ ਦੂਰੀ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ ? ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ ਤੇ, ਚਿੱਤਰ 7.2 ਦੇ ਦੋ ਬਿੰਦੂਆਂ A (4,0) ਅਤੇ B (6,0) 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ। ਬਿੰਦੂ A ਅਤੇ B, x ਧੁਰੇ 'ਤੇ ਸਥਿਤ ਹਨ।



ਚਿੱਤਰ 7.2

ਚਿੱਤਰ ਤੋਂ ਤੁਸੀਂ ਦੇਖ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ OA = 4 ਇਕਾਈ ਅਤੇ OB = 6 ਇਕਾਈ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ A ਤੋਂ B ਦੀ ਦੂਰੀ AB = OB -OA = (6-4) ਇਕਾਈ =2 ਇਕਾਈ ਹੈ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ, ਜੇਕਰ ਦੋ ਬਿੰਦੂ x ਧੁਰੇ 'ਤੇ ਸਥਿਤ ਹੋਣ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰਲੀ ਦੂਰੀ ਅਸਾਨੀ ਨਾਲ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

ਹੁਣ ਮੰਨ ਲਉ ਅਸੀਂ y ਧੁਰੇ 'ਤੇ ਸਥਿਤ ਕੋਈ ਦੋ ਬਿੰਦੂ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ। ਕੀ ਅਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰਲੀ ਦੂਰੀ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ? ਜੇਕਰ ਬਿੰਦੂ C (0,3) ਅਤੇ D (0,8) Y-ਧੁਰੇ 'ਤੇ ਸਥਿਤ ਹੋਣ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਦੂਰੀ ਉੱਪਰ ਦੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਭਾਵ CD = (8–3) ਇਕਾਈਆਂ =5 ਇਕਾਈਆਂ ਹੈ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 7.2)।

ਹੁਣ ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਚਿੱਤਰ 7.2 ਤੋਂ ਬਿੰਦੂ C ਤੋਂ A ਬਿੰਦੂ ਦੀ ਦੂਰੀ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ ? ਕਿਉਂਕਿ OA = 4 ਇਕਾਈਆਂ ਅਤੇ OC =3 ਇਕਾਈਆਂ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ C ਤੋਂ A ਦੀ ਦੂਰੀ $AC = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ ਇਕਾਈਆਂ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ, ਤੁਸੀਂ D ਅਤੇ B ਦੀ ਦੂਰੀ BD = 10 ਇਕਾਈਆਂ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ।

ਹੁਣ ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਦੋ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਬਿੰਦੂਆਂ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ, ਜੋ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਧੁਰਿਆਂ 'ਤੇ ਸਥਿਤ ਨਹੀਂ ਹਨ, ਤਾਂ ਕੀ ਅਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਦੀ ਵਿਚਕਾਰਲੀ ਦੂਰੀ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ? ਹਾਂ, ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਰਨ ਦੇ ਲਈ, ਅਸੀਂ ਪਾਇਥਾਗੋਰਸ ਥਿਊਰਮ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਾਂਗੇ।ਆਉ ਇੱਕ ਉਦਾਹਰਣ ਲੈ ਕੇ ਦੇਖੀਏ।

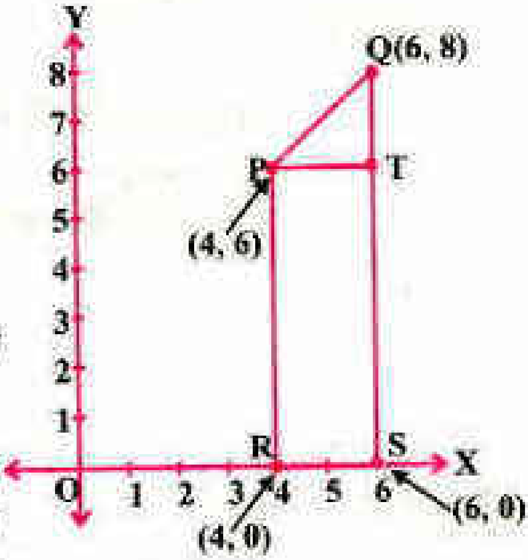
ਚਿੱਤਰ 7.3 ਵਿੱਚ, ਬਿੰਦੂ P (4,6) ਅਤੇ Q (6,8) ਪਹਿਲੀ ਚੌਥਾਈ (First Quadrant) ਵਿੱਚ ਸਥਿਤ ਹਨ। ਇਹਨਾਂ ਦੀ ਵਿਚਕਾਰਲੀ ਦੂਰੀ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ, ਅਸੀਂ ਪਾਇਥਾਗੋਰਸ ਥਿਊਰਮ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ? ਆਉ P ਅਤੇ Q ਤੋਂ x-ਧੁਰੇ 'ਤੇ ਲੰਬ ਕ੍ਰਮਵਾਰ PR ਅਤੇ QS ਖਿੱਚੋ ਨਾਲ ਹੀ P ਤੋਂ QS 'ਤੇ ਇੱਕ ਲੰਬ ਖਿੱਚੋ ਜੋ QS ਨੂੰ T 'ਤੇ ਕੱਟਦਾ ਹੋਵੇ। ਹੁਣ R ਅਤੇ S ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਕ੍ਰਮਵਾਰ (4,0) ਅਤੇ (6,0) ਹਨ। ਇਸ ਲਈ RS = 2 ਇਕਾਈਆਂ ਹੈ। ਨਾਲ ਹੀ QS=8 ਇਕਾਈਆਂ ਅਤੇ TS =PR = 6 ਇਕਾਈਆਂ ਹੈ।

ਸਪਸ਼ਟ ਹੈ ਕਿ QT = 2 ਇਕਾਈਆਂ ਅਤੇ PT = RS = 2 ਇਕਾਈਆਂ

ਹੁਣ ਪਾਇਥਾਗੋਰਸ ਥਿਊਰਮ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਤੋਂ, ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :

$$PQ^2 = PT^2 + QT^2 = 2^2 + 2^2 = 8$$

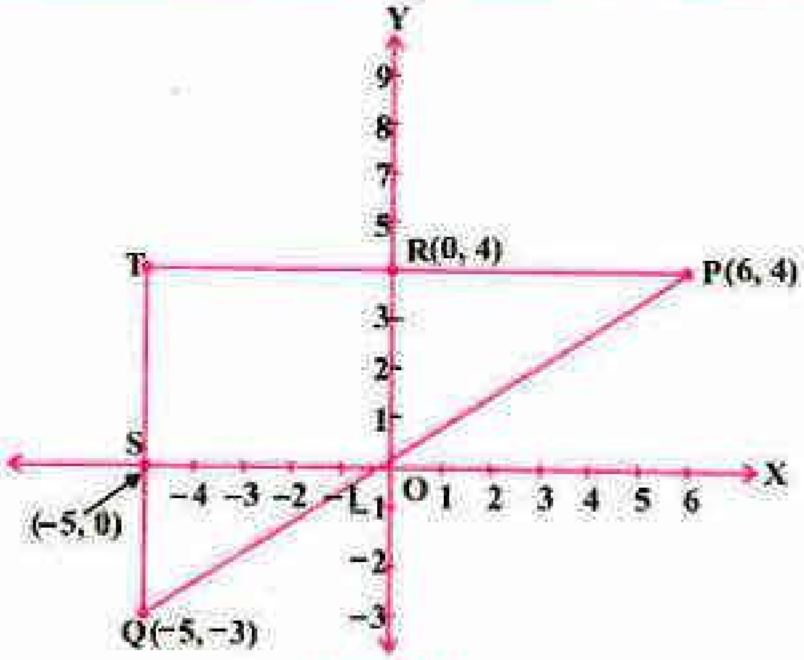
ਇਸ ਲਈ $PQ = 2\sqrt{2}$ ਇਕਾਈਆਂ ਹੋਇਆ।



ਚਿੱਤਰ 7.3

ਤੁਸੀਂ ਦੋ ਅਲੱਗ- ਅਲੱਗ ਚੌਥਾਈਆਂ ਵਿੱਚ ਸਥਿਤ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੀ ਦੂਰੀ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋਗੇ ?

ਬਿੰਦੂਆਂ P (6, 4) ਅਤੇ Q (-5, -3) 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 7.4) x ਧੁਰੇ 'ਤੇ ਲੰਬ QS ਖਿੱਚੋ। ਨਾਲ ਹੀ ਬਿੰਦੂ P ਤੋਂ ਵਧਾਈ ਹੋਈ QS 'ਤੇ PT ਲੰਬ ਖਿੱਚੋ ਜੋ y-ਧੁਰੇ ਨੂੰ ਬਿੰਦੂ R 'ਤੇ ਕੱਟਦਾ ਹੈ।

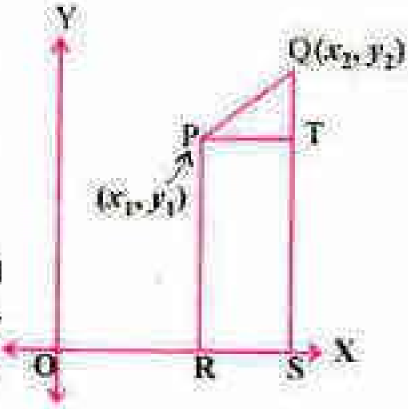


ਚਿੱਤਰ 7.4

ਹੁਣ PT = 11 ਇਕਾਈਆਂ ਅਤੇ QT=7 ਇਕਾਈਆਂ ਹੈ (ਕਿਉਂ ?)

ਸਮਕੋਣ ਤ੍ਰਿਭੁਜ PTQ ਵਿੱਚ, ਪਾਇਥਾਗੋਰਸ ਥਿਊਰਮ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਕੇ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ: $PQ = \sqrt{11^2 + 7^2} = \sqrt{170}$ ਇਕਾਈਆਂ

ਆਉ ਹੁਣ ਕਿਸੇ ਦੋ ਬਿੰਦੂਆਂ $P(x_1, y_1)$ ਅਤੇ $Q(x_2, y_2)$ ਦੀ ਵਿਚਕਾਰਲੀ ਦੂਰੀ ਪਤਾ ਕਰੀਏ। x-ਧੁਰੇ 'ਤੇ ਲੰਬ PR ਅਤੇ QS ਖਿੱਚੋ। P ਤੋਂ QS 'ਤੇ ਇੱਕ ਲੰਬ ਖਿੱਚੋ ਜੋ ਇਸਨੂੰ T 'ਤੇ ਕੱਟੇ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 7.5)।



ਚਿੱਤਰ 7.5

ਤਦ $OR = x_1$, $OS = x_2$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $RS = x_2 - x_1 = PT$ ਹੈ। ਨਾਲ ਹੀ $SQ = y_2$ ਅਤੇ $ST = PR = y_1$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $QT = y_2 - y_1$ ਹੈ। ਹੁਣ ΔPTQ ਵਿੱਚ, ਪਾਇਥਾਗੋਰਸ ਥਿਊਰਮ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਤੋਂ, ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ :

$$PQ^2 = PT^2 + QT^2$$

$$= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

ਇਸ ਲਈ $$PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿਉਂਕਿ ਦੂਰੀ ਹਮੇਸ਼ਾਂ ਧਨਾਤਮਕ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਕੇਵਲ ਧਨਾਤਮਕ ਵਰਗਮੂਲ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $P(x_1, y_1)$ ਅਤੇ $Q(x_2, y_2)$ ਦੇ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੀ ਵਿਚਕਾਰਲੀ ਦੂਰੀ ਹੈ :

$$PQ = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

ਜੋ ਕਿ ਦੂਰੀ ਸੂਤਰ (distance formula) ਕਹਿਲਾਉਂਦਾ ਹੈ।

ਟਿੱਪਣੀਆਂ :

1. ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਰੂਪ ਨਾਲ, ਬਿੰਦੂ $P(x,y)$ ਦੀ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ $O(0,0)$ ਤੋਂ ਦੂਰੀ

$$OP = \sqrt{x^2 + y^2}$$ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

2. ਅਸੀਂ $PQ = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ ਵੀ ਲਿੱਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। (ਕਿਉਂ ?)

ਉਦਾਹਰਣ 1 : ਕੀ ਬਿੰਦੂ (3,2), (−2,−3) ਅਤੇ (2,3) ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਬਣਾਉਂਦੇ ਹਨ ? ਜੇਕਰ ਹਾਂ ਤਾਂ ਦੱਸੋ ਕਿ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦਾ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਬਣਦਾ ਹੈ ?

ਹੱਲ : ਆਉ PQ, QR ਅਤੇ PR ਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਲਈ ਦੂਰੀ ਸੂਤਰ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰੀਏ, ਜਿਥੇ P (3,2), Q (-2,-3) ਅਤੇ Q (2,3) ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਬਿੰਦੂ ਹਨ। ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ

$$PQ = \sqrt{(3+2)^2 + (2+3)^2} = \sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt{50} = 7.07$$ (ਲਗਭਗ)

$$QR = \sqrt{(-2-2)^2 + (-3-3)^2} = \sqrt{(-4)^2 + (-6)^2} = \sqrt{52} = 7.21$$ (ਲਗਭਗ)

$$PR = \sqrt{(3-2)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2} = 1.41$$ (ਲਗਭਗ)

ਕਿਉਂਕਿ ਇਹਨਾਂ ਤਿੰਨਾਂ ਦੂਰੀਆਂ ਵਿੱਚ ਕਿਸੇ ਦੋ ਦਾ ਜੋੜ ਤੀਸਰੀ ਦੂਰੀ ਤੋਂ ਵੱਧ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਇਹਨਾਂ ਬਿੰਦੂਆਂ P, Q ਅਤੇ R ਨਾਲ ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਬਣਦਾ ਹੈ।

ਨਾਲ ਹੀ $PQ^2 + PR^2 = QR^2$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ, ਪਾਇਥਾਗੋਰਸ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦੇ ਉਲਟ ਤੋਂ, ਸਾਨੂੰ ਪਤਾ ਲੱਗਦਾ ਹੈ ਕਿ $\angle P = 90^\circ$ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ, PQR ਇੱਕ ਸਮਕੋਣ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 2 : ਦਿਖਾਉ ਕਿ ਬਿੰਦੂ (1, 7), (4, 2), (−1, −1) ਅਤੇ (−4, 4) ਇੱਕ ਵਰਗ ਦੇ ਸਿਖ਼ਰ ਹਨ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਬਿੰਦੂ A(1, 7), B(4, 2), C(−1, −1) ਅਤੇ D(−4, 4) ਹਨ। ABCD ਨੂੰ ਵਰਗ ਸਿੱਧ ਕਰਨ ਦੀ ਇੱਕ ਵਿਧੀ ਇਹ ਹੈ ਕਿ ਉਸਦਾ ਗੁਣ ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਵਰਗ ਦੀਆਂ ਸਾਰੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਬਰਾਬਰ ਅਤੇ ਦੋਵੇਂ ਵਿਕਰਣ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੇ ਹਨ, ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕੀਤੀ ਜਾਵੇ। ਹੁਣ,

$$AB = \sqrt{(1-4)^2 + (7-2)^2} = \sqrt{9 + 25} = \sqrt{34}$$

$$BC = \sqrt{(4+1)^2 + (2+1)^2} = \sqrt{25+9} = \sqrt{34}$$

$$CD = \sqrt{(-1+4)^2 + (-1-4)^2} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$$

$$DA = \sqrt{(1+4)^2 + (7-4)^2} = \sqrt{25+9} = \sqrt{34}$$

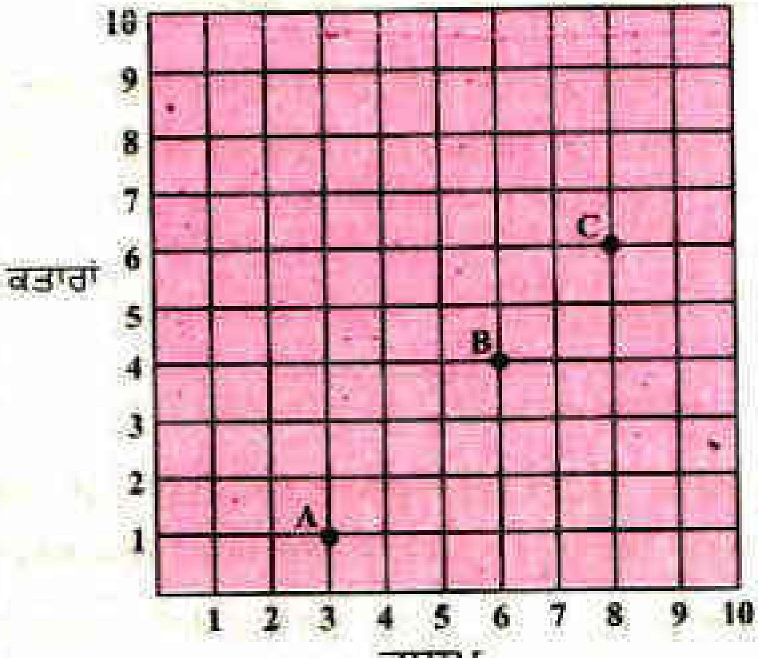
$$AC = \sqrt{(1+1)^2 + (7+1)^2} = \sqrt{4+64} = \sqrt{68}$$

$$BD = \sqrt{(4+4)^2 + (2-4)^2} = \sqrt{64+4} = \sqrt{68}$$

ਇਥੇ $AB = BC = CD = DA$ ਹੈ ਅਤੇ $AC = BD$ ਹੈ, ਭਾਵ ਚਤੁਰਭੁਜ ABCD ਦੀਆ ਚਾਰੇ ਭੁਜਾਵਾਂ ਬਰਾਬਰ ਹਨ ਅਤੇ ਦੋਨੋਂ ਵਿਕਰਣ ਬਰਾਬਰ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ, ਚਤੁਰਭੁਜ ABCD ਇੱਕ ਵਰਗ ਹੈ।

ਬਦਲਵਾਂ ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਚਾਰੇ ਭੁਜਾਵਾਂ ਅਤੇ ਇੱਕ ਵਿਕਰਣ, ਮੰਨ ਲਉ AC ਉਪੱਰ ਦੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਇਥੇ $AD^2 + DC^2 = 34 + 34 = 68 = AC^2$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ, ਪਾਇਥਾਗੋਰਸ ਥਿਊਰਮ ਦੇ ਉਲਟ ਦੁਆਰਾ $\angle D = 90°$ ਹੈ। ਚਾਰੇ ਭੁਜਾਵਾਂ ਬਰਾਬਰ ਹੋਣ ਅਤੇ ਇੱਕ ਕੋਣ ਸਮਕੋਣ ਹੋਣ ਨਾਲ ਚਤੁਰਭੁਜ ਇੱਕ ਵਰਗ ਹੋ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ABCD ਇੱਕ ਵਰਗ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 3 : ਚਿੱਤਰ 7.6 ਕਿਸੇ ਜਮਾਤ ਵਿੱਚ ਰੱਖੇ ਬੈਂਚਾਂ (desks) ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਆਸ਼ੀਮਾ ਭਾਰਤੀ ਅਤੇ ਕੈਮਿਲਾ ਕ੍ਰਮਵਾਰ A(3, 1), B(6, 4) ਅਤੇ C(8, 6) 'ਤੇ ਬੈਠੀਆਂ ਹਨ। ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਸੋਚਦੇ ਹੋ ਕਿ ਉਹ ਇੱਕ ਹੀ ਰੇਖਾ (in a line) ਵਿੱਚ ਬੈਠੀਆਂ ਹਨ। ਕਾਰਣ ਸਹਿਤ ਉੱਤਰ ਦਿਉ।



ਚਿੱਤਰ 7.6

ਹੱਲ : ਦੂਰੀ ਸੂਤਰ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਤੋਂ, ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :

$$AB = \sqrt{(6-3)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$BC = \sqrt{(8-6)^2 + (6-4)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$AC = \sqrt{(8-3)^2 + (6-1)^2} = \sqrt{25+25} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

ਕਿਉਂਕਿ $AB + BC = 3\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 5\sqrt{2} = AC$ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ A, B ਅਤੇ C ਇੱਕ ਰੇਖਾ 'ਤੇ ਸਮਰੇਖੀ (collinear) ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਉਹ ਤਿੰਨੇ ਇੱਕ ਹੀ ਰੇਖਾ ਵਿੱਚ ਬੈਠੀਆਂ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ 4 : x ਅਤੇ y ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਸੰਬੰਧ ਪਤਾ ਕਰੋ ਤਾਂ ਕਿ ਬਿੰਦੂ (x, y) ਬਿੰਦੂਆਂ (7, 1) ਅਤੇ (3, 5) ਤੋਂ ਬਰਾਬਰ ਦੂਰੀ (equidistant) 'ਤੇ ਹੋਵੇ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ $P(x, y)$ ਬਿੰਦੂਆਂ A(7, 1) ਅਤੇ B(3, 5) ਤੋਂ ਬਰਾਬਰ ਦੂਰੀ 'ਤੇ ਹੈ। ਸਾਨੂੰ $AP = BP$ ਦਿੱਤਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $AP^2 = BP^2$ ਹੈ।

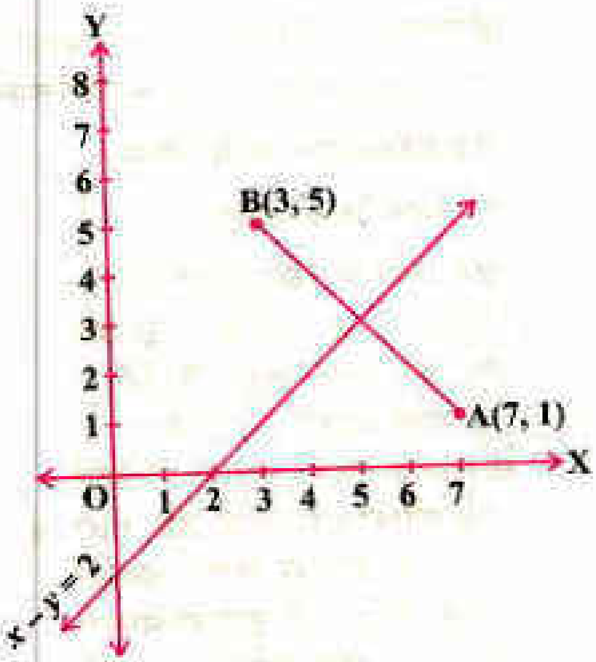
ਭਾਵ $$(x-7)^2 + (y-1)^2 = (x-3)^2 + (y-5)^2$$

ਭਾਵ $$x^2 - 14x + 49 + y^2 - 2y + 1 = x^2 - 6x + 9 + y^2 - 10y + 25$$

ਭਾਵ $$x - y = 2$$

ਇਹ ਹੀ x ਅਤੇ y ਵਿੱਚ ਲੋੜੀਂਦਾ ਸੰਬੰਧ ਹੈ।

ਟਿੱਪਣੀ : ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ਸਮੀਕਰਣ $x - y = 2$ ਦਾ ਆਲੇਖ ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਤੁਸੀਂ ਆਪਣੇ ਪਿਛਲੇ ਅਧਿਐਨ ਤੋਂ ਇਹ ਜਾਣਦੇ ਹੋ ਕਿ ਉਹ ਬਿੰਦੂ ਜੋ ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਬਿੰਦੂਆਂ A ਅਤੇ B ਤੋਂ ਬਰਾਬਰ ਦੀ ਦੂਰੀ 'ਤੇ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਰੇਖਾਖੰਡ AB ਦੇ ਲੰਬ ਸਮ ਦੁਭਾਜਕ 'ਤੇ ਸਥਿਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $x - y = 2$ ਦਾ ਆਲੇਖ ਰੇਖਾਖੰਡ AB ਦਾ ਲੰਬ ਸਮ ਦੁਭਾਜਕ ਹੈ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 7.7)।



ਚਿੱਤਰ 7.7

ਉਦਾਹਰਣ 5 : y-ਧੁਰੇ 'ਤੇ ਇੱਕ ਅਜਿਹਾ ਬਿੰਦੂ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੋ ਬਿੰਦੂਆਂ A(6, 5) ਅਤੇ B(–4, 3) ਤੋਂ ਬਰਾਬਰ ਦੂਰੀ 'ਤੇ ਹੋਵੇ।

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ y-ਧੁਰੇ 'ਤੇ ਸਥਿਤ ਕੋਈ ਵੀ ਬਿੰਦੂ $(0, y)$ ਦੇ ਰੂਪ ਦਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ, ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਬਿੰਦੂ $P(0, y)$ ਬਿੰਦੂਆਂ A ਅਤੇ B ਤੋਂ ਬਰਾਬਰ ਦੀ ਦੂਰੀ 'ਤੇ ਹੈ। ਹੁਣ

$$(6-0)^2 + (5-y)^2 = (-4-0)^2 + (3-y)^2$$

ਜਾਂ $$36 + 25 + y^2 - 10y = 16 + 9 + y^2 - 6y$$

ਜਾਂ $$4y = 36$$

ਜਾਂ $$y = 9$$

ਇਸ ਲਈ, (0, 9) ਲੋੜੀਂਦਾ ਬਿੰਦੂ ਹੈ।

ਆਉ ਆਪਣੇ ਹੱਲ ਦੀ ਜਾਂਚ ਕਰੀਏ: $AP = \sqrt{(6-0)^2 + (5-9)^2} = \sqrt{36+16} = \sqrt{52}$

$BP = \sqrt{(-4-0)^2 + (3-9)^2} = \sqrt{16+36} = \sqrt{52}$

ਟਿੱਪਣੀ : ਉੱਪਰ ਦਿੱਤੀ ਗਈ ਟਿੱਪਣੀ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ (0, 9), y-ਧੁਰੇ ਅਤੇ ਰੇਖਾਖੰਡ AB ਦੇ ਲੰਬ ਸਮਦੁਭਾਜਕ ਦਾ ਕਾਟ ਬਿੰਦੂ ਹੈ।

ਪ੍ਰਸ਼ਨਾਵਲੀ 7.1

1. ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੇ ਹੇਠ ਦਿੱਤਿਆਂ ਜੋੜਿਆਂ ਦੀ ਵਿਚਕਾਰਲੀ ਦੂਰੀ ਪਤਾ ਕਰੋ :

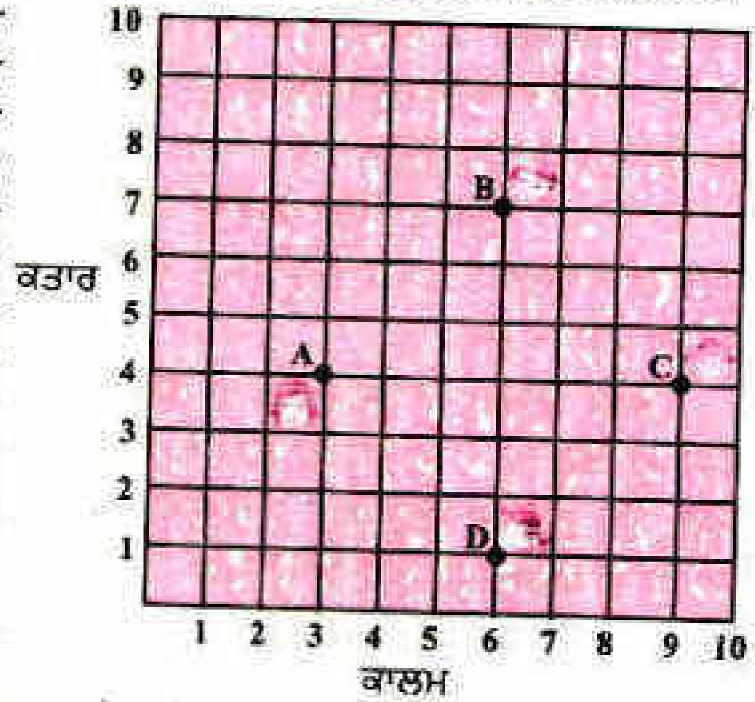
   (i) (2, 3), (4, 1) (ii) (– 5, 7), (– 1, 3) (iii) $(a, b), (-a, -b)$

2. ਬਿੰਦੂਆਂ (0, 0) ਅਤੇ (36, 15) ਦੀ ਵਿਚਕਾਰਲੀ ਦੂਰੀ ਪਤਾ ਕਰੋ। ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਹੁਣ ਭਾਗ 7.2 ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਦੋਹਾਂ ਸ਼ਹਿਰਾਂ A ਅਤੇ B ਦੇ ਵਿਚਕਾਰਲੀ ਦੂਰੀ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ?

3. ਨਿਰਧਾਰਿਤ ਕਰੋ ਕਿ ਕੀ ਬਿੰਦੂ (1, 5), (2, 3) ਅਤੇ (– 2, – 11) ਸਮਰੇਖੀ ਹਨ।

4. ਜਾਂਚ ਕਰੋ ਕਿ ਕੀ ਬਿੰਦੂ (5, – 2), (6, 4) ਅਤੇ (7, – 2) ਇੱਕ ਸਮਦੋਭੁਜੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੇ ਸਿਖ਼ਰ ਹਨ।

5. ਕਿਸੇ ਜਮਾਤ ਵਿੱਚ ਚਾਰ ਮਿੱਤਰ ਬਿੰਦੂਆਂ A, B, C ਅਤੇ D 'ਤੇ ਬੈਠੇ ਹੋਏ ਹਨ, ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਿ ਚਿੱਤਰ 7.8 ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ। ਚੰਪਾ ਅਤੇ ਚਮੇਲੀ ਜਮਾਤ ਦੇ ਅੰਦਰ ਆਉਂਦੀਆਂ ਹਨ ਅਤੇ ਕੁਝ ਸਮਾਂ ਦੇਖਣ ਤੋਂ ਬਾਅਦ ਚੰਪਾ, ਚਮੇਲੀ ਨੂੰ ਪੁੱਛਦੀ ਹੈ, "ਕੀ ਤੂੰ ਨਹੀਂ ਸੋਚਦੀ ਕਿ ABCD ਇੱਕ ਵਰਗ ਹੈ ? ਚਮੇਲੀ ਇਸ ਨਾਲ ਸਹਿਮਤ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਦੂਰੀ ਸੂਤਰ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਕੇ, ਦੱਸੋ ਕਿ ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕੌਣ ਸਹੀ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 7.8

6. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੁਆਰਾ ਬਣਨ ਵਾਲੇ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੀ ਕਿਸਮ

(ਜੇਕਰ ਕੋਈ ਹੈ ਤਾਂ) ਦੱਸੋ ਅਤੇ ਆਪਣੇ ਉੱਤਰ ਦਾ ਕਾਰਣ ਵੀ ਦੱਸੋ:

(i) $(-1,-2), (1,0), (-1,2), (-3,0)$

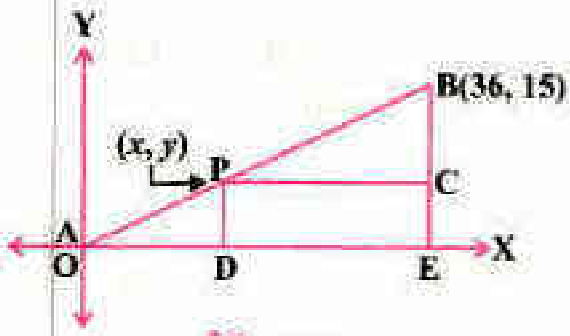
(ii) $(-3,5), (3,1), (0,3), (-1,-4)$

(iii) $(4,5), (7,6), (4,3), (1,2)$

7. x-ਧੁਰੇ 'ਤੇ ਉਹ ਬਿੰਦੂ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੋ $(2, -5)$ ਅਤੇ $(-2, 9)$ ਤੋਂ ਬਰਾਬਰ ਦੀ ਦੂਰੀ 'ਤੇ ਹੈ।
8. y ਦਾ ਉਹ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸਦੇ ਲਈ ਬਿੰਦੂ $P(2, -3)$ ਅਤੇ $Q(10, y)$ ਦੇ ਵਿੱਚਕਾਰ ਦੀ ਦੂਰੀ 10 ਇਕਾਈਆਂ ਹੈ।
9. ਜੇਕਰ $Q(0, 1)$ ਬਿੰਦੂਆਂ $P(5, -3)$ ਅਤੇ $R(x, 6)$ ਤੋਂ ਬਰਾਬਰ ਦੀ ਦੂਰੀ 'ਤੇ ਹੈ ਤਾਂ x ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ। ਦੂਰੀਆਂ QR ਅਤੇ PR ਵੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।
10. x ਅਤੇ y ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਅਜਿਹਾ ਸੰਬੰਧ ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ ਬਿੰਦੂ (x, y) ਬਿੰਦੂਆਂ $(3, 6)$ ਅਤੇ $(-3, 4)$ ਤੋਂ ਬਰਾਬਰ ਦੀ ਦੂਰੀ 'ਤੇ ਹੋਵੇ।

7.3 ਵਿਭਾਜਨ ਸੂਤਰ (Section Formula)

ਆਓ ਭਾਗ 7.2 ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਸਥਿਤੀ ਨੂੰ ਯਾਦ ਕਰੀਏ। ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ ਟੈਲੀਫੋਨ ਕੰਪਨੀ ਸ਼ਹਿਰ A ਅਤੇ B ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਇੱਕ ਪ੍ਰਸਾਰਣ ਟਾਵਰ (relay tower) ਅਜਿਹੇ ਸਥਾਨ P 'ਤੇ ਸਥਾਪਿਤ ਕਰਨਾ ਚਾਹੁੰਦੀ ਹੈ ਕਿ ਟਾਵਰ ਦੀ B ਤੋਂ ਦੂਰੀ ਉਸਦੀ A ਦੀ ਦੂਰੀ ਤੋਂ ਦੁੱਗਣੀ ਹੋਵੇ। ਜੇਕਰ P ਰੇਖਾਖੰਡ AB 'ਤੇ ਸਥਿਤ ਹੈ, ਤਾਂ ਇਹ AB ਨੂੰ 1 : 2 ਦੇ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਵਿਭਾਜਿਤ ਕਰੇ। (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 7.9)। ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ A ਨੂੰ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ O ਮੰਨੀਏ ਅਤੇ 1 km ਨੂੰ ਦੋਹਾਂ ਧੁਰਿਆਂ 'ਤੇ 1 ਇਕਾਈ ਮੰਨੀਏ ਤਾਂ B ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ (36, 15) ਹੋਣਗੇ। P ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਜਾਨਣ ਦੇ ਲਈ ਸਾਨੂੰ P ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਪਤਾ ਕਰਨੇ ਚਾਹੀਦੇ ਹਨ। ਇਹ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਅਸੀਂ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪਤਾ ਕਰੀਏ?



ਚਿੱਤਰ 7.9

ਮੰਨ ਲਉ P ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ (x, y) ਹਨ। P ਅਤੇ B ਤੋਂ x- ਧੁਰੇ 'ਤੇ ਲੰਬ ਖਿੱਚੋ ਜੋ ਇਸਨੂੰ ਕ੍ਰਮਵਾਰ D ਅਤੇ E 'ਤੇ ਮਿਲਣ। BE 'ਤੇ ਲੰਬ PC ਖਿੱਚੋ ਜੋ ਇਸਨੂੰ C 'ਤੇ ਮਿਲੇ। ਹੁਣ ਅਧਿਆਇ 6 ਵਿੱਚ, ਪੜੀ ਗਈ AA ਸਮਰੂਪਤਾ ਕਸੌਟੀ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਤੋਂ, Δ POD ਅਤੇ Δ BPC ਸਮਰੂਪ ਹਨ।

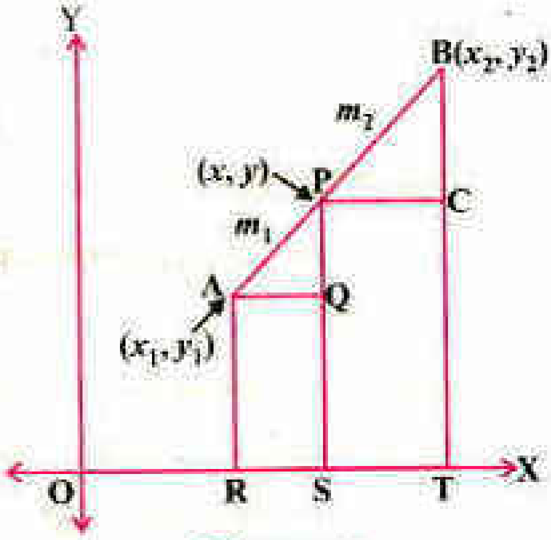
ਇਸ ਲਈ $\frac{OD}{PC} = \frac{OP}{PB} = \frac{1}{2}$ ਅਤੇ $\frac{PD}{BC} = \frac{OP}{PB} = \frac{1}{2}$ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ $\frac{x}{36-x} = \frac{1}{2}$ ਅਤੇ $\frac{y}{15-y} = \frac{1}{2}$ ਹੈ।

ਇਹਨਾਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਤੋਂ $x = 12$ ਅਤੇ $y = 5$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਤੁਸੀਂ ਇਸਦੀ ਜਾਂਚ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹੋ ਕਿ P(12, 5) ਸ਼ਰਤ OP : PB = 1 : 2 ਨੂੰ ਸਤੁੰਸ਼ਟ ਕਰਦਾ ਹੈ।

ਆਉ ਹੁਣ ਉਪਰੋਕਤ ਉਦਾਹਰਣ ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੀ ਗਈ ਜਾਣਕਾਰੀ ਦੇ ਆਧਾਰ 'ਤੇ ਵਿਭਾਜਨ ਦਾ ਵਿਆਪਕ ਸੂਤਰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਦਾ ਯਤਨ ਕਰੀਏ।



ਚਿੱਤਰ 7.10

ਕਿਸੇ ਦੋ ਬਿੰਦੂਆਂ $A(x_1, y_1)$ ਅਤੇ $B(x_2, y_2)$ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ ਅਤੇ ਮੰਨ ਲਉ ਬਿੰਦੂ P (x, y) ਰੇਖਾਖੰਡ AB ਨੂੰ $m_1 : m_2$ ਦੇ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਅੰਦਰੂਨੀ (internally) ਤੌਰ ਤੇ ਵੰਡਦਾ ਹੈ,

ਭਾਵ $\frac{PA}{PB} = \frac{m_1}{m_2}$ ਹੈ (ਦੇਖੋ ਚਿੱਤਰ 7.10)

x-ਧੁਰੇ 'ਤੇ AR, PS ਅਤੇ BT ਲੰਬ ਖਿੱਚੋ। x-ਧੁਰੇ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ AQ ਅਤੇ PC ਖਿੱਚੋ। ਹੁਣ AA ਸਮਰੂਪਤਾ ਕਸੌਟੀ ਤੋਂ

$$\Delta PAQ \sim \Delta BPC$$

ਇਸ ਲਈ
$$\frac{PA}{BP} = \frac{AQ}{PC} = \frac{PQ}{BC} \qquad (1)$$

ਹੁਣ
$$AQ = RS = OS - OR = x - x_1$$
$$PC = ST = OT - OS = x_2 - x$$
$$PQ = PS - QS = PS - AR = y - y_1$$
$$BC = BT - CT = BT - PS = y_2 - y$$

ਇਹਨਾਂ ਮੁੱਲਾਂ ਨੂੰ (1) ਵਿੱਚ ਭਰਨ 'ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ :

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{y - y_1}{y_2 - y}$$

$\frac{m_1}{m_2} = \frac{x - x_1}{x_2 - x}$ ਲੈਣ 'ਤੇ ਸਾਨੂੰ $x = \frac{m_1 x_2 + m_2 x_1}{m_1 + m_2}$ ਮਿਲਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $\dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y}$ ਲੈਣ 'ਤੇ ਸਾਨੂੰ $y = \dfrac{m_1 y_2 + m_2 y_1}{m_1 + m_2}$ ਮਿਲਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ, ਦੋ ਬਿੰਦੂਆਂ $A(x_1, y_1)$ ਅਤੇ $B(x_2, y_2)$ ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੇ ਰੇਖਾਖੰਡ AB ਨੂੰ $m_1 : m_2$ ਦੇ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਅੰਦਰੂਨੀ ਤੌਰ 'ਤੇ ਵੰਡਣ ਵਾਲੇ ਬਿੰਦੂ $P(x, y)$ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਹਨ :

$$\left(\frac{m_1 x_2 + m_2 x_1}{m_1 + m_2}, \frac{m_1 y_2 + m_2 y_1}{m_1 + m_2}\right) \qquad (2)$$

ਉਪਰੋਕਤ ਨੂੰ **ਵਿਭਾਜਨ ਸੂਤਰ** (section formula) ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

ਇਸ ਸੂਤਰ ਨੂੰ A, P ਅਤੇ B ਤੋਂ y-ਧੁਰੇ 'ਤੇ ਲੰਬ ਖਿੱਚ ਕੇ ਅਤੇ ਉੱਪਰ ਅਨੁਸਾਰ ਪ੍ਰਕਿਰਿਆ ਕਰਕੇ ਵੀ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਜੇਕਰ P ਰੇਖਾਖੰਡ AB ਨੂੰ $k : 1$ ਦੇ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਵੰਡੇ, ਤਾਂ ਬਿੰਦੂ P ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ

$$\left(\frac{kx_2 + x_1}{k+1}, \frac{ky_2 + y_1}{k+1}\right)$$ ਹੋਣਗੇ।

ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਸਥਿਤੀ : ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਖੰਡ ਦਾ ਮੱਧ ਬਿੰਦੂ ਉਸਨੂੰ 1 : 1 ਦੇ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਵੰਡਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਬਿੰਦੂਆਂ $A(x_1, y_1)$ ਅਤੇ $B(x_2, y_2)$ ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੇ ਰੇਖਾ ਖੰਡ AB ਦੇ ਮੱਧ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ

$$\left(\frac{1\cdot x_1 + 1\cdot x_2}{1+1}, \frac{1\cdot y_1 + 1\cdot y_2}{1+1}\right) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$ ਹੋਣਗੇ।

ਆਉ ਹੁਣ ਵਿਭਾਜਨ ਸੂਤਰ 'ਤੇ ਅਧਾਰਿਤ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰੀਏ।

ਉਦਾਹਰਣ 6 : ਉਸ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੋ ਬਿੰਦੂਆਂ (4, – 3) ਅਤੇ (8, 5) ਨੂੰ ਜੋੜਨ ਵਾਲੇ ਰੇਖਾਖੰਡ ਨੂੰ ਅੰਦਰੂਨੀ ਤੌਰ ਤੇ 3 : 1 ਦੇ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਵੰਡਦਾ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ $P(x, y)$ ਲੋੜੀਂਦਾ ਬਿੰਦੂ ਹੈ। ਵਿਭਾਜਨ ਸੂਤਰ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਨ 'ਤੇ ਸਾਨੂੰ

$$x = \frac{3(8) + 1(4)}{3+1} = 7, \quad y = \frac{3(5) + 1(-3)}{3+1} = 3$$

ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ (7, 3) ਹੀ ਲੋੜੀਂਦਾ ਬਿੰਦੂ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 7 : ਬਿੰਦੂ (– 4, 6) ਬਿੰਦੂਆਂ A(– 6, 10) ਅਤੇ B(3, – 8) ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੇ ਰੇਖਾ ਖੰਡ ਨੂੰ ਕਿਸ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਵੰਡਦਾ ਹੈ ?

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ $(-4, 6)$ ਰੇਖਾਖੰਡ AB ਨੂੰ ਅੰਦਰੂਨੀ ਤੌਰ 'ਤੇ $m_1 : m_2$ ਦੇ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਵੰਡਦਾ ਹੈ। ਵਿਭਾਜਨ ਸੂਤਰ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਕੇ, ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ :

$$(-4, 6) = \left(\frac{3m_1 - 6m_2}{m_1 + m_2}, \frac{-8m_1 + 10m_2}{m_1 + m_2}\right) \qquad (1)$$

ਯਾਦ ਕਰੋ ਕਿ ਜੇਕਰ $(x, y) = (a, b)$ ਹੋਵੇ ਤਾਂ $x = a$ ਅਤੇ $y = b$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ : $-4 = \dfrac{3m_1 - 6m_2}{m_1 + m_2}$ ਅਤੇ $6 = \dfrac{-8m_1 + 10m_2}{m_1 + m_2}$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਹੁਣ $-4 = \dfrac{3m_1 - 6m_2}{m_1 + m_2}$ ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। :

$$-4m_1 - 4m_2 = 3m_1 - 6m_2$$

ਭਾਵ $7m_1 = 2m_2$

ਜਾਂ $m_1 : m_2 = 2 : 7$

ਤੁਹਾਨੂੰ ਇਸਦੀ ਜਾਂਚ ਕਰ ਲੈਣੀ ਚਾਹੀਦੀ ਹੈ ਕਿ ਇਹ ਅਨੁਪਾਤ y-ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕਾਂ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦਾ ਹੈ।

ਹੁਣ $$\frac{-8m_1 + 10m_2}{m_1 + m_2} = \frac{-8\dfrac{m_1}{m_2} + 10}{\dfrac{m_1}{m_2} + 1}$$ (m_2 ਨਾਲ ਉੱਪਰ ਥੱਲੇ ਭਾਗ ਦੇਣ 'ਤੇ)

$$= \frac{-8 \times \dfrac{2}{7} + 10}{\dfrac{2}{7} + 1} = 6$$

ਇਸ ਲਈ ਬਿੰਦੂ $(-4, 6)$, ਬਿੰਦੂਆਂ $A(-6, 10)$ ਅਤੇ $B(3, -8)$ ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੇ ਰੇਖਾ ਖੰਡ ਨੂੰ $2 : 7$ ਦੇ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਵੰਡਦਾ ਹੈ।

ਬਦਲਵਾਂ ਹੱਲ : ਅਨੁਪਾਤ $m_1 : m_2$ ਨੂੰ $\dfrac{m_1}{m_2} : 1$, ਜਾਂ $k : 1$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਵੀ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਮੰਨ ਲਉ ਬਿੰਦੂ $(-4, 6)$ ਰੇਖਾਖੰਡ AB ਨੂੰ ਅੰਦਰੂਨੀ ਤੌਰ 'ਤੇ $k : 1$ ਵਿੱਚ ਵੰਡਦਾ ਹੈ। ਵਿਭਾਜਨ ਸੂਤਰ ਦੁਆਰਾ, ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।