ବୀଜଗାଣିତିକ ସମୀକରଣ
(ALGEBRAIC EQUATION)

4.1 ଉପକ୍ରମଣିକା (Introduction) :

ପୂର୍ବ ଶ୍ରେଣୀରେ ତୁମେମାନେ ସମୀକରଣ ଓ ଅଭେଦ ମଧ୍ୟରେ ପାର୍ଥକ୍ୟ ଜାଣିବା ସହ ସମୀକରଣର ସମାଧାନ କିପରି ହୁଏ ସେ ବିଷୟରେ ଅବଗତ ଅଛ । ପୂର୍ବ ଅଧ୍ୟାୟରେ ଦ୍ୱିଘାତ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ଉତ୍ପାଦକୀକରଣ ସମ୍ବନ୍ଧରେ ତୁମେମାନେ ଜାଣିଛ । ଉତ୍ପାଦକୀକରଣ ଆଧାରରେ ଦ୍ୱିଘାତ ପଲିନୋମିଆଲ୍ ସଂପୃକ୍ତ ସମୀକରଣର ସମାଧାନ ବିଷୟରେ ଆଲୋଚନା ଏବଂ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣର ସମାଧାନ ସହ ଜଡ଼ିତ କିଛି ପାଟୀଗାଣିତିକ ପ୍ରଶ୍ନର ସମାଧାନ ବିଷୟରେ ଆଲୋଚନା ଉକ୍ତ ଅଧ୍ୟାୟର ମୁଖ୍ୟ ଉଦ୍ଦେଶ୍ୟ ।

4.2 ଏକ ଅଜ୍ଞାତ ରାଶିବିଶିଷ୍ଟ ଏକ ଘାତୀ ସମୀକରଣ (Linear equation in one variable):

ତୁମେମାନେ ଏକ ଅଜ୍ଞାତ ରାଶି ବିଶିଷ୍ଟ ଏକଘାତୀ ସମୀକରଣ ସହିତ ପୂର୍ବରୁ ପରିଚିତ । ତେଣୁ ଏହି ଅଧ୍ୟାୟରେ ଏହାର ବିଶଦ ଆଲୋଚନା ନ କରି କେବଳ କେତେଗୁଡ଼ିଏ ଆବଶ୍ୟକ ତଥ୍ୟକୁ ସ୍ମରଣ କରାଇ ଦିଆଯାଉଅଛି ।

(i) ଯଦି a ଓ b ପ୍ରତ୍ୟେକେ ଧ୍ରୁବକ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା $(a \neq 0)$ ଓ x ଏକ ଅଜ୍ଞାତ ରାଶି ହୁଏ, ତେବେ $ax + b = 0$କୁ x ରେ ଗୋଟିଏ ଏକ ଅଜ୍ଞାତ ରାଶି ବିଶିଷ୍ଟ ଏକଘାତୀ ସମୀକରଣ କୁହାଯାଏ ।

ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ : $ax + b$ ଏକ ପଲିନୋମିଆଲ୍ $p(x)$, ଯେଉଁଠାରେ $a, b \in R, a \neq 0$ । ଉକ୍ତ ଏକ ଅଜ୍ଞାତ ରାଶି ବିଶିଷ୍ଟ ଏକ ଘାତୀ ପଲିନୋମିଆଲ୍ ସଂପୃକ୍ତ ସମୀକରଣ $p(x) = 0$ କୁ ଏକ ଅଜ୍ଞାତ ରାଶି ବିଶିଷ୍ଟ ଏକ ଘାତୀ ସମୀକରଣ କୁହାଯାଏ ।

(ii) x ର ଯେଉଁମାନ ପାଇଁ ସମୀକରଣଟି ସିଦ୍ଧ ହୁଏ ତାହାକୁ ସମୀକରଣଟିର **ବୀଜ ବା ମୂଳ (root)** ବା **ସମାଧାନ (solution)** କୁହାଯାଏ । $ax + b = 0 \ (a \neq 0)$ ସମୀକରଣର ମୂଳ $= \frac{-b}{a}$ ।

(iii) ଗୋଟିଏ ଏକ ଅଜ୍ଞାତ ରାଶି ବିଶିଷ୍ଟ ଏକଘାତୀ ସମୀକରଣର କେବଳ ଗୋଟିଏ ମାତ୍ର ମୂଳ ଥାଏ ।

(iv) ଯେଉଁ ସମୀକରଣର ମୂଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରି ହୁଏ ତାହାକୁ **ସଙ୍ଗତ (Consistent)** ସମୀକରଣ କୁହାଯାଏ । ଅନ୍ୟ ସମୀକରଣକୁ **ଅସଙ୍ଗତ (in-consistent)** ସମୀକରଣ କୁହାଯାଏ । ।

(v) ଯେଉଁ ଦୁଇଟି ସମୀକରଣର ମୂଳ ସମାନ ସେହି ସମୀକରଣ ଦୁଇଟିକୁ ପରସ୍ପର **ଅନୁରୂପ (Equivalent)** ସମୀକରଣ କୁହାଯାଏ । ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ $x + 2 = 0$ ଓ $2x + 6 = 2$ ସମୀକରଣଦ୍ୱୟ ଅନୁରୂପ, କାରଣ $x = -2$ ହେଲେ ଉଭୟ ସମୀକରଣ ସିଦ୍ଧ ହୁଅନ୍ତି ।

(vi) x ର ଯେକୌଣସି ମାନ ପାଇଁ ଯଦି ସମୀକରଣଟି ସିଦ୍ଧ ହୁଏ, ତେବେ ଏହାକୁ ସମୀକରଣ ନ କହି **ଅଭେଦ (Identity)** କୁହାଯାଏ ।

ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ : $2(x-1) + 1 = 3 - (4 - 2x)$ ଉକ୍ତିଟି ବିଷୟରେ ଆଲୋଚନା କରାଯାଉ ।

$$\Rightarrow 2x - 2 + 1 = 3 - 4 + 2x \Rightarrow 2x - 1 = 2x - 1$$

$$\Rightarrow 2x = 2x \Rightarrow x = x \Rightarrow x - x = 0$$

ଏଥିରୁ **ସ୍ପଷ୍ଟ** ଯେ, x ର ଯେକୌଣସି ମାନ ପାଇଁ $x - x = 0$ ସତ୍ୟ ।

ତେଣୁ $2(x-1) + 1 = 3 - (4 - 2x)$ ଏକ ସମୀକରଣ ନୁହେଁ । ଏକ ଅଭେଦ ।

ଉଦାହରଣ - 1 : ନିମ୍ନଲିଖିତ ମଧ୍ୟରୁ କେଉଁଟି ସଙ୍ଗତ, କେଉଁଟି ଅସଙ୍ଗତ, କେଉଁଟି ଅଭେଦ ଓ କେଉଁ ଦୁଇଟି ଅନୁରୂପ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(i) $2(x-1) + 1 = 3 - (1-2x)$ (ii) $2(x-5) = x + 1$

(iii) $(2x-1)^2 = 4x(x-1) + 1$ (iv) $6x-30 = 3(x + 1)$

ସମାଧାନ :

(i) $2(x-1) + 1 = 3 - (1-2x) \Rightarrow 2x-2+1 = 3-1+2x$

$\Rightarrow 2x-2x = 3-1+2-1 = 3$

$\Rightarrow 0 = 3$ ଯାହାକି ଅସମ୍ଭବ । ତେଣୁ ଏହି ସମୀକରଣଟି ଅସଙ୍ଗତ ଅଟେ ।

(ii) $2(x-5) = x + 1 \Rightarrow 2x - 10 = x + 1$

$\Rightarrow 2x - x = 1 + 10 \Rightarrow x = 11$

ଏହାର ମୂଳ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରି ହେଉଥିବାରୁ ଏ ସମୀକରଣଟି ସଙ୍ଗତ ଅଟେ ।

(iii) $(2x-1)^2 = 4x(x-1) + 1$

$\Rightarrow (2x)^2 - 2.2x.1 + 1^2 = 4x^2 - 4x + 1$

$\Rightarrow 4x^2 - 4x + 1 = 4x^2 - 4x + 1$

ବାମପାର୍ଶ୍ୱ ଓ ଦକ୍ଷିଣ ପାର୍ଶ୍ୱର ରାଶିଗୁଡ଼ିକ ସମାନ । ତେଣୁ ଅଜ୍ଞାତ ରାଶି x ର ଯେକୌଣସି ମାନ ପାଇଁ ସମୀକରଣଟି ସିଦ୍ଧ ହେବ । ଅର୍ଥାତ୍ ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱର ମାନ ସମାନ ହେବ । ତେଣୁ ଏହା ଏକ ଅଭେଦ ।

(iv) $6x-30 = 3(x + 1) \Rightarrow 6x-30 = 3x + 3$

$\Rightarrow 6x-3x = 30 + 3 = 33 \Rightarrow 3x = 33 \Rightarrow x = 11$

ଏହି ସମୀକରଣଟି ମଧ୍ୟ ସଙ୍ଗତ ଅଟେ ।

ପୁନଶ୍ଚ ଏହି ସମୀକରଣଟି (ii) ସମୀକରଣର ଅନୁରୂପ କାରଣ ଉଭୟ ସମୀକରଣର ମୂଳ ସମାନ ଅଟେ ।

ଉଦାହରଣ - 2 : ସମାଧାନ କର : $2(x-1)(x + 4) + 9 = (2x + 3)(x-2)$

ସମାଧାନ : $2(x-1)(x + 4) + 9 = (2x + 3)(x-2)$

$\Rightarrow 2(x^2 + 3x - 4) + 9 = 2x^2 - x - 6$

$\Rightarrow 2x^2 + 6x - 8 + 9 = 2x^2 - x - 6$
$\Rightarrow 6x + 1 = -6 - x \Rightarrow 7x = -7$
$\Rightarrow x = -1$ (ଉତ୍ତର)

$\therefore$ ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ସମାଧାନ (–1) ।

ଉଦାହରଣ - 3 : ସମାଧାନ କର : $\frac{2x-5}{6} - \frac{3x+4}{5} + \frac{7}{2} = 0$

ସମାଧାନ : $\frac{2x-5}{6} - \frac{3x+4}{5} + \frac{7}{2} = 0$

ଏହି ସମୀକରଣର ବାମପାର୍ଶ୍ୱରେ ଥିବା ତିନିଗୋଟି ପଦର ହର ମାନଙ୍କର ଲ.ସା.ଗୁ. = 30

ସମୀକରଣର ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱକୁ 30 ଦ୍ୱାରା ଗୁଣନ କଲେ,

$\Rightarrow \frac{2x-5}{6} \times 30 - \frac{3x+4}{5} \times 30 + \frac{7}{2} \times 30 = 0 \times 30$
$\Rightarrow 5(2x-5) - 6(3x+4) + 15 \times 7 = 0$
$\Rightarrow 10x - 25 - 18x - 24 + 105 = 0$
$\Rightarrow 10x - 18x = 25 + 24 - 105$
$\Rightarrow -8x = -56 \Rightarrow x = \frac{-56}{-8} = 7$ (ଉତ୍ତର)

ବିକଳ୍ପ ପ୍ରଣାଳୀ :

ବୀଜ ଗାଣିତିକ ପରିମେୟ ରାଶିରୁ ହର ବାଦ୍ ଦେବା ପାଇଁ ପୂର୍ବ ବର୍ଣ୍ଣିତ ହରମାନଙ୍କର ଲ.ସା.ଗୁ. ଦ୍ୱାରା ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱକୁ ଗୁଣନ ନ କରି ଅନ୍ୟ ଏକ ବିକଳ୍ପ ପ୍ରଣାଳୀ ଅବଲମ୍ବନ କରାଯାଇଥାଏ । ନିମ୍ନ ସୋପାନଗୁଡ଼ିକୁ ଅନୁଧାନ କର ।

i) ସମୀକରଣର ପ୍ରତ୍ୟେକ ପାର୍ଶ୍ୱକୁ ପରିମେୟ ହର ବିଶିଷ୍ଟ ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ପଦରେ ପ୍ରକାଶ କରାଯାଏ ।

ii) ବଜ୍ର ଗୁଣନ ଦ୍ୱାରା ପରିମେୟ ରାଶିର ହରଗୁଡ଼ିକୁ ଅପସାରଣ କରାଯାଏ । ଅର୍ଥାତ୍ ସମୀକରଣଟି $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ ଆକାର ଧାରଣ କଲେ D କୁ A ସହିତ ଏବଂ B କୁ C ସହିତ ଗୁଣାଯାଇଥାଏ । ଏହାକୁ **ବଜ୍ରଗୁଣନ (Cross-Multiplication)** ପଦ୍ଧତି କୁହାଯାଏ । ଅର୍ଥାତ୍ $\frac{A}{B} = \frac{C}{D} \Rightarrow AD = BC$

ସମାଧାନ : $\frac{2x-5}{6} - \frac{3x+4}{5} + \frac{7}{2} = 0$

$\Rightarrow \frac{2x-5}{6} - \frac{3x+4}{5} = \frac{-7}{2} \Rightarrow \frac{5(2x-5) - 6(3x+4)}{30} = \frac{-7}{2}$
$\Rightarrow \frac{10x - 25 - 18x - 24}{30} = -\frac{7}{2} \Rightarrow \frac{-8x - 49}{30} = -\frac{7}{2}$
$\Rightarrow 2(-8x - 49) = -7 \times 30$
$\Rightarrow -16x - 98 = -210$ (ବଜ୍ର ଗୁଣନ କରି)
$\Rightarrow -16x = -210 + 98 = -112$
$\Rightarrow x = \frac{-112}{-16} = 7$ (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 4 : ସମାଧାନ କର : $\frac{3}{x}-\frac{5}{3-x}=\frac{1}{x(3-x)}\ (x \neq 0, x \neq 3)$

ସମାଧାନ : $\frac{3}{x}-\frac{5}{3-x}=\frac{1}{x(3-x)}$ ସମୀକରଣଟିରେ ଥିବା ପଦଗୁଡ଼ିକ x ରେ ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ବୀଜଗାଣିତିକ ପରିମେୟ ପରିପ୍ରକାଶ । ଏହି ପ୍ରକାର ସମୀକରଣର ସମାଧାନ ପାଇଁ ଆମେ ପୂର୍ବ ଆଲୋଚିତ ପରିମେୟ ଆକାର ବିଶିଷ୍ଟ ପଦଗୁଡ଼ିକର ହରମାନଙ୍କର ଲ.ସା.ଗୁ. ଦ୍ୱାରା ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱକୁ ଗୁଣନ କରି କିମ୍ବା ଉଭୟ ବାମ ଓ ଦକ୍ଷିଣ ପାର୍ଶ୍ୱକୁ ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ପରିମେୟ ଆକାର ବିଶିଷ୍ଟ ପଦରେ ପ୍ରକାଶ କରି ବଜ୍ରଗୁଣନ ପ୍ରଣାଳୀ ଦ୍ୱାରା ସମାଧାନ କରିବାକୁ ହୋଇଥାଏ ।

ଏଠାରେ ହରମାନଙ୍କର ଲ.ସା.ଗୁ. x (3−x) ଦ୍ୱାରା ଗୁଣନ କଲେ ସମୀକରଣଟି

$x(3-x) \times \frac{3}{x} - x(3-x) \times \frac{5}{3-x} = x(3-x) \times \frac{1}{x(3-x)}$ ହେବ ।

$\Rightarrow (3-x) \times 3 - 5x = 1 \Rightarrow 9 - 3x - 5x = 1$

$\Rightarrow -8x = -9 + 1 = -8 \Rightarrow x = \frac{-8}{-8} = 1$ (ଉତ୍ତର)

ବିକଳ୍ପ ପ୍ରଣାଳୀ : $\frac{3}{x}-\frac{5}{3-x}=\frac{1}{x(3-x)} \Rightarrow \frac{3(3-x)-5x}{x(3-x)}=\frac{1}{x(3-x)}$

$\Rightarrow \frac{9-3x-5x}{x(3-x)}=\frac{1}{x(3-x)} \Rightarrow \frac{9-8x}{x(3-x)}=\frac{1}{x(3-x)}$

$\Rightarrow (9-8x).(3-x) = x(3-x)$ (ବଜ୍ରଗୁଣନ ଦ୍ୱାରା)

$\Rightarrow 9 - 8x = 1 \Rightarrow 8 = 8x \Rightarrow x = 1$

ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ : ସମାଧାନ ପରେ ସମୀକରଣଟିର ନିର୍ଣ୍ଣିତ ମୂଳ ଠିକ୍ କି ନୁହେଁ ଜାଣିବା ପାଇଁ ଉକ୍ତ ମୂଳ ଅର୍ଥାତ୍ ଅଜ୍ଞାତ ରାଶିର ଲବ୍ଧ ମୂଲ୍ୟକୁ ସମୀକରଣର ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ସ୍ଥାପନ କରି ସମୀକରଣଟି ସିଦ୍ଧ ହେଉ ଅଛି କି ନାହିଁ ପରୀକ୍ଷା କଲେ ତୁମେ ପାଇଥିବା ଉତ୍ତରଟି ଠିକ୍ କି ଭୁଲ୍ ଜାଣି ପାରିବ ।

ଅନୁଶୀଳନୀ - 4 (a)

1. 2, 3, 5, 8 ଓ −1 ମାନଗୁଡ଼ିକ ମଧ୍ୟରୁ ଅଜ୍ଞାତ ରାଶିର କେଉଁ ଏକ ବା ଏକାଧିକ ମାନ ଦ୍ୱାରା ସମୀକରଣଟି ସିଦ୍ଧ ହେବ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

   i) $(x+1)^2 - 2x = x^2 + 1$ ii) $6(2y-1) - 5(y+3) = 3(y+5) - 24$

   iii) $(3-z) + 2(1+z) = 13 - 2(z+1)$ iv) $6x + 10 = 2(x+12) + 9(x-1)$

   v) $3(x-4) + 6 = 2(x+2) - 2$ vi) $3x + 9 - (3x-5) - (5x+4) = 0$

2. ନିମ୍ନଲିଖିତ ସମୀକରଣମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରୁ କେଉଁଟି ସଙ୍ଗତ, କେଉଁଟି ଅସଙ୍ଗତ, କେଉଁଟି ଅଭେଦ ଓ କେଉଁମାନେ ଅନୁରୂପ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

   i) $(5x-1)^3 = 125x^3 - 15x(5x-1) - 1$

   ii) $(x-5)^2 = 2(x-3) + (x+2)(x-2) - 1$

   iii) $4x + 3 - (11x - 18) = 0$

   iv) $3(x+3)(x-5) = (x-3)^2 + (x-6)(x+6) + (x+3)(x-3) - 9$

   v) $3(x+2a) - 2b = 2(x+a) + b$. vi) $3(x+2) = 4(2x-1) - 5(x+3)$

3. ସମାଧାନ କର :

(i) $2(3x-1)-3(x+2)=1$

(ii) $(x+3)(x-5)-15=x(x-1)$

(iii) $3(x+a)-b=2(x+b)+a$

(iv) $(x-5)^2+2(x-3)=(x+2)(x-2)-1$

(v) $(x-3)^2=2x(x-1)-x(x+3)-2$

(vi) $(x+2)^2=3x(x+1)-2x(x-1)$

4. ସମାଧାନ କର

i) $x-\frac{2x-1}{3}=\frac{x-2}{4}+\frac{1}{3}$

ii) $\frac{2-3x}{4}+\frac{3-2x}{5}=2-x$

iii) $\frac{3x}{4}-\frac{5x}{6}+2=\frac{x}{12}$

iv) $(2x-1)-\frac{5(x+3)}{6}=\frac{x+5}{2}-4$

v) $\frac{x-(7-8x)}{9x-(3+4x)}=\frac{2}{3}$

vi) $\frac{x}{5}+\frac{x}{2}=7$

5. ସମାଧାନ କର

i) $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+4}=\frac{2}{x+3}$

ii) $\frac{2}{x}+\frac{1}{2x}-\frac{5}{x+2}=0$

iii) $\frac{2}{x+1}-\frac{3}{2x+2}=\frac{1}{2x+3}$

iv) $\frac{6}{2x+3}+\frac{4}{x-2}=\frac{7}{x+6}$

v) $\frac{2}{x+1}-\frac{6}{2x-1}+\frac{3}{3x+2}=0$

vi) $\frac{2}{2x-3}+\frac{5}{(2x-3)^2}=\frac{3}{3x-2}$

4.3 ଏକ ଅଜ୍ଞାତ ରାଶି ବିଶିଷ୍ଟ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣ (Quadratic equation in one variable)

ଯଦି a, b, c ଗୋଟିଏ ଗୋଟିଏ ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ଓ x ଏକ ଅଜ୍ଞାତ ରାଶି, ତେବେ $p(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ ଏକ ଦ୍ୱିଘାତ ପଲିନୋମିଆଲ୍ ଅଟେ । $p(x)$ ସହ ସଂପୃକ୍ତ ସମୀକରଣଟି ହେଉଛି $p(x)=0$ ।

ଏକ ଅଜ୍ଞାତ ରାଶି ବିଶିଷ୍ଟ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣର ବ୍ୟାପକ ରୂପ ହେଉଛି

$$\mathbf{ax^2+bx+c=0,\ a,b,c\in R}\ ଓ\ \mathbf{a\neq 0}$$

ଏହି ସମୀକରଣରେ a ଓ b କୁ ଯଥାକ୍ରମେ x^2 ଓ x ର ସହଗ ଓ c କୁ ସମୀକରଣର ଧ୍ରୁବକ ପଦ କୁହାଯାଏ ।

ସଂଜ୍ଞା : ଏକ ଅଜ୍ଞାତ ରାଶି ବିଶିଷ୍ଟ କୌଣସି ସମୀକରଣର ପଦମାନଙ୍କରେ ଥିବା ଅଜ୍ଞାତ ରାଶିର ସର୍ବୋଚ୍ଚ ଘାତ 2 ହେଲେ ସମୀକରଣଟିକୁ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣ (Quadratic equation) କୁହାଯାଏ ।

ଉଦାହରଣ ସ୍ୱରୂପ : i) $3x^2-6x+8=0$ ଏଠାରେ $a=3, b=-6, c=8$

ii) $5x^2+8x=0$ ଏଠାରେ $a=5, b=8, c=0$

iii) $7x^2=0$ ଏଠାରେ $a=7, b=0, c=0$

iv) $2x^2-9=0$ ଏଠାରେ $a=2, b=0, c=-9$

ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣର ସମାଧାନ:

i) ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣର ସମାଧାନର ଅର୍ଥ ଅଜ୍ଞାତ ରାଶିର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରିବା । ଅଜ୍ଞାତ ରାଶିର ଯେଉଁ ମୂଲ୍ୟ ଗୁଡ଼ିକ ପାଇଁ ସମୀକରଣଟି ସିଦ୍ଧ ହେବ ସେହି ମାନଗୁଡ଼ିକୁ ସମୀକରଣର ମୂଳ ବା ବୀଜ (root) କୁହାଯାଏ ।

ii) ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣର କେବଳ ଦୁଇଟି ବୀଜ ଥାଏ ।

iii) ପ୍ରତ୍ୟେକ ବୀଜ ଦ୍ୱାରା ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣଟି ସିଦ୍ଧ ହୁଏ ।

iv) ସମୀକରଣଟିର ସମସ୍ତ ପଦକୁ ବାମପାର୍ଶ୍ୱକୁ ଆଣି ବାମପାର୍ଶ୍ୱସ୍ଥ ପରିପ୍ରକାଶ ର ଉତ୍ପାଦକୀକରଣ କରାଯାଏ; ଫଳରେ ଦୁଇଟି ଏକଘାତୀ ସମୀକରଣ ର ଗୁଣଫଳ ଶୂନ ସଙ୍ଗେ ସମାନ ହୋଇଥାଏ ।

v) ଯଦି x ଓ y ବାସ୍ତବ ସଂଖ୍ୟା ଏବଂ $xy = 0$ ହୁଏ, ତେବେ $x = 0$ ବା $y = 0$ ହୁଏ ।

ମନେକର $ax^2 + bx + c = (Ex + F)(Gx + H)$

ତେଣୁ $ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow (Ex + F)(Gx + H) = 0$

$\Rightarrow (Ex + F) = 0$ ବା $(Gx + H) = 0$

$\Rightarrow x = \frac{-F}{E}$ ବା $x = \frac{-H}{G}$

ତେଣୁ $ax^2 + bx + c = 0$ ସମୀକରଣର ବୀଜଦ୍ୱୟ ହେଲେ, $\frac{-F}{E}$ ଓ $\frac{-H}{G}$

ଉଦାହରଣ- 5 : ଗୋଟିଏ ଦ୍ୱିଘାତ ପଲିନୋମିଆଲ୍ $p(x)$ର ଜିରୋ ଦ୍ୱୟ 3 ଓ –1 ହେଲେ ସଂପୃକ୍ତ ସମୀକରଣଟିକୁ ସ୍ଥିର କର ।

ସମାଧାନ: $x = 3$ ଏବଂ $x = -1$ ପାଇଁ ସଂପୃକ୍ତ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ଟି 0 ହେବ ।

$\therefore$ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ର ଉତ୍ପାଦକଦ୍ୱୟ $(x - 3)$ ଓ $(x+1)$

$\therefore$ ପଲିନୋମିଆଲ୍‌ଟି $(x - 3)(x+1)$ ଅର୍ଥାତ୍ $x^2 - 2x - 3$ ହେବ ।

$\therefore$ ପଲିନୋମିଆଲ୍ ସହ ସଂପୃକ୍ତ ସମୀକରଣଟି $x^2 - 2x - 3 = 0$ ହେବ ।

ଉଦାହରଣ - 6 : ସମାଧାନ କର $3x^2 - 12 = 0$

ସମାଧାନ : $3x^2 - 12 = 0$

$\Rightarrow 3(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow x^2 - 4 = 0$ (ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱକୁ 3 ଦ୍ୱାରା ଭାଗ କରି)

$\Rightarrow (x + 2)(x - 2) = 0 \quad (\because a^2 - b^2 = (a+b)(a-b))$

$\Rightarrow x + 2 = 0$ କିମ୍ବା $x - 2 = 0 \Rightarrow x = -2$ କିମ୍ବା $x = 2$

$\therefore$ ଦତ୍ତ ସମୀକରଣର ବୀଜ ଦ୍ୱୟ -2 ଏବଂ 2 (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 7 : ସମାଧାନ କର $x^2 - 5x + 4 = 0$

ସମାଧାନ : $x^2 - 5x + 4 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x - x + 4 = 0$

$\Rightarrow x(x - 4) - 1(x - 4) = 0 \Rightarrow (x - 4)(x - 1) = 0$

$\Rightarrow x - 4 = 0$ ଅଥବା $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 4$ ଅଥବା $x = 1$

$\therefore$ ଦତ୍ତ ସମୀକରଣର ବୀଜଦ୍ୱୟ 4 ଏବଂ 1 (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 8 : ସମାଧାନ କର : $\frac{x}{x-1} + \frac{10}{7-x} = 4 \quad (x \neq 1,\ x \neq 7)$

ସମାଧାନ : ଦତ୍ତ ସମୀକରଣଟି $\frac{x}{x-1} + \frac{10}{7-x} = 4$ (ସମୀକରଣର ବାମ ପାର୍ଶ୍ୱକୁ ସରଳୀ କରଣ କଲେ)

$\Rightarrow \frac{x(7-x)+10(x-1)}{(x-1)(7-x)} = 4 \Rightarrow \frac{7x - x^2 + 10x - 10}{-x^2 + 8x - 7} = 4$

$\Rightarrow 17x - x^2 - 10 = 4(-x^2 + 8x - 7)$

$\Rightarrow 17x - x^2 - 10 - 4(-x^2 + 8x - 7) = 0$

$\Rightarrow 17x - x^2 - 10 + 4x^2 - 32x + 28 = 0$

$\Rightarrow (-x^2 + 4x^2) + (17x - 32x) + (-10 + 28) = 0$

$\Rightarrow 3x^2 - 15x + 18 = 0 \Rightarrow 3(x^2 - 5x + 6) = 0$

$\Rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow x^2 - 3x - 2x + 6 = 0 \Rightarrow x(x-3) - 2(x-3) = 0$

$(x-2)(x-3) = 0 \Rightarrow x = 2$ କିମ୍ବା $x = 3$

$\therefore$ ଦତ୍ତ ସମୀକରଣର ମୂଳ ଦ୍ୱୟ 2 ଓ 3 । (ଉତ୍ତର)

ଅନୁଶୀଳନୀ - 4 (b)

1. ନିମ୍ନଲିଖିତ ସମୀକରଣମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରୁ କେଉଁଟି ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(i) $3x^2 - 4x = -4x + 5$ (ii) $x^3 - 2x^2 + 4 = x^3 + 2x$ (iii) $x + \frac{3}{x} = x^2 (x \neq 0)$

(iv) $x + \frac{1}{x} = 2\ (x \neq 0)$ (v) $(x+3)^2 = 0$ (vi) $\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{5}{4} = 0$

(vii) $3x^2 = 2x + 7$ (viii) $(3x+2)^2 - (x+4)^2 = (x-3)$

(ix) $7x^2 + 9 = 0$ (x) $4x = 3 + 6x^2$

2. ପ୍ରତ୍ୟେକ ସମୀକରଣ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ଥିବା ସଂଖ୍ୟାମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରୁ କେଉଁ କେଉଁ ସଂଖ୍ୟାଦ୍ୱାରା ସମୀକରଣ ସିଦ୍ଧ ହେବ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(i) $x^2 - 3x = 0$ $(0,1,2,3)$ (ii) $3x^2 - 12 = 0$ $(1,-1,2,-2)$

(iii) $x^2 - 3x + 2$ $(0,1,2,3)$ (iv) $x^2 + \sqrt{2}x - 4 = 0$ $(\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, -2\sqrt{2})$

(v) $x^2 - x - 2 = 0$ $(1, 0, -1, 2)$

3. ସମାଧାନ କର :

(i) $7x^2 = \frac{1}{28}$ (ii) $5x^2 = 3x$ (iii) $x^2 - 3x + 2 = 0$

(iv) $(x+1)(x+2) = 30$ (v) $\sqrt{3}x^2 - x - 2\sqrt{3} = 0$

(vi) $2x^2 - 5x - 3 = 0$ (vii) $x^2 + ax = 2a^2$ (viii) $x^2+2ax+a^2-b^2 = 0$

4. ସମାଧାନ କର ।

(i) $\frac{3}{x+2} - \frac{1}{x} = \frac{4}{15}$ (ii) $\frac{5}{3x-2} + \frac{3}{x+2} = 1$

(iii) $\frac{x+1}{x+3} - \frac{1-x}{3+2x} = 2$ (iv) $\frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x} = \frac{5}{2}$

5.(i) $x^2 - 7x + a = 0$ ସମୀକରଣର ଗୋଟିଏ ବୀଜ 3 ହେଲେ, a ର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ଓ ସମୀକରଣର ଅନ୍ୟ ବୀଜଟି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

(ii) $x^2 + ax - 15 = 0$ ସମୀକରଣର ଗୋଟିଏ ବୀଜ 5 ହେଲେ, a ର ମାନ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ଓ ସମୀକରଣର ଅନ୍ୟ ବୀଜଟି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

4.4 ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣ ସାହାଯ୍ୟରେ ପାଟୀଗଣିତ ପ୍ରଶ୍ନର ସମାଧାନ :

ବୀଜ ଗଣିତର ପ୍ରୟୋଗରେ ପାଟୀଗାଣିତିକ ପ୍ରଶ୍ନଗୁଡ଼ିକ ସମାଧାନ ସହଜ ହୋଇଥାଏ । ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣ ସମାଧାନ ଦ୍ୱାରା କିପରି ପାଟୀଗାଣିତିକ ପ୍ରଶ୍ନ ଗୁଡ଼ିକର ଉତ୍ତର ସହଜରେ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କରାଯାଏ, ତାହା ନିମ୍ନ ଉଦାହରଣ ମାନଙ୍କରେ ଆଲୋଚନା କରାଯାଇଅଛି । ସମୟ ସମୟରେ ଦ୍ୱିଘାତ ସମୀକରଣର ଦୁଇଟି ବୀଜ ମଧ୍ୟରୁ ଯେଉଁ ବୀଜଟି ପ୍ରଶ୍ନଟିର ସର୍ତ୍ତାବଳୀକୁ ପୂରଣ କରିଥାଏ ତାକୁ ଗ୍ରହଣ କରାଯାଏ ଏବଂ ଅନ୍ୟ ବୀଜଟି ଅଗ୍ରହଣୀୟ ହୋଇଥାଏ ।

ଉଦାହରଣ - 9 : ପାଞ୍ଚ ବର୍ଷ ପୂର୍ବରୁ ଗୋଟିଏ ପିଲାର ବୟସ ଯାହା ଥିଲା ଏବଂ ନଅ ବର୍ଷ ପରେ ତାହାର ବୟସ ଯାହା ହେବ ସେଦ୍ୱୟର ଗୁଣଫଳ 15 ହେଲେ, ପିଲାଟିର ବର୍ତ୍ତମାନ ବୟସ କେତେ ?

ସମାଧାନ : ମନେକର ପିଲାଟିର ବର୍ତ୍ତମାନ ବୟସ x ବର୍ଷ ।

5 ବର୍ଷ ପୂର୍ବରୁ ତାହାର ବୟସ $x - 5$ ବର୍ଷ ଥିଲା ଏବଂ 9 ବର୍ଷ ପରେ ତାହାର ବୟସ $x + 9$ ବର୍ଷ ହେବ ।

ପ୍ରଶ୍ନାନୁସାରେ $(x - 5)(x + 9) = 15 \Rightarrow x^2 + 4x - 45 = 15$

$\Rightarrow x^2 + 4x - 60 = 0 \Rightarrow x^2 + 10x - 6x - 60 = 0$

$\Rightarrow x(x + 10) - 6(x + 10) = 0 \Rightarrow (x + 10)(x - 6) = 0$

$\Rightarrow x + 10 = 0$ ଅଥବା $x - 6 = 0 \Rightarrow x = -10$ ଅଥବା $x = 6$

ପିଲାଟିର ବର୍ତ୍ତମାନ ବୟସ -10 ବର୍ଷ ଗ୍ରହଣୀୟ ନୁହେଁ ।

ଅତଏବ ପିଲାଟିର ବର୍ତ୍ତମାନ ବୟସ 6 ବର୍ଷ ଅଟେ । (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 10 : ଦୁଇଗୋଟି କ୍ରମିକ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟାର ଗୁଣଫଳ 272 ହେଲେ ସଂଖ୍ୟା ଦୁଇଟି ସ୍ଥିର କର ।

ସମାଧାନ : ମନେକର କ୍ରମିକ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା ଦୁଇଟି x ଏବଂ $x + 1$ ହେଉ ।

$\therefore$ ସେମାନଙ୍କର ଗୁଣଫଳ $x(x + 1)$ ହେବ ।

ପ୍ରଶ୍ନାନୁସାରେ $x(x + 1) = 272 \Rightarrow x^2 + x - 272 = 0 \Rightarrow x^2 + 17x - 16x - 272 = 0$

$\Rightarrow x(x + 17) - 16(x + 17) = 0 \Rightarrow (x + 17)(x - 16) = 0$

$\Rightarrow x + 17 = 0$ ଅଥବା $x - 16 = 0 \Rightarrow x = -17$ ଅଥବା $x = 16$

x ର ଉଭୟ ମୂଲ୍ୟ -17 ଓ 16 ଦ୍ୱାରା ସମୀକରଣଟି ସିଦ୍ଧ ହେଲେ ମଧ୍ୟ -17 ଏକ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା ହୋଇ ନଥିବାରୁ ଏହା ଗ୍ରହଣୀୟ ନୁହେଁ ।

$\Rightarrow x = 16$

$\therefore$ କ୍ରମିକ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା x ଓ $x+1$ ଯଥାକ୍ରମେ 16 ଓ 17 ହେବ । (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 11 : ଗୋଟିଏ ମୋଟର ବୋଟ୍‌ର ସ୍ଥିର ଜଳରେ ଘଣ୍ଟା ପ୍ରତି ବେଗ 15କି.ମି. । ବୋଟ୍‌ଟି ଗୋଟିଏ ସ୍ଥାନରୁ ବାହାରି ସ୍ରୋତର ଅନୁକୂଳରେ 30 କି.ମି. ଯାଇ ଫେରି ଆସିବାକୁ ମୋଟ 4ଘଣ୍ଟା 30ମିନିଟ୍ ସମୟ ନେଲା । ସ୍ରୋତର ଘଣ୍ଟା ପ୍ରତି ବେଗ ନିରୂପଣ କର ।

ସମାଧାନ : ମନେକର ସ୍ରୋତର ଘଣ୍ଟା ପ୍ରତି ବେଗ x କି.ମି. ।

ସ୍ରୋତର ଅନୁକୂଳରେ ବୋଟ୍ ର ବେଗ = ବୋଟ୍‌ର ସ୍ଥିର ଜଳରେ ବେଗ + ସ୍ରୋତର ବେଗ ଏବଂ

ପ୍ରତିକୂଳରେ ବୋଟ୍‌ର ବେଗ = ବୋଟ୍‌ର ସ୍ଥିର ଜଳରେ ବେଗ – ସ୍ରୋତର ବେଗ ।

$\therefore$ ସ୍ରୋତର ଅନୁକୂଳରେ ବୋଟ୍‌ର ବେଗ ଘଣ୍ଟାକୁ $(15 + x)$ କି.ମି. ଓ ପ୍ରତିକୂଳରେ ବୋଟ୍‌ର ବେଗ ଘଣ୍ଟାକୁ $(15 - x)$ କି.ମି.

ଅନୁକୂଳରେ 30 କି.ମି. ଯିବାକୁ ବୋଟ $\frac{30}{15+x}$ ଘଣ୍ଟା ଓ ପ୍ରତିକୂଳରେ 30 କି.ମି.

ଫେରିବାକୁ ବୋଟ୍‌ଟି $\frac{30}{15-x}$ ଘଣ୍ଟା ସମୟ ନେଇଛି ।

ପ୍ରଶ୍ନାନୁଯାୟୀ ଏହି ଦୁଇ ସମୟର ସମଷ୍ଟି = 4ଘଣ୍ଟା 30ମିନିଟ୍ $= 4\frac{1}{2}$ ଘଣ୍ଟା $= \frac{9}{2}$ ଘଣ୍ଟା ।

$$\therefore \frac{30}{15+x}+\frac{30}{15-x}=\frac{9}{2} \Rightarrow \frac{30(15-x)+30(15+x)}{(15+x)(15-x)}=\frac{9}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{450-30x+450+30x}{225-x^2}=\frac{9}{2} \Rightarrow \frac{900}{225-x^2}=\frac{9}{2}$$

$$\Rightarrow 900 \times 2 = 9(225-x^2) \Rightarrow 1800 = 2025 - 9x^2$$

$$\Rightarrow 9x^2 = 2025 - 1800 = 225$$

$$\Rightarrow x^2 = 25 = (\pm 5)^2 \Rightarrow x = \pm 5$$

$\because x = -5$ ଗ୍ରହଣୀୟ ନୁହେଁ । ତେଣୁ ସ୍ରୋତର ଘଣ୍ଟା ପ୍ରତି ବେଗ 5 କି.ମି. (ଉତ୍ତର)

ଅନୁଶୀଳନୀ - 4 (c)

1. ଦୁଇଗୋଟି କ୍ରମିକ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟାର ବର୍ଗର ସମଷ୍ଟି 221 ହେଲେ ସଂଖ୍ୟାଦ୍ୱୟ ସ୍ଥିର କର ।
2. କୌଣସି ସଂଖ୍ୟା ତାହାର ବର୍ଗ ସହିତ ସମାନ ହେଲେ ସଂଖ୍ୟାଟି ସ୍ଥିର କର ।
3. 51 କୁ ଏପରି ଦୁଇ ଭାଗରେ ବିଭକ୍ତ କର ଯେପରି ଭାଗ ଦ୍ୱୟର ଗୁଣଫଳ 378 ହେବ ।
4. କୌଣସି ଏକ ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜର କର୍ଣ୍ଣ ଏହାର କ୍ଷୁଦ୍ରତମ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟର ଦୁଇଗୁଣରୁ 1 ସେ.ମି. କମ୍ ଏବଂ ତୃତୀୟ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ କ୍ଷୁଦ୍ରତମ ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଠାରୁ 1 ସେ.ମି. ଅଧିକ ହେଲେ, ତ୍ରିଭୁଜର ବାହୁତ୍ରୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।
5. କୌଣସି ଏକ ସମକୋଣୀ ତ୍ରିଭୁଜର ସମକୋଣ ସଲଗ୍ନ ବାହୁ ଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟ 5x ସେ.ମି. ଓ 3x–1 ସେ.ମି. ଏବଂ ଏହାର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 60 ବର୍ଗ ସେ.ମି. ହେଲେ, ତ୍ରିଭୁଜର ବାହୁ ତ୍ରୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।
6. କୌଣସି ଏକ ସଂଖ୍ୟା ଓ ଏହାର ବ୍ୟୁତ୍କ୍ରମ ସଂଖ୍ୟା (Reciprocal)ର ସମଷ୍ଟି $\frac{17}{4}$ ହେଲେ, ସଂଖ୍ୟାଟି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।
7. କୌଣସି ଏକ ଆୟତାକାର କ୍ଷେତ୍ରର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ପ୍ରସ୍ଥ ଅପେକ୍ଷା 8ମି.ଅଧିକ । ଯଦି ଉକ୍ତ ଆୟତାକାର କ୍ଷେତ୍ରଟିର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 308 ବର୍ଗ ମି. ହୁଏ, ତେବେ ଏହାର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଓ ପ୍ରସ୍ଥ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।
8. ଗୋଟିଏ ଶ୍ରେଣୀର ପିଲାମାନେ ଭ୍ରମଣରେ ଯିବା ପାଇଁ 3600 ଟଙ୍କା ଭଡ଼ାରେ ଏକ ବସ ବରାଦ କଲେ । କିନ୍ତୁ ଶେଷବେଳକୁ ସେମାନଙ୍କ ମଧ୍ୟରୁ 3ଜଣ ପିଲା ଓହରି ଯିବାରୁ ପ୍ରତ୍ୟେକଙ୍କୁ ଆଉ ଚାଳିଶ ଟଙ୍କା ଲେଖାଏଁ ଅଧିକ ଦେବାକୁ ପଡ଼ିଲା । ପ୍ରଥମରୁ କେତେ ପିଲା ଯିବା ପାଇଁ ମନସ୍ଥ କରିଥିଲେ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।
9. ତିନିଗୋଟି କ୍ରମିକ ଗଣନ ସଂଖ୍ୟାର ବର୍ଗର ସମଷ୍ଟି 110 ହେଲେ ସଂଖ୍ୟା ତିନୋଟି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।
10. ଦୁଇଗୋଟି କ୍ରମିକ ଅଯୁଗ୍ମ ସଂଖ୍ୟାର ବର୍ଗର ସମଷ୍ଟି 290 ହେଲେ ସଂଖ୍ୟା ଦୁଇଟି ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।
11. ଏକ ଆୟତ କ୍ଷେତ୍ରର ଦୈର୍ଘ୍ୟ, ପ୍ରସ୍ଥ ଅପେକ୍ଷା 2 ମିଟର ଅଧିକ । ଯଦି କ୍ଷେତ୍ରଟିର କ୍ଷେତ୍ରଫଳ 48 ବର୍ଗମିଟର୍ ହୁଏ, ତେବେ ଆୟତ କ୍ଷେତ୍ରର ବାହୁ ଦ୍ୱୟର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।
12. ଏକ ମୋଟର ଲଞ୍ଚ ନଦୀ ସ୍ରୋତର ଅନୁକୂଳରେ 36କି.ମି. ଯାତ୍ରା କରି ଯାତ୍ରା ଆରମ୍ଭ ସ୍ଥାନକୁ ଫେରି ଆସିବାକୁ ସମୁଦାୟ 8 ଘଣ୍ଟା ସମୟ ନେଲା । ଯଦି ସ୍ରୋତର ଘଣ୍ଟା ପ୍ରତି ବେଗ 6 କି.ମି. ହୁଏ ତେବେ ସ୍ଥିର ଜଳରେ ଲଞ୍ଚଟିର ଘଣ୍ଟା ପ୍ରତି ବେଗ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।
13. ଦୁଇଗୋଟି ବର୍ଗାକାର କ୍ଷେତ୍ର ମଧ୍ୟରୁ ଗୋଟିକର ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ଅପରଟିର ଦୁଇ ଗୁଣରୁ ଏକ ମିଟର କମ୍ । ଯଦି କ୍ଷେତ୍ର ଦ୍ୱୟର କ୍ଷେତ୍ରଫଳମାନଙ୍କ ଅନ୍ତର 56 ବର୍ଗମିଟର ହୁଏ ତେବେ ଦୁଇଟି ବର୍ଗ କ୍ଷେତ୍ରର ବାହୁର ଦୈର୍ଘ୍ୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

14. ଦୁଇଟି ଗଣନ ସଂଖ୍ୟା ମଧ୍ୟରୁ ଗୋଟିଏ ଅପରଟିର ତିନି ଗୁଣରୁ ଦୁଇ କମ୍ । ଯଦି ସଂଖ୍ୟା ଦ୍ୱୟର ବର୍ଗର ଅନ୍ତର 312 ହୁଏ, ତେବେ ସଂଖ୍ୟା ଦ୍ୱୟ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

15. ଦୁଇଟି ଷ୍ଟେସନ୍ A ଓ B ମଧ୍ୟରେ ଦୂରତା 192 କି.ମି. । ଏକ ଦ୍ରୁତଗାମୀ ଟ୍ରେନ୍ A ରୁ B କୁ ଯିବାକୁ ଯେତିକି ସମୟ ନିଏ ଏକ ପାସେଞ୍ଜର ଟ୍ରେନ ତା'ଠାରୁ ଦୁଇଘଣ୍ଟା ଅଧିକ ସମୟ ନିଏ । ଯଦି ପାସେଞ୍ଜର ଟ୍ରେନ୍‌ର ଘଣ୍ଟା ପ୍ରତି ହାରାହାରି ବେଗ ଦ୍ରୁତଗାମୀ ଟ୍ରେନ୍‌ର ଘଣ୍ଟା ପ୍ରତି ହାରାହାରି ବେଗ ଠାରୁ 16 କି.ମି. କମ୍ ହୁଏ, ତେବେ ଟ୍ରେନ୍ ଦ୍ୱୟର ହାରାହାରି ଘଣ୍ଟା ପ୍ରତି ବେଗ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

16. ଗୋଟିଏ ନୌକାର ଘଣ୍ଟା ପ୍ରତି ବେଗ ସ୍ଥିର ଜଳରେ 11 କି.ମି. । ଏହା ସ୍ରୋତର ପ୍ରତିକୂଳରେ 12 କି.ମି. ଗତିକରି ପୁନଶ୍ଚ ଅନୁକୂଳରେ ଫେରିଆସିବାକୁ ମୋଟ 2 ଘଣ୍ଟା 45 ମିନିଟ୍ ସମୟ ନେଲା ତେବେ ସ୍ରୋତର ଘଣ୍ଟାପ୍ରତି ବେଗ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

17. ଗୋଟିଏ ଗାଈଗୋଠର ଏକ ଚତୁର୍ଥାଂଶ ଦୃଷ୍ଟିଗୋଚର ହେଉଥିଲେ । ଗୋଠରେ ଥିବା ଗାଈ ସଂଖ୍ୟାର ବର୍ଗମୂଳର ଦୁଇଗୁଣ ସଂଖ୍ୟକ ଗାଈ ପାହାଡ଼ର ପାଦଦେଶରେ ଚରୁଥିଲେ ଏବଂ ଅବଶିଷ୍ଟ 15 ଟି ଗାଈ ନଦୀକୂଳରେ ଚରୁଥିଲେ । ତେବେ ଗୋଠରେ କେତୋଟି ଗାଈ ଥିଲେ ନିର୍ଣ୍ଣୟ କର ।

4.5 ଘାତାଙ୍କୀୟ ସମୀକରଣ ଓ ସମାଧାନ (Solution of Exponential Equations) :

ପୂର୍ବ ଶ୍ରେଣୀରେ 'ଘାତ ତତ୍ତ୍ୱ' ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ନିୟମଗୁଡ଼ିକ ସହ ସୁପରିଚିତ ହୋଇ ସାରିଛ ! ସେ ସମସ୍ତ ନିୟମଗୁଡ଼ିକୁ ଭିତ୍ତି କରି ଘାତାଙ୍କୀୟ ସମୀକରଣର ସମାଧାନ ସମ୍ବନ୍ଧୀୟ ଆଲୋଚନା ଏହି ଅନୁଚ୍ଛେଦରେ ଶିକ୍ଷା କରିବା !

ନିମ୍ନଲିଖିତ ସମୀକରଣ ଗୁଡ଼ିକୁ ଲକ୍ଷ୍ୟ କର ।

(i) $3^{x+1} = 9$ (ii) $2^x - 4^{2x-1} = 0$

ଦତ୍ତ ସମୀକରଣଗୁଡ଼ିକରେ ଘାତାଙ୍କ ଗୁଡ଼ିକ ଏକ ଅଜ୍ଞାତ ରାଶି ଦ୍ୱାରା ପ୍ରକାଶିତ ହୋଇଛନ୍ତି ।

(ଏକାଧିକ ଅଜ୍ଞାତ ରାଶି ବିଶିଷ୍ଟ ହୋଇପାରେ)

ଅଜ୍ଞାତ ରାଶି ଏବଂ ଘାତାଙ୍କ ଦ୍ୱାରା ପ୍ରକାଶିତ ହେଉଥିବା ସମୀକରଣକୁ ଘାତାଙ୍କୀୟ ସମୀକରଣ (Exponential Equation) କୁହାଯାଏ ।

ଘାତ ତତ୍ତ୍ୱର ଯେଉଁ ତଥ୍ୟ ପ୍ରୟୋଗ କରି ଆମେ କେତେକ ଘାତାଙ୍କୀୟ ସମୀକରଣର ସମାଧାନ କରିବା ତାହା ହେଉଛି **$a > 0$, $a \neq 1$, $x, y \in R$ ହେଲେ, $a^x = a^y \Rightarrow x = y$** ।

ଦ୍ରଷ୍ଟବ୍ୟ : ପରିମେୟ ତଥା ବାସ୍ତବ ଘାତାଙ୍କ ବିଶିଷ୍ଟ ଘାତତତ୍ତ୍ୱର ଆଲୋଚନାରେ ଆମେ ଧନାତ୍ମକ ଆଧାର ନେଇଥିଲେ । $a = 1$ ହେଲେ ଭିନ୍ନ ଭିନ୍ନ ମୂଲ୍ୟ ବିଶିଷ୍ଟ x ଓ y ପାଇଁ ମଧ୍ୟ $a^x = a^y$ ହେବ । ତେଣୁ $a^x = a^y \Rightarrow x = y$ ସତ୍ୟ ହେବ ନାହିଁ । ସେହି କାରଣରୁ $a > 0$ ଓ $a \neq 1$ କୁ ସର୍ତ୍ତରୂପେ ନିଆଗଲା ।

ଘାତାଙ୍କୀୟ ସମୀକରଣ ସମାଧାନ କରିବା ପାଇଁ ସମୀକରଣ ର ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ଆଧାର କୁ ସମାନ କରିବାକୁ ପଡ଼େ । ଏହା ସମାଧାନ ର ପ୍ରଧାନ ସୋପାନ । ଏହା କିପରି ହେଉଛି ତାହା ନିମ୍ନ ଉଦାହରଣଗୁଡ଼ିକୁ ଲକ୍ଷ୍ୟ କଲେ ଜାଣିପାରିବ ।

ଉଦାହରଣ - 12 : ସମାଧାନ କର : $4^{x+1} = 64$

ସମାଧାନ : $4^{x+1} = 64 \Rightarrow 4^{x+1} = 4^3$ ($\because 64 = 4^3$, ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ଆଧାରକୁ 4 କରାଗଲା)

$\Rightarrow x + 1 = 3 \Rightarrow x = 3 - 1 = 2$ (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 13 : ସମାଧାନ କର $2^x - 4^{2x-1} = 0$

ସମାଧାନ : $2^x - 4^{2x-1} = 0 \Rightarrow 2^x = 4^{2x-1}$

$\Rightarrow 2^x = (2^2)^{2x-1}$ ($\because 4 = 2^2$, ଉଭୟ ପାର୍ଶ୍ୱରେ ଆଧାର କୁ 2 କରାଗଲା)

$\Rightarrow 2^x = 2^{2(2x-1)} = 2^{4x-2}$ [ଘାତାଙ୍କ ନିୟମ $(a^n)^m = a^{nm}$ ର ପ୍ରୟୋଗ କରାଗଲା]

$\Rightarrow x = 4x - 2 \Rightarrow x - 4x = -2 \Rightarrow -3x = -2 \Rightarrow x = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3}$ (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 14 : ସମାଧାନ କର : $2^{x+2} \times 3^{x-2} = 96$

ସମାଧାନ : $2^{x+2} \times 3^{x-2} = 96 \Rightarrow 2^x \times 2^2 \times 3^x \times 3^{-2} = 96$

$\Rightarrow 2^x \times 3^x = \frac{96}{2^2 \times 3^{-2}} \Rightarrow (2 \times 3)^x = 96 \times \frac{9}{4} \Rightarrow 6^x = 216 \Rightarrow 6^x = 6^3 \Rightarrow x = 3$ (ଉତ୍ତର)

ଉଦାହରଣ - 15 : ସମାଧାନ କର : $4^x - 3 \times 2^{x+1} + 8 = 0$

ସମାଧାନ : $4^x - 3 \times 2^{x+1} + 8 = 0$

$\Rightarrow (2^2)^x - 3 \times 2^x \times 2 + 8 = 0 \Rightarrow 2^{2x} - 6 \times 2^x + 8 = 0$

ମନେକର $2^x = q$ ହେଲେ ସମୀକରଣଟି $q^2 - 6q + 8 = 0$ ହେବ।

$\Rightarrow q^2 - 4q - 2q + 8 = 0 \Rightarrow q(q-4) - 2(q-4) = 0$

$\Rightarrow (q-4)(q-2) = 0 \Rightarrow q - 4 = 0$ ଅଥବା $q - 2 = 0$

$\Rightarrow q = 4$ ଅଥବା $q = 2 \Rightarrow 2^x = 4$ ଅଥବା $2^x = 2 \Rightarrow 2^x = 2^2$ ଅଥବା $2^x = 2^1$

$\Rightarrow x = 2$ ଅଥବା $x = 1$

$\therefore$ ନିର୍ଣ୍ଣେୟ ସମାଧାନ ଦ୍ୱୟ 2 ଓ 1 । (ଉତ୍ତର)

ଅନୁଶୀଳନୀ - 4(d)

1. ଘାତାଙ୍କୀୟ ସମୀକରଣଗୁଡ଼ିକ ବାଛ ।

(i) $3x = 4$, (ii) $3^x = 4$, (iii) $\frac{1}{3^x} = 81$, (iv) $\frac{3}{4}x = 1$, (v) $3^{x-2} = 27$, (vi) $2^{2x} - 4 = 0$

2. ସମାଧାନ କର ।

(i) $4^y = 8$ (ii) $\frac{1}{2^x} = 16$, (iii) $2^x - 8 = 0$, (iv) $3^y = \sqrt[3]{3}$ (v) $\frac{1}{7^{-y}} = 49$ (vi) $6^x = \frac{1}{1296}$

3. ସମାଧାନ କର ।

(i) $2^{2x} = 16$, (ii) $3^{x+2} = 81$, (iii) $5^y = 5.\sqrt{5}$, (iv) $25^x = 125$, (v) $4^{3x+1} = 64$

4. ସମାଧାନ କର :

(i) $(\sqrt{3})^{x+5} = (\sqrt[3]{3})^{2x}$, (ii) $3^{y+2} \times 27^{3-y} = 2187$, (iii) $4^{x+1} + 2^{2x} = 40$,

(iv) $3^{x+5} - 3^{x+3} = \frac{8}{3}$ (v) $4 \times 2^{x-1} = 8^x$, (vi) $3^{x+2} + 3^x = 30$,

(vii) $3^{x+2} + 3^{x+4} = 810$, (viii) $2^{3-x} \times 4^{2x-1} = 16$ (ix) $2^{x+2} \times 3^{x-1} = 288$,

(x) $9^x - 4 \times 3^{x+1} + 27 = 0$