

सांख्यिकी

STATISTICS

इकाई – 7

आओ सांख्यिकी का इतिहास जानें

भारत में प्राचीनकाल से ही सांख्यिकी का प्रयोग किया जाता रहा है। लगभग 321 ई.पू. से 296 ई.पू. के आसपास कौटिल्य द्वारा लिखित ग्रंथ 'अर्थशास्त्र' में आँकड़ों के संग्रह का वर्णन मिलता है। इस ग्रंथ में मौर्यकालीन शासकों द्वारा कृषि, ग्रामीण और नगरीय जनसंख्या और अर्थव्यवस्था के आँकड़े एकत्रित करने के संबंध में विस्तृत वर्णन किया गया है। आँकड़े एकत्रित करने की प्रक्रिया मुगल शासक अकबर के समय भी जारी रही, जिसका उल्लेख 1596–1957 ई. के आसपास अबुल फजल ने अपने ग्रंथ 'आइने-अकबरी' में किया है।

ब्रिटिश काल में, ईस्ट इण्डिया कम्पनी को अपने खातों का लेखा-जोखा और अपने अधिगृहित प्रदेशों के बारे में विस्तृत जानकारी प्राप्त करने की आवश्यकता महसूस हुई। सन् 1807 में कम्पनी ने अपने प्रांतों में सर्वे कराया। इस सर्वे में 60,000 वर्ग मील के क्षेत्र में रहने वाले 1 करोड़ 50 लाख लोगों को शामिल किया गया। इसकी रिपोर्ट में कई महत्वपूर्ण बिंदुओं पर जानकारीयें शामिल थीं, जिनमें कुछ प्रमुख हैं— प्रत्येक जिले की भौगोलिक स्थिति, निवासियों के धर्म, रीति-रिवाज, देश की प्राकृतिक संपदा, मत्स्य पालन, खेती की स्थिति, उद्योगों की स्थिति। सन् 1848 में सरकारी अधिकारी ए. शेक्सपीयर ने पहली जनगणना रिपोर्ट प्रस्तुत की, जो उत्तर-पश्चिमी प्रांत के प्रत्येक परगना (जिला) के क्षेत्र और राजस्व से संबंधित थी। भारत की जनसंख्या के विस्तृत आँकड़े इकट्ठा करने का पहला व्यवस्थित प्रयास सन् 1867 से 1872 के मध्य किया गया। सर्वप्रथम 1881 में पूरे देश में एक साथ जनगणना हुई और तब से ही प्रत्येक 10 वर्ष में पूरे देश में जनगणना की जा रही है।

स्वतंत्रता के पश्चात् देश के आर्थिक और सामाजिक विकास के लिए एक उपयुक्त सांख्यिकी ढाँचे की आवश्यकता महसूस की गई। प्रोफेसर पी.सी. महालनवीस को सन् 1949 में भारत सरकार के कैबिनेट के प्रथम सांख्यिकी सलाहकार (Statistical Advisor) नियुक्त किया गया। भारत में सांख्यिकी के विकास में इनका योगदान अविस्मरणीय है। प्रोफेसर महालनवीस भारतीय सांख्यिकी संस्थान (Indian Statistical Institute) के संस्थापक संचालक थे, जिसकी स्थापना कोलकाता में 1932 में की गई थी। इस संस्थान को भारतीय संसद द्वारा 1959 में राष्ट्रीय महत्त्व की संस्था घोषित किया गया। इसके अलावा 1949 में केंद्रीय सांख्यिकी संगठन (Central Statistical Organisation) की स्थापना की गई। 20वीं शताब्दी से अब तक सांख्यिकी को विकसित करने की विधियों, सिद्धांतों और अनुप्रयोगों पर कार्य हो रहे हैं।

ऐसा प्रतीत होता है कि सांख्यिकी के समानार्थी अंग्रेजी शब्द 'Statistics' की व्युत्पत्ति लैटिन भाषा के शब्द 'Status' से हुई है, जिसका अर्थ राजनीतिक राज्य या शासन है।

ऑकड़ा प्रबंधन व विश्लेषण

[Data Handling and Analysis]



16

अपने जीवन में हम जाने-अनजाने ऑकड़ों का उपयोग करते हैं। इसमें हम अपने पुराने अनुभवों के आधार पर जानकारी को व्यवस्थित कर उससे निष्कर्ष निकालते हैं। जैसे— जुलाई के महीने में आकाश में बादल हों और हवा पूर्व से आ रही हो तो हम यह कहते हैं कि आज बारिश होगी। इसी तरह जो लोग यात्रा करते हैं वे जानते हैं कि कुछ रेलगाड़ियाँ अक्सर समय पर आती हैं और कुछ अक्सर देर से आती हैं। हम दाल, चावल, गेहूँ आदि खरीदते समय कुछ हिस्सा जांच कर यह तय कर लेते हैं कि इसे खरीदना उपयुक्त है या नहीं। हम क्रिकेट के खेल में देख सकते हैं कि किस दर से रन बने हैं और किस दर से आगे बनाने हैं आदि। हर रोज अखबार में अधिकतम तापमान, न्यूनतम तापमान, औसत आर्द्रता, सूर्योदय, सूर्यास्त आदि का समय देखते हैं। इन सभी ऑकड़ों को देखना, समझना व उससे निष्कर्ष निकाल पाना हमें बेहतर विश्लेषण करने में मदद करता है।

हर व्यक्ति, परिवार, पंचायत, प्रदेश की सरकार, भारत की सरकार व इसी तरह हर ढाँचा फैसले लेने व योजना बनाने के लिये ऑकड़ों का उपयोग करता है। जितने बेहतर ढंग से हम ऑकड़े ले सकेंगे, उन्हें नियोजित कर सकेंगे और इनका विश्लेषण कर सकेंगे उतने ही अच्छे हमारे निर्णय होंगे व उनका क्रियान्वयन भी उतना ही बेहतर होगा।

ऑकड़ों का संग्रहण एवं प्रस्तुतीकरण (Data Collection and Representation)

मान लीजिए आपकी कक्षा में 30 विद्यार्थी हैं और आपको निम्न ऑकड़े एकत्रित करने को दिए जाएँ तो ये आप कैसे करेंगे?

1. आपकी कक्षा के प्रत्येक विद्यार्थी के रक्त समूह की जानकारी।
2. कक्षा में उन विद्यार्थियों की संख्या जो पैदल या अन्य साधनों से विद्यालय आते हैं?

एक कक्षा के विद्यार्थियों ने दो समूहों में यह कार्य शुरू किया। प्रत्येक समूह ने विद्यार्थियों के पास जाकर उनके रक्त समूह व साधन के बारे में पूछा और समूह-1 ने निम्न सारणी बनाई—

सारणी-1

A		B		AB		O	
Rh ⁺	Rh ⁻	Rh ⁺	Rh ⁻	Rh ⁺	Rh ⁻	Rh ⁺	Rh ⁻

समूह-2 ने भी निम्न सारणी बनाई—

सारणी-2

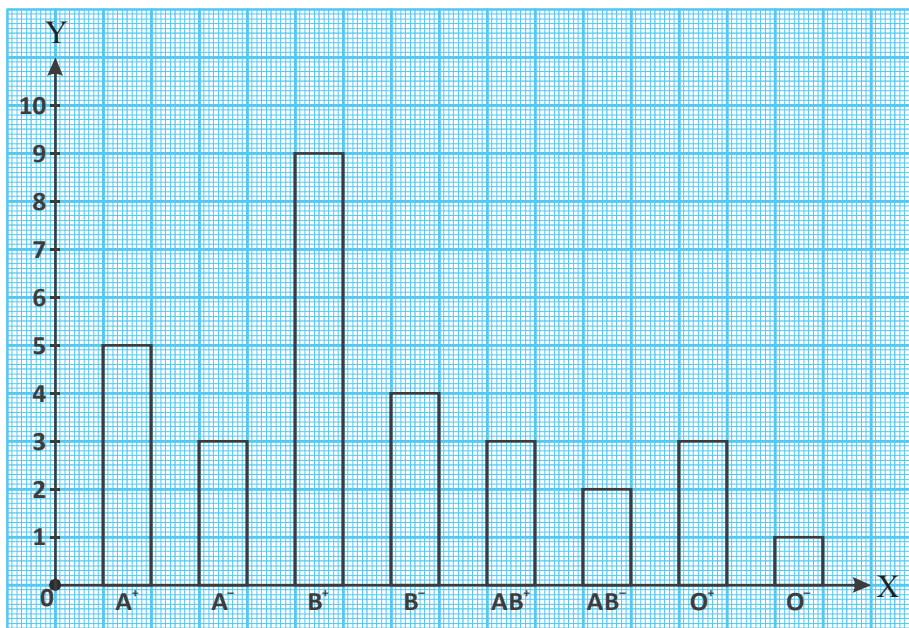
पैदल	साईकिल	स्कूटर	बस	अन्य

बानंबानता आनणी

समूह-1 ने एकत्रित किए गए आँकड़ों को व्यवस्थित करने व ठीक तरह से समझने के लिए सारणी-3 की तरह लिखा—

सारणी-3

रक्त समूह	गणना चिह्न या मिलान चिह्न के रूप में	संख्यात्मक रूप में
A ⁺		5
A ⁻		3
B ⁺		9
B ⁻		4
AB ⁺		3
AB ⁻		2
O ⁺		3
O ⁻		1
योग		30



इस सारणी में गणना चिह्न के साथ-साथ संख्यात्मक मान भी दर्शाया गया है, जैसे B⁺ के सामने लिखी संख्या 9 बताती है कि इस कक्षा में 9 लोग ऐसे हैं जिनका रक्त समूह B⁺ है ऐसे ही अन्य संख्याएँ भी। ये संख्याएँ अपने सामने लिखे रक्त समूह की 'बारम्बारता' बताती हैं। इस प्रकार बनी सारणी बारम्बारता सारणी कहलाती है। समूह ने फिर इस सारणी को दंडालेख के रूप में भी दर्शाया।

करके देखें

1. अब आप इस दंडालेख से 5 निष्कर्ष लिखिए।
2. इसी तरह समूह-2 से मिले आँकड़ों को भी दंडालेख के रूप में प्रस्तुत करें?
3. अपनी कक्षा के विद्यार्थियों की जनवरी माह की उपस्थिति के आँकड़ों से बारम्बारता बंटन सारणी बनाइए और बताइए—
 - (i) किस दिन उपस्थिति सर्वाधिक रही।
 - (ii) किस दिन सबसे कम उपस्थिति रही।
 - (iii) कुछ और निष्कर्ष भी लिखें?
4. आपकी कक्षा के विद्यार्थियों को हॉकी, क्रिकेट, कबड्डी, फुटबाल, वॉलीबाल में से कौनसा खेल सबसे अधिक पसंद है। इसके लिए आँकड़े इकट्ठे कीजिए। एक बारम्बारता सारणी बनाकर इन प्रश्नों के हल ढूँढ़िए—
 - (i) कौनसा खेल कक्षा में सर्वाधिक लोकप्रिय है?
 - (ii) कौनसा खेल कम छात्र पसंद करते हैं?



घटते-बढ़ते क्रम में नमूना

कभी-कभी हमें ऐसे आँकड़े मिलते हैं जिनमें बारम्बारता हो भी सकती है और नहीं भी। यदि आँकड़ों की संख्या अधिक न हो तो इन्हें घटते-बढ़ते क्रम में जमाकर भी कुछ निष्कर्ष निकाले जा सकते हैं, जैसे—

किसी कक्षा के 15 विद्यार्थियों ने गणित विषय की परीक्षा में 100 में से निम्नलिखित अंक प्राप्त किए—

45, 35, 56, 22, 99, 71, 80, 63, 42, 36, 18, 77, 54, 82, 41

बढ़ते क्रम (आरोही क्रम) में लिखने पर—

18, 22, 35, 36, 41, 42, 45, 54, 56, 63, 71, 77, 80, 82, 99

घटते क्रम (अवरोही क्रम) में लिखने पर—

99, 82, 80, 77, 71, 63, 56, 54, 45, 42, 41, 36, 35, 22, 18

अब आप बता सकते हैं कि—

1. सबसे अधिक और सबसे कम प्राप्तांक क्या हैं?
2. इनका अंतर कितना है?

अपने साथियों से चर्चा करें कि इन आँकड़ों से क्या कुछ और निष्कर्ष भी निकाले जा सकते हैं?

वर्गीकृत बारम्बारता सारणी

1. समावेशी वर्ग (Inclusive Class)

जब संकलित आँकड़े अधिक हों और उनके न्यूनतम व अधिकतम मान का अंतर भी ज्यादा हो तो उनकी बारम्बारता सारणी भी बहुत बड़ी बनती है। ऐसी स्थिति में हम एक संख्या की

बारम्बारता न निकालकर संख्याओं के छोटे-छोटे समूहों की बारम्बारता निकालते हैं। (इन समूहों को हम वर्ग कहेंगे)।

उदाहरण-1. 50 ओवर के एक दिवसीय क्रिकेट मैच में किसी टीम के द्वारा प्रत्येक ओवर में बनाए गए रनों की संख्या निम्नानुसार है।

7, 8, 2, 5, 7, 12, 6, 20, 18, 9, 11, 5, 19, 10, 3, 6, 12, 8, 16, 0, 12, 7, 8, 11, 15, 13, 4, 7, 1, 22, 2, 17, 1, 6, 21, 4, 9, 15, 0, 5, 1, 9, 26, 10, 14, 3, 16, 2, 6, 8

इन आँकड़ों से यदि पहले की तरह बारम्बारता सारणी बनानी हो तो हमें देखना पड़ेगा कि 'ऐसे कितने ओवर हैं जिनमें शून्य रन बना? ऐसे कितने ओवर हैं जिनमें एक रन बना? आदि। ऐसा करते हुए हमें 26 तक जाना होगा क्योंकि पूरे मैच में एक ओवर ऐसा भी है जिसमें 26 रन बने हैं। सोचिए कितनी बड़ी सारणी बनेगी?

क्या ऐसी स्थिति में हम इस तरह सोच सकते हैं—

ऐसे कितने ओवर हैं जिनमें 1–6 तक रन बने? ऐसे कितने ओवर हैं जिनमें 7–12 तक रन बने?

इसी तरह 13–18, 19–24, 25–30 तक रन आदि। इन संख्या समूहों को हम वर्ग (Class) कहते हैं। वर्ग हमारी आवश्यकतानुसार छोटे या बड़े हो सकते हैं। इस उदाहरण में आप (1–4), (5–8), (9–12) या (1–5), (6–10), (11–15) या कोई और वर्ग भी चुन सकते हैं।

इन वर्गों की बारम्बारता कैसे मालूम करें?

ऊपर बताए गए वर्गों में कोई एक प्रकार का वर्ग चुनें। अब हर ओवर में बने रनों की संख्या को क्रमशः देखें। यह संख्या जिस वर्ग में आती हो उसमें एक गणना चिह्न लगाएँ। ऐसा सभी पचास ओवरों की रन संख्या के लिए करें। आपको निम्न बारम्बारता सारणी मिलेगी—

सारणी-4

रनों की संख्या	गणना चिह्न (टेली चिह्न)	ओवरों की संख्या (बारम्बारता)
0–4		12
5–9		18
10–14		09
15–19		07
20–24		03
25–29		01
		योग = 50

ऐसी सारणियों का उपयोग करते समय हम कुछ शब्दों का उपयोग करते हैं जैसे वर्ग अंतराल, वर्ग की निम्न सीमा, उच्च सीमा, वर्गांक(मध्य बिन्दु), समावेशी वर्ग, असमावेशी वर्ग आदि। आइए इन्हें समझते हैं।

ऊपर के उदाहरण में 0–4, 5–9, 10–14 आदि सभी वर्ग हैं।

इस बारम्बारता सारणी के किन्हीं दो वर्गों को ध्यान से देखें। आप पाएँगे कि एक वर्ग की उच्च सीमा जहाँ खत्म होती है, अगले वर्ग की निम्न सीमा उसके बाद शुरू होती है, वहीं से नहीं। अर्थात् किसी वर्ग की उच्च सीमा अगले वर्ग की निम्न सीमा के बराबर नहीं है। ऐसे वर्ग **समावेशी वर्ग** कहलाते हैं, क्योंकि वर्ग की निम्न और उच्च सीमा दोनों उसी वर्ग में समाहित होती है। वर्ग 0–4 में 0, 1, 2, 3, 4 रन बनने वाले ओवर शामिल है। याने 5 परिस्थितियाँ। अतः इस वर्ग का अंतराल 5 है। इसी प्रकार 5–9 में 5, 6, 7, 8, 9 रन वाले ओवर शामिल हैं, यहाँ भी वर्ग अंतराल 5 है। अब देखिए जो पहला वर्ग (0–4) है इसमें निम्न सीमा 0 तथा उच्च सीमा 4 है। इसी तरह आप देखेंगे कि बाकी जो वर्ग है उनकी निम्न सीमा क्रमशः 5, 10, 15, है और उच्च सीमा क्रमशः 9, 14, 19, है। हर वर्ग में उच्च व निम्न सीमा का अंतर 4 है।

$$\text{इसी तरह वर्ग 0–4 का वर्गांक (मध्य बिन्दु)} = \frac{0+4}{2} = 2$$

$$\text{इसी प्रकार 5–9 का वर्गांक} = \frac{5+9}{2} = \frac{14}{2} = 7$$

इसी प्रकार अन्य वर्गों का वर्गांक निकाला जा सकता है।

अब नीचे बनी बारम्बारता सारणी को देखिए। इसमें व्यक्तियों के एक समूह की ऊँचाइयों को समावेशी वर्ग में लिखा गया है—

सारणी-5

वर्गान्तराल (ऊँचाई सेमी. में)	141–150	151–160	161–170	171–180	योग
बारम्बारता	9	11	15	10	45

अब निम्न प्रश्नों पर साधियों से चर्चा कीजिए—

1. इस बारम्बारता सारणी में कितने वर्ग हैं?
2. 180 किस वर्ग की उच्च सीमा है?
3. वर्ग 151–160 की निम्न सीमा और उच्च सीमा क्या हैं?
4. किस वर्ग की बारम्बारता सबसे अधिक है?
5. पहले वर्ग की बारम्बारता क्या है?
6. "171–180 वर्ग की बारम्बारता 10 है"; इस कथन का क्या अर्थ है?
7. क्या ये वर्ग समावेशी हैं? कारण सहित उत्तर दें।

ऐसी सारणी से आंकड़े सरल एवं संक्षिप्त रूप में हमारे सामने आ जाते हैं और हम एक ही नजर में आंकड़ों के मुख्य लक्षणों को देख लेते हैं। इस प्रकार की सारणी को वर्गीकृत बारम्बारता सारणी (grouped frequency distribution table) कहा जाता है।

2. अपवर्जी वर्ग (Exclusive Class)

ऊपर दी गई सारणी-5 में आपने देखा कि 141 से 150 सेमी. ऊँचाई वाले व्यक्तियों की संख्या 9 है। 151 से 160 सेमी. ऊँचाई वाले व्यक्तियों की संख्या 11 है। यदि इन समूहों में किसी व्यक्ति की ऊँचाई 150 से 151 सेमी. के बीच याने 150.5 सेमी. हो तो आप इसे किस वर्ग में रखते?

ऐसे ही यदि किसी व्यक्ति की ऊँचाई 160.4 या 160.6 सेमी. हो तो उसे किस वर्ग में रखते?

इसके लिए हमें अपने वर्ग बनाने के तरीके पर फिर से सोचना होगा। क्या हम ऐसा कर सकते हैं कि जो एक वर्ग की उच्च सीमा हो वही अगले वर्ग की निम्न सीमा भी हो, बीच में कोई अंतर न छूटे? जैसे—

उदाहरण-2. कक्षा-9 के बच्चों का वजन नापा गया। प्राप्त आँकड़ों की बारम्बारता सारणी इस प्रकार से बनी—

वर्ग (वजन किग्रा. में)	30—33	33—36	36—39	39—42	42—45
बारम्बारता (बच्चों की संख्या)	4	9	12	7	3

उदाहरण-3. किसी गाँव के सभी परिवारों की मासिक आय निम्नलिखित है:—

वर्ग (आय रुपये में)	0—1000	1000—2000	2000—3000	3000—4000
बारम्बारता (परिवारों की संख्या)	12	30	13	5

वर्ग के ये उदाहरण **अपवर्जी या असमावेशी वर्ग (Exclusive Class)** कहलाते हैं। यहाँ एक समस्या आती है— उदाहरण-2 में यदि किसी परिवार की आय 2000 रु. है तो उसे किस वर्ग में रखेंगे, दूसरे या तीसरे वर्ग में? ऐसे ही उदाहरण-1 में यदि किसी बच्चे का वजन ठीक 39 किलोग्राम है तो उसे किस वर्ग में रखेंगे?

ऐसी परिस्थिति में यह मान लिया जाता है कि यदि कोई मान किसी वर्ग की उच्च सीमा के बराबर है तो उसे अगले वर्ग में रखा जाएगा। इस आधार पर यह कहा जा सकता है कि जिस परिवार की आय 2000 रु. है वह वर्ग-3 (2000—3000) में रखा जाएगा। 39 किलोग्राम वाले बच्चों की गिनती वर्ग-4 (39—42) में की जाएगी।

समावेशी वर्गों को अपवर्जी वर्गों में बदलना

जब समावेशी वर्ग को अपवर्जी वर्ग में बदला जाता है तब समावेशी वर्ग के एक वर्ग की उच्च सीमा और उससे ठीक अगले वर्ग की निम्न सीमा के अन्तर के आधे को सभी वर्गों की निम्न सीमा से घटाते हैं तथा उच्च सीमा में जोड़ते हैं।

सारणी-6

समावेशी वर्ग		अपवर्जी वर्ग	
वर्ग अन्तराल	बारम्बारता	वर्ग अन्तराल	बारम्बारता
6—10	8	5.5—10.5	8
11—15	11	10.5—15.5	11
16—20	10	15.5—20.5	10
21—25	15	20.5—25.5	15
26—30	6	25.5—30.5	6

जैसे कि निम्न उदाहरण में पहले वर्ग की उच्च सीमा 10 तथा दूसरे वर्ग की निम्न सीमा 11 के बीच का अन्तर 1 है। इसके आधे याने 0.5 को सभी वर्ग की निम्न सीमा से घटाया गया और सभी वर्ग की उच्च सीमा में जोड़ा गया है। अर्थात् पहले वर्ग की निम्न सीमा 5.5 तथा उच्च सीमा 10.5 हुई। इसी प्रकार अंतिम वर्ग की निम्न सीमा 25.5 तथा उच्च सीमा 30.5 हुई। यहाँ वर्ग अन्तराल 5 ही रहेगा।

करके देखें

अब आप सारणी-5 के समावेशी वर्ग को अपवर्जी वर्ग में बदलिए और 150.5 सेमी., 160.8 सेमी. लंबाई के दो लोगों को उपयुक्त वर्ग में जोड़िए।



उदाहरण-4. किसी वितरण के वर्गांक 104, 114, 124, 134, 144, 154, तथा 164 है। वर्ग का आकार तथा वर्ग की सीमा ज्ञात कीजिए।

हल : वर्ग का आकार दो समीपवर्ती वर्गों के वर्गांकों का अंतर होता है,

$$\text{इसलिए वर्ग का आकार} = 114 - 104 = 10$$

हमें आकार 10 के वर्ग चाहिए जिनके क्रमानुसार वर्ग के मध्य बिन्दु 104, 114, 124, 134, 144, 154 तथा 164 है।

$$\therefore \text{प्रथम वर्ग की निम्नसीमा} = \left(104 - \frac{10}{2}\right) = 99$$

$$\text{प्रथम वर्ग की उच्च सीमा} = \left(104 + \frac{10}{2}\right) = 109$$

इसी प्रकार अन्य वर्ग की वर्ग सीमाएँ निम्नानुसार होंगी।

$$99-109, 109-119, 119-129, 129-139, 139-149, 149-159, 159-169$$



प्रश्नावली - 16.1

1. निम्नलिखित शब्दों का अर्थ समझाइए।
वर्गान्तर, वर्ग का आकार, वर्गांक, वर्ग की आवृत्ति, वर्ग सीमाएँ
2. समावेशी वर्ग एवं अपवर्जी वर्ग में अन्तर बताइए।
3. मौसम विभाग द्वारा दिल्ली के लिए अगस्त माह का अधिकतम तापमान निम्नानुसार दिया गया है। इन आँकड़ों से बारंबारता सारणी बनाइए।

32.5, 33.3, 33.8, 31.0, 28.6, 33.9, 33.3, 32.4, 30.4, 32.6, 34.7, 34.9, 31.6, 35.2,
33.3, 33.3, 36.4, 36.6, 37.0, 34.5, 32.5, 31.4, 34.4, 33.6, 37.3, 37.5, 36.9, 37.0,
36.3, 36.9, 36.9.



4. 40 शिक्षकों की उनके आवास से कार्यस्थल की दूरियाँ (किलोमीटर में) निम्नानुसार हैं।
7, 9, 5, 3, 7, 8, 10, 20, 3, 5, 11, 25, 15, 12, 7, 13, 18, 12, 11, 3
12, 6, 12, 14, 7, 2, 9, 15, 6, 15, 17, 2, 16, 32, 19, 10, 12, 17, 18, 11
वर्ग माप 5 वाली बारम्बारता बंटन सारणी बनाइए।
5. π का मान दशमलव के 50 वें स्थान तक नीचे दिया गया है
3.14159265358979323846264338327950288419716939937510
(i) दशमलव बिन्दु के बाद 0 से 9 तक आने वाले अंकों की एक बारम्बारता सारणी बनाइए।
(ii) सबसे कम बार आने वाला अंक कौनसा है?
(iii) सबसे अधिक बार आने वाला अंक कौनसा है और इससे क्या निष्कर्ष निकलता है?
6. एक गाँव के 40 खेतों में प्रति हेक्टेयर धान उत्पादन (क्विंटल में) निम्नानुसार है। एक बारम्बारता बंटन सारणी बनाइये।
31, 20, 25, 18, 28, 20, 18, 26, 15, 12, 25, 16, 30, 20, 22, 24, 45, 28, 30, 16,
30, 40, 20, 30, 20, 30, 28, 47, 40, 35, 28, 45, 20, 35, 32, 18, 20, 26, 23, 16,
आप इस बारम्बारता बंटन सारणी से क्या-क्या निष्कर्ष निकाल सकते हैं, लिखिए।
7. 40 बच्चों से यह पूछा गया कि पिछले सप्ताह उन्होंने कितने घंटों तक टी.वी. प्रोग्राम देखे। प्राप्त परिणाम ये रहे:-
1, 5, 6, 2, 7, 4, 10, 12, 5, 8, 10, 12, 36, 22, 6, 15, 3, 1, 2, 4, 21, 16, 17,
13, 14, 2, 7, 9, 23, 26, 31, 33, 5, 35, 25, 26, 29, 30, 9, 31
(i) वर्ग माप 5 वाली बारम्बारता सारणी बनाइए।
(ii) प्रथम वर्गान्तर की निम्न सीमा लिखिए।
(iii) चौथे वर्गान्तर की वर्ग सीमा बताइए।
(iv) सातवें वर्गान्तर का वर्गांक बताइए।
(v) कितने बच्चों ने उस सप्ताह में 20 या अधिक घंटों तक टेलीविजन देखा।

ऑकड़ों का आलेखीय निरूपण

एक कहावत है कि “एक चित्र हजार शब्दों से भी उत्तम होता है।” प्रायः अलग-अलग ऑकड़ों की तुलनाओं को आलेख की सहायता से अच्छी तरह से दर्शाया जा सकता है। यहाँ हम निम्नलिखित आलेखीय निरूपण करेंगे।



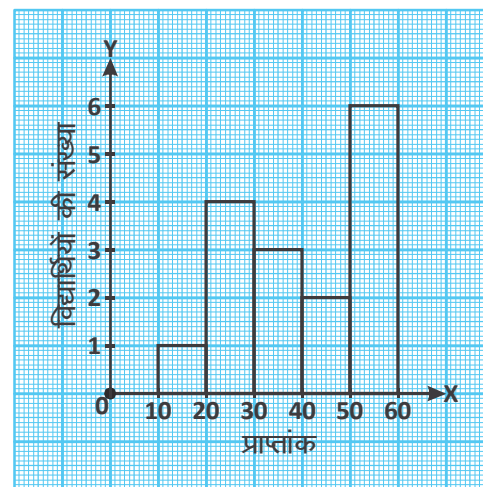
- (i) आयत चित्र (Histograms)
- (ii) आवृत्ति (बारम्बारता) बहुभुज (Frequency polygons)
- (iii) संचयी आवृत्ति वक्र (तोरण) (Cumulative frequency curve or ogive)

आयत चित्र (Histogram)

आवृत्ति वितरण के आलेखीय निरूपण की यह सरल एवं उत्तम विधि है। इसे बनाते समय वर्ग अन्तराल (स्वतंत्र चर) को X-अक्ष एवं आवृत्तियों (आश्रित चर) को Y-अक्ष पर प्रदर्शित करते हैं। इस विधि में प्रत्येक वर्ग अन्तराल के ऊपर आवृत्तियों के बराबर ऊँचाई का आयत बनाते हैं। अतः आयतों की एक श्रृंखला सी दिखाई देती है। इन आयतों के क्षेत्रफल उनकी संगत बारम्बारताओं के समानुपाती होते हैं।

उदाहरण-5. किसी कक्षा के 16 विद्यार्थियों द्वारा परीक्षा में प्राप्त किए गए अंक निम्नानुसार हैं:-

प्राप्तांक	विद्यार्थियों की संख्या (आवृत्ति)
10-20	1
20-30	4
30-40	3
40-50	2
50-60	6



इन आँकड़ों के लिए एक आयत चित्र खींचिए।

हल : हम आयत चित्र खींचने के लिए निम्न चरणों का अनुसरण करते हैं-

चरण-1 एक आलेख कागज (ग्राफपेपर) पर दो लांबिक रेखाएँ खींचिए तथा उन्हें X-अक्ष और Y-अक्ष द्वारा निरूपित कीजिए।

चरण-2 क्षैतिज अक्ष के अनुदिश, हम वर्ग (प्राप्तांक) को प्रदर्शित करेंगे। यहाँ हमने 1 सेमी. में 1 वर्ग को दिखाया है।

चरण-3 उर्ध्वाधर अक्ष पर बारम्बारताओं (विद्यार्थियों की संख्या) को निरूपित करेंगे। इसके लिए उपयुक्त स्केल (यहाँ 1 विद्यार्थी = 1 सेमी.) लिया है।

यह अभीष्ट आयत चित्र है।

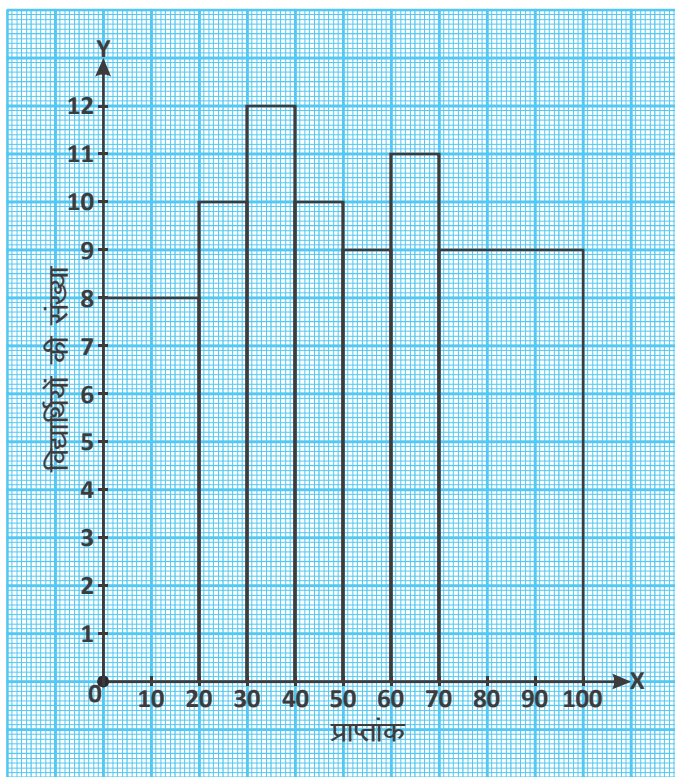
अन्यमान वर्ग अन्तराल के लिए आयत चित्र

अब हम एक अलग स्थिति पर विचार करते हैं यहाँ एक कक्षा में विज्ञान विषय में 100 अंकों में से विद्यार्थियों के प्राप्तांक निम्नानुसार हैं:-

सारणी-7

अंक	0-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70 और उससे अधिक
विद्यार्थियों की संख्या	08	10	12	10	09	11	09



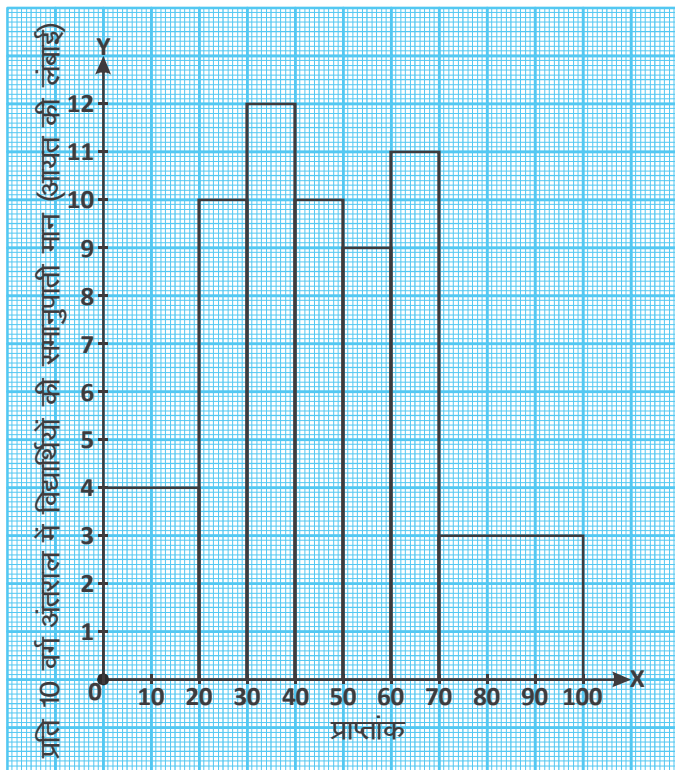


दी गई सारणी से स्पष्ट है, कि 20 से कम अंक पाने वाले विद्यार्थियों की संख्या 8 एवं 70 और उससे अधिक अंक पाने वाले विद्यार्थियों की संख्या 9 है। यहाँ आँकड़े विभिन्न माप वाले वर्ग अन्तराल में दिए गए हैं। प्रथम वर्ग अन्तराल की माप 20, अंतिम की 30 तथा शेष अन्तराल की 10 हैं। अब कोई विद्यार्थी इस सारणी का आयत चित्र निम्नानुसार बनाता है। क्या यह आयत चित्र ठीक है?

यहाँ वर्ग अन्तराल असमान है तो हमें आयत चित्र बनाते समय उन्हें समान वर्ग अन्तराल में बदलना पड़ेगा, जैसे— प्रथम वर्ग हेतु

जब वर्ग अन्तराल 20 है तो आयत की लम्बाई 8 है

$$\therefore \text{वर्ग अन्तराल 10 है तो आयत की लम्बाई} \\ = \frac{8}{20} \times 10 = 4$$



इसी प्रकार अंतिम आयत का वर्ग अन्तराल 30 है। तो आयत की लंबाई $= \frac{9}{30} \times 10 = 3$ होगी व शेष वर्ग का अन्तराल 10 ही है तो हमें कोई परिवर्तन करने की आवश्यकता नहीं है। अतः हम किसी भी आयत की लंबाई निम्न तरीके से बदल सकते हैं—

आयत की लंबाई

$$= \frac{\text{बारंबारता}}{\text{वर्ग की चौड़ाई}} \times \text{वर्ग की न्यूनतम चौड़ाई}$$

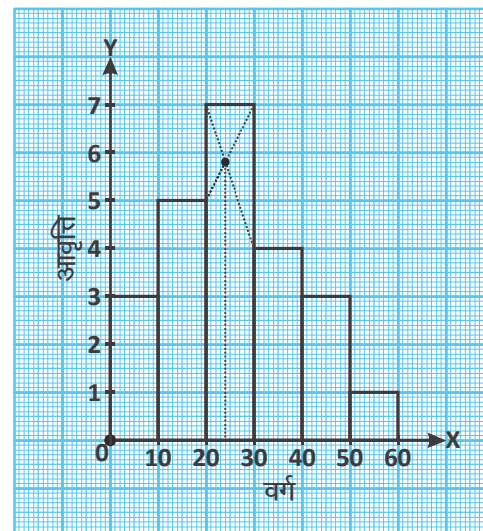
इस प्रकार हमें प्रत्येक स्थिति में 10 वर्ग अन्तराल पर आयत की लम्बाई प्राप्त हुई। अतः परिवर्तित लम्बाई वाला सही आयत चित्र निम्नानुसार होगा।

बहुलक निर्धारण की बिन्दु रेखीय विधि (Graphical method to Locate Mode)

आयत चित्र के माध्यम से असमावेशी (अपवर्जी वर्ग) के आँकड़ों के लिये बहुलक का निर्धारण भी किया जाता है, जैसे—

सारणी-8

वर्ग	आवृत्ति
0-10	3
10-20	5
20-30	7
30-40	4
40-50	3
50-60	1



चरण-1 दिए गए आँकड़ों से आयत चित्र बनाइए।

चरण-2 सबसे अधिक ऊँचाई वाले आयत को बहुलक वर्ग का आयत माना जाता है।

बहुलक वर्ग के आयत के ऊपरी बायें कोने को उसके अगले आयत के बायें कोने से मिलाइए, इसी प्रकार बहुलक वर्ग के आयत के ऊपरी दायें कोने को इससे पहले आयत के ऊपरी दायें कोने से मिलाइए।

चरण-3 : चरण-2 में दर्शाए गए दोनों मिलान रेखाएँ जिस बिंदु पर कटती हैं, उस बिंदु से X-अक्ष पर लंब खींचिए।

चरण-4 : लंब रेखा, X-अक्ष को जिस बिंदु पर मिलती है वह बहुलक का मान होता है। यहाँ यह मान 24 प्राप्त हो रहा है। अतः आँकड़ों के बहुलक का मान 24 होगा।

आवृत्ति बहुभुज (Frequency Polygon)

एक वर्गीकृत बारंबारता (आवृत्ति) बंटन को आलेख रूप से निरूपित करने की एक अन्य विधि आवृत्ति बहुभुज है। आवृत्ति बहुभुज की रचना के लिए प्रत्येक वर्गान्तर पर आयत चित्र बनाया जाता है और आयत की ऊपरी भुजा के मध्य बिंदुओं को सरल रेखाओं द्वारा मिला दिया जाता है। इसमें अनेक भुजाएँ होती हैं इसी कारण इसे आवृत्ति बहुभुज कहते हैं। आवृत्ति बहुभुज दो प्रकार से बनाए जाते हैं।

1. आवृत्ति आयत चित्र की सहायता से (By Histogram)
2. प्रत्यक्ष विधि (Direct Method)

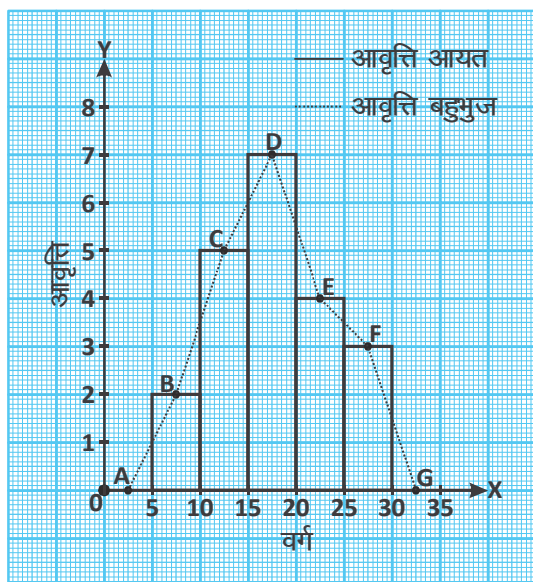


1. आवृत्ति आयत चित्र की सहायता से आवृत्ति बहुभुज बनाना (Constructing Frequency Polygon by Histogram)

सारणी-9

वर्ग	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30
आवृत्ति	2	5	7	4	3

इस विधि में निम्न चरण हैं-



चरण-1 सर्वप्रथम आवृत्ति वितरण से आयत चित्र बनाइए।

चरण-2 प्रत्येक आयत के उपरी भाग के मध्य बिंदु क्रमशः B, C, D, E, F अंकित कीजिए। सरल रेखाओं की सहायता से मध्यबिंदुओं को क्रमशः मिलाइए।

चरण-3 अब X-अक्ष पर आयत चित्र के दोनों ओर एक-एक कल्पित वर्ग लीजिए और उनके मध्य बिंदुओं को पूर्व प्राप्त मध्य बिंदुओं से जोड़िए। यहाँ पहला वर्ग 5-10 है अतः इससे पहले आने वाला कल्पित वर्ग (0-5) का मध्य बिन्दु (2.5) होगा इसी प्रकार अंतिम वर्ग 25-30 है इसके बाद आने वाला कल्पित वर्ग 30-35 का मध्यबिन्दु (32.5) होगा। ABCDEFG अभीष्ट आवृत्ति बहुभुज है।

सोचें एवं चर्चा करें



आवृत्ति बहुभुज का क्षेत्रफल व आयत चित्र का क्षेत्रफल बराबर होता है क्यों? (संकेत : सर्वांगसम त्रिभुज के गुणों का प्रयोग करें)

2. प्रत्यक्ष विधि द्वारा आवृत्ति बहुभुज बनाना (Constructing Frequency Polygon by Direct Method)

सारणी-10

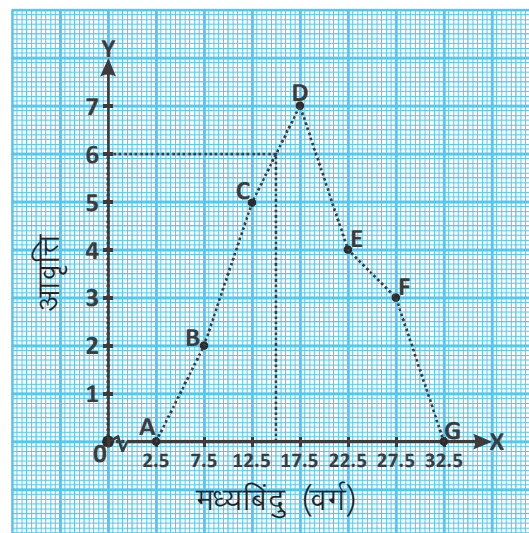
वर्ग	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30
आवृत्ति	2	5	7	4	3



इस विधि में निम्न चरण हैं—

चरण-1 सर्वप्रथम प्रत्येक वर्गान्तरों के मध्य बिंदु ज्ञात कीजिए।

वर्ग	आवृत्ति	मध्य बिंदु
5–10	2	7.5
10–15	5	12.5
15–20	7	17.5
20–25	4	22.5
25–30	3	27.5



चरण-2 X-अक्ष में इन मध्य बिंदुओं एवं Y-अक्ष में इनकी आवृत्तियों को अंकित कीजिए।

चरण-3 प्रत्येक मध्य बिंदु के संगत आवृत्तियों को ग्राफ पर प्रदर्शित कीजिए। BCDEF बिंदु मिलेंगे।

चरण-4 प्रथम वर्ग के पहले काल्पनिक वर्ग 0–5 के मध्य बिंदु 2.5 को X-अक्ष पर प्रदर्शित कीजिए। (बिंदु A)। इसी तरह अंतिम वर्ग के बाद एक और काल्पनिक वर्ग 30–35 के मध्य बिंदु 32.5 को X-अक्ष पर प्रदर्शित कीजिए (बिंदु G)। इन्हें X-अक्ष पर लेने का अर्थ है, इनकी बारंबारताएँ शून्य हैं।

चरण-5 आवृत्तियों के अंकित बिंदुओं को सरल रेखा से मिलाइए।

चरण-6 इस प्रकार बनी आकृति ABCDEFG आवृत्ति बहुभुज कहलाती है।

नोट:- आवृत्ति बहुभुज द्वारा मूल्य वृद्धि एवं गिरावट का स्पष्ट संकेत मिलता है। इसके माध्यम से वर्ग के किसी भी मान के लिए आवृत्ति का अनुमान लगाया जा सकता है। जैसे X-अक्ष में 15 के लिए आवृत्ति का मान 6 होगा।

आयत चित्र एवं आवृत्ति बहुभुज में अंतर (Difference Between Histogram and Frequency Polygon)

आयत चित्र	आवृत्ति बहुभुज
1. आयत चित्र केवल आवृत्ति को दण्डों द्वारा प्रदर्शित करता है।	1. आवृत्ति बहुभुज अधिक उपयोगी है यह आँकड़ों में मूल्य वृद्धि एवं गिरावट का भी संकेत देता है। इसमें आवृत्ति को बहुभुज के रूप में प्रदर्शित किया जाता है।
2. आवृत्तियों को पूरे वर्गांतर में फैला हुआ माना जाता है।	2. किसी वर्ग की सभी आवृत्तियों को उस वर्ग के मध्य बिंदु पर केंद्रित माना जाता है।
3. इसकी रचना समान और असमान वर्ग चौड़ाई के लिए की जा सकती है।	3. केवल समान वर्ग चौड़ाई के लिए बनाया जाता है।

ओजाइव अथवा संचयी आवृत्ति वक्र (Ogive or Cumulative Frequency Curve)

सांख्यिकी में वर्ग और उसके संगत संचयी आवृत्ति के लेखा-चित्र का प्रदर्शन संचयी आवृत्ति वक्र या ओजाइव कहलाता है। जिस प्रकार आवृत्ति बहुभुज का लेखाचित्र बनाया जाता है उसी प्रकार संचयी आवृत्ति वक्र का भी लेखा चित्र बनाया जाता है।

संचयी आवृत्ति वक्र बनाने की दो विधियाँ हैं—

1. “से कम” विधि
2. “और अधिक” विधि

1. “से कम विधि”:- किसी वर्ग की संचयी आवृत्ति, उस वर्ग की आवृत्ति और उस वर्ग से पहले के सभी वर्गों की आवृत्तियों का योगफल होता है।

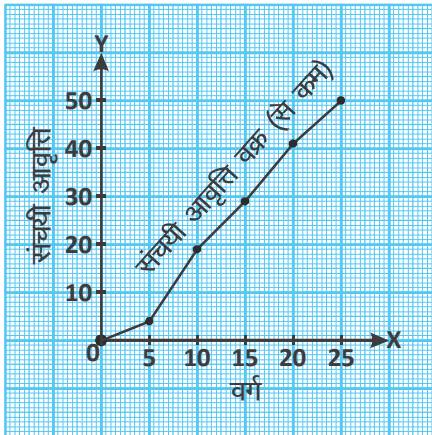
अब निम्न सारणी के आधार पर “से कम” संचयी आवृत्ति वक्र बनाने का प्रयास करें—

सारणी-11

वर्ग	0-5	5-10	10-15	15-20	20-25
आवृत्ति	4	15	10	12	09

हल : “से कम” की संचयी आवृत्ति

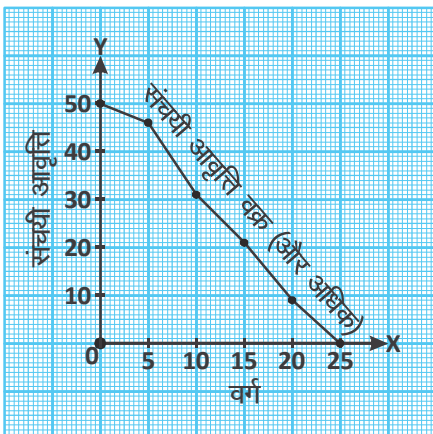
वर्ग	आवृत्ति	संचयी आवृत्ति
0 से कम	0	0
5 से कम	4	4
10 से कम	15	$19=(15+4)$
15 से कम	10	$29=(10+15+4)$
20 से कम	12	$41=(12+10+15+4)$
25 से कम	9	$50=(9+12+10+15+4)$



2. “और अधिक” विधि:- किसी वर्ग की संचयी आवृत्ति, उस वर्ग की आवृत्ति और उसके बाद के सभी वर्गों की आवृत्तियों का योगफल होता है।

अब इसे निम्न सारणी के आधार पर “और अधिक” संचयी आवृत्ति वक्र बनाते हैं।

वर्ग	संचयी आवृत्ति
0 और अधिक	$50=(4+15+10+12+9+0)$
5 और अधिक	$46=(15+10+12+9+0)$
10 और अधिक	$31=(10+12+9+0)$
15 और अधिक	$21=(12+9+0)$
20 और अधिक	$09=(9+0)$
25 और अधिक	0



संचयी आवृत्ति वक्र या ओजाइव का महत्व

संचयी आवृत्ति वक्र या ओजाइव का उपयोग आँकड़ों के अध्ययन में कई जगहों पर होता है, जैसे—

1. जब आँकड़ों के अध्ययन में एक दिए हुए मूल्य से कम या अधिक ज्ञात करना हो।
2. ओजाइव का प्रयोग तुलनात्मक अध्ययन के लिए किया जाता है।
3. ओजाइव का प्रयोग केंद्रीय प्रवृत्ति के माप जैसे— माधिका, चतुर्थक, शतमक आदि की गणना में किया जाता है।
4. विशिष्ट संचयी आवृत्ति में चर का कौनसा मूल्य शामिल है, वह भी ज्ञात किया जा सकता है।

प्रश्नावली - 16.2

1 निम्न में से सही विकल्प का चयन कीजिए।

(i) एक समावेशी श्रेणी में—

- a) दोनों सीमाएँ अलग-अलग वर्ग अंतराल में शामिल होती है।
- b) दोनों सीमाएँ एक ही वर्ग अंतराल में होती हैं।
- c) दोनों सीमाएँ किस वर्ग में होगी, कुछ निश्चित नहीं होता है।
- d) इनमें से कोई नहीं।

(ii) संचयी बारम्बारता सारणी के लिए विधि है—

- a) से कम
- b) और अधिक
- c) उक्त दोनों
- d) इनमें से कोई नहीं।

(iii) आयत चित्र के माध्यम से ज्ञात किया जा सकता है—

- a) बहुलक
- b) माधिका
- c) माध्य
- d) इनमें से कोई नहीं।

(iv) संचयी आवृत्ति वक्र से ज्ञात किया जा सकता है—

- a) बहुलक
- b) माधिका
- c) माध्य
- d) इनमें से कोई नहीं।

(v) आयत चित्र पर आयत की चौड़ाई निर्भर करती है—

- a) वर्ग की माप पर
- b) वर्ग की संख्या पर
- c) आवृत्ति की संख्या पर
- d) उपरोक्त सभी पर



2. 25 छात्रों में से प्रत्येक द्वारा एक प्रश्न को हल करने में लिया गया समय (सेकण्ड में) इस प्रकार है—

16, 20, 26, 27, 28, 30, 33, 37, 38, 40, 42, 43, 46, 46, 46, 48, 49, 50, 53, 58, 59, 60, 64, 52, 20

- 10 सेकण्ड वर्गांतर लेकर इन आँकड़ों के लिए एक बारंबारता सारणी बनाइए।
- इस आवृत्ति वितरण को दर्शाने के लिए एक आवृत्ति आयत चित्र बनाइए।
- आयत चित्र की सहायता से आवृत्ति बहुभुज बनाइए।

3. किसी पौधे के 30 पत्तियों की लंबाई मिलीमीटर में निम्न सारणी में दी गई है—

पत्तियों की लंबाई (मिलीमीटर में)	111–120	121–130	131–140	141–150	151–160	161–170
पत्तियों की संख्या	3	5	7	9	4	2

- आवृत्ति वितरण को दर्शाने के लिए एक आयत चित्र बनाइए।
(संकेत— वर्ग अंतराल को सतत् कीजिए।)
- प्रत्यक्ष विधि से आवृत्ति बहुभुज बनाएँ?
- किस अंतराल के पत्तियों की संख्या अधिक होगी?

4. एक क्रिकेट मैच में दो टीमों A और B द्वारा 10 ओवर (60 बॉल) में बनाए गए रन निम्नानुसार हैं:—

गेंदों की संख्या	टीम—A	टीम—B
1–6	3	6
7–12	2	6
13–18	7	1
19–24	8	10
25–30	3	6
31–36	8	5
37–42	5	3
43–48	11	4
49–54	6	7
55–60	2	11



उपर्युक्त आँकड़ों से एक ही ग्राफ पेपर पर आवृत्ति बहुभुज बनाइए।
(संकेत— सर्वप्रथम वर्ग अंतराल को सतत् कीजिए)

5. 100 छात्रों के प्राप्तांकों का आवृत्ति वितरण निम्नानुसार है—

प्राप्तांक	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	योग
छात्र संख्या	7	10	23	51	6	3	100

उपर्युक्त आँकड़ों से संचयी आवृत्ति वक्र बनाइए।

6. निम्न के लिए बारंबारता सारणी एवं संचयी बारंबारता सारणी बनाइए।

अंक	छात्र संख्या
10 से कम	3
20 से कम	8
30 से कम	12
40 से कम	19
50 से कम	31
60 से कम	42
70 से कम	60



7. कक्षा 9वीं के दो समूहों की जाँच परीक्षा में प्राप्तांकों का वितरण निम्नानुसार है—

वर्गान्तर	समूह-A	समूह-B
50-52	4	8
47-49	10	9
44-46	15	10
41-43	18	14
38-40	20	12
35-37	12	17
32-34	13	22
योग	92	92



एक ही ग्राफ पेपर पर प्रत्येक समूह के लिए एक आवृत्ति बहुभुज बनाइए।

हमने सीखा

1. प्रारम्भिक रूप से उद्देश्य विशेष को लेकर एकत्रित किए गए प्रेक्षण आँकड़े कहलाते हैं।
2. जब प्रेक्षणों की संख्या अधिक होती है तो उनकी बारम्बारताओं को ज्ञात करने के लिए हम मिलान चिह्नों का प्रयोग करते हैं।



3. दिए हुए आँकड़ों में कोई विशेष प्रेक्षण जितनी बार आता है उस संख्या को प्रेक्षण की बारंबारता कहते हैं।
4. आँकड़ों के विभिन्न प्रेक्षणों की बारंबारताओं को दर्शाने वाली सारणी बारंबारता बंटन सारणी या बारंबारता सारणी कहलाती है।
5. जब प्रेक्षणों की संख्या बहुत अधिक होती है तो हम आँकड़ों को समूहों में संगठित करते हैं, जिन्हें वर्ग कहते हैं। इस प्रकार प्राप्त आँकड़े वर्गीकृत आँकड़े कहलाते हैं।
6. आयत चित्र वर्गीकृत आँकड़ों का एक आलेखीय निरूपण होता है जिसमें प्रत्येक वर्ग के लिए एक आयत खींचा जाता है, जहाँ X-अक्ष में वर्ग अंतराल एवं Y-अक्ष में ऊँचाई संगत बारंबारता से निर्धारित की जाती है।
7. वर्ग के मध्य बिंदु को X-अक्ष तथा आवृत्तियों को Y-अक्ष में लेकर बनाया गया बहुभुज, आवृत्ति बहुभुज कहलाता है।
8. दिये गए आँकड़ों के लिए किसी विशेष वर्गान्तर की निम्न सीमा के बराबर या उससे अधिक निरीक्षणों की कुल संख्या होने पर अवरोही संचयी बारम्बारता मिलेगी।
9. समूहबद्ध बारम्बारता बंटन में यदि वर्गान्तर भिन्न है तो सोपान आलेख में बारम्बारता घनत्व के आधार पर आयतों की रचना करनी होगी।

$$\text{बारम्बारता घनत्व} = \frac{\text{श्रेणी की बारम्बारता}}{\text{वर्ग की लंबाई}} \times \text{आँकड़ों की न्यूनतम श्रेणी}$$

10. समान आँकड़ों का बारम्बारता बहुभुज और संचयी आलेख का क्षेत्रफल समान होता है।

