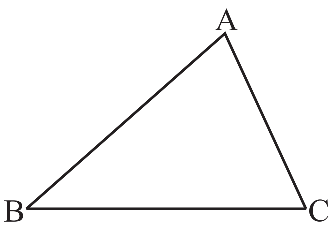
باب 6

مثلث اوراس کی خصوصیات

4714CH06

6.1 تعارف (Introduction)



شکل 6.1

آپ نے دیکھا ہے کہ ایک مثلث تین قطعات خط کی ایک سادہ بند شکل ہوتی ہے۔
اس میں تین راسیں تین اضلاع اور تین زاویے ہوتے ہیں۔
یہاں ΔABC دیا گیا ہے۔(تصویر 6.1) اس میں

اضلاع: $\overline{AB}$ ، $\overline{BC}$ ، $\overline{CA}$

زاویے: $\angle BAC, \angle ABC, \angle BCA$

راسیں: A, B, C

راس A کا متقابل ضلع BC ہے۔ کیا آپ ضلع AB کا متقابل زاویہ بتا سکتے ہیں؟
آپ مثلث کی مختلف قسمیں بھی جانتے ہیں۔

(i) ضلعوں کے اعتبار سے مختلف الاضلاع، مساوی الساقین اور مساوی االاضلاع

(ii) اوپر دیے گئے مثلثوں کی طرح کے کچھ ماڈل کاٹ کر بنائیے۔ اپنے ماڈل کا موازنہ اپنے دوستوں کے ماڈل سے کیجیے۔ اور اس پر بحث کیجیے۔

کوشش کیجیے:

1۔ ΔABC کے 6 حصے لکھیے۔ (یعنی تین اضلاع اور تین زاویے)۔

2۔ لکھیے:

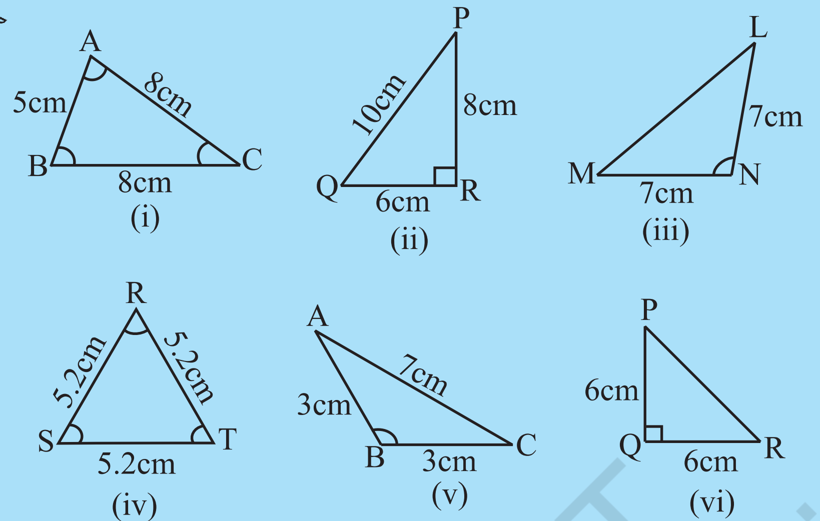
(i) ΔPQR میں راس Q کا متقابل ضلع۔

(ii) ΔLMN میں ضلع LM کا متقابل راس۔

3۔ تصویر 6.2 کو دیکھیے ہر مثلث کی درجہ بندی کیجیے۔

(i) ضلعوں کے اعتبار سے

(ii) زاویوں کے اعتبار سے

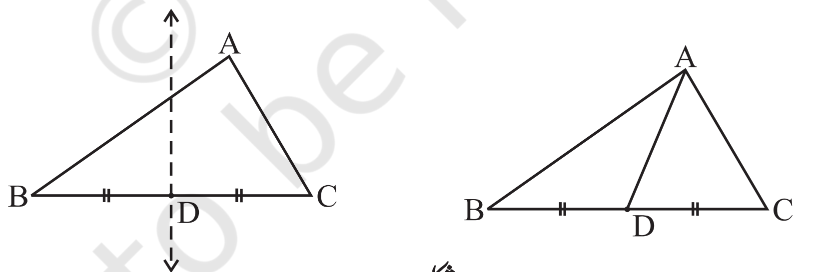


شکل 6.2

آیئے مثلثوں کے متعلق مزید کچھ جانتے ہیں۔

6.2 ایک مثلث کے وسطانیے (Medians of a Triangle)

آپ جانتے ہیں کہ ایک دی گئی قطعہ خط کا عمودی ناصف، کاغذ موڑ کر کیسے بنایا جا سکتا ہے۔ ایک کاغذ کا ABC کاٹیے (تصویر 6.3) کوئی بھی ایک ضلع لیجیے۔ مان لیجیے $\overline{BC}$ کاغذ موڑ کر $\overline{BC}$ کا عمودی ناصف بنائیے۔ کاغذ کا موڑ $\overline{BC}$ سے اس کے بیچ کا نقطہ D پر مل رہا ہے۔ $\overline{AD}$ کو ملائیے۔



شکل 6.3

قطعہ خط AD، $\overline{BC}$ کے درمیانی نقطہ کو متقابل راس A سے، ملانے پر، مثلث کا ایک وسطانیہ کہلاتا ہے۔

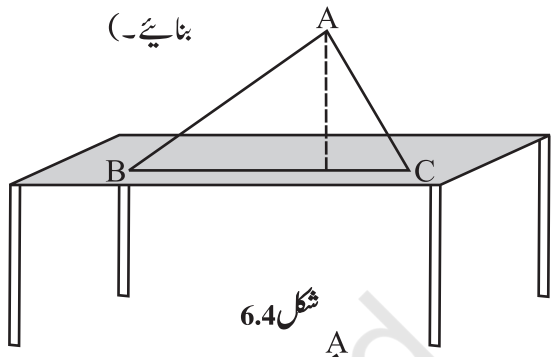
ضلع $\overline{AB}$ اور $\overline{CA}$ کو دیکھیے اور مثلث کے دو اور وسطانیے معلوم کیجیے۔

مثلث کے کسی بھی راس کو اس کے متقابل ضلع کے درمیانی نقطہ سے جوڑنے والے خط کو وسطانیہ کہتے ہیں۔

سوچیے، بحث کیجیے اور لکھیے

1۔ ایک مثلث کے کتنے وسطانیے ہوتے ہیں؟

2۔ کیا ایک وسطانیہ پوری طرح سے مثلث کے اندر پایا جاتا ہے؟ (اگر آپ کو لگتا ہے کہ یہ درست نہیں ہے تو ایسی کسی حالت کی شکل بنائیے۔)

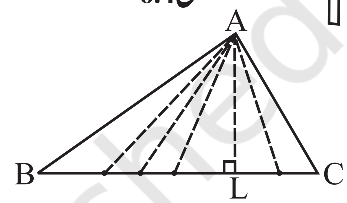


شکل 6.4

6.3 مثلث کا ارتفاع (Altitudes of a Triangle)

گتے کا ایک مثلث نما ABC بنائیے۔ اس کو ایک میز پر کھڑا کر دیجیے۔ مثلث کتنا اونچا ہے؟ یہ اونچائی راس سے قاعدہ BC کے درمیان کا فاصلہ ہے۔

A سے $\overline{BC}$ پر آپ بہت سے خطوط کھینچ سکتے ہیں (شکل 6.5 دیکھیے)۔ ان میں سے کون سا خط اس کی اونچائی دکھا رہا ہے۔



شکل 6.5

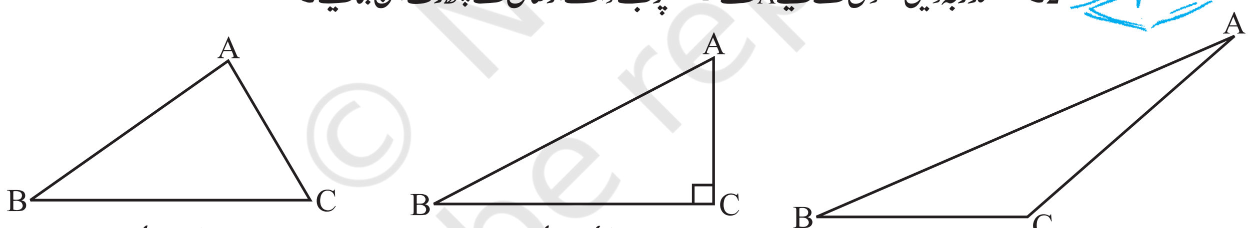
اونچائی وہ قطعہ خط ہے جو A سے $\overline{BC}$ پر بالکل سیدھی کھینچی ہوئی ہے اور جو $\overline{BC}$ پر عمود ہے۔

کسی ارتفاع کا ایک سرا مثلث کے راس پر ہوتا ہے اور دوسرا سرا متقابل ضلع پر ہوتا ہے۔ ہر راس سے ایک ارتفاع کھینچا جا سکتا ہے۔

سوچیے، بحث کیجیے اور لکھیے

1۔ ایک مثلث کے کتنے ارتفاع ہو سکتے ہیں؟

2۔ مندرجہ ذیل مثلثوں کے لیے A سے $\overline{BC}$ پر بننے والے ارتفاع کے کچھ رف اسکیچ بنائیے۔



حادہ زاوی (i) قائمہ زاوی (ii) منفرجہ زاوی (iii)

شکل 6.6

3۔ کیا کسی مثلث کا ارتفاع اس کے اندرون میں پایا جاتا ہے؟ اگر آپ سمجھتے ہیں کہ یہ درست نہیں ہے تو ایسی صورت حال کو دکھانے لیے ایک رف اسکیچ بنائیے۔

4۔ کیا آپ ایسا کوئی مثلث سوچ سکتے ہیں جس کے دو ارتفاع اس کے دو ضلعے ہوں؟

5۔ کیا کسی مثلث کا ارتفاع اور وسطانیہ ایک ہو سکتا ہے؟ (اشارہ: سوال نمبر 4 اور 5 کے لیے مثلث کی ہر قسم میں ارتفاع بنائیے اور جانچیے)۔

خود کریں

درج ذیل میں ہر ایک کے کئی اشکال کاٹیے۔

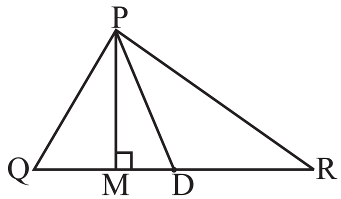
(i) مساوی الاضلاع مثلث (ii) مساوی الساقین مثلث

(iii) مختلف الاضلاع مثلث

ان کے وسطانیے اور ارتفاع معلوم کیجیے۔ کیا آپ نے ان میں کوئی خاص بات دیکھی؟ اپنے دوستوں سے اس بارے میں بات کیجیے)۔

مشق 6.1

1۔ ΔPQR، میں $\overline{QR}$ کا درمیانی نقطہ D ہے۔



$\overline{PM}$ ____________ ہے۔

PD ____________ ہے۔

کیا $QM = MR$ ہے؟

2۔ مندرجہ ذیل کی رف شکلیں بنائیے۔

(a) ΔABC، BE ایک وسطانیہ ہے۔

(b) ΔPQR میں PQ اور BR مثلث کے ارتفاع ہیں۔

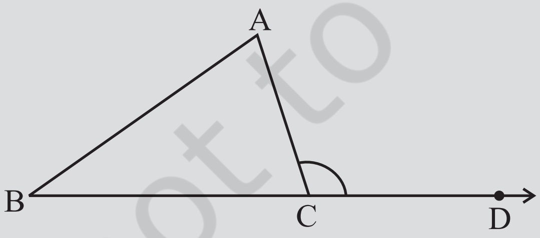
(c) ΔXYZ میں، YL مثلث کے بیرون میں ایک ارتفاع ہے۔

3۔ ڈائیگرام بنا کر تصدیق کیجیے کہ کیا کسی مساوی الساقین مثلث کا ارتفاع اور وسطانیہ ایک سے ہو سکتے ہیں۔

6.4 مثلث کا بیرونی زاویہ اور اس کی خصوصیت
(Exterior Angle of a Triangle and its Property)

خود کریں

1۔ ΔABC بنائیے اور اس کے کسی ایک ضلع، مان لیجیے۔ BC کو تصویر 6.7 میں دکھائے گئے طریقے سے بڑھائیے۔ نقطہ C پر بنے زاویہ ACD پر دھیان دیجیے۔ یہ زاویہ ΔABC کے بیرون میں واقع ہے۔ اس کو ہم ΔABC کے راس C پر بننے والا بیرونی زاویہ کہتے ہیں۔

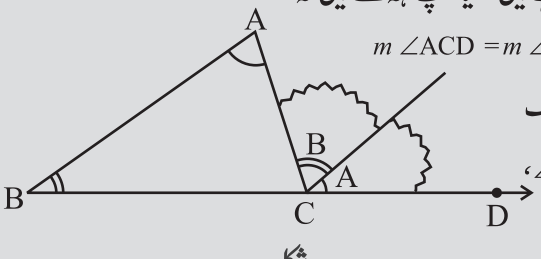


شکل 6.7

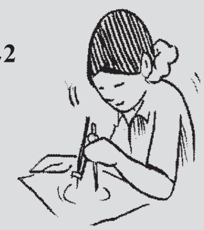
صاف ظاہر ہوتا ہے کہ $\angle BCA$، $\angle ACD$ کا متصل زاویہ ہے۔ مثلث کے باقی زاویوں کے نام $\angle A$ اور $\angle B$ ہیں اور ان زاویوں کو متقابل داخلی زاویے کہتے ہیں، یا $\angle ACD$ کے دور یموٹ داخلی زاویے کہلاتے ہیں۔ اب $\angle A$ اور $\angle B$ کو کاٹ لیجیے (یا ان کی نقل بنا لیجیے۔) اور تصویر 6.8 میں دکھائے گئے طریقے سے ایک دوسرے سے ملا کر رکھیے۔

کیا یہ دونوں ٹکڑے $\angle ACD$ کو پوری طرح ڈھک پا رہے ہیں؟ کیا آپ کہہ سکتے ہیں کہ

$m\angle ACD = m\angle A + m\angle B$?



شکل 6.8



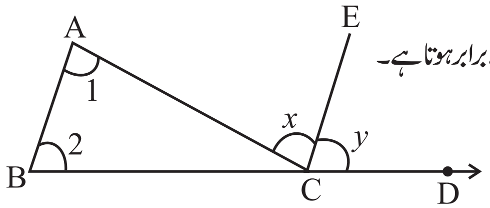
2۔ جیسا کہ پہلے بھی کیا ہے، ایک مثلث ABC بنائیے اور ایک بیرونی زاویہ ACD بنائیے اب چاندہ کی مدد سے $\angle ACD$، $\angle A$ اور $\angle B$ کو ناپیے۔

$\angle A + \angle B$ کا جوڑ معلوم کیجیے اور اس کا موازنہ $\angle ACD$ سے کیجیے۔ کیا آپ نے مشاہدہ کیا کہ $\angle ACD$، $\angle A + \angle B$ کے برابر ہے (یا تقریباً برابر ہے۔ اگر ناپنے میں کوئی غلطی ہوگئی)؟

آپ کچھ اور مثلث اور ان کے بیرونی زاویے بنا کر یہ عمل دہرا بھی سکتے ہیں۔ ہر بار آپ پائیں گے کہ مثلث کا بیرونی زاویہ متقابل داخلی زاویوں کے جوڑ کے برابر ہے۔

قدم بہ قدم منطقی استدلال اس حقیقت کو مزید ثابت کرسکتا ہے۔

کسی ایک مثلث کا ایک بیرونی زاویہ اپنے متقابل داخلی زاویوں کے جوڑ کے برابر ہوتا ہے۔



شکل 6.9

دیا گیا ہے: ΔABC پر دھیان دیجیے۔

$\angle ACD$ ایک بیرونی زاویہ ہے۔

ثابت کرنا ہے: $m\angle ACD = m\angle A + m\angle B$

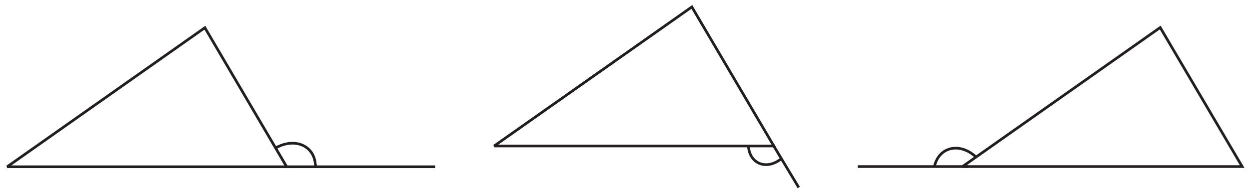
C سے $\overline{BA}$ کے متوازی $\overline{CE}$ بنائیے۔

وضاحت	وجوہات
$\angle 1 = \angle x$ (a)	$\overline{CE} \parallel \overline{BA}$ اور $\overline{AC}$ ایک خط قاطع ہے۔ اس لیے متبادل زاویوں کو برابر ہونا چاہیے۔
$\angle 2 = \angle y$ (b)	$\overline{CE} \parallel \overline{BA}$ اور $\overline{BD}$ ایک خط قاطع ہے۔ اس لیے نظیری زاویوں کو برابر ہونا چاہیے۔
$\angle 1 + \angle 2 = \angle x + \angle y$	
اب $\angle x + \angle y = m\angle ACD$	تصویر 6.9 ہے۔
لہٰذا $\angle 1 + \angle 2 = \angle ACD$	

مثلث کے بیرونی زاویے اور متقابل داخلی زاویوں کے اس تعلق کو مثلث کے بیرونی زاویے کی خصوصیت کہا جاتا ہے۔

سوچیے، بحث کیجیے اور لکھیے

1۔ کسی مثلث کے بیرونی زاویے مختلف طریقوں سے بنائیے جا سکتے ہیں۔ ان میں سے تین یہاں (تصویر 6.10) دکھائے جا رہے ہیں۔

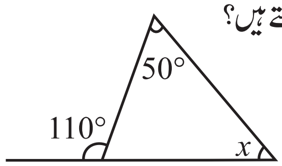


شکل 6.10

اس کے علاوہ، بیرونی زاویے بنانے کے تین اور بھی طریقے ہیں۔ان کے رف اسکیچ بنانے کی کوشش کیجیے۔

2۔ کیا کسی مثلث کی ہر ایک راس پر بنائے گئے بیرونی زاویے برابر ہیں؟

3۔ آپ کسی مثلث کے بیرونی زاویہ اور اس کے متصل داخلی زاویہ کے جوڑ کے بارے میں کیا کہہ سکتے ہیں؟



شکل 6.11

مثال 1 تصویر 6.11 میں زاویہ x معلوم کیجیے۔

حل متقابل داخلی زاویوں کا جوڑ بیرونی زاویہ

یا $50° + x = 110°$

یا $x = 60°$

سوچیے، بحث کیجیے اور لکھیے

1۔ آپ متقابل داخلی زاویوں کے بارے میں کیا کہہ سکتے ہیں اگر بیرونی زاویے ہوں:

(i) ایک زاویہ قائمہ؟ (ii) ایک زاویہ منفرجہ؟ (iii) ایک زاویہ حادہ؟

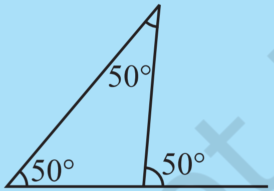
2۔ کیا کسی مثلث کا بیرونی زاویہ، زاویہ مستقیم ہوسکتا ہے؟

کوشش کیجیے:

1۔ کسی مثلث کے ایک بیرونی زاویے کی پیمائش 70° ہے اور متقابل داخلی زاویوں میں سے ایک زاویے کی پیمائش 25° ہے۔دوسرے متقابل داخلی زاویے کی پیمائش معلوم کیجیے؟

2۔ کسی مثلث کے بیرونی زاویہ کے متقابل داخلی زاویے 60° اور 80° کے ہیں ۔ بیرونی زاویہ کی پیمائش معلوم کیجیے۔

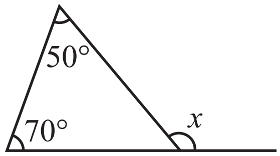
3۔ کیا اس ڈائیگرام (تصویر 6.12) میں کچھ غلط ہے؟



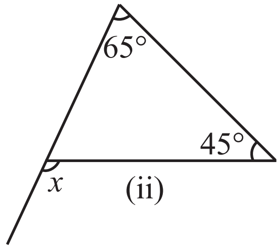
شکل 6.12

مشق 6.2

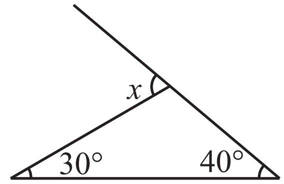
1۔ مندرجہ ذیل ڈائیگراموں میں نامعلوم بیرونی زاویہ x کی قیمت معلوم کیجیے۔



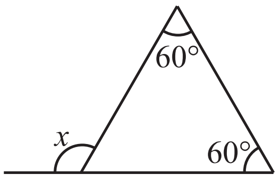
(i)



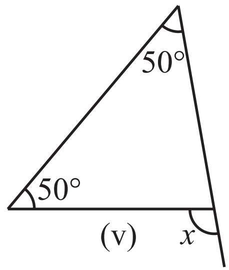
(ii)



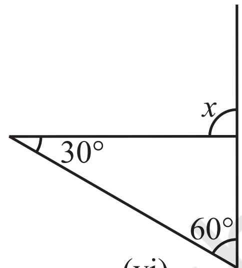
(iii)



(iv)

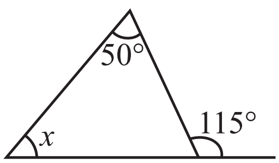


(v)

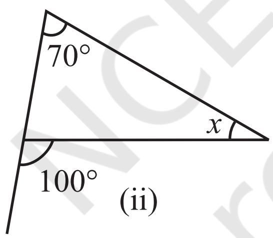


(vi)

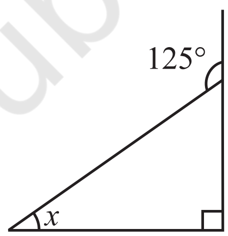
2۔ مندرجہ ذیل اشکال میں نامعلوم متقابل داخلی زاویہ کی قیمت معلوم کیجیے۔



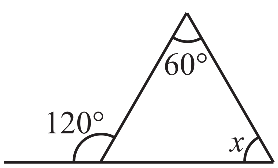
(i)



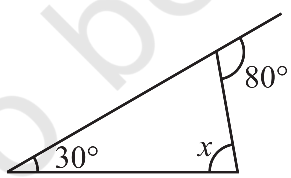
(ii)



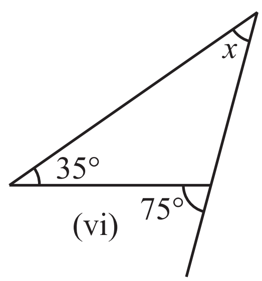
(iii)



(iv)



(v)



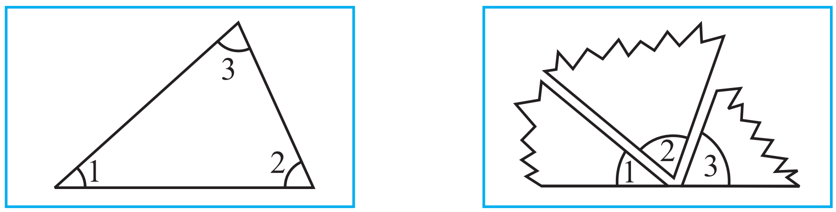
(vi)

6.5 کسی مثلث کے زاویوں کے جوڑ کی خصوصیت

(Angle Sum Property of a Triangle)

کسی مثلث کے تینوں زاویوں کے جوڑ سے متعلق یہ ایک بہت اہم خصوصیت ہے۔ مندرجہ ذیل چار سرگرمیوں کی مدد سے آپ اس خصوصیت کو سمجھ سکیں گے۔

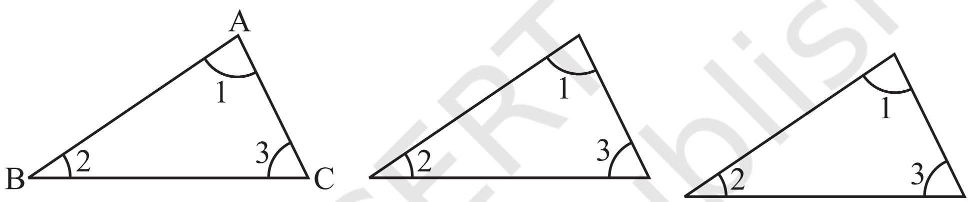
1۔ ایک مثلث بنائیے۔ اس کے تینوں زاویے کاٹ لیجیے۔ شکل (ii), (i) 6.13 میں دکھائے گئے طریقہ سے اس کو ترتیب دے دیجیے۔ ان تینوں زاویوں سے مل کر اب ایک زاویہ بن گیا ہے۔ یہ زاویہ مستقیم ہے اور اس کی پیمائش °180 ہے۔



شکل 6.13

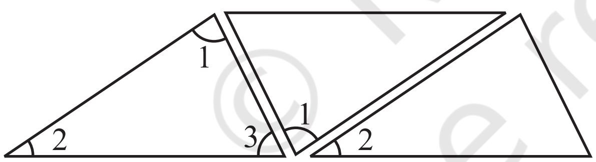
لہٰذا کسی مثلث کے تینوں زاویوں کا جوڑ °180 ہوتا ہے۔

2۔ اس حقیقت کو آپ مختلف طریقے سے دیکھ سکتے ہیں۔ کسی مثلث کی تین کاپیاں لیجیے، مان لیجیے ΔABC کی (شکل 6.14)



شکل 6.14

تصویر 6.15 کی طرح اس کو ترتیب دیجیے۔ $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3$ کے بارے میں آپ نے کیا مشاہدہ کیا؟ (کیا آپ نے بیرونی زاویے کی خصوصیت کو دیکھا)؟

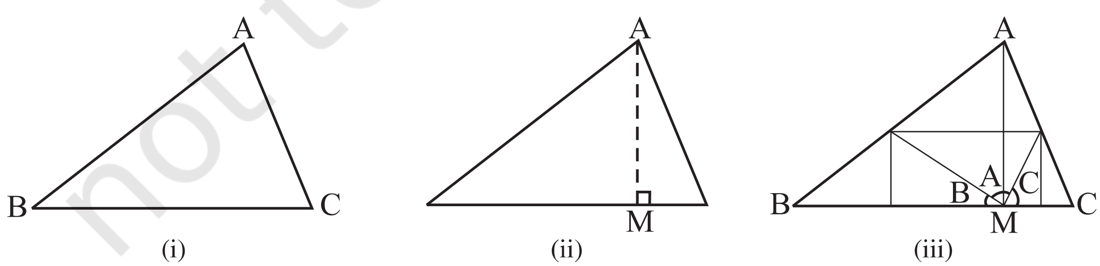


شکل 6.15

3۔ ایک کاغذ لیجیے اور یک مثلث، مثلاً ΔABC، کاٹ لیجیے۔ (شکل 6.16)

ΔABC کو موڑ کر ایک ایسا ارتفاع AM بنائیے جو A سے گزرے۔

اب مثلث کے تینوں کونوں کو اس طرح موڑیے کہ تینوں راس A، B اور C سے M کو چھوئیں۔



شکل 6.16

آپ پائیں گے کہ تینوں زاویے مل کر ایک زاویہ مستقیم بناتے ہیں۔ یہ پھر اسی بات کو ظاہر کرتا ہے کہ کسی مثلث کے تینوں

زاویوں کا جوڑ 180° کے برابر ہوتا ہے۔

4۔ کوئی تین مثلث ΔABC، ΔPQR اور ΔXYZ اپنی کاپی پر بنائیے۔

چاندے کی مدد سے ان مثلثوں کے تینوں زاویوں کی پیائش کیجیے۔ اپنے نتائج کو جدول میں بھریے۔

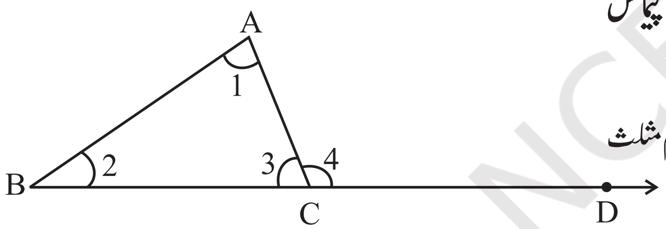
مثلث کا نام	زاویوں کی پیائش	تینوں زاویوں کی پیائش کا جوڑ
ΔABC	$m\angle A =$ $m\angle B =$ $m\angle C =$	$m\angle A + m\angle B + m\angle C =$
ΔPQR	$m\angle P =$ $m\angle Q =$ $m\angle R =$	$m\angle P + m\angle Q + m\angle R =$
ΔXYZ	$m\angle X =$ $m\angle Y =$ $m\angle Z =$	$m\angle X + m\angle Y + m\angle Z =$

پیائش میں تھوڑی بہت غلطی ممکن ہے، آپ دیکھیں گے آخری کالم میں ہمیشہ 180° (یا تقریباً 180°) آتا ہے۔

جب بالکل درست پیائش ممکن ہوگی تو یہ دکھائے گا کہ تینوں زاویوں کی پیائش کا جوڑ 180° کے برابر ہوتا ہے۔

اب آپ اس قابل ہو گئے ہیں کہ اپنے اس نتیجہ کو منطقی استدلال کی مدد سے ثابت کرسکیں۔

بیان: کسی مثلث کے تینوں زاویوں کی کل پیائش 180° کے برابر ہے۔



شکل 6.17

اس بیان کی صداقت کو ثابت کرنے کے لیے ہم مثلث کے بیرونی زاویے کی خصوصیت کا استعمال کرتے ہیں۔

دیا گیا ہے ΔABC کے زاویے $\angle 1$، $\angle 2$ اور $\angle 3$ ہیں

جب BC کو D تک بڑھایا گیا تو $\angle 4$، بیرونی زاویہ ہے۔

صداقت کی وضاحت $\angle 1 + \angle 2 = \angle 4$ (بیرونی زاویہ کی خصوصیت)

$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = \angle 4 + \angle 3$ (دونوں طرف $\angle 3$ جوڑ دیا)

لیکن $\angle 4$ اور $\angle 3$ تو ایک خطی جوڑا بنا رہے ہیں۔ جس کا جوڑ 180° کے برابر ہوتا ہے۔ اس لیے

$$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180°$$

آیئے اب ہم دیکھتے ہیں ہم اس خصوصیت کا استعمال مختلف طرح سے کیسے کرسکتے ہیں۔

مثال 2 دی گئی شکل (تصویر 6.18) میں $m\angle P$ معلوم کیجیے۔

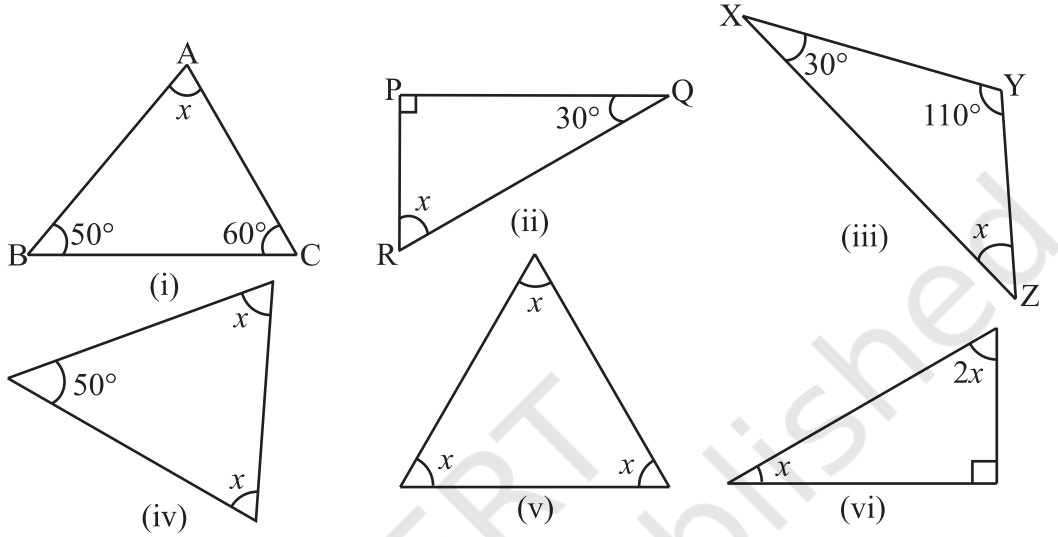
حل کسی مثلث کے زاویوں کے جوڑ کی خصوصیت کی مدد سے

$$m\angle P + 47° + 52° = 180°$$

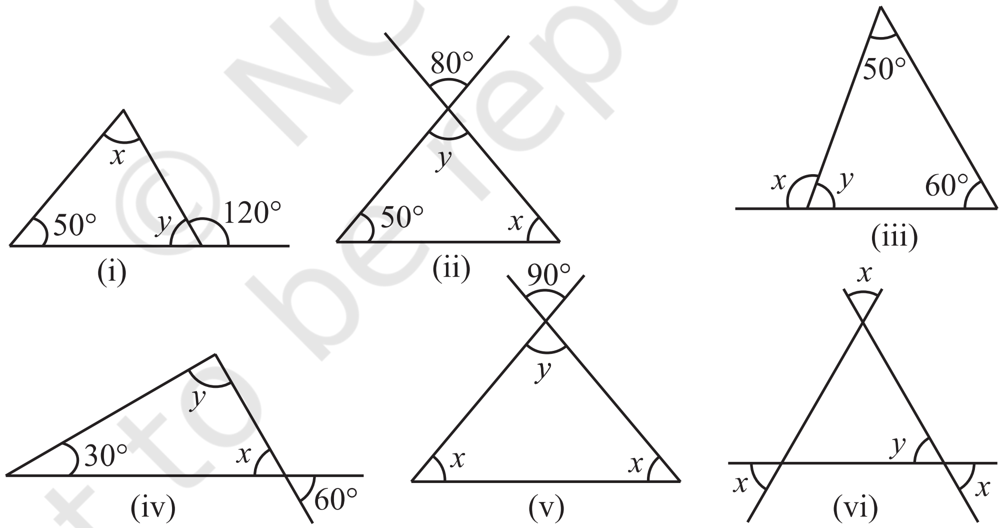
اس لیے $m\angle P = 180° - 47° - 52°$

مشق 6.3

1۔ مندرجہ ذیل ڈائیگراموں میں نامعلوم x کی قیمت معلوم کیجیے۔



2۔ مندرجہ ذیل ڈائیگراموں میں نامعلوم x اور y کی قیمت معلوم کیجیے۔



کوشش کیجیے:

1۔ کسی مثلث کے دو زاویے 30° اور 80° ہیں۔ تیسرا زاویہ معلوم کیجیے۔

2۔ کسی مثلث کا ایک زاویہ 80° کے برابر ہے اور باقی زاویے آپس میں برابر ہیں۔ برابر زاویوں میں سے ہر زاویے کی قیمت معلوم کیجیے۔

3۔ کسی مثلث کے تینوں زاویوں کا تناسب 1:2:1 ہے مثلث کے تینوں زاویے معلوم کیجیے۔ مثلث کی درجہ بندی دو مختلف طریقوں سے کیجیے۔

سوچیے بحث کیجیے اور لکھیے

1۔ کیا آپ کے پاس کوئی ایسا مثلث ہوسکتا ہے جس کے دو زاویے، زاویہ قائمہ ہوں؟

2۔ کیا آپ کے پاس کوئی ایسا مثلث ہوسکتا ہے جس کے دو زاویے، زاویہ منفرجہ ہوں؟

3۔ کیا آپ کے پاس کوئی ایسا مثلث ہوسکتا ہے جس کے دو زاویے، زاویہ حادہ ہوں؟

4۔ کیا آپ کے پاس کوئی ایسا مثلث ہوسکتا ہے جس کے تینوں زاویے °60 سے بڑے ہوں؟

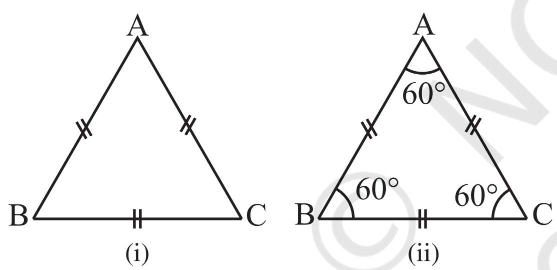
5۔ کیا آپ کے پاس کوئی ایسا مثلث ہوسکتا ہے جس تینوں زاویے °60 کے برابر ہوں؟

6۔ کیا آپ کے پاس کوئی ایسا مثلث ہوسکتا ہے جس کے تینوں زاویے °60 سے کم ہوں؟

6.6 دو مخصوص مثلث: مساوی الاضلاع اور مساوی الساقین
(Two Special Triangles: Equilateral and Isosceles)

وہ مثلث جس کے تینوں اضلاع برابر ہوتے ہیں مساوی الاضلاع مثلث کہلاتا ہے۔

کسی مساوی الاضلاع مثلث ABC کی دو ہم شکل تصویریں لیجیے (شکل 6.19) ان میں سے ایک کو ایک جگہ چپکا دیجیے اور دوسری کو اس کے اوپر رکھ دیجیے۔ یہ پوری طرح سے پہلے مثلث کو ڈھک لے گی۔ اس کو کسی بھی طرح سے گھمایئے یہ پھر ایک دوسری کو پوری طرح ڈھک لیتے ہیں۔ آپ نے یہ دیکھا کہ جب تینوں اضلاع برابر ہوتے ہیں تو تینوں زاویوں کی پیائش بھی ایک سی ہوتی ہے؟



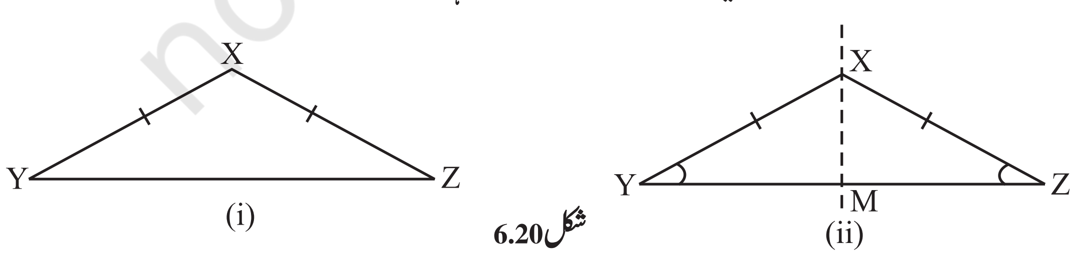
شکل 6.19

ہم نے یہ نتیجہ اخذ کیا کہ مساوی الاضلاع مثلث میں؛

(i) تمام اضلاع کی لمبائی برابر ہے۔

(ii) ہر زاویہ کی پیائش °60 ہے۔

ایسا مثلث جس کے دو اضلاع برابر ہوتے ہیں مساوی الساقین مثلث کہلاتا ہے۔



شکل 6.20

کاغذ کا ایک مساوی الساقین مثلث XYZ کاٹیے جس کی XY=XZ ہو۔ (شکل 6.20) اس کو اس طرح موڑیے کہ Z، Y پر آجائے۔ X سے گذرنے والا خط XM اب خطِ تشاکل ہے۔ (جس کے بارے میں آپ باب 14 میں پڑھیں گے۔) آپ دیکھیں کہ Y∠ اور Z∠ ایک دوسرے کے اوپر پوری طرح سے فٹ آتے ہیں۔ XY اور XZ مساوی اضلاع کہلاتے ہیں۔ YZ قاعدہ کہلاتا ہے۔ Y∠ اور Z∠ کو قاعدہ پر بنے زاویے کہتے ہیں یہ آپس میں برابر ہوتے ہیں۔

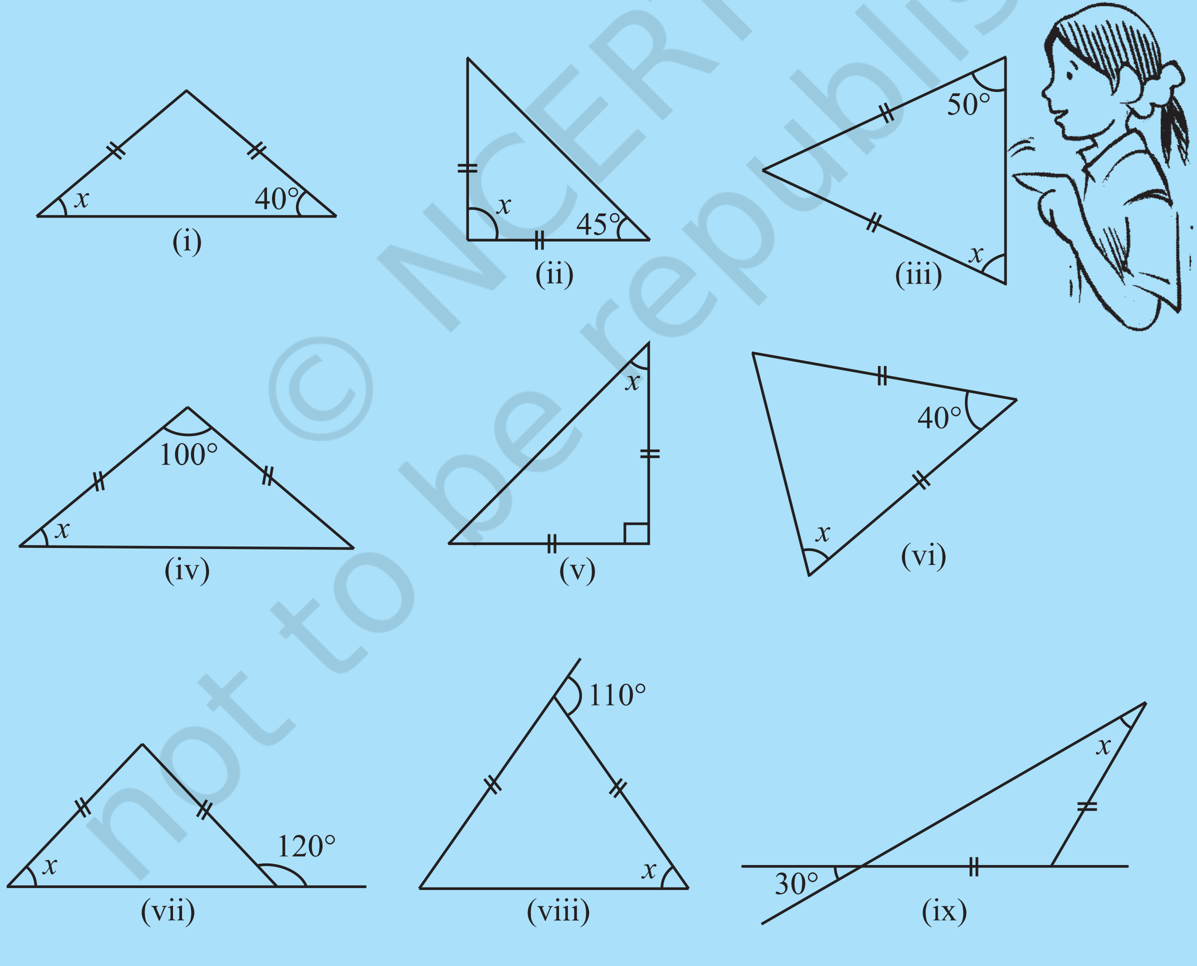
لہٰذا، ایک مساوی الساقین مثلث میں:

(i) دو اضلاع کی لمبائی آپس میں برابر ہوتی ہے۔

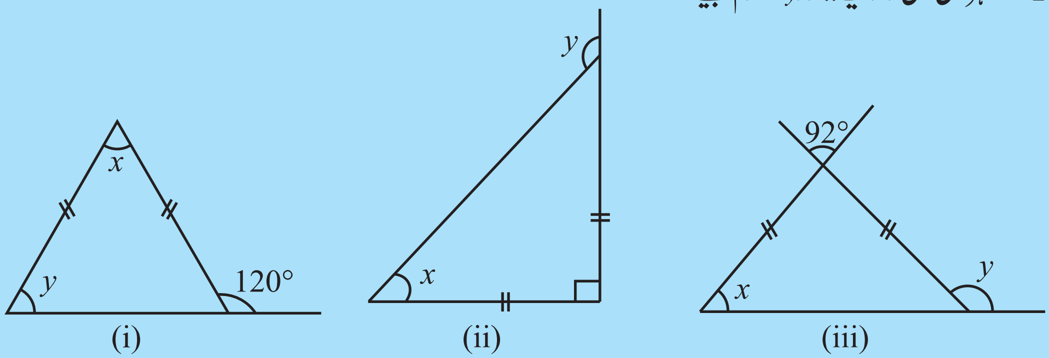
(ii) برابر لمبائی والے اضلاع کے متقابل زاویے، جو کہ قاعدہ پر بنے ہوتے ہیں، بھی آپس میں برابر ہوتے ہیں۔

کوشش کیجیے:

1۔ ہر شکل میں زاویہ x معلوم کیجیے۔

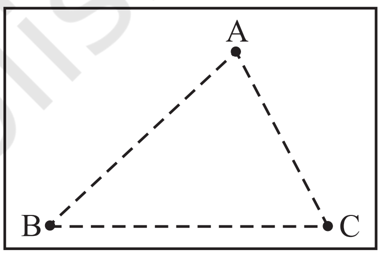


2۔ ہر شکل میں زاویے x اور y معلوم کیجیے۔



6.7 کسی مثلث کے دو اضلاع کی لمبائیوں کا جوڑ
(Sum of the Lengths of Two Sides of a Triangle)

1۔ اپنے کھیل کے میدان میں تین غیر ہم خط نشانات A، B اور C لگائیے۔ چونے کی مدد سے راستوں AB، BC اور AC پر نشان لگائیے۔



شکل 6.21

اپنی دوست سے کہیے کہ وہ A سے شروع کر کے، ایک یا زیادہ راستوں سے گزر کر C پر پہنچے۔ مثال کے طور پر وہ پہلے $\overline{AB}$ سے اور پھر $\overline{BC}$ سے ہو کر C پر پہنچے۔ یا وہ سیدھی $\overline{AC}$ کے ذریعے بھی C پر پہنچ سکتی ہے۔ یقیناً وہ AC والا سیدھا راستہ ہی اپنائے گی۔ اگر وہ دوسرا راستہ اپناتی ہے۔ (پہلے $\overline{AB}$ پر $\overline{BC}$) تو اس کو زیادہ چلنا پڑتا ہے۔

دوسرے الفاظ میں

$$AB + BC > AC$$

اس طرح، اگر کسی کو B سے شروع کر کے A پر پہنچنا ہے تو وہ $\overline{BC}$ اور $\overline{CA}$ والا راستہ نہ اپنا کر $\overline{BA}$ والا راستہ چننا زیادہ پسند کرے گی/ گا۔ کیونکہ

$$BC + CA > AB$$

بالکل اسی وجہ سے، آپ معلوم کر سکتے ہیں

کہ $CA + AB > BC$

ان مشاہدات سے پتہ چلتا ہے کہ کسی بھی مثلث کے دو اضلاع کا جوڑ تیسرے ضلع کی پیمائش سے زیادہ ہوتا ہے۔

2۔ مختلف پیمائشوں کی 15 چھوٹی چھوٹی لکڑیاں جمع کیجیے (یا پٹیاں) جیسے، 7 سینٹی میٹر، 8 سینٹی میٹر، 9 سینٹی میٹر،..... 20 سینٹی میٹر۔ ان میں سے کوئی بھی تین لکڑیاں لیجیے اور ان سے ایک مثلث بنانے کی کوشش کیجیے۔ تین تین لکڑیوں کے مختلف مجموعے لے کر اس سرگرمی کو دہرائیے۔

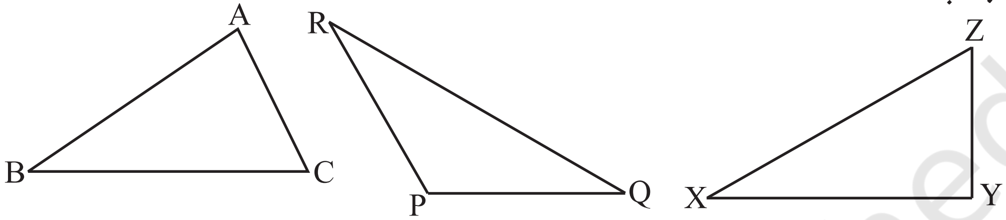
مان لیجیے پہلے آپ نے 6 سم اور 12 سم لمبی دو لکڑیاں لیں تو آپ کی تیسری لکڑی کی لمبائی 6=6–12 سم سے ہر حال میں زیادہ

اور 12+6=18 سم سے کم ہونی چاہیے۔ اس کو کر کے دیکھیے اور بتائیے کہ ایسا کیوں ہے۔

ایک مثلث بنانے کے لیے آپ کو تین ایسی لکڑیوں کی ضرورت ہوگی جن میں سے کوئی بھی دو کی لمبائیوں کا جوڑ تیسری لکڑی کی لمبائی سے زیادہ ہوگا۔

اس سے یہ بات سامنے آتی ہے کہ ایک مثلث کے دو اضلاع کا جوڑ تیسرے ضلع کی لمبائی سے زیادہ ہوتا ہے۔

3۔ اپنی کاپی میں کوئی بھی تین مثلث بنائیے جیسے ΔABC، ΔPQR اور ΔXYZ (شکل 6.22)



شکل 6.22

پھر اپنے نتائج کو جدول میں دیے گئے طریقے سے بھر دیجیے۔

Δ کا نام	اضلاع کی لمبائیاں	کیا یہ صحیح ہے	
Δ ABC	AB ___	AB – BC < CA ___ + ___ > ___	ہاں/نہیں
	BC ___	BC – CA < AB ___ + ___ > ___	ہاں/نہیں
	CA ___	CA – AB < BC ___ + ___ > ___	ہاں/نہیں
PQR	PQ ___	PQ – QR < RP ___ + ___ > ___	ہاں/نہیں
	QR ___	QR – RP < PQ ___ + ___ > ___	ہاں/نہیں
	RP ___	RP – PQ < QR ___ + ___ > ___	ہاں/نہیں
Δ XYZ	XY ___	XY – YZ < ZX ___ + ___ > ___	ہاں/نہیں
	YZ ___	YZ – ZX < XY ___ + ___ > ___	ہاں/نہیں
	ZX ___	ZX – XY < YZ ___ + ___ > ___	ہاں/نہیں

اس سے ہمارے پہلے لگائے گئے اندازے کو تقویت ملتی ہے۔اس لیے ہم یہ نتیجہ اخذ کرتے ہیں کہ،ایک مثلث کے دو اضلاع کی لمبائی کا جوڑ تیسرے ضلع کی لمبائی سے زیادہ ہوتا ہے۔

ہم نے یہ بھی دیکھا ہے کہ ایک مثلث کے کوئی بھی دو اضلاع کی لمبائیوں کا فرق تیسرے ضلع کی لمبائی سے چھوٹا ہوتا ہے۔

مثال 3 کیا کوئی مثلث ایسا ہوسکتا ہے جس کے اضلاع کی لمبائیاں 10.2 سینٹی میٹر، 5.8 سینٹی میٹر، اور 4.5 سینٹی میٹر ہوں؟

حل مان لیجیے ایک مثلث ممکن ہے۔تو کوئی بھی دو اضلاع کی لمبائیوں کا جوڑ تیسرے ضلع کی لمبائی سے زیادہ ہوتا۔آیئے اس کی جانچ کریں۔

کیا $4.5 + 5.8 > 10.2$? ہاں

کیا $5.8 + 10.2 > 4.5$? ہاں

کیا $10.2 + 4.5 > 5.8$? ہاں

اس لیے یہ مثلث ممکن ہے۔

مثال 4 ایک مثلث کے دو اضلاع کی لمبائیاں 6 سم اور 8 سینٹی میٹر ہیں۔تیسرے ضلع کی لمبائی کن دو اعداد کے درمیان ہوسکتی ہے؟

حل ہم جانتے ہیں مثلث کے دو اضلاع کا لمبائیوں کی جوڑ ہمیشہ تیسرے ضلع کی لمبائی سے زیادہ ہوتا ہے۔

اس لیے تیسرے ضلع کی لمبائی دونوں ضلعوں کی لمبائیوں کے جوڑ سے کم ہونی چاہئے۔یعنی $6+8=14$ سینٹی میٹر سے کم۔تیسرے ضلع کی لمبائی اضلاع کی لمبائیوں کے فرق سے کم نہیں ہونی چاہیے۔اس لیے تیسرے ضلع کی لمبائی $8-6=2$ سینٹی میٹر سے زیادہ ہوتی۔

اس لیے تیسرے ضلع کی لمبائی 14 سینٹی میٹر سے کم اور 2 سینٹی میٹر سے زیادہ ہوگی۔

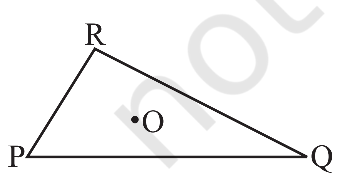
مشق 6.4

1۔ کیا یہ ممکن ہے کہ کسی مثلث کے اضلاع کی لمبائیاں مندرجہ ذیل ہوں۔

(i) 2 cm, 3 cm, 5 cm (ii) 3 cm, 6 cm, 7 cm

(iii) 6 cm, 3 cm, 2 cm

2۔ کوئی نقطہ O مثلث PQR کے اندرون میں لیجیے۔کیا



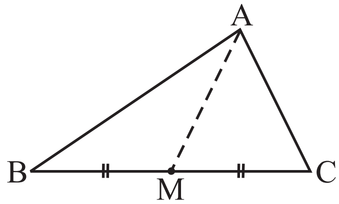
(i) $OP + OQ > PQ$?

(ii) $OQ + OR > QR$?

(iii) $OR + OP > RP$?

3۔ AM مثلث ABC کا وسطانیہ ہے۔

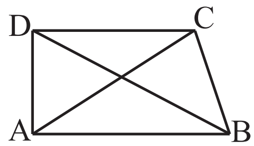
کیا $AB + BC + CA > 2\ AM$?



(مثلث کے ΔABM اور ΔAMC کے اضلاع کو دیکھیے۔)

4۔ ABCD ایک چارضلعی ہے۔کیا

کیا $AB + BC + CD + DA > AC + BD$?



5۔ ABCD ایک چارضلعی ہے۔کیا

$AB + BC + CD + DA < 2 (AC + BD)$?

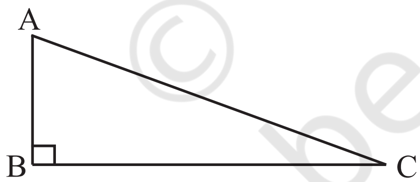
6۔ مثلث کے دو اضلاع کی لمبائیاں 12 سم اور 15 سم ہیں۔تیسرے ضلع کی لمبائی کن دو پیمائشوں کے درمیان ہونی چاہیے۔

سوچیے، بحث کیجیے اور لکھیے

1۔ کیا کسی مثلث کے دو زاویوں کا جوڑ ہمیشہ تیسرے زاویہ سے بڑا ہوتا ہے؟

6.8 زاویہ قائمہ مثلث اور فیثا غورث کا مسئلہ
(Right-angled Triangles and Pythagoras Property)

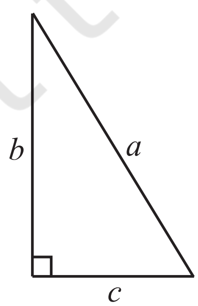
اس حصہ میں زاویہ قائمہ مثلث کی ایک بہت اہم اور کارآمد خصوصیت دی گئی ہے۔جس کا پتہ یونانی فلسفی فیثا غورث نے چھٹی صدی ق۔م۔نے لگایا تھا۔لہٰذا اس خصوصیت کا نام انہیں کے نام پر رکھا گیا ہے۔درحقیقت اس خصوصیت کے بارے میں دوسرے ممالک کے لوگ بھی جانتے تھے۔ہندوستانی ریاضی دیاں بودھان نے بھی اس خصوصیت کی معادل شکل پیش کی تھی۔اب ہم فیثا غورث کی اس خصوصیت کی وضاحت کرنے کی کوشش کرتے ہیں۔



شکل 6.23

زاویہ قائمہ مثلث میں اضلاع کے کچھ مخصوص نام ہوتے ہیں۔وہ ضلع جو زاویہ قائمہ کے متقابل ہوتا ہے وتر کہلاتا ہے؛ باقی دو اضلاع زاویہ قائمہ مثلث کے بازو کہلاتے ہیں۔

ΔABC میں (تصویر 6.23) زاویہ قائمہ B پر ہے، اس لیے AC اس کا وتر ہے۔ $\overline{AB}$ اور $\overline{BC}$، ΔABC کے دو بازو ہیں۔



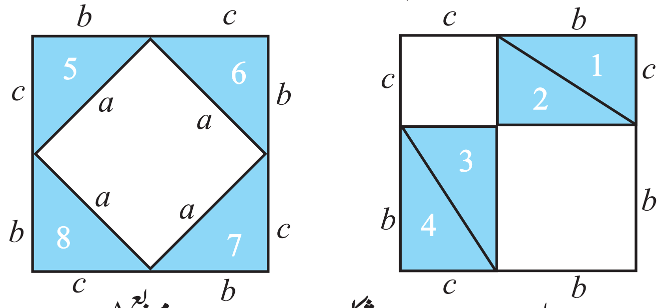
شکل 6.24

زاویہ قائمہ مثلث کے کسی بھی پیمائش کی آٹھ معادل اشکال بنالیجیے۔مثال کے طور پر آپ ایک قائمہ زاوی مثلث بنائیے جس کا وتر a اکائی لمبائی ہو۔اور باقی دونوں بازوؤں کی لمبائیاں b اکائی اور c اکائی ہو۔(تصویر 6.24)

ایک کاغذ پر دو معادل مربع بنائیے جن کے اضلاع $b+c$ لمبائی کے ہوں۔

آپ کو ایک مربع میں چار مثلث رکھنے ہیں اور باقی کے چار مثلث

دوسرے مربع میں رکھتے ہیں جیسا کہ ڈائیگرام میں دکھایا گیا ہے (شکل 6.25)۔



مربع A　　شکل 6.25　　مربع B

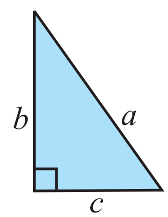
مربعے معادل ہیں اور آٹھ مثلث بھی معادل ہیں۔ لہٰذا مربع A کا خالی حصہ = مربع B کا خالی حصہ

یعنی مربع A کے اندرونی مربع کا رقبہ = مربع B کے اندر خالی جگہ پر بننے والے دونوں مربعوں کا کل رقبہ

$$a^2 = b^2 + c^2$$

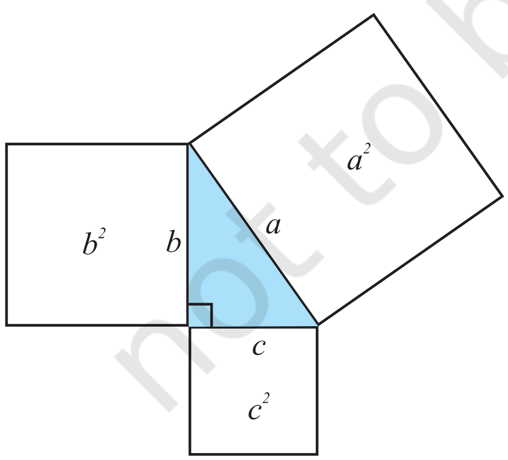
یہ فیثا غورث کا مسئلہ ہے۔ اس کو مندرجہ ذیل طریقے سے بیان کیا جاسکتا ہے۔

> ایک قائمہ زاوی مثلث میں
> وتر کا مربع = دونوں بازوؤں کے مربعوں کا جوڑ



ریاضی میں فیثا غورث کی خصوصیت بہت کارآمد آلہ کی طرح ہے۔ بعد میں آنے والی جماعتوں میں اس کو ایک مسئلہ کی طرح ثابت کیا جائے گا۔ آپ کو اس کا مطلب اچھی طرح سمجھ لینا چاہیے۔

اس میں کہا گیا ہے کہ کسی زاویہ قائمہ مثلث میں وتر پر بننے والا مربع کا رقبہ، اس کے بازو پر بننے والے مربعوں کے رقبوں کے جوڑ کے برابر ہوتا ہے۔

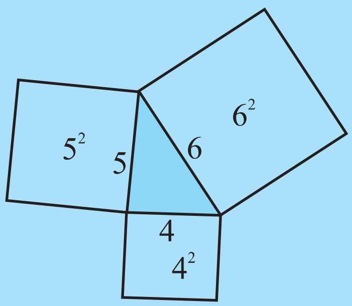


شکل 6.26

ایک زاویہ قائمہ مثلث بنائیے، اگر ایک گراف پیپر پر بنائیں تو زیادہ اچھا ہے۔ اس کے اضلاع پر الگ الگ مربع بنائیے۔ ان مربعوں کا رقبہ نکالیے اور اس مسئلہ کو عملی طور جانچیے۔ (شکل 6.26) اگر آپ کے پاس ایک زاویہ قائمہ مثلث ہے تو فیثا غورث کی خصوصیت اس پر لاگو ہوگی۔ اور اگر فیثا غورث کی خصوصیت کسی مثلث پر لاگو ہو رہی ہے تو کیا وہ مثلث زاویہ قائمہ مثلث ہوگا؟ (اس طرح کے مسئلہ کو معکوس مسئلہ کہتے ہیں۔) ہم اس کا جواب دینے کی کوشش کریں گے۔ اب ہم دکھائیں گے کہ اگر ایک مثلث ایسا ہے اس کے دو اضلاع پر بنے مربعوں کے رقبوں کا جوڑ تیسرے

ضلع پر بنے مربع کے رقبے کے برابر ہو، تو یہ مثلث لازمی طور زاویہ قائمہ مثلث ہوگا۔

کوشش کیجیے:



شکل 6.27

-1 تین ایسے مربعے کاٹیے جن کے اضلاع بالترتیب 4 سم، 5 سم اور 6 سم لمبے ہوں۔ (شکل 6.27) میں دکھائے گئے طریقے سے ان مربعوں کی ترتیب اس طرح دیجیے کہ ان سے ایک مثلث نما شکل بن کر سامنے آئے۔ اس طرح بنے مثلث کی نقل اتار لیجیے۔ مثلث کے ہر زاویہ کی پیمائش کیجیے۔ آپ پائیں گے کہ ان میں سے کوئی زاویہ قائمہ نہیں ہے۔

دراصل اس صورت حال میں ہر زاویہ حادہ ہے۔ نوٹ کیجیے کہ

$5^2+6^2 \neq 4^2$, $4^2+5^2 \neq 6^2$ اور $6^2+4^2 \neq 5^2$

-2 اس سرگرمی کو 4 سم، 5 سم اور 7 سم کی لمبائیوں کے ساتھ دہرائیے۔ آپ کو ایک منفرجہ زاویہ مثلث ملے گا۔ نوٹ کیجیے۔

$4^2+5^2 \neq 7^2$

اس سے یہ بات ثابت ہوتی ہے کہ فیثا غورث کی خصوصیت صرف اور صرف اسی وقت لاگو ہوتی ہے جب مثلث ایک زاویہ قائمہ مثلث ہو۔ لہٰذا ہم کو یہ حقیقت ملتی ہے:

> اگر فیثا غورث کی خصوصیت لاگو ہوتی ہے تو مثلث ضروری طور پر قائمہ زاویہ مثلث ہوگا۔

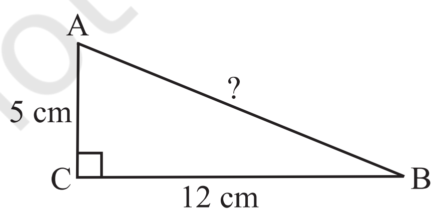
مثال 5 معلوم کیجیے کہ کیا ایک ایسا مثلث جس کی اضلاع کی لمبائیاں 3 سم، 4 سم، اور 5 سم ہوں تو ایک قائمہ زاویہ مثلث ہے۔

حل $3^2=3\times3=9;\ 4^2=4\times4=16;\ 5^2=5\times5=25$

ہم نے دیکھا کہ $3^2+4^2=5^2$

اس لیے مثلث، قائمہ زاویہ ہے۔

نوٹ: ہر قائمہ زاویہ مثلث میں وتر ہمیشہ سب سے لمبا ضلع ہوتا ہے اس مثال میں وہ ضلع جس کی لمبائی 5 سم ہے وہ وتر ہے۔



شکل 6.28

مثال 6 ΔABC ایک قائمہ زاویہ مثلث ہے جس کا زاویہ قائمہ C پر ہے۔ اگر AC=5 سم BC=12 سم ہے۔ تو AB کی لمبائی معلوم کیجیے۔

حل ایک رف شکل ہماری مدد کرے گی (شکل 6.28)

فیثاغورث کی خصوصیت سے

$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$
$$= 5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169 = 13^2$$

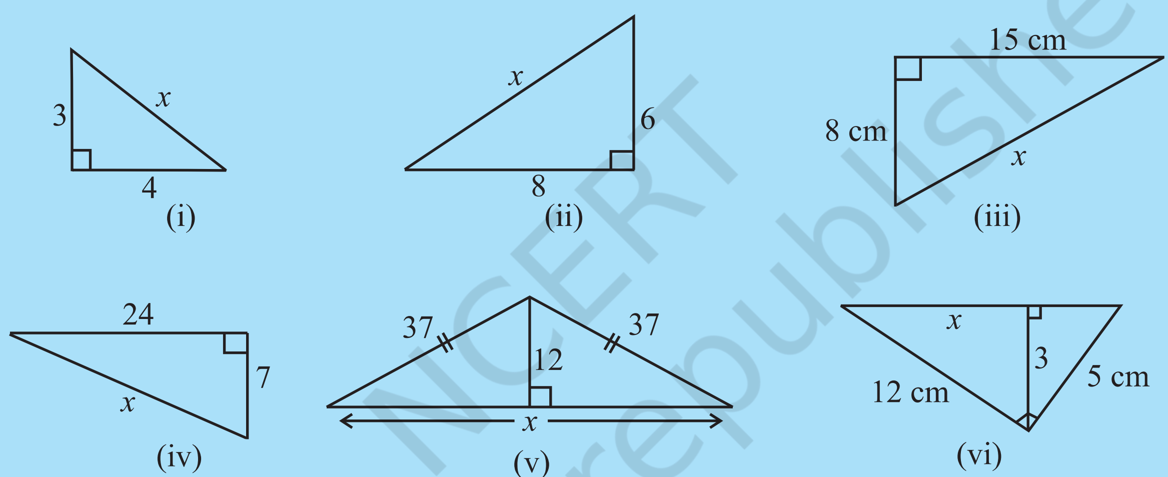
یا $AB^2 = 13^2$

اس لیے $AB = 13$ – یا AB کی لمبائی 13 سم ہے۔

نوٹ: مکمل مربع معلوم کرنے کے لیے آپ ابتدائی تقسیم اجزاء کی تکنیک اپنا سکتے ہیں۔

کوشش کیجیے:

مندرجہ ذیل اشکال میں نامعلوم لمبائی x معلوم کیجیے۔



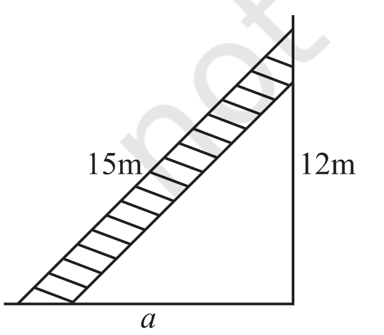
شکل 6.29

مشق 6.5

1۔ PQR ایک مثلث ہے جس میں P پر زاویہ قائمہ بن رہا ہے۔
اگر PQ = 10cm اور PR = 24 cm ہے تو QR معلوم کیجیے۔

2۔ ABC ایک مثلث ہے جس میں C پر زاویہ قائمہ بن رہا ہے
اگر AB = 25 سم اور AC = 7 cm ہو تو BC معلوم کیجیے۔

3۔ ایک 15 میٹر لمبی سیڑھی، 12 میٹر اونچی کھڑکی پر دیوار کے سہارے لگائی گئی ہے۔ زمین پر سیڑھی کا دیوار سے فاصلہ a ہے۔ سیڑھی کے نچلے حصے کا دیوار سے فاصلہ بتائیے۔

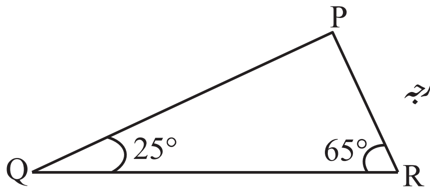


4۔ درج ذیل میں سے کون سے قائمہ زاوی مثلث کے اضلاع کی لمبائیاں ہوسکتی ہیں؟

(i) 2.5 سم، 6.5 سم، 6 سم
(ii) 2 سم، 2 سم، 5 سم
(iii) 1.5 سم، 2 سم، 2.5 سم

قائمہ زاوی مثلث کے کیس میں زاویہ قائمہ معلوم کیجیے۔

5۔ ایک پیڑ زمین سے 5 میٹر کی اونچائی سے ٹوٹتے گیا اور اس کا اوپری سرا زمین کو پیڑ کی جڑ سے 12 میٹر کی دوری پر چھو رہا ہے۔ پیڑ کی اصلی اونچائی بتائیے۔



6۔ ΔPQR کے Q اور R زاویے بالترتیب 25° اور 65° کے ہیں۔ لکھیے مندرجہ ذیل میں سے کون سے درست ہیں:

(i) $PQ^2 + QR^2 = RP^2$

(ii) $PQ^2 + RP^2 = QR^2$

(iii) $RP^2 + QR^2 = PQ^2$

7۔ اس مستطیل کا احاطہ بتائیے جس کی لمبائی 40 سم اور وتر 41 سم ہے۔

8۔ ایک معین کے وتروں کی پیائش 16 سم اور 30 سم ہے اس کا احاطہ بتائیے۔

سوچیے، بحث کیجیے اور لکھیے

1۔ مثلث PQR کا سب سے لمبا ضلع کون سا ہے جس کا زاویہ قائمہ P پر ہے؟

2۔ مثلث ABC کا سب سے لمبا ضلع کون سا ہے جس کا زاویہ قائمہ B پر ہے؟

3۔ ایک قائمہ زاوی مثلث کا سب سے لمبا ضلع کون سا ہے؟

4۔ کسی مستطیل کے وتر کے ذریعے حاصل ہوا رقبہ وہی ہوگا جو رقبہ اس کی لمبائی اور چوڑائی کے ذریعہ حاصل ہوگا۔ یہ بودھیان کا مسئلہ ہے۔ اس کا موازنہ فیثاغورث کی خصوصیت سے کیجیے۔

خود کریں

متمول سرگرمی

قطع و برید اور ترتیب نو کے ذریعے فیثاغورث کے مسئلہ کے بہت سارے ثبوت دیے گئے ہیں۔ ان میں سے کچھ کو جمع کیجیے اور ان کی وضاحت کے لیے چارٹ بنائیے۔

ہم نے کیا سیکھا؟

1۔ کسی مثلث کے 6 حصے (elements) ہوتے ہیں۔ 3 اضلاع اور 3 زاویے۔

2۔ کسی مثلث کے ایک راس کو اس کے متقابل ضلع کے درمیان وسطی نقطے سے ملانے والے قطعہ خط کو مثلث کا وسطانیہ کہتے ہیں۔ ایک مثلث کے تین وسطانیے ہوتے ہیں۔

3۔ کسی مثلث کے ایک راس سے اس کے متقابل ضلع پر کھینچا جانے والا عمودی خط ارتفاع کہلاتا ہے۔ایک مثلث کے تین ارتفاع ہوتے ہیں۔

4۔ جب ایک مثلث کے کسی ایک ضلع کو بڑھایا جاتا ہے۔تو بیرونی زاویہ بنتا ہے۔ ہر ایک راس پر بیرونی زاویے بنانے کے دو طریقے ہیں۔

5۔ بیرونی زاویوں کی ایک خصوصیت:

کسی مثلث کے بیرونی زاویہ کی پیمائش اس کے دونوں متقابل داخلی زاویوں کی پیمائش کے جوڑ کے برابر ہوتی ہے۔

6۔ مثلث کے زاویوں کے جوڑ والی خصوصیت۔مثلث کے تینوں زاویوں کی کل پیمائش 180° کے برابر ہوتی ہے۔

7۔ ایک مثلث مساوی الاضلاع مثلث کہلاتا ہے اگر اس کے ہر ضلع کی لمبائی ایک ہی ہے۔مساوی الاضلاع مثلث کے ہر ایک زاویہ کی پیمائش 60° ہوتی ہے۔

8۔ ایک مثلث مساوی الساقین مثلث کہلاتا ہے، اگر اس کے کسی بھی دو اضلاع کی لمبائی برابر ہو۔

مساوی الساقین مثلث کی غیر برابر ضلع کو اس کا قاعدہ کہتے ہیں۔ایک مساوی الساقین مثلث کے قاعدہ پر بنے دونوں زاویوں کی پیمائش آپس میں برابر ہوتی ہے۔

9۔ مثلث کے اضلاع کی لمبائی کی خصوصیت:

ایک مثلث کے کسی بھی دو اضلاع کی لمبائیوں کا جوڑ تیسرے ضلع کی لمبائی سے بڑا ہوتا ہے۔

مثلث کے کسی بھی دو اضلاع کی لمبائیوں کا فرق تیسرے ضلع کی لمبائی سے چھوٹا ہوتا ہے۔

اس خصوصیت کا استعمال یہ جاننے کے لیے کیا جاتا ہے کہ اگر تین اضلاع کی لمبائیاں معلوم ہیں تو کیا ان اضلاع کی مدد سے مثلث بن سکتا ہے یا نہیں۔

10۔ زاویہ قائمہ مثلث کے زاویہ قائمہ کے متقابل ضلع کو وتر کہتے ہیں اور باقی دو ضلعوں کو بازو کہتے ہیں۔

11۔ **فیثا غورث کی خصوصیت:**

قائمہ زاوی مثلث میں

وتر پر بنا مربع = دونوں بازوں پر بنے مربعوں کا جوڑ

اگر مثلث قائمہ زاوی مثلث نہیں ہے تو یہ خصوصیت لاگو نہیں ہوتی۔اس خصوصیت کا استعمال یہ طے کرنے کے لیے بھی کیا جاسکتا ہے کہ دیا گیا مثلث قائمہ زاوی مثلث ہے بھی یا نہیں۔