अध्याय 9
त्रिभुजों की सर्वांगसमता

9.1 इन्दर को जन्मदिन पर (उपहार) के बहुत सारे लिफाफे मिले। वह उन लिफाफों से रूपयों को निकाल कर जमाने लगा। वह सारे नोटों को अलग–अलग आकार देखकर जमा रहा था। जमाने के बाद वह नोटों को ध्यान से देखने लगा और फिर अपनी बहन से जाकर बोला दीदी सारे 50–50 के नोट बिल्कुल बराबर नाप के हैं। ऐसे ही 100–100 के नोट भी सारे एक नाप के हैं। दीदी ने कहा हाँ तुमने सही कहा। ऐसी और भी चीजें होती है जो बिल्कुल बराबर नाप व समान आकार की होती है। आप अपने आस–पास ऐसी कौन–कौनसी वस्तुएँ देखते हैं जो एक समान माप और आकार की हैं। नीचे बने चित्रों में कौनसे युग्म एक जैसे चित्रों के हैं–

आकृति 9.1

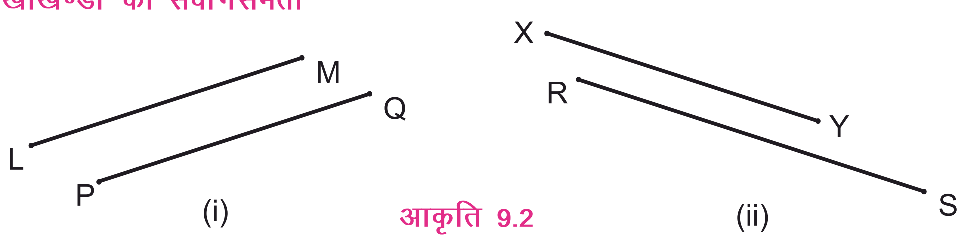
– आपने किस आधार पर एक जैसे जोड़े छाँटे ?

– ऐसे कौनसे जोड़े हैं जो एक–दूसरे को पूरा–पूरा ढ़ँक लेते हैं।

एक स्केल (पटरी) को जब दूसरे स्केल पर रखते हैं तो वे एक दूसरे को पूरा–पूरा ढ़ँक लेते हैं क्योंकि दोनों का आकार और माप समान है। इसी तरह एक ताश का पत्ता दूसरे पत्ते पर रखें तो वह एक दूसरे को पूरा–पूरा ढ़क लेता है। ऐसी आकृतियाँ जो एक दूसरे को पूरा–पूरा ढ़क लेती हैं, वे सर्वांगसम आकृतियाँ कहलाती है। सर्वांगसमता को (≅) दवारा दर्शाते हैं। क्या आपकी हिन्दी व गणित की किताबें आपस में सर्वांसगम हैं या नहीं ? साथियों से चर्चा करें ।

9.2 ज्यामितीय आकृतियों की सर्वांगसमता

9.2.1 रेखाखण्डों की सर्वांगसमता



आकृति 9.2

आकृति 9.2 में दिए गए रेखाखण्डों के दोनों जोड़ों को नाप कर देखिए आप इन रेखाखण्डों के बारे में क्या कह सकते हैं? चित्र (i) के दोनों रेखाखण्डों की लम्बाई एक समान है। अतः ये जोड़ा सर्वांगसम है। तथा चित्र (ii) में दोनों रेखाखण्ड एक समान लम्बाई को नहीं है।

अतः ये जोड़ा सर्वांगसम नहीं है। निष्कर्षतः हम यह कह सकते हैं कि दो रेखाखण्ड तभी सर्वांगसम होते हैं जब उनकी लम्बाई समान हो ।

9.2.2 कोणों की सर्वांगसमता

आकृति 9.3 में दिए गए कोणों में कोण (i) को ट्रेस पेपर पर ट्रेस कर लीजिए । अब उसे क्रमशः (ii), (iii) व (iv) पर रखकर देखिए ।

आकृति 9.3

किस कोण को ∠(i) ने ढँका ?

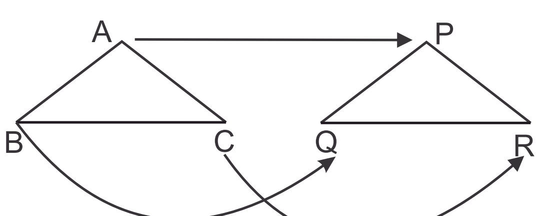
अब प्रत्येक कोण को चाँदे से मापिए। क्या सर्वांगसम कोणों के माप बराबर होते हैं। इस क्रियाकलाप से हम निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि बराबर कोण सर्वांगसम होते हैं एवं सर्वांगसम कोणों के माप समान होते हैं ।

यदि दो आकृतियाँ A व B सर्वांगसम हो तो हम लिखेंगे $A \cong B$

जैसे रेखाखण्ड AB तथा रेखाखण्ड ED सर्वांगसम हैं तो हम लिखेंगे $AB \cong ED$

इसी प्रकार यदि ∠1 व ∠2 सर्वांगसम है तो $\angle 1 \cong \angle 2$

9.2.3 त्रिभुजों की सर्वांगसमता

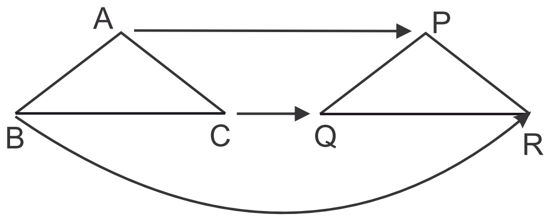


आकृति 9.4

यदि आप ΔABC को ΔPQR पर इस प्रकार से अध्यारोपित करते हैं कि A, P के उपर रखें क्या इसके शेष शीर्ष भी यथा योग्य होंगे। ऐसा होना आवश्यक नहीं । सर्वांगसमता के बारे में चर्चा करते समय न केवल कोणों की माप और भुजाओं की लम्बाईयाँ महत्व रखती है । परन्तु शीर्ष का सुमेलन भी उतना ही महत्व रखता है। ऊपर दी गई स्थिति में सुमेलन है।

$A \leftrightarrow P,\ B \leftrightarrow Q,\ C \leftrightarrow R$

हम सुमेलन को ऐसे भी लिख सकते हैं। $\Delta ABC \leftrightarrow \Delta PQR$ परन्तु यदि $A \leftrightarrow P,\ B \leftrightarrow R,\ C \leftrightarrow Q$ और तब हम लिखेंगें $\Delta ABC \leftrightarrow \Delta PRQ$



आकृति 9.5

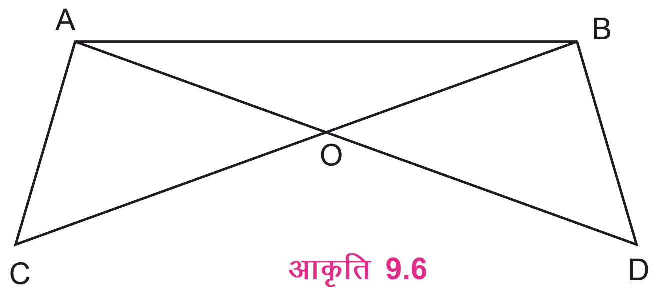
सर्वांगसमता को अच्छे ढंग से समझने के लिए चित्र ध्यान से देखिए –
यहाँ

AB ↔ PR, AC ↔PQ, BC ↔ RQ
तथा

∠A ↔ ∠P, ∠B ↔ ∠R, ∠C ↔ ∠Q

अतः त्रिभुज ABC सर्वांगसम है त्रिभुज PRQ के इसे ऐसे लिखते हैं

$\Delta ABC \cong \Delta PRQ$



आकृति 9.6

यहाँ ΔABC व ΔBAD में

∠ABC = ∠BAD, ∠ACB = ∠BDA तथा ∠BAC =∠ABD हैं।

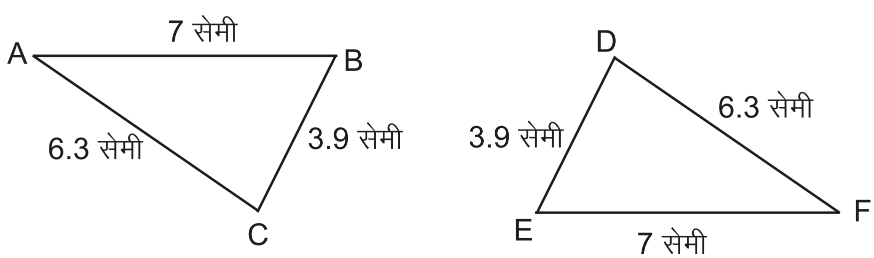
AB ↔ BA, BC ↔ AD, AC ↔ BD   अर्थात AB = BA, AC = BD तथा BC = AD

अतः $\Delta ABC \cong \Delta BAD$ हैं।

करो और सीखो

1. जब दो त्रिभुज Δ ABC और Δ PQR दिए गए हो तो उनमें आपस में छः संभव सुमेलन होते हैं दो त्रिभुजों के कट–आउट का प्रयोग करके यह सुमेलन ज्ञात कीजिए।
2. क्या सभी सुमेलन सर्वांगसमता दर्शाते हैं ? अध्यारोपित कर पता लगाइए।

उदाहरण 1 क्या $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ है ? उनके संगत कोण लिखिए।



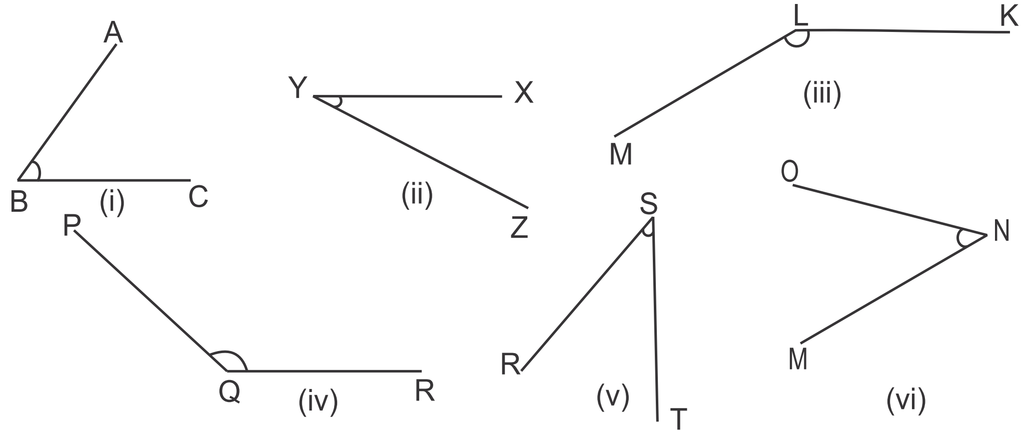
हल दिए गए चित्र में Δ ABC और Δ DEF से
AB=EF=7 सेमी, BC=DE=3.9 सेमी, AC =DF=6.3 सेमी

स्पष्टतः A बिन्दु संगत है F के
B बिन्दु संगत है E के
C बिन्दु संगत है D के
अतः $\Delta ABC \cong \Delta FED$

(यहाँ संगत कोण युग्म
$\angle A = \angle F$
$\angle B = \angle E$
$\angle C = \angle D$)

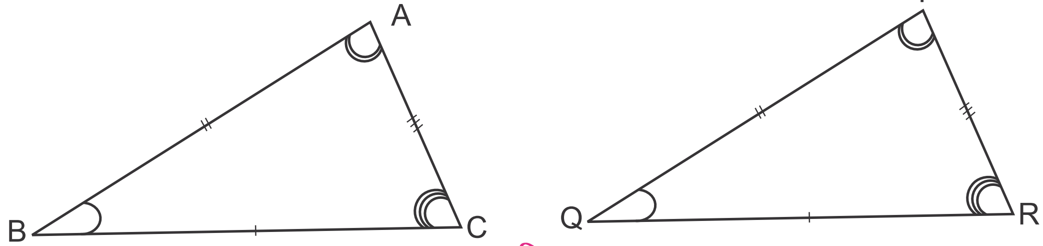
प्रश्नावली 9.1

1. यदि त्रिभुज ABC त्रिभुज PQR के सर्वांगसम हैं तो त्रिभुज के सभी संगत सर्वांगसम भागों को लिखिए।
2. यदि $\Delta LMN \cong \Delta XYZ$ हो तो उन भागों को लिखिए जो निम्न के संगत हो–
   (i) $\angle N$ (ii) LM (iii) $\angle M$ (iv) MN
3. रिक्त स्थान की पूर्ति कीजिए–
   (i) दो रेखाखण्ड सर्वांगसम होते हैं, यदि उनकी...................... समान हो ।
   (ii) दो वर्ग सर्वांगसम होते हैं, यदि उनकी.......................समान हो ।
   (iii) दो सर्वांगसम त्रिभुज ΔPQR और ΔABC में कोण $\angle P$ का माप 60^0 है, तो $\angle A$ का माप.... ....होगा ।
4. सर्वांगसम आकृतियों को आप दैनिक जीवन में कहाँ–कहाँ देखते हैं ? कोई दो उदाहरण लिखिए।
5. नीचे दिए गए चित्रों में सर्वांगसम कोणों को छाँटिए (कोण को ट्रेस कर पता कीजिए।)



(क्या आप परकार की सहायता से भी कोणों की सर्वांगसमता का पता लगा सकते हैं? करके देखिए)

9.2.3 त्रिभुजों की सर्वांगसमता के लिए प्रतिबंध

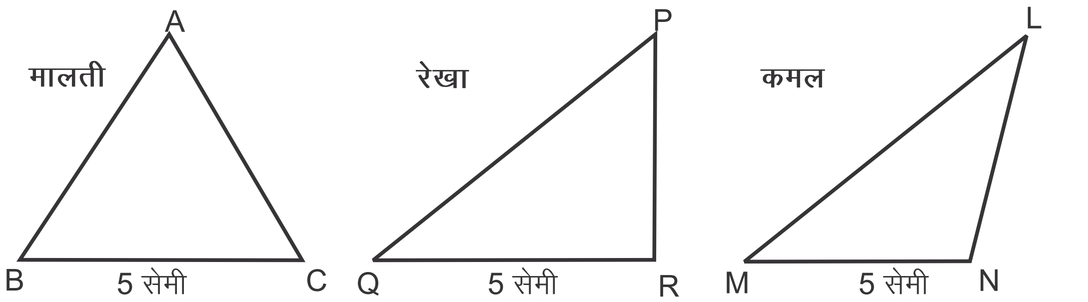


आकृति 9.7

आकृति 9.7 में दोनों त्रिभुज समान आकार व आकृति के हैं ΔABC को ट्रेसिंग पेपर से ट्रेस कर ΔPQR पर रखिए । क्या ABC तथा PQR एक दूसरे को आपस में पूरी तरह ढ़क लेते हैं ? किन्हीं दो त्रिभुजो के संगत भाग समान होने पर त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं।

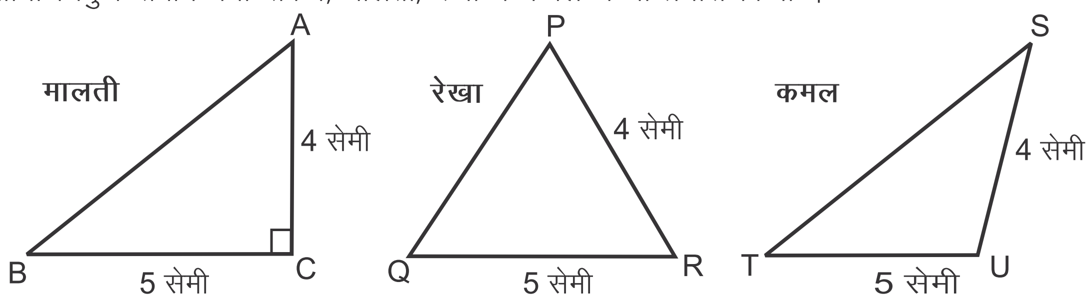
[A] SSS (भुजा–भुजा–भुजा) सर्वांगसमता

यदि आपको किसी त्रिभुज की एक भुजा का माप 5 सेमी दिया गया है तो उसे आप कैसे बनाएगें। मालती, रेखा व कमल ने इस प्रकार से त्रिभुज बनाए।



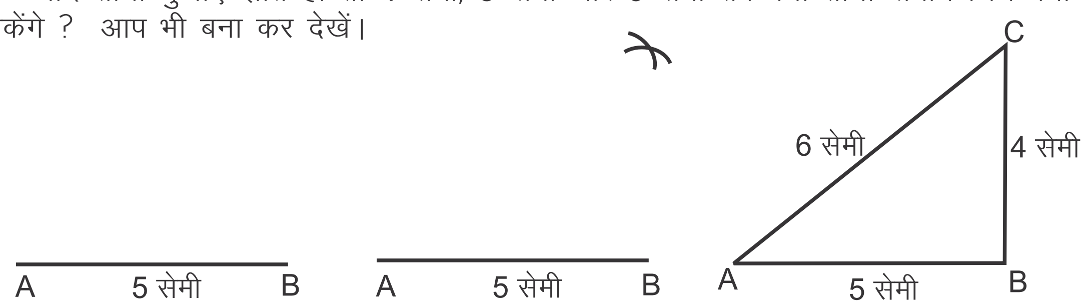
आप पाएँगे कि मालती ने समबाहु त्रिभुज, रेखा ने समकोण त्रिभुज तथा कमल ने अधिक कोण त्रिभुज बनाए।

पुनः यदि आपको त्रिभुज के दो भुजाओं के माप दे दिए जाएँ 4 सेमी तथा 5 सेमी तब क्या आप तीनों त्रिभुज समान बना सकेंगे, मालती, रेखा व कमल ने भी प्रयास किया ।



आप पाएँगे कि इस स्थिति में भी त्रिभुज अलग–अलग बन गए हैं।

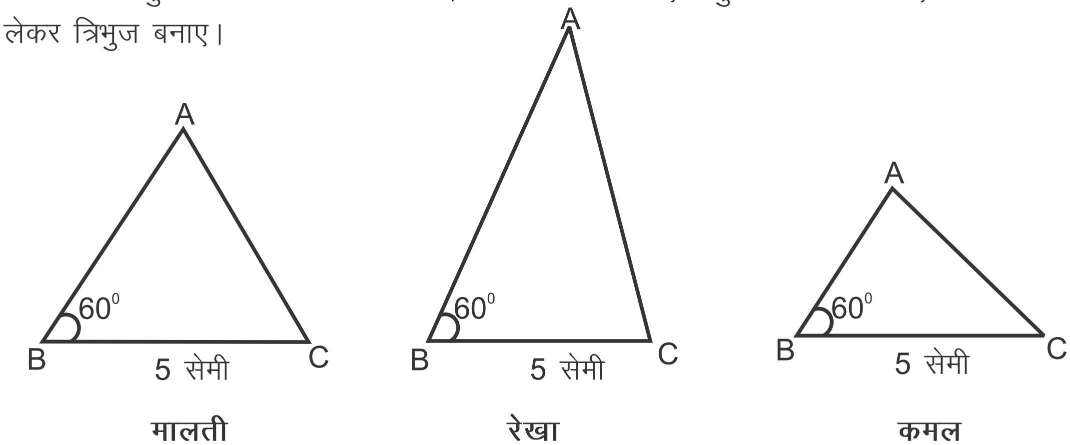
यदि तीनों भुजाएँ ज्ञात हो तो 4 सेमी, 5 सेमी और 6 सेमी तब क्या तीनों समान चित्र बना सकेंगे ? आप भी बना कर देखें।



इस प्रकार मालती, रेखा तथा कमल तीनों द्वारा बनाए गए त्रिभुज समान है तथा इन त्रिभुजों की संगत भुजाएँ समान माप की है।

SSS नियम– यदि एक त्रिभुज की तीनों भुजाएँ दूसरे त्रिभुज की तीनों संगत भुजाओं के बराबर हो तो दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं। इसे सर्वांगसमता का भुजा–भुजा–भुजा नियम कहते हैं।

[B] SAS (भुजा–कोण–भुजा) सर्वांगसमता– हमने देखा कि एक या दो भुजाओं की सहायता से दो सर्वांगसम त्रिभुज नहीं बनाए जा सकते हैं। यदि एक कोण एवं एक भुजा दी गई हो तो क्या दो सर्वांगसम त्रिभुज बना सकते हैं ? मालती, रेखा व कमल ने एक भुजा 5 सेमी और एक कोण 60^0 लेकर त्रिभुज बनाए।



आकृति 9.8

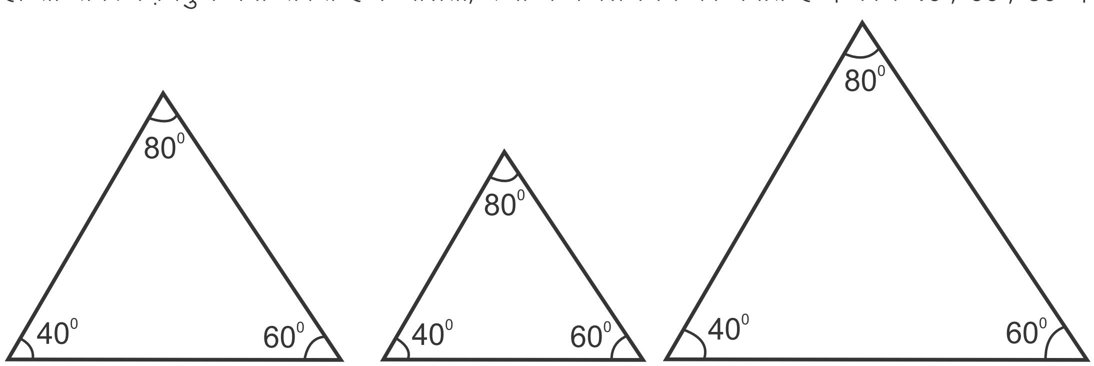
तीनों ने कोण वाली भुजा की लम्बाई अलग–अलग लेते हुए अलग–अलग नाप के त्रिभुज बना लिए। यदि हम इस त्रिभुज में आधार BC के अतिरिक्त AB की लम्बाई भी निश्चित कर देते हैं AB = 4 सेमी तब आप पाएँगे कि बनने वाले सभी त्रिभुज सर्वांगसम बनेंगे।

अर्थात् यदि Δ ABC के समान Δ PQR बनाना चाहते हैं। तो हमें दो भुजाओं की लम्बाई एवं उनके बीच का कोण ज्ञात होना आवश्यक है।

SAS नियम– यदि एक त्रिभुज की दो भुजाएँ, उनसे बना कोण क्रमशः दूसरे त्रिभुज की दो भुजाएँ और उनसे बने कोण के समान हो तो दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होंगे।

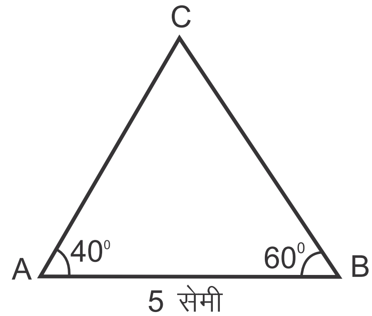
[C] कोण–भुजा–कोण (ASA) सर्वांगसमता

यदि त्रिभुज का एक कोण ज्ञात हो तो त्रिभुज बना सकते हो क्या ? यदि त्रिभुज के सभी कोण ज्ञात हो तो समरूप त्रिभुज बना सकते हैं ? मालती, रेखा व कमल चित्र को बनाते हैं । कोण 40^0, 60^0, 80^0 ।



इसलिए त्रिभुज के सभी कोण समरूप हैं परन्तु भुजाएँ समान नहीं है अतः हमें भुजाओं की लम्बाई ज्ञात होनी चाहिए। यदि सर्वांगसम त्रिभुज बनाने के लिए दो कोण व उनके बीच की भुजा ज्ञात हो तो ?

तीनों बच्चों ने पुनः त्रिभुज बनाने के लिए AB = 5 सेमी, $\angle A = 40^0$ तथा $\angle B = 60^0$ के कोण बनाए। इस बार सभी त्रिभुज एक समान प्राप्त होते हैं । अर्थात् सर्वांगसम त्रिभुज बनाने हेतु एक भुजा व दो कोणों के मापों की आवश्यकता होगी ।



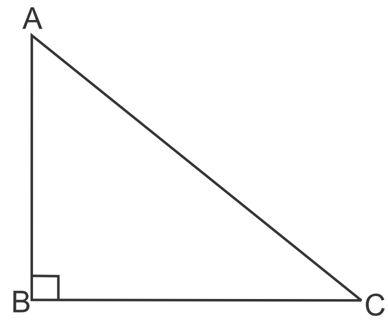
ASA नियम– यदि किसी एक त्रिभुज की एक भुजा व उस पर बने कोण, दूसरे त्रिभुज की संगत भुजा एवं उस पर बने कोणों के बराबर हो तो दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होंगे।

[D] समकोण–कर्ण–भुजा (RHS) सर्वांगसमता

दो समकोण त्रिभुजों में एक बात हमें पता है कि इनके समकोण बराबर होते हैं तब और क्या पता हो कि हम इनकी सर्वागसमता की जाँच कर सकें।

निम्न 3 स्थितियाँ संभव है–

1. शेष दो संगत कोण बराबर हो ।
2. समकोण के इर्द–गिर्द दोनों भुजाएँ ज्ञात हो ।
3. कर्ण तथा एक अन्य भुजा ज्ञात हो ।

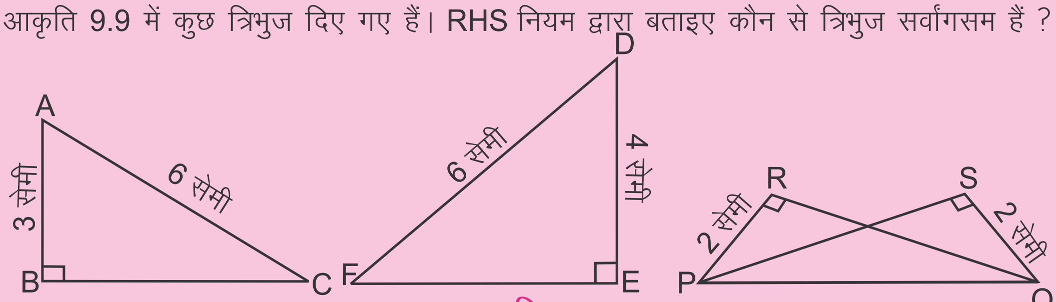


हम देखते हैं कि प्रथम स्थिति (AAA) से सर्वांगसमता सिद्ध नहीं की जा सकती है। दूसरी स्थिति में दो भुजाएँ ज्ञात होने पर तीसरी भुजा ज्ञात की जा सकती है। अतः यहाँ SSS अथवा SAS से सर्वांगसमता सिद्ध की जा सकती है। परन्तु तीसरी स्थिति समकोण त्रिभुज के लिए विशिष्ट है। इसे समकोण – कर्ण – भुजा (RHS) नियम कहते हैं।

RHS नियम– यदि एक समकोण त्रिभुज की एक भुजा और कर्ण दूसरे समकोण त्रिभुज की एक भुजा एवं कर्ण के समान हो तो दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं ।

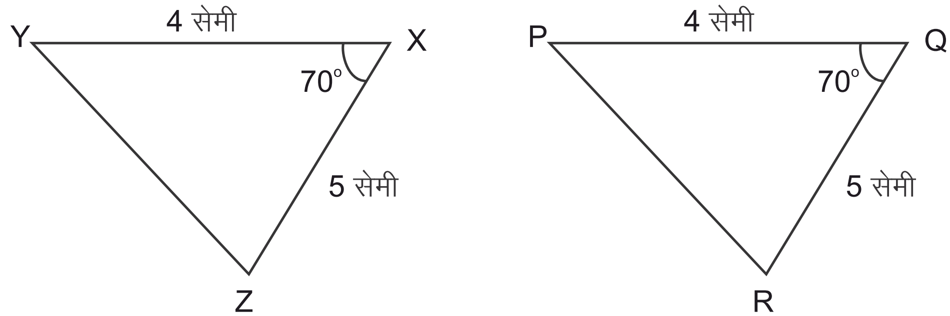
करो और सीखो

आकृति 9.9 में कुछ त्रिभुज दिए गए हैं। RHS नियम द्वारा बताइए कौन से त्रिभुज सर्वागसम हैं ?



आकृति 9.9

उदाहरण 2 नीचे दिए गए त्रिभुज के मापों के आधार पर बताइए कि क्या त्रिभुज सर्वांगसम हैं ? इनमें संगत कोण कौन–कौन से हैं ?



हल Δ XYZ और Δ PQR में XY = PQ और XZ = QR और कोण $\angle X = \angle Q$

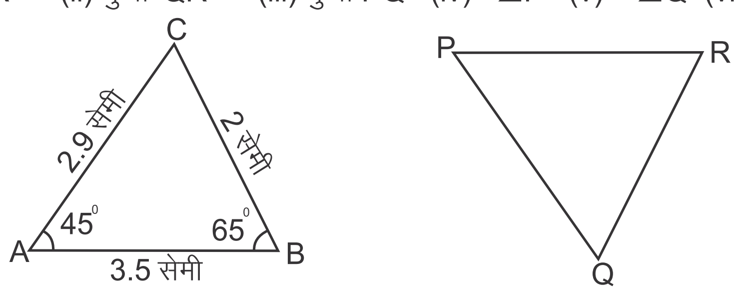
$\therefore \Delta YXZ \cong \Delta PQR$

अतः संगत कोण इस प्रकार $\angle X \leftrightarrow \angle Q, \angle Y \leftrightarrow \angle P, \angle Z \leftrightarrow \angle R$

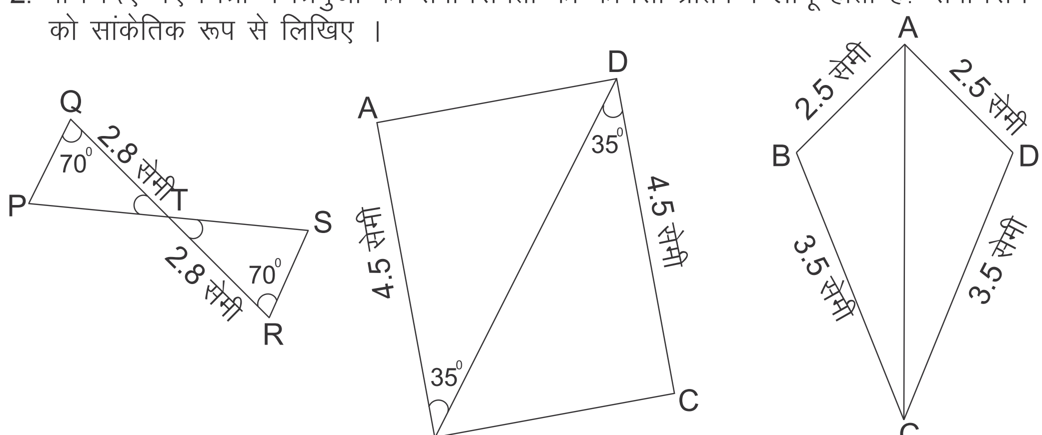
प्रश्नावली 9.2

1. दिए गए चित्र में $\Delta ABC \cong \Delta PRQ$ हो तो निम्न का मान ज्ञात कीजिए।

(i) भुजा PR (ii) भुजा QR (iii) भुजा PQ (iv) $\angle P$ (v) $\angle Q$ (vi) $\angle R$



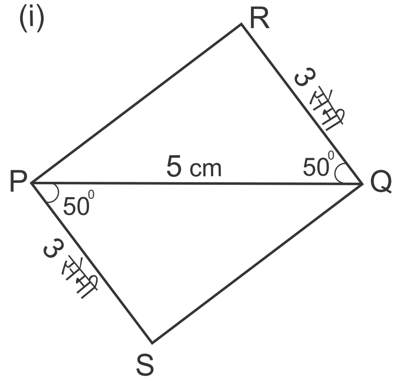
2. नीचे दिए गए चित्रों में त्रिभुजों की सर्वांगसमता का कौनसा प्रतिबन्ध लागू होता है? सर्वांगसम त्रिभुजों को सांकेतिक रूप से लिखिए ।



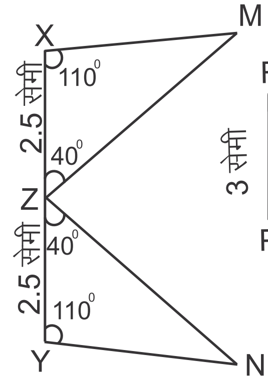
(i) (ii) (iii)

3. नीचे दिए गए त्रिभुज के जोड़ों में से कौनसे जोड़े सर्वांगसम है लिखिए ।

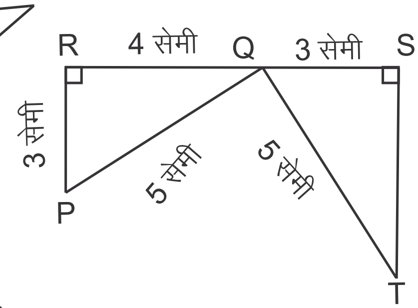
(i)



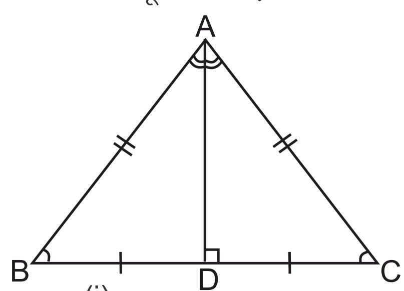
(ii)



(iii)

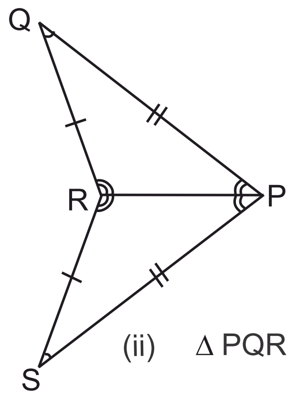


4. कथन को पूरा कीजिए।



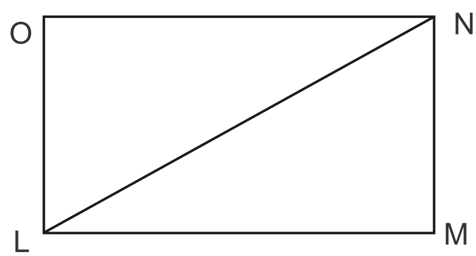
(i)

Δ ADB $\cong$?



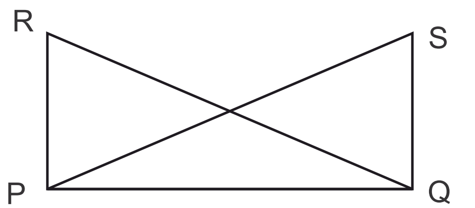
(ii) Δ PQR $\cong$?

5. दिए गए चित्र में MNOL एक आयत है तो क्या Δ NOL $\cong$ Δ LMN ? यदि हाँ तो कारण बताइए।

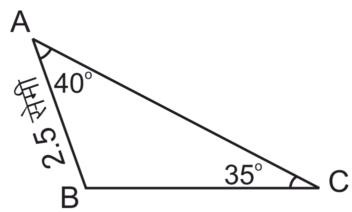


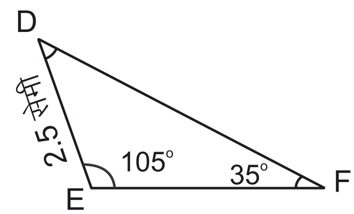
6. दिए गए चित्र में Δ PQR तथा ΔPQS में भुजा PR = भुजा QS, तथा RQ = PS तब बताइए कौनसा कथन सत्य है ।

(i) Δ PQR $\cong$ Δ PQS (ii) Δ PQR $\cong$ Δ QPS (iii) Δ PQR $\cong$ Δ QSP



7. दिए गए चित्र में ΔABC में $\angle A = 40^0, \angle C = 35^0$ तथा भुजा AB = 2.5 सेमी है, तथा ΔDEF में $\angle F = 35^0, \angle E = 105^0$ एवं भुजा DE = 2.5 सेमी हो तो बताइए क्या $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ है।





हमने सीखा

1. सर्वांगसम त्रिभुज समान आकार और समान माप के होते हैं ।
2. त्रिभुजों की सर्वांगसमता जाँचने के लिए उनकी प्रतिलिपियों को एक–दूसरे पर अध्यारोपित करने का तरीका इस्तेमाल किया जा सकता है ।
3. यदि त्रिभुज के सभी भाग, दूसरे त्रिभुज के संगत भाग के समान हों तो वे त्रिभुज एक दूसरे के सर्वांगसम कहलाएँगे ।
4. दो त्रिभुजों की सर्वांगसमता दर्शाने के लिए आवश्यक व सम्पूर्ण नियम इस प्रकार है–

(i) भुजा–भुजा–भुजा (SSS) नियम– यदि एक त्रिभुज की तीनों भुजाएँ दूसरे त्रिभुज की तीनों भुजाओं के बराबर हो तो दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं ।

(ii) भुजा–कोण–भुजा (SAS) नियम– यदि एक त्रिभुज की दो भुजाएँ और अंतर्गत कोण दूसरे त्रिभुज की दो संगत भुजाओं और उनके मध्य कोण के बराबर हो, तो वे त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं ।

(iii) कोण–भुजा–कोण (ASA) नियम– यदि एक त्रिभुज के दो कोण और उनके मध्य की भुजा दूसरे त्रिभुज के दो कोण एवं उसके मध्य भुजा के बराबर हो तो दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं ।

(iv) समकोण–कर्ण–भुजा (RHS) नियम– यदि किसी समकोण त्रिभुज का कर्ण और एक अन्य भुजा किसी दूसरे समकोण त्रिभुज के कर्ण व एक अन्य भुजा के समान हो तो समकोण त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं ।