

Chapter – 7

அணிகளும் அணிக்கோவைகளும்

Ex 7.1

Question 1.

$$(i) a_{ij} = \frac{(i-2j)^2}{2} \quad m = 2, n = 3$$

(ii) $a_{ij} = \frac{|3i-4j|}{4}$, $m = 3, n = 4$ என இருக்குமாறு: உறுப்புகளைக் கொண்ட $m \times n$ வரிசை உடைய $A = [a_{ij}]$ அணிகளை உருவாக்குக.

தீர்வு:

$$(i) a_{ij} = \frac{(i-2j)^2}{2} \quad m = 2, n = 3$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

$$\therefore a_{11} = \frac{(1-2 \times 1)^2}{2} = \frac{(1-2)^2}{2} = \frac{(-1)^2}{2} = \frac{1}{2}$$

$$a_{12} = \frac{(1-2 \times 2)^2}{2} = \frac{(1-4)^2}{2}$$

$$= \frac{(-3)^2}{2} = \frac{9}{2}$$

$$a_{13} = \frac{(1-2 \times 3)^2}{2} = \frac{(1-6)^2}{2}$$

$$= \frac{(-5)^2}{2} = \frac{25}{2}$$

$$a_{21} = \frac{(2-2 \times 1)^2}{2} = \frac{(2-2)^2}{2} = \frac{0}{2} = 0$$

$$a_{22} = \frac{(2-2 \times 2)^2}{2} = \frac{(2-4)^2}{2}$$

$$= \frac{(-2)^2}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$a_{23} = \frac{(2-2 \times 3)^2}{2} = \frac{(2-6)^2}{2}$$

$$= \frac{(-4)^2}{2} = \frac{16}{2} = 8$$

$$\therefore A_{ij} = [a_{ij}] = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{9}{2} & \frac{25}{2} \\ 0 & 2 & 8 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 9 & 25 \\ 0 & 4 & 16 \end{pmatrix}$$

$$(ii) a_{ij} = \frac{|3i-4j|}{4}, m=3, n=4$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$$

$$a_{11} = \frac{|3 \times 1 - 4 \times 1|}{4} = \frac{|3-4|}{4} = \frac{|-1|}{4} = \frac{1}{4}$$

$$a_{12} = \frac{|3 \times 1 - 4 \times 2|}{4} = \frac{|3-8|}{4} = \frac{|-5|}{4} = \frac{5}{4}$$

$$a_{13} = \frac{|3 \times 1 - 4 \times 3|}{4} = \frac{|3-12|}{4} = \frac{|-9|}{4} = \frac{9}{4}$$

$$a_{14} = \frac{|3 \times 1 - 4 \times 4|}{4} = \frac{|3-16|}{4} = \frac{|-13|}{4} = \frac{13}{4}$$

$$a_{21} = \frac{|3 \times 2 - 4 \times 1|}{4} = \frac{|6-4|}{4} = \frac{|2|}{4} = \frac{2}{4}$$

$$a_{22} = \frac{|3 \times 2 - 4 \times 2|}{4} = \frac{|6-8|}{4} = \frac{|-2|}{4} = \frac{2}{4}$$

$$a_{23} = \frac{|3 \times 2 - 4 \times 3|}{4} = \frac{|6-12|}{4} = \frac{|-6|}{4} = \frac{6}{4}$$

$$a_{24} = \frac{|3 \times 2 - 4 \times 4|}{4} = \frac{|6-16|}{4} = \frac{|-10|}{4} = \frac{10}{4}$$

$$a_{31} = \frac{|3 \times 3 - 4 \times 1|}{4} = \frac{|9 - 4|}{4} = \frac{|5|}{4} = \frac{5}{4}$$

$$a_{32} = \frac{|3 \times 3 - 4 \times 2|}{4} = \frac{|9 - 8|}{4} = \frac{1}{4}$$

$$a_{33} = \frac{|3 \times 3 - 4 \times 3|}{4} = \frac{|9 - 12|}{4} = \frac{|-3|}{4} = \frac{3}{4}$$

$$a_{34} = \frac{|3 \times 3 - 4 \times 4|}{4} = \frac{|9 - 16|}{4} = \frac{|-7|}{4} = \frac{7}{4}$$

$$\therefore A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{5}{4} & \frac{9}{4} & \frac{13}{4} \\ \frac{2}{4} & \frac{2}{4} & \frac{6}{4} & \frac{10}{4} \\ \frac{5}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{7}{4} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 5 & 9 & 13 \\ 2 & 2 & 6 & 10 \\ 5 & 1 & 3 & 7 \end{bmatrix}$$

Question 2.

$$\begin{bmatrix} p^2 - 1 & 0 & -31 - q^3 \\ 7 & r + 1 & 9 \\ -2 & 8 & s - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 7 & \frac{3}{2} & 9 \\ -2 & 8 & -\pi \end{bmatrix} \text{ எனில், } p, q, r, s \text{ ஆகியவற்றின்}$$

மதிப்புகளைக் காண்க.

தீர்வு :

$$p^2 - 1 = 1$$

$$p^2 = 1 + 1 = 2 \Rightarrow p = \pm\sqrt{2}$$

$$-31 - q^3 = -4$$

$$\Rightarrow -q^3 = -4 + 31 = 27 = 3^3$$

$$\Rightarrow q = -3$$

$$r + 1 = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow r = \frac{3}{2} - 1 = \frac{3-2}{2} = \frac{1}{2}$$

$$s - 1 = -\pi$$

$$s = -\pi + 1 = 1 - \pi$$

$$\therefore p = \pm\sqrt{2}, q = -3, r = \frac{1}{2}, s = 1 - \pi.$$

Question 3.

$$\begin{bmatrix} 2x + y & 4x \\ 5x - 7 & 4x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 7y - 13 \\ y & x + 6 \end{bmatrix} \text{ எனில், } x + y \text{ ஐ காண்க.}$$

தீர்வு :

$$2x + y = 7 \dots\dots (1)$$

$$7y - 13 = 4x$$

$$\Rightarrow 4x - 7y = -13 \dots\dots\dots (2)$$

$$(1), (2) \text{ லிருந்து } \begin{array}{rcl} 4x - 7y & = & -13 \end{array}$$

$$(1) \times 2 \Rightarrow \begin{array}{rcl} 4x + 2y & = & 14 \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{rcl} (-) & (-) & (-) \\ \hline \cancel{4x} & - 9y & = \cancel{14} - 27 \end{array}$$

$$y = \frac{27}{9} = 3$$

$y = 3$ என (1)-ல் பிரதியிட,

$$2x + 3 = 7 \Rightarrow 2x = 7 - 3 = 4$$

$$x = 2$$

$$\therefore x + y = 2 + 3 = 5$$

Question 4.

$$2A - B = \begin{bmatrix} 6 & -6 & 0 \\ -4 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 8 \end{bmatrix} = 0 \text{ மற்றும்}$$

$A - 2B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 8 \\ -2 & 1 & -7 \end{bmatrix}$ என்ற அணிச்சமன்பாடுகளை நிறைவு செய்யும், A, B என்ற அணிகளைக் காண்க.

தீர்வு:

$$A - 2B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 8 \\ -2 & 1 & -7 \end{bmatrix} \dots\dots(1)$$

$$2A - B = \begin{bmatrix} 6 & -6 & 0 \\ -4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \dots\dots(2)$$

$$(1) \times 2 \Rightarrow 2A - 4B = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 16 \\ -4 & 2 & -14 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{r} 2A - B = \begin{bmatrix} -6 & 6 & 0 \\ 4 & -2 & -1 \end{bmatrix} \\ (-) \quad (+) \quad (-) \end{array}$$

$$-3B = \begin{bmatrix} (6+6) & (4-6) & (16-0) \\ (-4-4) & (2+2) & (-14+1) \end{bmatrix}$$

$$-3B = \begin{bmatrix} 12 & -2 & 16 \\ -8 & 4 & -13 \end{bmatrix}$$

$$B = -\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 12 & -2 & 16 \\ -8 & 4 & -13 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -12 & 2 & -16 \\ 8 & -4 & 13 \end{bmatrix}$$

$$A - 2B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 8 \\ -2 & 1 & -7 \end{bmatrix}$$

$$(2) \times 2 \Rightarrow \begin{array}{r} 4A - 2B = \begin{bmatrix} -12 & 12 & 0 \\ 8 & -4 & -2 \end{bmatrix} \\ (-) \quad (+) \quad (-) \end{array}$$

$$-3A = \begin{bmatrix} (3+12) & (2-12) & (8-0) \\ (-2-8) & (1+4) & (-7+2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & -10 & 8 \\ -10 & 5 & -5 \end{bmatrix}$$

$$A = \frac{1}{-3} \begin{bmatrix} 15 & -10 & 8 \\ -10 & 5 & -5 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -15 & 10 & -8 \\ 10 & -5 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \text{தீர்வு: } A = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -15 & 10 & -8 \\ 10 & -5 & 5 \end{bmatrix}$$

$$B = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -12 & 2 & -16 \\ 8 & -4 & 13 \end{bmatrix}$$

Question 5.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ எனில், } A^4 \text{ -இ காண்க}$$

தீர்வு:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^4 = A A A A$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (1 \times 1 + a \times 0) & (1 \times a + a \times 1) \\ (0 \times 1 + 1 \times 0) & (0 \times a + 1 \times 1) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (1 + 0) & (a + a) \\ (0 + 0) & (0 + 1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A^4 &= A^2 A^2 \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 2a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2a \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} ((1 \times 1) + (2a \times 0)) & (2a + 2a) \\ (0 + 0) & (0 + 1) \end{bmatrix} \\
\therefore A^4 &= \begin{bmatrix} 1 & 4a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Question 6.

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \text{ எனில்,}$$

(i) $A_\alpha A_\beta = A_{\alpha+\beta}$ என நிறுவுக.

(ii) $A_\alpha + A_\alpha^T = I$ என்ற நிபந்தனையை நிறைவு செய்யும் என் அனைத்து மெய் மதிப்புகளையும் காண்க.

தீர்வு:

$$(i) A_\alpha = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

$$A_\beta = \begin{bmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
A_\alpha A_\beta &= \begin{bmatrix} (\cos \alpha \cos \beta) + (-\sin \alpha \sin \beta) & [-\cos \alpha \sin \beta - \sin \alpha \cos \beta] \\ (\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta) & (-\sin \alpha \sin \beta + \cos \alpha \cos \beta) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta) & -(\cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta) \\ (\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta) & (\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cos(\alpha + \beta) & -\sin(\alpha + \beta) \\ \sin(\alpha + \beta) & \cos(\alpha + \beta) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$(ii) A_{\alpha} + A_{\alpha}^T = I$$

$$A_{\alpha} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

$$A_{\alpha}^T = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} A_{\alpha} + A_{\alpha}^T &= \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2 \cos \alpha & 0 \\ 0 & 2 \cos \alpha \end{bmatrix} = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$2 \cos \alpha = 1$$

$$\Rightarrow \cos \alpha = \frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \alpha = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}, n \in \mathbb{Z}$$

Question 7.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & x \end{bmatrix} \text{ மற்றும் } (A - 2I) (A - 3I) = 0 \text{ எனில், } x \text{ ன் மதிப்பைக் காண்க.}$$

தீர்வு:

$$\begin{aligned} (A - 2I) &= \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & x \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & x \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & x - 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (A - 3I) &= \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & x \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & x \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & x - 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$(A - 2I) (A - 3I) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & x - 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & x - 3 \end{pmatrix} = 0 \text{ என தரப்பட்டுள்ளது.}$$

$$\begin{bmatrix} (2-2) & 4+(2x-6) \\ 1-(x-2) & 2+(x-2)(x-3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$4 + 2x - 6 = 0$$

$$2x - 2 = 0$$

$$x = 1$$

Question 8.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & b & -1 \end{bmatrix} \text{ எனில், } A^2 \text{ என்பது அலகு அணியாகும் என நிறுவுக.}$$

தீர்வு :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & b & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} A^2 = A.A &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & b & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & b & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1+0+0 & 0+0+0 & 0+0+0 \\ 0+0+0 & 0+1+0 & 0+0+0 \\ a+0-a & 0+b-b & 0+0+1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I \text{ எனவே நிரூபிக்கப்பட்டது.}$$

Question 9.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \text{ மற்றும் } A^3 - 6A^2 + 7A + kI = 0, \text{ எனில், } k \text{ -ஐ காண்க.}$$

தீர்வு :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = AAA$$

$$A^2 = AA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} (1+0+4) & (0+0+0) & (2+0+6) \\ (0+0+2) & (0+4+0) & (0+2+3) \\ (2+0+6) & (0+0+0) & (4+0+9) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 8 \\ 2 & 4 & 5 \\ 8 & 0 & 13 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 8 \\ 2 & 4 & 5 \\ 8 & 0 & 13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (5+0+16) & (0+0+0) & (10+0+24) \\ (2+0+10) & (0+8+0) & (4+4+15) \\ (8+0+26) & (0+0+0) & (16+0+39) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 21 & 0 & 34 \\ 12 & 8 & 23 \\ 34 & 0 & 55 \end{bmatrix}$$

$$A^3 - 6A^2 + 7A + kI$$

$$= \begin{bmatrix} 21 & 0 & 34 \\ 12 & 8 & 23 \\ 34 & 0 & 55 \end{bmatrix} - 6 \begin{bmatrix} 5 & 0 & 8 \\ 2 & 4 & 5 \\ 8 & 0 & 13 \end{bmatrix} + 7$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} 21 & 0 & 34 \\ 12 & 8 & 23 \\ 34 & 0 & 55 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 30 & 0 & 48 \\ 12 & 24 & 30 \\ 48 & 0 & 78 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & 0 & 14 \\ 0 & 14 & 7 \\ 14 & 0 & 21 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix} = 0 \\
& \begin{bmatrix} (21-30+7+k) & (0+0+0+0) & (34-48+14+0) \\ (12-12+0+0) & (8-24+14+k) & (23-30+7+0) \\ (34-48+14+0) & (0+0+0+0) & (55-78+21+k) \end{bmatrix} \\
& = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
\Rightarrow & \begin{aligned} & 21 - 30 + 7 + k = 0 \\ & -2 + k = 0 \\ & \boxed{k = 2} \end{aligned}
\end{aligned}$$

Question 10.

பின்வரும் நிபந்தனைகள் ஒவ்வொன்றையும் நிறைவு செய்யும் அணிகளுக்கான எடுத்துக்காட்டுகளைத் தருக.

- (i) $AB \neq BA$ எனுமாறுள்ள A மற்றும் B அணிகள்.
- (ii) $AB = 0 = BA$, $A \neq 0$ மற்றும் $B \neq 0$ எனுமாறுள்ள A , B அணிகள்.
- (ii) $AB = 0$ மற்றும் $BA \neq 0$ எனுமாறுள்ள A , B அணிகள்

தீர்வு :

$AB \neq BA$

$$(i) A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
AB &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2-2) & (1+0) \\ (0+1) & (0+0) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \dots\dots\dots(1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 BA &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2+0) & (4-1) \\ (-1+0) & (-2+0) \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \quad \dots (2)
 \end{aligned}$$

(1) $\neq$ (2)

(ii) $AB = 0 = BA, A \neq 0, B \neq 0$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 AB &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} (-1+1) & (1-1) \\ (-1+1) & (1-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 BA &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} (-1+1) & (-1+1) \\ (1-1) & (1-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0
 \end{aligned}$$

$\therefore AB = 0 = BA$ எனவே நிரூபிக்கப்பட்டது.

(iii)

$AB = 0$ மற்றும் $BA \neq 0$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 AB &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} (-1+1) & (-2+2) \\ (-1+1) & (-2+2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 BA &= \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} (-1-2) & (-1-2) \\ (1+2) & (1+2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \neq 0
 \end{aligned}$$

$AB = 0, BA \neq 0.$

Question 11.

$$f(x) = \begin{bmatrix} \cos x & -\sin x & 0 \\ \sin x & \cos x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ எனில், } f(x)f(y) = f(x+y) \text{ என நிறுவுக.}$$

தீர்வு :

$$\begin{aligned} f(x) \cdot f(y) &= \begin{bmatrix} \cos x & -\sin x & 0 \\ \sin x & \cos x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos y & -\sin y & 0 \\ \sin y & \cos y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (\cos x \cos y - \sin x \sin y + 0) \\ (\sin x \cos y + \cos x \sin y + 0) \\ (0 + 0 + 0) \\ (-\cos x \sin y - \sin x \cos y + 0) & (0 + 0 + 0) \\ (-\sin x \sin y + \cos x \cos y + 0) & (0 + 0 + 0) \\ (0 + 0 + 0) & (0 + 0 + 1) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos(x+y) & -\sin(x+y) & 0 \\ \sin(x+y) & \cos(x+y) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= f(x+y) \end{aligned}$$

எனவே $f(x) f(y) = f(x+y)$ என நிரூபிக்கப்பட்டது.

Question 12.

A என்பது $A^2 = A$ என்றவாறுள்ள ஒரு சதுர அணி எனில், $7A - (I + A)^3$ -ன் மதிப்புக் காண்க. தீர்வு :

$$\begin{aligned} 7A - (I + A)^3 &= 7A [I^3 + A^3 + 3A(I + A)] \\ &= 7A - [I + A + 3A + 3A] \\ &= 7A - [I + 7A] \\ &= 7A - I - 7A \\ &= -I \end{aligned}$$

Question 13.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \text{ எனில், } C = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

[1 -1] எனில், $A(B + C) = AB + AC$, எனும் பண்பினைச் சரிபார்க்க.

தீர்வு :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$B + C = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 1 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} A(B + C) &= \begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 1 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 14+0-15 & 16+0-3 \\ 7+4+25 & 8+4+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 13 \\ 36 & 17 \end{bmatrix} \dots(1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} AB &= \begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (6+0-12) & (2+0-6) \\ (3-4+20) & (1+0+10) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -4 \\ 19 & 11 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$AC = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (8+0-3) & (14+0-3) \\ (4+8+5) & (7+4-5) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 17 \\ 17 & 6 \end{bmatrix}$$

$$AB + AC = \begin{pmatrix} -6 & -4 \\ 19 & 11 \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 17 \\ 17 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 13 \\ 36 & 17 \end{bmatrix} \dots\dots(2)$$

$$(1) = (2)$$

∴ A(B + C) = AB + AC என்பது சரிபார்க்கப்பட்டது.

Question 14.

$$A \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & -8 & -9 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} \text{ என்ற அணியை சமன்பாட்டினை நிறைவு செய்யும்}$$

A என்ற அணியைக் காண்க.

தீர்வு :

தீர்வு :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \text{ என்க.}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & -8 & -9 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

$$1a_{11} + 4a_{12} = -7 \quad \dots (1)$$

$$2a_{11} + 5a_{12} = -8 \quad \dots (2)$$

$$(1) \times 2 \Rightarrow 2a_{11} + 8a_{12} = -14$$

$$\begin{array}{r} (-) \quad (-) \quad (+) \\ \hline \end{array}$$

$$-3a_{12} = 6$$

$$a_{12} = \frac{6}{-3} = -2$$

$$a_{12} = -2 \text{ என (1)-ல் பிரதியிட}$$

$$a_{11} + 4a_{12} = -7$$

$$a_{11} + 4 \times -2 = -7$$

$$a_{11} - 8 = -7$$

$$a_{11} = -7 + 8 = 1$$

$$1a_{21} + 4a_{22} = 2 \quad \dots (3)$$

$$2a_{21} + 5a_{22} = 4 \quad \dots (4)$$

$$(3) \times 2 \Rightarrow 2a_{21} + 8a_{22} = 4$$

$$\begin{array}{r} (-) \quad (-) \quad (-) \\ \hline \end{array}$$

$$-3a_{22} = 0$$

$$a_{22} = 0$$

$a_{22} = 0$ என (3)ல் பிரதியிட

$$1a_{21} + 4 \times 0 = 2 \dots\dots(3)$$

$$a_{21} = 2 \dots\dots(4)$$

$$\therefore A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Question 15.

$$A^T = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \text{ மற்றும் } B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 7 & 5 & -2 \end{bmatrix} \text{ பின்வருவனவற்றைச் சரிபார்க்க.}$$

$$(i) (A + B)^T = A^T + B^T = B^T + A^T$$

$$(ii) (A - B)^T = A^T - B^T$$

$$(iii) (B^T)^T = B.$$

தீர்வு :

$$(i) A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 5 & 0 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 7 & 5 & -2 \end{bmatrix}$$

$$(A + B) = \begin{bmatrix} (4 + 2) & (-1 - 1) & (2 + 1) \\ (5 + 7) & (0 + 5) & (3 - 2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 3 \\ 12 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(A + B)^T = \begin{bmatrix} 6 & 12 \\ -2 & 5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \dots\dots\dots(1)$$

$$B^T = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ -1 & 5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 A^T + B^T &= \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ -1 & 5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 6 & 12 \\ -2 & 5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \dots\dots\dots(2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B^T + A^T &= \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ -1 & 5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 6 & 12 \\ -2 & 5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \dots\dots\dots(3)
 \end{aligned}$$

$$(1) = (2) = (3)$$

∴ எனவே $(A + B)^T = A^T + B^T = B^T + A^T$ என நிரூபிக்கப்பட்டது.

$$\begin{aligned}
 \text{(ii) } (A - B)^T &= \left[\begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 5 & 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 7 & 5 & -2 \end{pmatrix} \right]^T \\
 &= \left[\begin{pmatrix} 4-2 & -1-(-1) & 2-1 \\ 5-7 & 0-5 & 3-(-2) \end{pmatrix} \right]^T \\
 &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -2 & -5 & 5 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & -5 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \dots\dots\dots(1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 A^T - B^T &= \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ -1 & 5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 0 & -5 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \dots\dots\dots(2)
 \end{aligned}$$

$$(1) = (2)$$

∴ $(A - B)^T = A^T - B^T$ என நிரூபிக்கப்பட்டது.

$$(iii) (B^T)^T = B$$

$$B^T = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 7 & 5 & -2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -1 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$(B^T)^T = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -1 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 7 & 5 & -2 \end{pmatrix} = B \text{ எனவே நிரூபிக்கப்பட்டது.}$$

Question 16.

3×4 வரிசை உடைய ஒரு அணி A மற்றும் B என்ற இரண்டு அணிகளும் $A^T B$ மற்றும் BA^T ஆகிய இரண்டையும் வரையறை செய்யுமாறுள்ள அணிகள் எனில், B அணியின் வரிசையைக் காண்க.

தீர்வு :

$$A = [a_{ij}]_{3 \times 4}$$

$$A^T = [a_{ij}]_{4 \times 3}$$

$$B = [b_{ij}]_{x \times y} \text{ என்க}$$

$$A^T B = [a_{ij}]_{4 \times 3} [b_{ij}]_{x \times y}$$

$$\therefore x = 3$$

$$BA^T = [b_{ij}]_{x \times y} [a_{ij}]_{4 \times 3}$$

$$\therefore y = 4$$

$$\therefore B\text{-ன் வரிசை } x \times y = 3 \times 4$$

Question 17.

பின்வரும் அணிகளை சமச்சீர் மற்றும் எதிர் சமச்சீர் ! அணிகளின் கூடுதலாக எழுதுக.

$$(i) \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} \quad (ii) \begin{bmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \\ -4 & -5 & 2 \end{bmatrix}.$$

தீர்வு:

$$(i) A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -5 \end{bmatrix}$$

$$A + A^T = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 1 & -10 \end{bmatrix}$$

$$P = \frac{1}{2}(A + A^T) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 1 & -10 \end{bmatrix} \text{ என்க.}$$

$$\text{இப்பொழுது } P^T = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 1 & -10 \end{bmatrix} = P$$

ஆகையால் $P = \frac{1}{2} [A + A^T]$ ஒரு சமச்சீர் அணியாகும்.

$$Q = \frac{1}{2} [A - A^T] \text{ என்க.}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -5 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -5 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$Q^T = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ -5 & 0 \end{bmatrix} = -Q$$

ஆகையால் $Q = \frac{1}{2} [A - A^T]$ எதிர் சமச்சீர் அணியாகும்.

$$A = P + Q$$

$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 1 & -10 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -5 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$$

ஆகவே A என்பதை சமச்சீர் மற்றும் எதிர் சமச்சீர் அணிகளின் கூடுதலாக எழுதலாம்.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -2 & -2 & 1 \\ -4 & -5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -4 \\ 3 & -2 & -5 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$P = \frac{1}{2}(A+A^T) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 6 & 1 & -5 \\ 1 & -4 & -4 \\ -5 & -4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow P^T = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 6 & 1 & -5 \\ 1 & -4 & -4 \\ -5 & -4 & 4 \end{bmatrix} = P$$

இப்பொழுது $P = \frac{1}{2}(A+A^T)$ ஒரு சமச்சீர் அணியாகும்.

$$\Rightarrow Q = \frac{1}{2}[A - A^T] \text{ என்க.}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 5 & 3 \\ -5 & 0 & 6 \\ -3 & -6 & 0 \end{bmatrix}$$

(ii)

ஒரு

$$Q^T = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -5 & -3 \\ 5 & 0 & -6 \\ 3 & 6 & 0 \end{bmatrix} = -Q$$

ஆகையால் $Q = \frac{1}{2}[A - A^T]$ எதிர் சமச்சீர் அணியாகும்.

$$\Rightarrow A = P + Q = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 6 & 1 & -5 \\ 1 & -4 & -4 \\ -5 & -4 & 4 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 5 & 3 \\ -5 & 0 & 6 \\ -3 & -6 & 0 \end{bmatrix}$$

ஆகையால் A என்பதை ஒரு சமச்சீர் மற்றும் எதிர் சமச்சீர் அணிகளின் கூடுதலாக எழுதலாம்.

Question 18.

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} A^T = \begin{bmatrix} -1 & -8 & -10 \\ 1 & 2 & -5 \\ 9 & 22 & 15 \end{bmatrix} \text{ எனுமாறுள்ள } A \text{ என்ற அணியைக் காண்க.}$$

$$\text{தீர்வு: } \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}_{3 \times 2} A^T = \begin{bmatrix} -1 & -8 & -10 \\ 1 & 2 & -5 \\ 9 & 22 & 15 \end{bmatrix}_{3 \times 3} \text{ எனில்}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}_{2 \times 3} \text{ என்க.}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -8 & -10 \\ 1 & 2 & -5 \\ 9 & 22 & 15 \end{bmatrix}$$

$$2a_{11} - 1a_{21} = -1 \dots\dots(1)$$

$$1a_{11} + 0a_{21} = 1 \dots\dots(2)$$

$$1a_{11} + 0 = 1$$

$$a_{11} = 1$$

$a_{11} = 1$ என (1)-ல் பிரதியிட

$$2 \times 1 - a_{21} = -1$$

$$-a_{21} = -1 - 2$$

$$\cancel{a_{21}} = \cancel{-3}$$

$$\boxed{a_{21} = 3}$$

$$2a_{12} - 1a_{22} = -8 \dots\dots(3)$$

$$1a_{12} + 0a_{22} = 2 \dots\dots(4)$$

$$a_{12} + 0 = 2$$

$a_{12} = 2$ என (3)-ல் பிரதியிட

$$2 \times 2 - a_{22} = -8$$

$$-a_{22} = -8 - 4 = -12$$

$$a_{22} = 12$$

$$2a_{13} - 1a_{23} = -10 \dots\dots(5)$$

$$1a_{13} + 0a_{23} = -5 \dots\dots(6)$$

$$a_{13} + 0 = -5$$

$a_{13} = -5$ என (5)-ல் பிரதியிட

$$2 \times -5 - a_{23} = -10$$

$$-a_{23} = -10 + 10 = 0$$

$$a_{23} = 0$$

$$\therefore A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 3 & 12 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 12 \\ -5 & 0 \end{bmatrix}$$

Question 19.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ x & 2 & y \end{bmatrix} \text{ மற்றும் } AA^T = 9I \text{ எனில், } x, y \text{ -ன் மதிப்புகளைக் காண்க.}$$

தீர்வு :

$$AA^T = 9I$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ x & 2 & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & x \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & y \end{bmatrix} = 9 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x + 4 + 2y = 0$$

$$x + 2y = -4 \dots\dots\dots(1)$$

$$x + 4 + 2y = 0$$

$$x + 2y = -4 \dots\dots\dots(2)$$

$$2x + 2 - 2y = 0$$

$$\cancel{2}x - \cancel{2}y = -\cancel{2}$$

$$x - y = -1$$

... (3)

$$(2) - (3) \Rightarrow 3y = -3$$

$$\boxed{y = -1}$$

$y = -1$ என (1)-ல் பிரதியிட

$$x + 2 \times -1 = -4$$

$$x - 2 = -4$$

$$x = -4 + 2 \dots\dots\dots(2)$$

$$x = -2$$

தீர்வு :-

$$x = -2$$

$$y = -1$$

Question 20.

(i) x ன் எம்மதிப்புக்கு , $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & x^3 \\ 2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$ யை என்பது எதிர் சமச்சீர்

அணியாகும்?

(ii) $\begin{bmatrix} 0 & p & 3 \\ 2 & q^2 & -1 \\ r & 1 & 0 \end{bmatrix}$ என்பது எதிர் சமச்சீர் அணி எனில், p, q, r-ன் மதிப்புகளைக்

காண்க.

தீர்வு :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & x^3 \\ 2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \\ -2 & x^3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^T = -A$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \\ -2 & x^3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -x^3 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore x^3 = 3$$

$$\Rightarrow x = 3^{\frac{1}{3}}$$

$$(ii) A = \begin{bmatrix} 0 & p & 3 \\ 2 & q^2 & -1 \\ r & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ என்க.}$$

$$\therefore A^T = \begin{bmatrix} 0 & 2 & r \\ p & q^2 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^T = -A$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 2 & r \\ p & q^2 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -p & -3 \\ -2 & -q^2 & 1 \\ -r & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$p = -2$$

$$q^2 = -q^2$$

$$\Rightarrow 2q^2 = 0$$

$$q = 0$$

$$r = -3$$

Question 21.

$a_{ij} = i - j$ எனில், $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$, என்ற அணியை உருவாக்குக. மேலும், A என்பது சமச்சீர் அணியா அல்லது எதிர் சமச்சீர் அணியா எனக் கூறுக.

தீர்வு :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$a_{ij} = i - j$$

$$\therefore a_{11} = 1 - 1 = 0$$

$$a_{12} = 1 - 2 = -1$$

$$a_{13} = 1 - 3 = -2$$

$$a_{21} = 2 - 1 = 1$$

$$a_{22} = 2 - 2 = 0$$

$$a_{23} = 2 - 3 = -1$$

$$a_{31} = 3 - 1 = 2$$

$$a_{32} = 3 - 2 = 1$$

$$a_{33} = 3 - 3 = 0$$

$$\therefore A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix} = -A$$

$\therefore A$ என்பது ஓர் எதிர் சமச்சீர் அணியாகும்.

Question 22.

A, B என்பன இரு சமச்சீர் அணிகள் என்க. $AB = BA$ எனில், AB என்பது சமச்சீர் அணியாகும் என நிறுவுக. மேலும் இதன் மறுதலையும் உண்மை என நிறுவுக.

தீர்வு :

தரவு :

$$A = A^T, B = B^T,$$

$AB = BA$ நிருபிக்க வேண்டியது :

$$(AB)^T = AB$$

நிருபணம் :

$$(AB)^T = B^T \cdot A^T$$

[$\therefore$ நிரை நிரல் மாற்று விதியின் பின் திருப்புக்கை விதி]

$$= B \cdot A \text{ [} \because B^T = B, A^T = A \text{]}$$

$$= AB \text{ [} AB = BA \text{ தரவு]}$$

$$\therefore (AB)^T = AB$$

$\therefore AB$ என்பது ஓர் சமச்சீர் அணியாகும் என்பது நிரூபிக்கப்பட்டது.

மறுதலை :

தரவு :

$$A = A^T, B = B^T$$

$$(AB)^T = AB$$

நிரூபணம் :

$$(AB)^T = B^T A^T = BA$$

$$\therefore AB = BA$$

Question 23.

A, B என்பன சமவரிசையுள்ள இரு சமச்சீர் அணிகள் எனில், பின்வருவனவற்றை நிறுவுக.

(i) $AB + BA$ என்பது சமச்சீர் அணியாகும்

(ii) $AB - BA$ என்பது எதிர் சமச்சீர் அணியாகும்

தீர்வு :

$$\text{தரவு : } A^T = A, B^T = B$$

$$(i) (AB + BA)^T = (AB)^T + (BA)^T$$

$$= B^T A^T + A^T B^T$$

$$= BA + AB$$

$$= AB + BA$$

$$\therefore AB + BA \text{ என்பது சமச்சீர் அணியாகும்.}$$

$$(ii) (AB - BA)^T = (AB)^T - (BA)^T$$

$$= B^T A^T - A^T B^T$$

$$= BA - AB$$

$$= -(AB - BA)$$

$$\therefore AB - BA \text{ என்பது எதிர் சமச்சீர் அணியாகும்.}$$

Question 24.

ஓர் அங்காடியில் முந்திரி, உலர் திராட்சை மற்றும் பாதாம் பர

ுப்பு ஆகியவற்றைக் கொண்டு மூன்று விதமான பரிசுப் பைகள் தயார் செய்யப்படுகின்றன. பை -ல் 100 கிராம் முந்திரி, 100 கிராம் உலர் திராட்சை மற்றும் 50 கிராம் பாதாம் பருப்பும், பை II-ல் 200 கிராம் முந்திரி, 100 கிராம் உலர் திராட்சை மற்றும் 100 கிராம் பாதாம் பருப்பும், பை III-ல் 250 கிராம் முந்திரி, 250 கிராம் உலர்திராட்சை மற்றும் 150 கிராம் பாதாம் பருப்பும் உள்ளன. .50 கிராம் முந்திரியின் விலை ₹50/-, 50 கிராம் உலர் திராட்சையின் விலை ₹10/- மற்றும் 50 கிராம் பாதாம் பருப்பின் விலை ₹60/- எனில், ஒவ்வொரு பரிசுப் பையின் விலையைக் காண்க.

தீர்வு :

பரிசுப் பைகளை ஓர் அணி வடிவில் எழுத

A = முந்திரி

உலர்ந்த திராட்சை

$$\text{பாதாம் பருப்பு} \begin{bmatrix} \text{I} & \text{II} & \text{III} \\ 100 & 200 & 250 \\ 100 & 100 & 250 \\ 50 & 100 & 150 \end{bmatrix}$$

$$k = \frac{1}{50}$$

$$\text{விலை B} = [50 \ 10 \ 60]$$

$$\text{பரிசுப் பைகளின் விலை} = B (kA)$$

$$= [50 \ 10 \ 60] \left(\frac{1}{50} \begin{bmatrix} \text{I} & \text{II} & \text{III} \\ 100 & 200 & 250 \\ 100 & 100 & 250 \\ 50 & 100 & 150 \end{bmatrix} \right)$$

$$\begin{aligned}
 BA &= [50 \ 10 \ 60] \begin{bmatrix} \text{I} & \text{II} & \text{III} \\ 2 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 100 + 20 + 60 \\ 200 + 20 + 120 \\ 250 + 50 + 180 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 180 \\ 340 \\ 480 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

தீர்வு :

பை I = ₹180

பை II = ₹340

பை III = ₹ 480 ஆகும்.

Ex 7.2

Question 1.

அணிக்கோவையை விரிவுபடுத்தாமல், $\begin{vmatrix} s & a^2 & b^2 + c^2 \\ s & b^2 & c^2 + a^2 \\ s & c^2 & a^2 + b^2 \end{vmatrix} = 0$ என நிறுவுக.

தீர்வு :

$$\begin{aligned}
 \Delta &= \begin{vmatrix} s & a^2 & b^2 + c^2 \\ s & b^2 & c^2 + a^2 \\ s & c^2 & a^2 + b^2 \end{vmatrix} \text{ என்க.} \\
 &= s \begin{vmatrix} 1 & a^2 & b^2 + c^2 \\ 1 & b^2 & c^2 + a^2 \\ 1 & c^2 & a^2 + b^2 \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

C_1 லிருந்து S வெளியில் எடுக்கப்பட்டுள்ளது.

$$\begin{aligned}
&= s \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^2 + b^2 + c^2 \\ 1 & b^2 & a^2 + b^2 + c^2 \\ 1 & c^2 & a^2 + b^2 + c^2 \end{vmatrix} \xrightarrow{C_3 \rightarrow C_2 + C_3} \\
&= s(a^2 + b^2 + c^2) \begin{vmatrix} 1 & a^2 & 1 \\ 1 & b^2 & 1 \\ 1 & c^2 & 1 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

$(a^2 + b^2 + c^2) C_3$ லிருந்து வெளியில் எடுக்கப்பட்டுள்ளது.
 $= s(a^2 + b^2 + c^2) (0) (\because C_1 = C_3)$
 $= 0 = \text{RHS.}$

Question 2.

$$\begin{vmatrix} b+c & bc & b^2c^2 \\ c+a & ca & c^2a^2 \\ a+b & ab & a^2b^2 \end{vmatrix} = 0 \text{ என நிறுவுக.}$$

தீர்வு :

$$\Delta = \begin{vmatrix} b+c & bc & b^2c^2 \\ c+a & ca & c^2a^2 \\ a+b & ab & a^2b^2 \end{vmatrix}$$

R_1, R_2, R_3 ஐ முறையே a, b, c ஆல் முறையே abc ஆல் எடுக்க

$$\Delta = \frac{1}{abc} \begin{vmatrix} ab+ac & abc & ab^2c^2 \\ bc+ab & abc & a^2bc^2 \\ ac+bc & abc & a^2b^2c \end{vmatrix}$$

$$= \frac{(abc)^2}{abc} \begin{vmatrix} ab+ac & 1 & bc \\ bc+ab & 1 & ac \\ ac+bc & 1 & ab \end{vmatrix}$$

C_2, C_3 யிலிருந்து abc ஐ வெளியில் எடுக்க

$$= abc \begin{vmatrix} ab + bc + ca & 1 & bc \\ ab + bc + ca & 1 & ac \\ ab + bc + ca & 1 & ab \end{vmatrix} \quad C_1 \rightarrow C + C_3$$

$$= abc(ab + bc + ca) \begin{vmatrix} 1 & 1 & bc \\ 1 & 1 & ac \\ 1 & 1 & ab \end{vmatrix}$$

C_1 லிருந்து $(ab + bc + ca)$ ஐ வெளியில் எடுக்க

$$= abc (ab + bc + ca) (0) = 0$$

[$\because C_1, C_2$ சர்வசமம் பண்பு 4-ன் படி]

$$= 0 = \text{RHS.}$$

Question 3.

$$\begin{vmatrix} a^2 & bc & ac + c^2 \\ a^2 + ab & b^2 & ac \\ ab & b^2 + bc & c^2 \end{vmatrix} = 4a^2b^2c^2 \text{ என நிறுவுக.}$$

தீர்வு :

$$\text{LHS} = \begin{vmatrix} a^2 & bc & ac + c^2 \\ a^2 + ab & b^2 & ac \\ ab & b^2 + bc & c^2 \end{vmatrix} = abc \begin{vmatrix} a & c & a + c \\ a + b & b & a \\ b & b + c & c \end{vmatrix}$$

C_1, C_2, C_3 லிருந்து முறையே a, b, c ஐ வெளியில் எடுக்க ,

$$= abc \begin{vmatrix} 2(a + c) & c & a + c \\ 2(a + b) & b & a \\ 2(b + c) & b + c & c \end{vmatrix} \quad C_1 \rightarrow C_1 + C_2 + C_3$$

$$= 2 abc \begin{vmatrix} (a + c) & c & a + c \\ (a + b) & b & a \\ (b + c) & b + c & c \end{vmatrix}$$

C_1 லிருந்து 2 ஐ வெளியில் எடுக்க,

$$= 2abc \begin{vmatrix} a+c & -a & a+c \\ a+b & -a & a \\ b+c & 0 & c \end{vmatrix} C_2 \rightarrow C_2 - C_1$$

$$= 2abc \begin{vmatrix} a+c & -a & 0 \\ a+b & -a & -b \\ b+c & 0 & -b \end{vmatrix} C_3 \rightarrow C_3 - C_1$$

$$= 2abc \begin{vmatrix} c & -a & 0 \\ 0 & -a & -b \\ c & 0 & -b \end{vmatrix}$$

$$= 2abc (cab) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

C_1, C_2, C_3 லிருந்து முறையே c, a, b ஐ வெளியில் எடுக்க,

$$= 2a^2b^2c^2 [(1 - 0) + 1(1) + 0]$$

$$= 2a^2b^2c^2 \times 2 = 4a^2b^2c^2 = \text{RHS}$$

எனவே நிரூபிக்கப்பட்டது.

Question 4.

$$\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix} = abc \left(1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \text{ என நிறுவுக.}$$

தீர்வு:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a & -b & 0 \\ 0 & b & -c \\ 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix}$$

$$R_1 = R_1 - R_2$$

$$R_2 = R_2 - R_3$$

$$R_3 = R_3$$

$$= a [b+(1 + c) + c] + b(0 + c)$$

$$= a(b + bc + c) + bc$$

$$ab + abc + ac + bc$$

$$= abc \left(1 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = \text{RHS.}$$

Question 5.

$$\begin{vmatrix} \sec^2 \theta & \tan^2 \theta & 1 \\ \tan^2 \theta & \sec^2 \theta & -1 \\ 38 & 36 & 2 \end{vmatrix} = 0 \text{ என நிறுவுக.}$$

தீர்வு :

$$\Delta = \begin{vmatrix} \sec^2 \theta & \tan^2 \theta & 1 \\ \tan^2 \theta & \sec^2 \theta & -1 \\ 38 & 36 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \sec^2 \theta - (\tan^2 \theta + 1) & \tan^2 \theta & 1 \\ \tan^2 \theta - (\sec^2 \theta - 1) & \sec^2 \theta & -1 \\ 38 - (36 + 2) & 36 & 2 \end{vmatrix}$$

$$C_1 \rightarrow C_1 - C_2 - C_3$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & \tan^2 \theta & 1 \\ 0 & \sec^2 \theta & -1 \\ 0 & 36 & 2 \end{vmatrix} = 0 = \text{RHS}$$

Question 6.

$$\begin{vmatrix} x+2a & y+2b & z+2c \\ x & y & z \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0 \text{ என நிறுவுக.}$$

தீர்வு :

$$\Delta = \begin{vmatrix} x+2a & y+2b & z+2c \\ x & y & z \\ a & b & c \end{vmatrix}$$

$$= (x+2a)(yc-bz) - (y+2b)(xc-az) + (z+2c)(bx-ay)$$

$$= xyc + 2ayc - bxz - 2abz - xyc - 2bxc + ayz + 2abz + bxz + 2bxc - ayz - 2acy$$

$$= 0 = \text{RHS}$$

Question 7.

3×3 வரிசை உடைய எதிர் சமச்சீர் அணியின்பொது வடிவத்தை எழுதுக. அதன் அணிக்கோவையின் மதிப்பு 0 எனக் காட்டுக.

தீர்வு :

$$\begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 0[0 + (a_{23})^2] - a_{12}[0 + a_{13}a_{23}] + a_{13}[a_{12}a_{23} - 0]$$

=

$$0 + \cancel{a_{12}a_{13}a_{23}} - \cancel{a_{12}a_{13}a_{23}} - 0 = 0$$

எனவே நிரூபிக்கப்பட்டது.

Question 8.

$$\begin{vmatrix} a & b & a\alpha + b \\ b & c & b\alpha + c \\ a\alpha + b & b\alpha + c & 0 \end{vmatrix} = 0 \text{ எனில், } a, b, c \text{ என்பன G.P. -ல் அமையும் அல்லது } \alpha$$

என்பது $ax^2 + 2bx + c = 0$ -ன் ஒரு மூலமாகும் என நிறுவுக.

தீர்வு :

$$a[0 - (b\alpha + c)^2] - b[(-a\alpha + b)(b\alpha + c)] + (a\alpha + b)[b(b\alpha + c) - c(a\alpha + b)] = 0$$

$$-a(b\alpha + c)^2 + b(a\alpha + b)(b\alpha + c) + b(a\alpha + b)(b\alpha + c) - c(a\alpha + b)^2 = 0$$

$$(b\alpha + c)[-a(b\alpha + c) + b(a\alpha + b)] + (a\alpha + b)[b(b\alpha + c) - c(a\alpha + b)] = 0$$

$$(b\alpha + c)[-ab\alpha - ac + ab\alpha + b^2] + (a\alpha + b)[b^2\alpha + bc - ac\alpha - bc] = 0$$

$$(b\alpha + c)[b^2 - ac] + (a\alpha + b)\alpha(b^2 - ac) = 0$$

$$(b^2 - ac)[b\alpha + c + (\alpha + b)\alpha] = 0$$

$$(b^2 - ac)[a\alpha^2 + b\alpha + b\alpha + c] = 0$$

$$(b^2 - ac)[a\alpha^2 + 2b\alpha + c] = 0$$

$$b^2 - ac = 0 \text{ (அல்லது) } a(\alpha^2) + 2b(\alpha) + c = 0$$

$$b^2 = ac \therefore \alpha \text{ என்பது}$$

$$b = \sqrt{ac} \text{ } ax^2 + 2bx + c = 0 \text{-ன் ஒரு மூலமாகும்}$$

$$\therefore a, b, c \text{ ஒரு G.P.}$$

Question 9.

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 - bc \\ 1 & b & b^2 - ca \\ 1 & c & c^2 - ab \end{vmatrix} = 0 \text{ என நிறுவுக.}$$

தீர்வு :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 - bc \\ 1 & b & b^2 - ca \\ 1 & c & c^2 - ab \end{vmatrix}$$

$$= 1[b(c^2 - ab) - 1(b^2 - ca)] - a[1(c^2 - ab) - 1(b^2 - ca)] + (a^2 - bc)(c - b)$$

=

$$\cancel{bc^2} - \cancel{ab^2} - \cancel{cb^2} + \cancel{c^2a} - \cancel{ac^2} + \cancel{a^2b} + \cancel{ab^2} - \cancel{ca^2} \\ + \cancel{a^2c} - \cancel{bc^2} - \cancel{a^2b} + \cancel{b^2c}$$

$$= 0 = \text{RHS}$$

Question 10.

a, b, c என்பன ஒரு A.P-ன் p, q மற்றும் r ஆவது உறுப்புகள் எனில், $\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ ன்

மதிப்பு காண்க.

தீர்வு :

$$a = a + (p - 1)d$$

$$b = a + (q - 1)d$$

$$c = a + (r - 1)d$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a + (p - 1)d & a + (q - 1)d & a + (r - 1)d \\ p & q & r \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ = \begin{vmatrix} a & a & a \\ p & q & r \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} (p - 1)d & (q - 1)d & (r - 1)d \\ p & q & r \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 0 + d \begin{vmatrix} (p - 1) & (q - 1) & (r - 1) \\ p & q & r \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= d \begin{vmatrix} p & q & r \\ p & q & r \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= d(0) - 0 = 0$$

Question 11.

$$\begin{vmatrix} a^2 + x^2 & ab & ac \\ ab & b^2 + x^2 & bc \\ ac & bc & c^2 + x^2 \end{vmatrix} \text{ என்ற அணிக்கோவை } x^4 \text{ ஆல் வகுபடும் என நிறுவுக.}$$

தீர்வு :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a^2 + x^2 & ab & ac \\ ab & b^2 + x^2 & bc \\ ac & bc & c^2 + x^2 \end{vmatrix}$$

$$= [(a^2 + x^2)[(b^2 + x^2)(c^2 + x^2) - b^2c^2] - ab[ab(c^2 + x^2) - avc^2] + ac [acb^2 - ac(b^2 + x^2)]$$

$$= [(a^2 + x^2)[b^2c^2 + c^2x^2 + b^2x^2 + x^4 - b^2c^2] - ab(abc^2 + ab - abc^2) + a^2c^2b^2 - a^2c^2(9b^2 + x^2)]$$

$$= \begin{aligned} & [\cancel{a^2b^2c^2} + \cancel{b^2c^2x^2} + \cancel{a^2c^2x^2} + c^2x^4 + \cancel{a^2b^2x^2} \\ & + b^2x^4 + a^2x^4 + x^6 - \cancel{a^2b^2c^2} - \cancel{b^2c^2x^2} - \cancel{a^2b^2c^2} \\ & - \cancel{a^2b^2x} + a^2\cancel{b^2}c^2 + a^2\cancel{c^2}b^2 - \cancel{a^2b^2}c^2 - a^2\cancel{c^2}x^2] \end{aligned}$$

$$= c^2x^4 + b^2x^4 + a^2x^4 + x^6$$

$$= x^4(a^2 + b^2 + c^2) + x^6 \text{ இது } x^4 \text{ ஆல் வகுபடும்.}$$

மாற்றுமுறை :

$$\begin{vmatrix} a^2 + x^2 & ab & ac \\ ab & b^2 + x^2 & bc \\ ac & bc & c^2 + x^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x^2 & 0 & 0 \\ 0 & x^2 & 0 \\ 0 & 0 & x^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{vmatrix} + x^6$$

=

$$a^2 (\cancel{b^2} c^2 - \cancel{b^2} c^2) - ab (a\cancel{b}c^2 - a\cancel{b}c^2) + ac (a\cancel{b^2}c - a\cancel{b^2}c) + x^6$$

$$= 0 - 0 + 0 + x^6$$

$$= x^6 \text{ இது } x^4 \text{ ஆல் வகுபடும். எனவே நிரூபிக்கப்பட்டது.}$$

Question 12.

a, b, c என்பவை மிகை மற்றும் அவை ஒரு G.P.-ன் p, q மற்றும் 7-ஆவது உறுப்புகள்

எனில், $\begin{vmatrix} \log a & p & 1 \\ \log b & q & 1 \\ \log c & r & 1 \end{vmatrix}$ என நிறுவுக.

தீர்வு :

$$a = ar^{p-1}; b = ar^{q-1}; c = ar^{r-1}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow & \begin{vmatrix} \log ar^{p-1} & p & 1 \\ \log ar^{q-1} & q & 1 \\ \log ar^{r-1} & r & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (p-1)\log ar & p & 1 \\ (q-1)\log ar & q & 1 \\ (r-1)\log ar & r & 1 \end{vmatrix} \\ = & \log ar \begin{vmatrix} p-1 & p & 1 \\ q-1 & q & 1 \\ r-1 & r & 1 \end{vmatrix} = \log ar \begin{vmatrix} (p-1+1) & p & 1 \\ (q-1+1) & q & 1 \\ (r-1+1) & r & 1 \end{vmatrix} \\ = & \log ar \begin{vmatrix} p & p & 1 \\ q & q & 1 \\ r & r & 1 \end{vmatrix} = \log ar (0) = 0 \quad (\because C_1 = C_2) \end{aligned}$$

Question 13.

x, y, z # 1 எனில், $\begin{vmatrix} 1 & \log_x y & \log_x z \\ \log_y x & 1 & \log_y z \\ \log_z x & \log_z y & 1 \end{vmatrix}$ -ன் மதிப்பு காண்க.

தீர்வு :

$$\begin{vmatrix} 1 & \log_x y & \log_x z \\ \log_y x & 1 & \log_y z \\ \log_z x & \log_z y & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1(1 - \log_{zy} \cdot \log_{yz}) - \log_{xy} (\log_y x - \log_{zx} \cdot \log_{yz}) + \log_{xz} [\log_y x \log_{zy} - \log_{zx}]$$

$$= (1-1) - \log_x y \left[\log_y x - \frac{\log_z x}{\log_z y} \right] + \log_x z \left[\frac{\log_y x}{\log_y z} - \log_z x \right]$$

$$= -\log_x y \cdot \log_y x + \frac{\log_x y \cdot \log_z x}{\log_z y} + \frac{\log_x z \cdot \log_y x}{\log_y z} - 1$$

$$= -1 + \frac{\log_z y}{\log_z y} + \frac{\log_y z}{\log_y z} - 1 = -1 + 1 + 1 - 1 = 0$$

Question 14.

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \alpha \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \text{ களில், } \sum_{k=1}^n \det(A^k) = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{4^n}\right) \text{ என நிறுவுக.}$$

தீர்வு :

$$|A| = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \alpha \\ 0 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{4}$$

$$\det A^1 = \frac{1}{4}$$

$$\det A^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2$$

$$\det A^3 = \left(\frac{1}{4}\right)^3$$

$$\frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \dots$$

$$r = \frac{1}{4} < 1$$

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

$$S_n =$$

$$\frac{\frac{1}{4} \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right)}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{4^n}\right)}{\frac{3}{4}}$$

$$= \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{4^n}\right) \text{ எனவே நிரூபிக்கப்பட்டது.}$$

Question 15.

விரிவுபடுத்தாமல் பின்வரும் அணிக்கோவைகளின் மதிப்பைக் காண்க.

$$(i) \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 8 \\ 6x & 9x & 12x \end{vmatrix} \quad (ii) \begin{vmatrix} x+y & y+z & z+x \\ z & x & y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

தீர்வு :

$$(i) A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 8 \\ 6x & 9x & 12x \end{vmatrix}$$

$$|A| = 3x \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 8 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$3x$ ஐ R_3 லிருந்து வெளியில் எடுக்க)

$$= 3x (0) = 0 [\because R_1 = R_3]$$

$$(ii) A = \begin{vmatrix} x+y & y+z & z+x \\ z & x & y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$A = \begin{vmatrix} x-z & y-x & z+x \\ z-x & x-y & y \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$C_1 \rightarrow C_1 - C_2, C_2 \rightarrow C_2 - C_3$$

$$= \begin{vmatrix} -(z-x) & -(x-y) & z \\ z-x & x-y & y \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (z-x)(x-y) \begin{vmatrix} -1 & -1 & z \\ 1 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$(z-x)$ ஐ C_1 லிருந்தும் $(x-y)$ ஐ C_2 விலிருந்தும் வெளியில் எடுக்க.

$$\therefore A = (z-x)(x-y) \begin{bmatrix} 1 & \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= (z - x) (x - y) (-1 + 1)$$

$$= (z - x) (x - y) (0) = 0$$

Question 16.

A என்பது ஒரு சதுர அணி மற்றும் $|A| = 2$ எனில், $|AA^T|$ -ன் மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு :

$$|AA^T| = |A||A^T| = |A||A| (\because |A| = |A^T|)$$

$$= 2 \times 2 = 4$$

Question 17.

A, B என்பன $|A| = -1$ மற்றும் $|B| = 3$, எனுமாறு உள்ள 3 வரிசை சதுர அணிகள் எனில், $|3AB|$ -ன் மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு :

$$|3AB| = 3^3 |A| \cdot |B|$$

$$= 3 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \times -1 \times 3 = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} \times -1 \times 3$$

$$= 3^3 \times -1 \times 3 = 27 \times 3 = -81$$

Question 18.

$\lambda = -2$ எனில், $\begin{vmatrix} 0 & 2\lambda & 1 \\ \lambda^2 & 0 & 3\lambda^2 + 1 \\ -1 & 6\lambda - 1 & 0 \end{vmatrix}$ -ன் மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு :

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 2\lambda & 1 \\ \lambda^2 & 0 & 3\lambda^2 + 1 \\ -1 & 6\lambda - 1 & 0 \end{vmatrix} \text{ என்க.}$$

A -ல் $\lambda = -2$ என பிரதியிட

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 2(-2) & 1 \\ (-2)^2 & 0 & 3(-2)^2 + 1 \\ -1 & 6(-2) - 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & -4 & 1 \\ 4 & 0 & 13 \\ -1 & -13 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 0(0 + 169) + 4(0 + 13) + 1(-52)$$

$$= 0 + 52 - 52 = 0$$

மேலும் A ஒரு எதிர் சமச்சீர் அணியாகும். முதன்மை மூலவிட்ட உறுப்புகள் 0 என்பதாலும் எதிர் சமச்சீர் அணி A-ன் அணிக்கோவை பூஜ்ஜியம் எனலாம்.

Question 19.

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 20 \\ 1 & -2 & 5 \\ 1 & 2x & 5x^2 \end{vmatrix} = 0 \text{ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்களைக் காண்க.}$$

தீர்வு :

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 20 \\ 1 & -2 & 5 \\ 1 & 2x & 5x^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow 1(-10x^2 - 10x) - 4(5x^2 - 5) + 20(2x + 2) = 0$$

$$\Rightarrow -10x^2 - 10x - 20x^2 + 20 + 40x + 40 = 0$$

$$\Rightarrow -30x^2 + 30x + 60 = 0$$

$$-x^2 + x + 2 = 0$$

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$$\begin{array}{c} -2 \\ \swarrow \quad \searrow \\ -2 \quad +1 \end{array}$$

Question 20.

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 7 \\ 2 & 3 & -5 \end{bmatrix} \text{ மற்றும் } B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -2 & 4 & 0 \\ 9 & 7 & 5 \end{bmatrix} \text{ என்ற அணிகளுக்கு } \det(AB) = (\det A) (\det B)$$

B) என சரிபார்க்க .

தீர்வு :

$$AB = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 7 \\ 2 & 3 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -2 & 4 & 0 \\ 9 & 7 & 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (4 - 6 - 18) & (12 + 12 - 14) & (12 + 0 - 10) \\ (1 + 0 + 63) & (3 + 0 + 49) & (3 + 0 + 35) \\ (2 - 6 - 45) & (6 + 12 - 35) & (6 + 0 - 25) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -20 & 10 & 2 \\ 64 & 52 & 38 \\ -49 & -17 & -19 \end{vmatrix}$$

$$|AB| = -20 \begin{vmatrix} 52 & 38 \\ -17 & -19 \end{vmatrix} - 10 \begin{vmatrix} 64 & 38 \\ -49 & -19 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 64 & 52 \\ -49 & -17 \end{vmatrix}$$

$$= -20(-988 + 646) - 10(-1216 + 1862) + 2(-1088 + 2548)$$

$$= -20(-342) - 10(646) + 2(1460)$$

$$= 6840 - 6460 - 2920 = 3300 \dots\dots(1)$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 1 & 0 & 7 \\ 2 & 3 & -5 \end{vmatrix}$$

$$= 4(0 - 21) - 3(-5 - 14) - 2(3 + 0)$$

$$= -84 - 3 \times (-19) - 6$$

$$= -84 + 57 - 6$$

$$= -90 + 57 = -33$$

$$\begin{aligned}
 (\det B) &= \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -2 & 4 & 0 \\ 9 & 7 & 5 \end{vmatrix} \\
 &= 1(20 + 0) - 3(-10 + 0) + 3(-14 - 36) \\
 &= 20 + 30 + 3 \times -50 \\
 &= 50 - 150 = -100
 \end{aligned}$$

$$(\det A) (\det B) = -33(-100) = 3300 \dots\dots\dots(2)$$

$$(1) = (2)$$

$$\therefore \det (AB) = (\det A) (\det B)$$

Question 21.

$$A = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 8 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \text{ என்ற அணியின் இரண்டாம் நிரையில் உள்ள உறுப்புகளின்}$$

இணைக்காரணிகளைப் பயன்படுத்தி, $|A|$ -ன் மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு :

$$A = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 8 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

இரண்டாம் நிரையில் உள்ள உறுப்புகள் 2, 0, 1.

2-ன் இணைக்காரணி

$$A_{21} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^3(9 - 16)$$

$$= (-1) \times (-7) = 7$$

0-ன் இணைக்காரணி

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 5 & 8 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^4 (15 - 8) = 7$$

1-ன் இணைக்காரணி

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^5 (10 - 3) = -1 \times 7$$

$$= -7$$

$$\therefore |A| = a_{21} A_{21} + a_{22} A_{22} + a_{23} A_{23}$$

$$= 2 \times 7 + 0 \times 7 + 1 \times (-7) = 14 + 0 - 7 = 7$$

Ex 7.3

பின்வருவனவற்றிற்கு காரணித் தேற்றத்தை பயன்படுத்துக :

Question 1.

$$\begin{vmatrix} x & a & a \\ a & x & a \\ a & a & x \end{vmatrix} = (x - a)^2 (x + 2a) \text{ என நிறுவுக.}$$

தீர்வு :

$$\Delta = \begin{vmatrix} x & a & a \\ a & x & a \\ a & a & x \end{vmatrix}, x = a \text{ என } \Delta\text{-ல் பிரதியிட}$$

$$\therefore \Delta = \begin{vmatrix} a & a & a \\ a & a & a \\ a & a & a \end{vmatrix} = 0$$

அனைத்து நிரைகளும் (3 நிரைகள்) சமம் என்பதால் $(x - a)^2$ ஆனது Δ -ன் ஒரு காரணி ஆகும்.

$x = -2a$ என Δ -ல் பிரதியிட

$$\Delta = \begin{vmatrix} -2a & a & a \\ a & -2a & a \\ a & a & -2a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & a & a \\ 0 & -2a & a \\ 0 & a & -2a \end{vmatrix} = 0 \quad [\because C_1 \rightarrow C_1 + C_2 + C_3]$$

$\therefore (x + 2a)$ ஒரு காரணியாகும்.

$\therefore (x - a)^2 (x + 2a)^1$ ஆனது Δ -ன் காரணிகள் மற்றும் படியானது 3 ஆகும்.

முதன்மை மூலைவிட்டத்தின் பெருக்கற்பலனின் படியும் 3.

எனவே மற்றொரு காரணி k ஆக இருக்க வேண்டும்.

$$\therefore \begin{vmatrix} x & a & a \\ a & x & a \\ a & a & x \end{vmatrix} = k (x - a)^2 (x + 2a)$$

x^3 - ன் உறுப்புகளை இருபுறமும் சமப்படுத்தி

$$1 = k$$

$$\therefore \begin{vmatrix} x & a & a \\ a & x & a \\ a & a & x \end{vmatrix} = (x - a)^2$$

Question 2.

$$\begin{vmatrix} b+c & a-c & a-b \\ b-c & c+a & b-a \\ c-b & c-a & a+b \end{vmatrix} = 8abc \text{ என நிறுவுக.}$$

தீர்வு :

$$\Delta = \begin{vmatrix} b+c & a-c & a-b \\ b-c & c+a & b-a \\ c-b & c-a & a+b \end{vmatrix}$$

இங்கு $a = 0$ என பிரதியிட

$$= \begin{vmatrix} b+c & -c & -b \\ b-c & c & b \\ c-b & c & b \end{vmatrix}$$

C_2, C_3 -யிலிருந்து c, b -ஐ வெளியில் எடுக்க

$$= bc \begin{vmatrix} b+c & -1 & -1 \\ b-c & 1 & 1 \\ c-b & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$\Rightarrow$ ஒரு காரணியாகும். இதைப் போல் b, c யும் காரணிகளாகும். கொடுக்கப்பட்டுள்ள அணிக் கோவையின் முதன்மை மூலைவிட்ட பெருக்கற் பலனின் படியானது 3 ஆகும். எனவே மற்றொருபடி k ஆகும்.

$$\therefore \begin{vmatrix} b+c & a-c & a-b \\ b-c & c+a & b-a \\ c-b & c-a & a+b \end{vmatrix} = k abc$$

இதில் $a = 1, b = 1, c = 1$ எனப் பிரதியிட

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = k \times 1 \times 1 \times 1$$

$$\Rightarrow k = 8$$

$$\therefore \Delta = 8 abc$$

Question 3.

$$\text{தீர்க்க: } \begin{vmatrix} x+a & b & c \\ a & x+b & c \\ a & b & x+c \end{vmatrix} = 0$$

தீர்வு:

$$\Delta = \begin{vmatrix} x+a & b & c \\ a & x+b & c \\ a & b & x+c \end{vmatrix} \text{ என்க.}$$

இதில் $x = 0$ என்க.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0. \text{ மூன்று நிரைகளும் சர்வசமம்.}$$

$\therefore x^2$ ஓர் காரணியாகும். மேலும் Δ -ல் $x = -a - b - c$ என்க. -

$$\Delta = \begin{vmatrix} -b-c & b & c \\ a & -a-c & c \\ a & b & -a-b \end{vmatrix} \text{ இதில்}$$

$C_1 = C_1 + C_2 + C_3$ எனில்

$$= \begin{vmatrix} 0 & b & c \\ 0 & -a-c & c \\ 0 & b & -a-b \end{vmatrix} = 0$$

$\therefore (x + a + b + c)$ ஒரு காரணியாகும். கொடுக்கப்பட்ட அணிக்கோவையின் படி 3. மற்றொரு காரணி k ஆக இருக்க வேண்டும்.

$$\begin{vmatrix} x+a & b & c \\ a & x+b & c \\ a & b & x+c \end{vmatrix} = kx^2(x + a + b + c) \text{ இதில்}$$

$a = 0, b = 1, c = 2, x = 1$ எனப் பிரதியிட

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = k(1)^2 (1 + 0 + 1 + 2)$$

$$(6 - 2) = k(4)$$

$$4 = 4k$$

$$k = 1$$

$$\therefore \begin{vmatrix} x+a & b & c \\ a & x+b & c \\ a & b & x+c \end{vmatrix} = x^2 (x+a+b+c) = 0 \text{ என கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.}$$

$$\Rightarrow x^2 (x+a+b+c) = 0$$

$$\Rightarrow x^2 = 0 \text{ அல்லது } (x+a+b+c) = 0$$

$$x = 0, 0 \text{ அல்லது}$$

$$x = -a - b - c$$

$$x = -(a+b+c)$$

Question 4.

$$\begin{vmatrix} b+c & a & a^2 \\ c+a & b & b^2 \\ a+b & c & c^2 \end{vmatrix} = (a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a) \text{ என நிறுவுக.}$$

தீர்வு:

$$\begin{vmatrix} b+c & a & a^2 \\ c+a & b & b^2 \\ a+b & c & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+b+c & a & a^2 \\ a+b+c & b & b^2 \\ a+b+c & c & c^2 \end{vmatrix} \quad C_1 \rightarrow C_1 + C_2$$

$$= (a+b+c) \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$$

(C_1 லிருந்து $(a+b+c)$ ஐ வெளியில் எடுக்க)

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & b & b^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} \text{ என்க.}$$

$a = b$ என Δ -ல் பிரதியிட

$$= \begin{vmatrix} 1 & b & b^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (a - b) \text{ ஒரு காரணி}$$

இதைப்போலவே $(b - c)$, $(c - a)$ -ம் Δ -ன் காரணிகளாக அமையும்.

கொடுக்கப்பட்ட அணிக்கோவையின் படி 3.

$\therefore$ மற்றொரு காரணி k ஆக இருக்க வேண்டும்.

$\therefore a = 1, b = 2, c = 3$ என

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = k(a - b)(b - c)(c - a) \text{-ல் பிரதியிட}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix} = k(1 - 2)(2 - 3)(3 - 1)$$

$$1(18 - 12) - 1(9 - 4) + 1(3 - 2) = k(-1)(-1)(2)$$

$$6 - 5 + 1 = 2k$$

$$2 = 2k$$

$$\Rightarrow k = 1$$

$$\therefore \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (a - b)(b - c)(c - a)$$

$$\therefore \begin{vmatrix} b + c & a & a^2 \\ c + a & b & b^2 \\ a + b & c & c^2 \end{vmatrix} = (a + b + c)(a - b)(b - c)(c - a)$$

= RHS. எனவே நிரூபிக்கப்பட்டது.

Question 5.

தீர்ச்சு :
$$\begin{vmatrix} 4-x & 4+x & 4+x \\ 4+x & 4-x & 4+x \\ 4+x & 4+x & 4-x \end{vmatrix} = 0$$

தீர்வு :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4-x & 4+x & 4+x \\ 4+x & 4-x & 4+x \\ 4+x & 4+x & 4-x \end{vmatrix} = 0$$

$$\Delta = (4-x) [(4-x) - (4+x)(4+x)] - (4+x) [(4+x)(4-x) - (4+x)^2] + (4+x) [(4+x)^2] - (4+x)(4-x)$$

$$\Delta = (4-x) [(4-x)^2 - (4+x)^2] - (4+x) [4^2 - x^2 - (4+x)^2] + (4+x) [(4+x)^2 - (4^2 - x^2)] ;$$

$$\Delta = (4-x) [16 - 8x + x^2 - (16 + 8x + x^2)] - (4+x) (16 - x^2 - (16 + 8x + x^2)) + (4+x) [16 + 8x + x^2 - (16 - x^2)]$$

$$\begin{aligned} & (4-x) [\cancel{16} - 8x + \cancel{x^2} - \cancel{16} - 8x - \cancel{x^2}] \\ & - (4+x) [\cancel{16} - x^2 - \cancel{16} - 8x - x^2] + (4+x) \\ & \quad [\cancel{16} + 8x + x^2 - \cancel{16} + x^2] \\ & = (4-x) [-16x] - (4+x)(-2x^2 - 8x) + \\ & \quad (4+x)(8x + 2x^2) \\ & = -\cancel{64x} + 16x^2 + 8x^2 + 2x^3 + \cancel{32x} + 8x^2 + \\ & \quad \cancel{32x} + 8x^2 + 8x^2 + 2x^3 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 48x^2 + 4x^3 = 0$$

$$4x^2(12 + x) = 0$$

$$4x^2 = 0 \text{ அல்லது}$$

$$(12 + x) = 0$$

$$x = 0, 0 \text{ அல்லது } x = -12$$

$$\therefore \text{தீர்வு } x = \{0, 0, -12\}$$

Question 6.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} = (x - y)(y - z)(z - x) \text{ என நிறுவுக.}$$

தீர்வு :

காரணித் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தி

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix} \text{ என்க. } (\therefore \text{பண்பு (1)-லிருந்து})$$

$x = y$ என Δ -ல் பிரதியிட

$$= \begin{vmatrix} 1 & y & y^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (\because R_1 = R_2)$$

$\therefore (x - y)$ ஒரு காரணியாகும். இதைப் போலவே $(y - z)(z - x)$ -ம் காரணிகளாகும்.

கொடுக்கப்பட்ட அணிக்கோவையின் படி 3 ஆகும்.

$\therefore$ மற்றொரு காரணி k எனக் கொள்வோம்.

$$\therefore \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix} = k(x - y)(y - z)(z - k) \text{ இதில்}$$

$x = 1, y = 2, z = 3$ எனப் பிரதியிட

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix} = k(1 - 2)(2 - 3)(3 - 1)$$

$$1(18 - 12) - 1(9 - 4) + 1(3 - 2) = 2k$$

$$6 - 5 + 1 = 2k$$

$$2 = 2k$$

$$\Rightarrow k = 1$$

$$\therefore \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix} = 1 (x - y) (y - z) (z - x)$$

$$\Rightarrow \Delta = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$$

= (x - y) (y - z) (z - x) என நிரூபிக்கப்பட்டது.

Ex 7.4

Question 1.

(0, 0), (1, 2), (4, 3) என்ற உச்சிப்புள்ளிகளைக் கொண்ட முக்கோணத்தின் பரப்பைக் காண்க.

தீர்வு :

முக்கோணத்தின் பரப்பானது

$$= \frac{1}{2} [x_1y_2 - x_2y_1 + x_2y_3 - x_3y_2 + x_3y_1 - x_1y_3]$$

இக்கோவையை அணிக்கோவை வடிவத்தில்

$$= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \text{ என எழுதலாம்.}$$

$\therefore x_1y_1 (0, 0), x_2y_2 (1, 2) x_3y_3 (4, 3)$ என கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

$$\therefore \text{முக்கோணத்தின் பரப்பு} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix} [0(2-3) - 0(1-4) + 1(3-8)]$$

$$= \frac{1}{2} (-5)$$

$$= -\frac{5}{2} = \frac{5}{2} = 2.5 \text{ அலகுகள்}$$

($\therefore$ பரப்பு எப்பொழுதும் மிகையே)

Question 2.

(k, 2), (2, 4) மற்றும் (3, 2) என்ற உச்சிப்புள்ளிகளைக் கொண்ட முக்கோணத்தின் பரப்பு 4 சதுர அலகுகள் எனில், k-ன் மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு :

$$\text{முக்கோணத்தின் பரப்பு} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \text{ -ன் எண்ணை எவ்வுகூம்.}$$

$$\text{எனவே } 4 = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} k & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow 8 = \pm [k(4-2) - 2(2-3) + 1(4-12)]$$

$$\Rightarrow 8 = \pm [k(2) + 2 - 8]$$

$$\Rightarrow 8 = \pm (2k - 6)$$

நிலை (i)

$$\Rightarrow 8 = 2k - 6$$

$$\Rightarrow 2k = 14 \Rightarrow k = 7$$

நிலை (ii)

$$-2k = 8 - 6$$

$$-2k = 2$$

$$k = -1$$

$$k = -1, 7.$$

Question 3.

கீழ்க்காண்பவற்றில் எவை பூஜ்ஜிய மற்றும் பூஜ்ஜியமற்ற கோவை அணிகள் எனக் காண்க.

$$(i) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$(ii) \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 6 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & -7 \end{bmatrix}$$

$$(iii) \begin{bmatrix} 0 & a - b & k \\ b - a & 0 & 5 \\ -k & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

தீர்வு :

$$(i) A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \text{ என்க.}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

$$= 1(45 - 48) - 2(36 - 42) + 3(32 - 35)$$

$$= -3 - 2(-6) + 3(-3)$$

$$= -3 + 12 - 9 = -12 + 12 = 0$$

∴ A ஒரு பூஜ்ஜியக்கோவை அணியாகும்.

$$(ii) A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 6 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & -7 \end{bmatrix} \text{ என்க}$$

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 6 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & -7 \end{vmatrix} \\ &= 2(0 - 20) + 3(-42 - 4) + 5(30 - 0) \\ &= -40 + 3 \times (-46) + 150 \\ &= -40 - 138 + 150 \\ &= -178 + 150 = -28 \neq 0 \end{aligned}$$

∴ A ஒரு பூஜ்ஜியமற்ற கோவை அணியாகும்.

$$(iii) B = \begin{bmatrix} 0 & a - b & k \\ b - a & 0 & 5 \\ -k & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} |B| &= \begin{vmatrix} 0 & a - b & k \\ b - a & 0 & 5 \\ -k & -5 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 0(0 + 25) - (a - b)(0 + 5k) + k[-5(b - a) - 0] \\ &= -5k(a - b) - 5k(b - a) \\ &= +5k(b - a) - 5k(b - a) = 0 \end{aligned}$$

B ஒரு பூஜ்ஜியக் கோவை அணியாகும்.

Question 4.

பின்வருவன பூஜ்ஜியக் கோவை அணிகள் எனில், a மற்றும் b ஆகியவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க.

$$(i) A = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ -2 & a \end{bmatrix}$$

$$(ii) B = \begin{bmatrix} b-1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

தீர்வு :

$$(i) A = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ -2 & a \end{bmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ -2 & a \end{vmatrix} = 0 \text{ எனில்}$$

$$7a + 6 = 0$$

$$7a = -6$$

$$a = -\frac{6}{7}$$

$$(ii) B = \begin{bmatrix} b-1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$|B| = \begin{vmatrix} b-1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 0 \text{ எனில்}$$

$$(b-1)(4+4) - 2(12-2) + 3(-6-1) = 0$$

$$(b-1)(8) - 20 - 21 = 0$$

$$8b - 8 - 41 = 0$$

$$8b - 49 = 0$$

$$8b = 49$$

$$b = \frac{49}{8}$$

Question 5.

$$\cos 2\theta = 0 \text{ எனில், } \begin{vmatrix} 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{vmatrix}^2 \text{ -ன் மதிப்பைக் காண்க.}$$

தீர்வு :

$$A = \begin{vmatrix} 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{vmatrix} \text{ என்க.}$$

$$\cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1 = 0$$

$$2 \cos^2 \theta = 1$$

$$\cos^2 \theta = \frac{1}{2}$$

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}, \sin \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore \Delta = \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}}\right) & \left(0 + \frac{1}{2} + 0\right) & \left(0 + 0 + \frac{1}{2}\right) \\ \left(0 + \frac{1}{2} + 0\right) & \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 0\right) & \left(\frac{1}{2} + 0 + 0\right) \\ \left(0 + 0 + \frac{1}{2}\right) & \left(\frac{1}{2} + 0 + 0\right) & \left(\frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{2}\right) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} = 1 \left(1 - \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{3}{4} - \frac{1}{8} - \frac{1}{8} = \frac{6-2}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \Delta = \frac{1}{2}$$

Question 6.

$$\begin{vmatrix} \log_3 64 & \log_4 3 \\ \log_3 8 & \log_4 9 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \log_2 3 & \log_8 3 \\ \log_3^c 4 & \log_3 4 \end{vmatrix} \text{ என்ற பெருக்கலின் மதிப்பைக் காண்க.}$$

தீர்வு :

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} \log_3 64 & \log_4 3 \\ \log_3 8 & \log_4 9 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \log_2 3 & \log_8 3 \\ \log_3^c 4 & \log_3 4 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \log_3 64 \cdot \log_2 3 + \log_4 3 \cdot \log_3 4 & \log_3 64 \cdot \log_8 3 + \log_4 3 \cdot \log_3 4 \\ \log_3 8 \cdot \log_2 3 + \log_4 9 \cdot \log_3 4 & \log_3 8 \cdot \log_8 3 + \log_4 9 \cdot \log_3 4 \end{vmatrix} [\because \log_y x \cdot \log_x y = 1] \\ &= \begin{vmatrix} 6 \log_3 2 \log_2 3 + 1 & 2 \log_3 8 \log_8 3 + 1 \\ 3 \log_3 2 \log_2 3 + 1 & 1 + 2 \log_4 3 \log_3 4 \end{vmatrix} [\because \log_x x = 1] \\ &= \begin{vmatrix} 6 + 1 & 2 + 1 \\ 3 + 2 & 1 + 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} \\ &= 21 - 15 = 6 \end{aligned}$$

Ex 7.5

சரியான அல்லது மிகவும் ஏற்புடைய விடையினைக் கொடுக்கப்பட்ட நான்கு மாற்றுவிடைகளிலிருந்து தேர்ந்தெடுக்கவும்.

Question 1.

$a_{ij} = \frac{1}{2} (3i - 2j)$ மற்றும் $A = [a_{ij}]_{2 \times 2}$ எனில், A என்பது.

$$(1) \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 2 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

$$(2) \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(3) \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$(4) \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

குறிப்பு :

$$a_{ij} = \frac{1}{2} (3i - 2j)$$

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{1}{2} (3 \times 1 - 2 \times 1) \\ &= \frac{1}{2} (3 - 2) = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{12} &= \frac{1}{2} (3 \times 1 - 2 \times 2) \\ &= \frac{1}{2} (3 - 4) = \frac{1}{2} \times (-1) = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{21} &= \frac{1}{2} (3 \times 2 - 2 \times 1) \\ &= \frac{1}{2} (6 - 2) \\ &= \end{aligned}$$

$$\frac{2}{2}$$

$$= 2$$

$$\begin{aligned} a_{21} &= \frac{1}{2} (3 \times 2 - 2 \times 2) \\ &= \frac{1}{2} (6 - 4) \\ &= \end{aligned}$$

$$\frac{2}{2}$$

$$= 1$$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

விடை :

$$(2) \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Question 2.

$$2x + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 7 & 2 \end{bmatrix} \text{ எனில், } X \text{ என்ற அணியானது}$$

$$(1) \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$(2) \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$(3) \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$$

$$(4) \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$$

குறிப்பு:

$$2X + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow 2X = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 7 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$$

$$X = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

விடை :

$$(1) \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Question 3.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

என்ற அணிக்கு பின்வருவனவற்றில் எது உண்மையல்ல?

- (1) ஒரு திசையிலி அணி
 - (2) ஒரு மூலை விட்ட அணி
 - (3) ஒரு மேல் முக்கோண வடிவ அணி
 - (4) ஒரு கீழ் முக்கோண வடிவ அணி
- (விடை :
(2) ஒரு மூலை விட்ட அணி

Question 4.

A, B என்பன $A + B$ மற்றும் AB என்பவற்றை வரையறுக்கும் இரு அணிகள் எனில்,

- (1) A, B என்பன ஒரே வரிசை கொண்டவையாக இருக்க வேண்டிய அவசியமில்லை.
- (2) A, B என்பன சமவரிசையுள்ள சதுர அணிகள்
- (3) A-நிரல்களின் எண்ணிக்கையும், B-ன் நிரைகளின் எண்ணிக்கையும் சமம்.
- (4) $A = B$

(விடை :

- (2) A, B என்பன சமவரிசையுள்ள சதுர அணிகள்

Question 5.

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{bmatrix}$$

எனில், λ -ன் எம்மதிப்புகளுக்கு $A^2 = 0$?

- (1) 0
- (2) +1
- (3) -1
- (4) 1

குறிப்பு:

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda^2 - 1 & \chi - \chi \\ -\chi + \chi & -1 + \lambda^2 \end{bmatrix}$$

$$= 0$$

$$\Rightarrow \lambda^2 - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \lambda^2 = 1$$

$$\lambda = \pm 1$$

விடை :

(2) ± 1

Question 6.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} a & 1 \\ b & -1 \end{bmatrix} \text{ மற்றும் } (A + B)^2 = A^2 + B^2 \text{ எனில் } a, b \text{ -ன் மதிப்புகள்}$$

(1) $a = 4, b = 1$

(2) $a = 1, b = 4$

(3) $a = 0, b = 4$

(4) $a = 2, b = 4$

குறிப்பு :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} a & 1 \\ b & -1 \end{bmatrix}$$

Question 6.

$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} a & 1 \\ b & -1 \end{bmatrix}$ மற்றும் $(A + B)^2 = A^2 + B^2$ எனில் a, b -ன் மதிப்புகள்

(1) $a = 4$, $b = 1$

(2) $a = 1$, $b = 4$

(3) $a = 0$, $b = 4$

(4) $a = 2$, $b = 4$

சூறிப்பு :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} a & 1 \\ b & -1 \end{bmatrix}$$

$(A + B)^2 = A^2 + B^2$ எனில்

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 + a & 0 \\ 2 + b & -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} (A + B)^2 &= \begin{bmatrix} 1 + a & 0 \\ 2 + b & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 + a & 0 \\ 2 + b & -2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (a + 1)^2 & 0 \\ (a + 1)(b + 2) - 2(b + 2) & 4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (1 - 2) & (-1) + 1 \\ 2 - 2 & -2 + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$B^2 = \begin{bmatrix} a & 1 \\ b & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 1 \\ b & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a^2 + b & a - 1 \\ ab - b & b + 1 \end{bmatrix}$$

$$A^2 + B^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a^2 + b & a - 1 \\ ab - b & b + 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (a^2 + b - 1) & a - 1 \\ ab - b & b \end{bmatrix}$$

$$= (A + B)^2 = \begin{bmatrix} (a + 1)^2 & 0 \\ (2 + b + 2a + ab - 4 - 2b) & 4 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow b = 4, (a - 1) = 0$$

$$\Rightarrow a = 1.$$

(விடை :

$$(2) a = 1, b = 4)$$

Question 7.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ a & 2 & b \end{bmatrix} \text{ என்பது } AA^T = 9I \text{ என்ற சமன்பாட்டை நிறைவு செய்யும்}$$

அணியாகும். இங்கு I என்பது 3×3 வரிசையுள்ள சமனி அணி எனில், (a, b) என்ற வரிசை ஜோடி

$$(1) (2, -1)$$

$$(2) (-2, 1)$$

$$(3) (2, 1)$$

$$(4) (-2, -1)$$

குறிப்பு :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ a & 2 & b \end{bmatrix}, A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & a \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & b \end{bmatrix}$$

$$|AA^T| = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ a & 2 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & a \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & b \end{bmatrix}$$

$$|AA^T| = |9I| = \begin{bmatrix} (1+4+4) & (2+2-4) & (a+4+2b) \\ (2+2-4) & (4+1+4) & (2a+2-2b) \\ (a+4+2b) & (2a+2-2b) & (a^2+4+b^2) \end{bmatrix}$$

$$= 9 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$a + 4 + 2b = 0$$

$$a + 2b = -4 \dots\dots\dots(1)$$

$$2a + 2 - 2b = 0$$

$$2a - 2b = -2$$

$$\Rightarrow a - b = -1 \dots\dots\dots(2)$$

$$(1) - (2) \Rightarrow 3b = -3$$

$$b = -1$$

$$a - (-1) = a + 1 = -1$$

$$a = -2$$

விடை :

$$(4) (-2, -1)$$

Question 8.

A என்பது ஒரு சதுர அணி எனில், பின்வருவனவற்றுள் எது சமச்சீரல்ல?

$$(1) A + A^T$$

$$(2) AA^T$$

$$(3) A^T A$$

$$(4) A - A^T$$

குறிப்பு :

$$(A - A^T)^T = A^T - (A^T)^T$$

$$= A^T - A = -(A - A^T)$$

விடை :

$$(4) A - A^T$$

Question 9.

A, B என்பன n வரிசையுள்ள சமச்சீர் அணிகள், இங்கு $(A \neq B)$ எனில்,

- (1) $A + B$ ஆனது ஓர் எதிர் சமச்சீர் அணி
- (2) $A + B$ என்பது ஓர் சமச்சீர் அணி
- (3) $A + B$ என்பது ஒரு மூலைவிட்ட அணி
- (4) $A + B$ என்பது ஒரு பூஜ்ஜிய அணி

குறிப்பு :

$$(A + B)^T = A^T - B^T = A + B$$

(விடை :

- (2) $A + B$ என்பது ஓர் சமச்சீர் அணி

Question 10.

$$A = \begin{bmatrix} a & x \\ y & a \end{bmatrix}$$

மற்றும் $xy = 1$, எனில் (AA^T) -ன் மதிப்பு

- (1) $(a - 1)^2$
- (2) $(a^2 + 1)^2$
- (3) $a^2 - 1$
- (4) $(a^2 - 1)^2$

குறிப்பு :

$$A = \begin{bmatrix} a & x \\ y & a \end{bmatrix}, xy = 1 \text{ எனில்,}$$

$$\begin{aligned} AA^T &= \begin{bmatrix} a & x \\ y & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & y \\ x & a \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a^2 + x^2 & ay + ax \\ ay + ax & y^2 + a^2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$|AA^T| = |A||A^T|$$

$$\begin{aligned} \text{R.H.S} &= (a^2 - xy)(a^2 - xy) \\ &= (a^2 - 1)(a^2 - 1) = (a^2 - 1)^2 \end{aligned}$$

(விடை :

$$(4) (a^2 - 1)^2$$

Question 11.

$$A = \begin{bmatrix} e^{x-2} & e^{7+x} \\ e^{2+x} & e^{2x+3} \end{bmatrix} \text{ என்பது ஒரு பூஜ்ஜியக் கோவை அணி எனில், } x\text{-ன் மதிப்பு}$$

$$(1) 9$$

$$(2) 8$$

$$(3) 7$$

$$(4) 6$$

குறிப்பு :

$$(e^{x-2} \cdot e^{2x+3}) - e^{2+x} \cdot e^{7+x} = 0$$

$$x - 2 + 2x + 3 = 2 + x + 7 + x$$

$$2x + 1 = x + 9$$

$$x = 9 - 1 = 8$$

விடை :

$$(2) 8$$

Question 12.

$(x, -2), (5, 2), (8, 8)$ என்பன ஒரு கோடமைப்பு புள்ளிகள் எனில், x -ன் மதிப்பு.

$$(1) -3$$

$$(2) 1/3$$

$$(3) 1$$

$$(4) 3$$

குறிப்பு :

Δ -ன் பரப்பு 0 எனில் கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிகள் ஒரு கோடமைப்புள்ளிகள்.

$$\therefore \Delta\text{-ன் பரப்பு} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x & -2 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \\ 8 & 8 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$x(2 - 8) + 2(5 - 8) + 1(40 - 16) = 0$$

$$-6x - 6 + 24 = 0$$

$$-6x = -18$$

$$x =$$

$$\frac{-18}{-6}$$

$$x = 3$$

விடை :

(4) 3

Question 13.

$$\begin{vmatrix} 2a & x_1 & y_1 \\ 2b & x_2 & y_2 \\ 2c & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = \frac{abc}{2} \neq 0 \text{ எனில், } \left(\frac{x_1}{a}, \frac{y_1}{a}\right), \left(\frac{x_2}{b}, \frac{y_2}{b}\right), \left(\frac{x_3}{c}, \frac{y_3}{c}\right) \text{ என்ற}$$

உச்சிப்புள்ளிகளைக் கொண்ட முக்கோணத்தின் பரப்பு

(1) $\frac{1}{4}$

(2) $\frac{1}{4}abc$

(3) $\frac{1}{8}$

(4) $\frac{1}{4}abc$

குறிப்பு :

$$\Delta\text{-ன் பரப்பு} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \frac{x_1}{a} & \frac{y_1}{a} & 1 \\ \frac{x_2}{b} & \frac{y_2}{b} & 1 \\ \frac{x_3}{c} & \frac{y_3}{c} & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{abc}{abc} \begin{vmatrix} \frac{x_1}{a} & \frac{y_1}{a} & 1 \\ \frac{x_2}{b} & \frac{y_2}{b} & 1 \\ \frac{x_3}{c} & \frac{y_3}{c} & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2abc} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & a \\ x_2 & y_2 & b \\ x_3 & y_3 & c \end{vmatrix} [R_1 \text{ ஐ } a \text{ ஆல்}$$

R_2 ஐ b ஆல்

R_3 ஐ c ஆல் பெருக்கி abc வகுக்க)

$$= \frac{1}{2abc} \begin{vmatrix} a & x_1 & y_1 \\ b & x_2 & y_2 \\ c & x_3 & y_3 \end{vmatrix} \quad C_1 \leftrightarrow C_3$$

$$= \frac{1}{2abc \times 2} \begin{vmatrix} 2a & x_1 & y_1 \\ 2b & x_2 & y_2 \\ 2c & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{4\cancel{abc}} \times \frac{\cancel{abc}}{2} = \frac{1}{8}$$

$$\therefore \left[\begin{vmatrix} 2a & x_1 & y_1 \\ 2b & x_2 & y_2 \\ 2c & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = \frac{abc}{2} \right] = \frac{1}{8}$$

Question 14.

$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha \end{bmatrix}$ என்ற ஒரு சதுர அணியின் வர்க்கம் வரிசை 2 உடைய ஒரு அலகு அணி எனில், α, β மற்றும் γ என்பவை நிறைவு செய்யும் தொடர்பு.

- (1) $1 + \alpha^2 + \beta\gamma = 0$
- (2) $1 - \alpha^2 - \beta\gamma = 0$
- (3) $1 - \alpha^2 + \beta\gamma = 0$
- (4) $1 + \alpha^2 - \beta\gamma = 0$

செறிப்பு:

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha^2 + \beta\gamma & \alpha\beta - \alpha\beta \\ \alpha\gamma - \alpha\gamma & \beta\gamma + \alpha^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha^2 + \beta\gamma & 0 \\ 0 & \beta\gamma + \alpha^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} (\because \text{என கொடுக்கப்பட்டுள்ளது}),$$

$$\Rightarrow \alpha^2 + \beta\gamma = 1$$

$$\Rightarrow 1 - \alpha^2 - \beta\gamma = 0$$

விடை :

$$(2) 1 - \alpha^2 - \beta\gamma = 0$$

Question 15.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ p & q & r \end{vmatrix} \text{ எனில், } \begin{vmatrix} ka & kb & kc \\ kx & ky & kz \\ kp & kq & kr \end{vmatrix} \text{ என்பது}$$

(1) Δ

(2) $k\Delta$

(3) $3k\Delta$

(4) $k^3\Delta$

குறிப்பு :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ p & q & r \end{vmatrix} \text{ எனில், } \begin{vmatrix} ka & kb & kc \\ kx & ky & kz \\ kp & kq & kr \end{vmatrix}$$

$$= k^3 \begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ p & q & r \end{vmatrix} = [C_1, C_2, C_3, \text{ லிருந்து முறையே } k, k, k \text{ ஐ வெளியில் எடுக்க}]$$

விடை:

(4) $k^3\Delta$

Question 16.

$$\begin{vmatrix} 3-x & -6 & 3 \\ -6 & 3-x & 3 \\ 3 & 3 & -6-x \end{vmatrix} \text{ என்ற சமன்பாட்டின் ஒரு தீர்வு.}$$

(1) 6

(2) 3

(3) 0

(4) -6

குறிப்பு :

$$\begin{vmatrix} 3-x & -6 & 3 \\ -6 & 3-x & 3 \\ 3 & 3 & -6-x \end{vmatrix} = 0$$

$$R_1 \rightarrow R_1 + R_2 + R_3$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} -x & -x & -x \\ -6 & 3-x & 3 \\ 3 & 3 & -6-x \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow -x \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -6 & 3-x & 3 \\ 3 & 3 & -6-x \end{vmatrix} = 0$$

$\Rightarrow x = 0$ என்பது ஒரு மூலமாகும்.

விடை :

(3) 0

Question 17.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a & -b \\ -a & 0 & c \\ b & -c & 0 \end{bmatrix} \text{ என்ற அணிக்கோவையின் மதிப்பு}$$

(1) -2abc

(2) abc

(3) 0

(4) $a^2 + b^2 + c^2$

குறிப்பு :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a & -b \\ -a & 0 & c \\ b & -c & 0 \end{bmatrix}$$

$$= 0 - a(0 - bc) - b(ac - 0)$$

=

$$abc - abc$$

$$= 0$$

விடை :

(3) 0

Question 18.

x_1, x_2, x_3 மற்றும் y_1, y_2, y_3 , ஆகியவை ஒரே பொது விகிதம் கொண்ட பெருக்குத் தொடர் முறையில் இருந்தால், $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ என்ற புள்ளிகள் –

- (1) சமபக்க முக்கோணத்தின் உச்சிப்புள்ளிகள்
- (2) செங்கோண முக்கோணத்தின் உச்சிப்புள்ளிகள்
- (3) இரு சமபக்க செங்கோண முக்கோணத்தின் உச்சிப்புள்ளிகள்
- (4) ஒரே கோட்டிலமையும்

விடை :

(4) ஒரே கோட்டிலமையும்

Question 19.

[.] என்பது மீப்பெரு முழு எண் சார்பு என்க. மேலும் $-1 \leq x < 0, 0 \leq y < 1, 1 \leq z < 2$ எனில்,

$$\begin{vmatrix} [x] + 1 & [y] & [z] \\ [x] & [y] + 1 & [z] \\ [x] & [y] & [z] + 1 \end{vmatrix} \text{ என்ற அணிக்கோவையின் மதிப்பு.}$$

(1) [z]

(2) [y]

(3) [x]

(4) [x] + 1

குறிப்பு :

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1(0 + 1)$$

விடை :

(1) [z]

Question 20.

a ≠ b, b, c ஆகியவை $\begin{vmatrix} a & 2b & 2c \\ 3 & b & c \\ 4 & a & b \end{vmatrix}$, என்பதை நிறைவு செய்தால், நம் என்பது

(1) a + b + c

(2) 0

(3) b³

(4) ab + be

குறிப்பு :

$$\begin{vmatrix} a & 2b & 2c \\ 3 & b & c \\ 4 & a & b \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow a(b^2 - ac) - 2b(3b - 4c) + 2c(3a - 4b) = 0$$

$$\Rightarrow ab^2 - a^2c - 6b^2 + 8bc + 6ac - 8bc = 0$$

$$\Rightarrow ab^2 - 6b^2 - a^2c + 6ac = 0$$

$$\Rightarrow b^2(a - 6) - ac(a - 6) = 0$$

$$\Rightarrow (a - 6)(b^2 - ac) = 0$$

$$\Rightarrow a = 6 \text{ or } b^2 = ac$$

$$\Rightarrow b^2 = ac$$

$$\Rightarrow b^2 \times b = ac \times b$$

$$\Rightarrow b^3 = abc$$

விடை :

$$(3) b^3$$

Question 21.

$$A = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 2 \end{vmatrix} \text{ மற்றும்}$$

$$B = \begin{vmatrix} -2 & 4 & 2 \\ 6 & 2 & 0 \\ -2 & 4 & 8 \end{vmatrix} \text{ எனில் ,}$$

$$(1) B = 4A$$

$$(2) B = -4A$$

$$(3) B = -A$$

$$(4) B = 6A$$

குறிப்பு :

$$A = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 2 \end{vmatrix} \quad B = \begin{vmatrix} -2 & 4 & 2 \\ 6 & 2 & 0 \\ -2 & 4 & 8 \end{vmatrix}$$

$$B = - \begin{vmatrix} -2 & 4 & 8 \\ 6 & 2 & 0 \\ -2 & 4 & 2 \end{vmatrix} R_1 \rightleftharpoons R_3$$

$$= -2 \times 2 \begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 2 \end{vmatrix} [R_1 \text{ லிருந்து } 2,$$

R_2 லிருந்து 2 ஐயும்

வெளியில் எடுக்க.]

(விடை :

$$(2) B = -4A$$

Question 22.

A என்பது n ஆம் வரிசை உடைய எதிர் சமச்சீர் அணி மற்றும் C என்பது $n \times 1$ வரிசை உடைய நிரல் அணி எனில், $C^T AC$ என்பது

- (1) 1ஆம் வரிசையுடைய சமனி அணி
- (2) வரிசை 1 உடைய சமனி அணி
- (3) வரிசை 1 உடைய பூஜ்ஜிய அணி
- (4) வரிசை 2 உடைய சமனி அணி

குறிப்பு :

C -யின் வரிசை $n \times 1 = C^T$ -யின் வரிசை $1 \times n$!

$\therefore C^T A$ -யின் வரிசை $1 \times n$

($\because A$ ஒரு எதிர் சமச்சீர் அணி)

$\therefore C^T AC$ - யின் வரிசை $(1 \times n) \times (n \times 1) = (1 \times 1)$

A ஒரு எதிர் சமச்சீர் அணி என்பதால், C^T ஒரு பூஜ்ஜிய அணி (வரிசை (1) கொண்ட பூஜ்ஜிய அணி).

விடை :

- (3) வரிசை 1 உடைய பூஜ்ஜிய அணி

Question 23.

$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ என்ற சமன்பாட்டை நிறைவு செய்யும் A என்ற அணி

(1) $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

(2) $\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

(3) $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

$$(4) \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

குறிப்பு:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A =$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} a + 3c & b + 3d \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow c = 0, d = -1$$

$$a + 3c = 1$$

$$\Rightarrow a + 0 = 1$$

$$\Rightarrow a = 1$$

$$b + 3d = 1$$

$$\Rightarrow b + 3 \times -1 = 1$$

$$\Rightarrow b - 3 = 1$$

$$\Rightarrow b = 4$$

$$\therefore A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

விடை :

$$(3) \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Question 24.

$$A + I = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \text{ எனில், } (A + I) (A - I) \text{-ன் மதிப்பு}$$

குறிப்பு :

$$A + I = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A - I = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore (A + I)(A - I) = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (3 - 8) & (-6 + 2) \\ (4 + 4) & (-8 - 1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -4 \\ 8 & -9 \end{bmatrix}$$

விடை :

$$(1) \begin{bmatrix} -5 & -4 \\ 8 & -9 \end{bmatrix}$$

Question 25.

A, B என்பன சம வரிசையுள்ள இரு சமச்சீர் அணிகள் எனில், கீழ்க்கண்டவற்றுள் எது உண்மையல்ல?

- (1) $A + B$ என்பது ஒரு சமச்சீர் அணி
- (2) AB என்பது ஒரு சமச்சீர் அணி
- (3) $AB = (BA)^T$
- (4) $A^T B = AB^T$

விடை :

(2) AB என்பது ஒரு சமச்சீர் அணி