પ્રકરણ 1

ગણ

1.1 વિહંગાવલોકન

આ પ્રકરણમાં ગણ સિદ્ધાંતના તાર્કિક અભિગમ વિશે અને ગણ પરની ક્રિયાઓ વિશે ચર્ચા કરેલ છે. સંબંધ અને વિધેયનો અભ્યાસ કરવા માટે ગણની સંકલ્પનાનો ઉપયોગ થાય છે.

1.1.1 ગણ અને તેનું નિરૂપણ :

ગણ એ સુવ્યાખ્યાયિત વસ્તુઓનો સમૂહ છે. ગણ દર્શાવવા માટે બે પદ્ધતિ છે :

(i) યાદીની રીત (ii) ગુણધર્મની રીત

1.1.2 ખાલી ગણ :

જે ગણ એક પણ ઘટક ધરાવતો ન હોય તેવા ગણને **ખાલીગણ (null set)** અથવા **રિક્તગણ (empty set or the void set)** કહે છે. **ખાલીગણ { }** અથવા ϕ થી દર્શાવાય છે.

1.1.3 સાન્ત અને અનંત ગણ :

જો કોઈ ગણ નિશ્ચિત ધન પૂર્ણાંક જેટલી સભ્યસંખ્યા ધરાવતો હોય, તો તે ગણને તથા ખાલીગણને સાન્ત ગણ કહે છે. અન્યથા તે ગણને અનંત ગણ કહે છે.

1.1.4 ઉપગણ :

જો ગણ A નો પ્રત્યેક ઘટક એ ગણ B નો પણ ઘટક હોય તો ગણ A ને ગણ B નો ઉપગણ કહેવાય. તેને સંકેતમાં, જો $a \in A \Rightarrow a \in B$, તો $A \subset B$ લખાય.

આપણે,

વાસ્તવિક સંખ્યાઓના ગણને R
પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓના ગણને N
પૂર્ણાંક સંખ્યાઓના ગણને Z
સંમેય સંખ્યાઓના ગણને Q
અસંમેય સંખ્યાઓના ગણને T દ્વારા દર્શાવીશું.

આપણે જોઈ શકીએ કે,

$\mathbf{N \subset Z \subset Q \subset R}$,

$\mathbf{T \subset R, Q \not\subset T, N \not\subset T}$

1.1.5 સમાન ગણ :

આપેલ બે ગણ A અને B માટે, જો A નો પ્રત્યેક ઘટક એ B નો પણ ઘટક હોય તથા B નો પ્રત્યેક ઘટક એ A નો પણ ઘટક હોય તો ગણ A અને B ને સમાન ગણ કહેવાય. બે સમાન ગણમાં તમામ ઘટકો તેના તે જ હોય.

1.1.6 R ના ઉપગણ તરીકે અંતરાલ :

ધારો કે $a, b \in$ R અને $a < b$, તો

(a) ગણ $\{x : a < x < b\}$ ને **વિવૃત અંતરાલ (open Interval)** કહે છે અને તે (a, b) વડે દર્શાવાય છે.

(b) ગણ $\{x : a \leq x \leq b\}$ ને **સંવૃત અંતરાલ (closed Interval)** કહે છે અને તે $[a, b]$ વડે દર્શાવાય છે.

(c) એક અંત્યબિંદુએ સંવૃત અને બીજા અંત્યબિંદુએ વિવૃત હોય એવાં અંતરાલો નીચે પ્રમાણે છે :

$$[a, b) = \{x : a \leq x < b\}$$
$$(a, b] = \{x : a < x \leq b\}$$

1.1.7 ઘાતગણ :

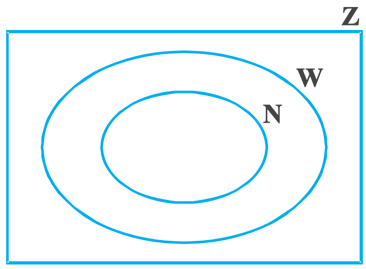
ગણ A ના તમામ ઉપગણોથી બનતા ગણને Aનો **ઘાતગણ (power set)** કહે છે. તેને P(A) વડે દર્શાવાય છે. જો A માં ઘટકોની સંખ્યા n હોય, i.e., $n(A) = n$, તો P(A) ના ઘટકોની સંખ્યા 2^n થાય. $n[P(A)] = 2^n$.

1.1.8 સાર્વત્રિક ગણ :

સામાન્યતઃ કોઈ વિશિષ્ટ સંદર્ભમાં આપણે એક નિશ્ચિત મૂળભૂત ગણના ઉપગણો અને ઘટકો સાથે કામ કરતા હોઈએ છીએ અને તે વિશિષ્ટ સંદર્ભમાં સુસંગત હોય છે અને તે સાર્વત્રિક ગણ કહેવાય છે. ઉદાહરણ તરીકે, અંગ્રેજી મૂળાક્ષર પૈકીના સ્વરોના ગણ માટે સાર્વત્રિક ગણ તરીકે અંગ્રેજી મૂળાક્ષરોનો ગણ હોઈ શકે. સાર્વત્રિક ગણને U દ્વારા દર્શાવીએ છીએ.

1.1.9 વેન આકૃતિ :

ગણો વચ્ચેના ઘણાખરા સંબંધોને આકૃતિઓ દ્વારા રજૂ કરવામાં આવે છે. તેમને આપણે વેન આકૃતિઓથી ઓળખીએ છીએ. ઉદાહરણ તરીકે, પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓનો ગણ એ પૂર્ણ સંખ્યાઓના ગણનો ઉપગણ છે અને તે પૂર્ણાંક સંખ્યાઓનો ઉપગણ છે. આ સંકલ્પનાને આપણે આકૃતિ 1.1 માં દર્શાવ્યા પ્રમાણેની વેન આકૃતિ દ્વારા દર્શાવીશું.

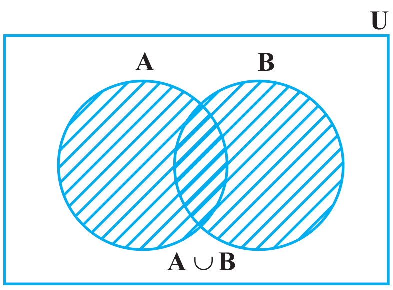


આકૃતિ 1.1

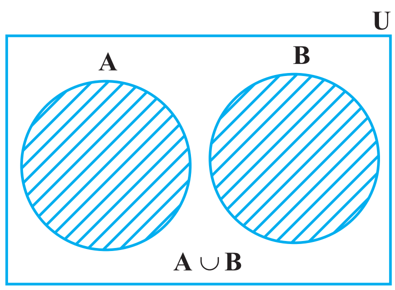
1.1.10 ગણક્રિયાઓ :

યોગગણ : જે A માં અથવા B માં આવેલા તમામ ઘટકોથી બનતો હોય તે ગણ C ને A તથા B નો યોગગણ કહે છે. સંકેતમાં નીચે પ્રમાણે લખાય :

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ અથવા } x \in B\}$$



આકૃતિ 1.2 (a)



આકૃતિ 1.2 (b)

યોગક્રિયાના કેટલાક ગુણધર્મો :

(i) $A \cup B = B \cup A$

(ii) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

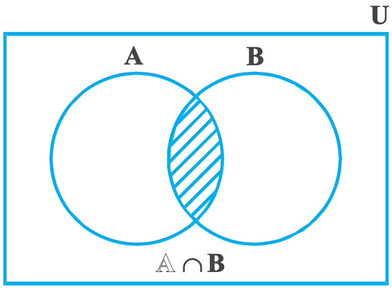
(iii) $A \cup \phi = A$

(iv) $A \cup A = A$

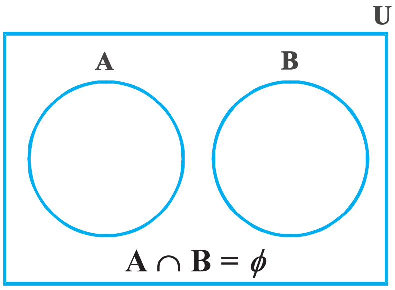
(v) $U \cup A = U$

છેદગણ : A અને B નો છેદગણ એ A અને B બંનેમાં આવેલા હોય એવા તમામ ઘટકોથી બનતો ગણ છે. સાંકેતિક રીતે $A \cap B = \{x : x \in A \text{ અને } x \in B\}$ લખાય.

જો $A \cap B = \phi$, તો A અને B ને **પરસ્પર અલગ ગણ (disjoint sets)** કહેવાય.



આકૃતિ 1.3 (a)



આકૃતિ 1.3 (b)

છેદક્રિયાના કેટલાક ગુણધર્મો :

(i) $A \cap B = B \cap A$ (ii) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

(iii) $\phi \cap A = \phi$; $U \cap A = A$ (iv) $A \cap A = A$

(v) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

(vi) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

તફાવત ગણ : ગણ A અને B નો તફાવત ગણ (Difference set) એટલે ગણ B માં ન હોય તેવા ગણ A ના તમામ ઘટકોથી બનતો ગણ. સાંકેતિક રીતે આપણે તેને A – B દ્વારા દર્શાવીશું.

$A - B = \{x : x \in A$ અને $x \notin B\}$

વળી, $B - A = \{x : x \in B$ અને $x \notin A\}$

પૂરક ગણ : ધારો કે U એ સાર્વત્રિક ગણ છે અને A એ U નો ઉપગણ છે. ગણ A માં ન હોય તેવા U ના તમામ ઘટકોથી બનતા ગણને A નો પૂરક ગણ કહે છે. અને તેનો સંકેત A′ છે. સાંકેતિક રીતે આપણે,

$A' = \{x : x \in U$ અને $x \notin A\}$. વળી $A' = U - A$

પૂરક ગણના કેટલાક ગુણધર્મો :

(i) પૂરક ગણનો નિયમ

(a) $A \cup A' = U$ (b) $A \cap A' = \phi$

(ii) દ મોર્ગનના નિયમ

(a) $(A \cup B)' = A' \cap B'$ (b) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

(iii) $(A')' = A$

(iv) $U' = \phi$ અને $\phi' = U$

1.1.11 બે ગણના યોગગણ અને છેદગણ પરના વ્યાવહારિક પ્રશ્નો ઉકેલવા માટેનાં કેટલાંક સૂત્રો :

ધારો કે, A, B અને C સાન્ત ગણો છે,

(a) $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

(b) જો $(A \cap B) = \phi$, તો $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$

(c) $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$

1.2 ઉદાહરણો

ટૂંક જવાબી પ્રશ્નો

ઉદાહરણ 1 : નીચેના ગણોને યાદીની રીતે લખો :

(i) $A = \{x \mid x$ એ 10 કરતાં નાની પ્રાકૃતિક સંખ્યા છે અને $2^x - 1$ એ અયુગ્મ સંખ્યા છે.$\}$

(ii) $C = \{x : x^2 + 7x - 8 = 0, x \in \mathbf{R}\}$

ઉકેલ :

(i) પ્રત્યેક પ્રાકૃતિક સંખ્યા x માટે $2^x - 1$ હંમેશાં અયુગ્મ છે. આમ $2^x - 1$ એ $x = 1, 2, \ldots , 9$ માટે અયુગ્મ છે. તેથી, $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

(ii) $x^2 + 7x - 8 = 0$ અથવા $(x + 8)(x - 1) = 0$.

તેથી $x = -8$ અથવા $x = 1$ મળે.

આમ, $C = \{-8, 1\}$

ઉદાહરણ 2 : નીચેનાં વિધાનો પૈકી કયાં વિધાનો સત્ય કે અસત્ય છે તે જણાવી તમારા જવાબ માટે કારણ આપો :

(i) $37 \notin \{x \mid x$ ને બરાબર બે ધન અવયવો છે. $\}$

(ii) $28 \in \{y \mid y$ ના બધા ધન અવયવોનો સરવાળો $2y$ છે.$\}$

(iii) $7{,}747 \in \{t \mid t$ એ 37 નો ગુણિત છે.$\}$

ઉકેલ :

(i) અસત્ય

અહીં, 37 ને બરાબર બે જ ધન અવયવો છે, 1 અને 37; તેથી 37 એ આપેલ ગણમાં છે.

(ii) સત્ય

અહીં, 28 ના બધા જ ધન અવયવોનો સરવાળો

$= 1 + 2 + 4 + 7 + 14 + 28 = 56 = 2(28)$.

આવા પૂર્ણાંકને **સંપૂર્ણ સંખ્યા (Perfect number)** કહે છે.

(iii) અસત્ય

$7747 = 37 \times 209 + 14$

$\therefore$ 7747 એ 37નો ગુણિત નથી.

ઉદાહરણ 3 : જો X અને Y એ સાર્વત્રિક ગણ U ના ઉપગણો હોય તો સાબિત કરો કે,

(i) $Y \subset (X \cup Y)$ (ii) $(X \cap Y) \subset X$ (iii) $X \subset Y \Rightarrow (X \cap Y) = X$

ઉકેલ :

(i) $X \cup Y = \{x \mid x \in X$ અથવા $x \in Y\}$

તેથી $x \in Y \Rightarrow x \in X \cup Y$

આમ, $Y \subset (X \cup Y)$

(ii) $X \cap Y = \{x \mid x \in X$ અને $x \in Y\}$

તેથી $x \in (X \cap Y) \Rightarrow x \in X$

આમ, $(X \cap Y) \subset X$

(iii) સ્પષ્ટ છે કે

$x \in X \cap Y \Rightarrow x \in X$

તેથી $(X \cap Y) \subset X$

વળી, $X \subset Y$,

$x \in X \Rightarrow x \in Y \Rightarrow x \in X \cap Y$

માટે $X \subset (X \cap Y)$

આમ, પરિણામ $X = X \cap Y$ મળે છે.

બીજી રીત

$(X \cap Y) \subset X$ તો છે જ.

હવે, $X \subset Y$

$\therefore (X \cap X) \subset (X \cap Y)$

$\therefore X \subset (X \cap Y)$

$\therefore X \cap Y = X$

ઉદાહરણ 4 : જો $K = \{1, 2, 3, \ldots, 100\}$, આપેલ હોય તો,

(i) જેના ઘટકો બધી અયુગ્મ સંખ્યાઓ હોય તેવો K નો ઉપગણ A લખો.

(ii) $x \in K$ માટે જેના ઘટકો $x + 2$ દ્વારા દર્શાવાય, તેવો K નો ઉપગણ B લખો.

ઉકેલ :

(i) $A = \{x \mid x \in K$ અને x અયુગ્મ સંખ્યા છે $\} = \{1, 3, 5, 7, ..., 99\}$

(ii) $B = \{y \mid y = x + 2, x \in K\}$

તેથી, $1 \in N \Rightarrow y = 1 + 2 = 3$

$2 \in N \Rightarrow y = 2 + 2 = 4,$

અને આ જ રીતે આગળ વધતાં, $B = \{3, 4, 5, 6, ... , 98\}$ મળે.

નોંધ : $99 + 2 = 101$

$100 + 2 = 102$ હોવાથી 99 તથા 100 ને B માં ન લેવાય.

ઉદાહરણ 5 : જો $E = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ આપેલ હોય અને n એ E નો ઘટક હોય તેવા નીચે પ્રમાણેના ઘટકો ધરાવતા ગણો લખો.

(i) $n + 1$ (ii) n^2

ઉકેલ : $E = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ આપેલ છે.

(i) $A = \{x \mid x = n + 1, n \in E\}$ લેતાં,

જો $2 \in E \Rightarrow x = 3$

$4 \in E \Rightarrow x = 5$

અને તે જ રીતે આગળ વધતાં, $A = \{3, 5, 7, 9, 11\}$ મળે.

નોંધ : સાર્વત્રિક ગણ N છે તેમ કહેવું આવશ્યક છે.

(ii) $B = \{x \mid x = n^2, n \in E\}$ લેતાં,

જો $2 \in E \Rightarrow x = (2)^2 = 4; 4 \in E \Rightarrow x = (4)^2 = 16; 6 \in E \Rightarrow x = (6)^2 = 36.$

અને તે જ રીતે આગળ વધતાં $B = \{4, 16, 36, 64, 100\}$ મળે.

નોંધ : ઉપર પ્રમાણે સાર્વત્રિક ગણ N જોઈએ. સાર્વત્રિક ગણ E તથા A ને સમાવે તે જરૂરી છે.

ઉદાહરણ 6 : $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ આપેલ હોય અને જો n એ X નો કોઈ ઘટક હોય, તો નીચેનાને ગણ સ્વરૂપે દર્શાવો.

(i) $n \in X$ પરંતુ $2n \notin X$ (ii) $n + 5 = 8$

(iii) n એ 4 થી વધુ છે.

ઉકેલ :

(i) અહીં, $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ આપેલ છે અને $n \in X$, પણ $2n \notin X$.

$A = \{x \mid x \in X$ અને $2x \notin X\}$ લો.

હવે, $1 \notin A$ કારણ કે $2 \cdot 1 = 2 \in X$

$2 \notin A$ કારણ કે $2 \cdot 2 = 4 \in X$

$3 \notin A$ કારણ કે $2 \cdot 3 = 6 \in X$

પણ, $4 \in A$ કારણ કે $2 \cdot 4 = 8 \notin X$

$5 \in A$ કારણ કે $2 \cdot 5 = 10 \notin X$

$6 \in A$ કારણ કે $2 \cdot 6 = 12 \notin X$

તેથી, $A = \{4, 5, 6\}$

(ii) $B = \{x \mid x \in X$ અને $x + 5 = 8\}$ લો.

અહીં, $B = \{3\}$

કારણ કે, $x = 3 \in X$ અને $3 + 5 = 8$ અને $x + 5 = 8$ થાય તેવો બીજો એક પણ ઘટક X માં નથી.

(iii) ધારો કે $C = \{x \mid x \in X, x > 4\}$

તેથી $C = \{5, 6\}$

ઉદાહરણ 7 : ગણ E, M અને U વચ્ચે નીચેના સંબંધો દર્શાવતી વેન આકૃતિ દોરો.

E એ શાળામાં અંગ્રેજીનો અભ્યાસ કરતા વિદ્યાર્થીઓનો ગણ છે, M એ શાળામાં ગણિતનો અભ્યાસ કરતા વિદ્યાર્થીઓનો ગણ છે અને U એ શાળામાં અભ્યાસ કરતા તમામ વિદ્યાર્થીઓનો ગણ છે.

(i) જે વિદ્યાર્થીઓ ગણિતનો અભ્યાસ કરે છે તે બધા જ વિદ્યાર્થીઓ અંગ્રેજીનો પણ અભ્યાસ કરે છે. પરંતુ અંગ્રેજીનો અભ્યાસ કરતા બધા જ વિદ્યાર્થીઓ ગણિતનો અભ્યાસ કરતા નથી.

(ii) ગણિત અને અંગ્રેજી બંનેનો અભ્યાસ કરતા હોય તેવો એક પણ વિદ્યાર્થી નથી.

(iii) કેટલાક વિદ્યાર્થીઓ ગણિતનો અભ્યાસ કરે છે પણ અંગ્રેજીનો અભ્યાસ કરતા નથી જ્યારે કેટલાક વિદ્યાર્થીઓ અંગ્રેજીનો અભ્યાસ કરે છે અને ગણિતનો અભ્યાસ કરતા નથી. જ્યારે કેટલાક વિદ્યાર્થીઓ બંને વિષયનો અભ્યાસ કરે છે.

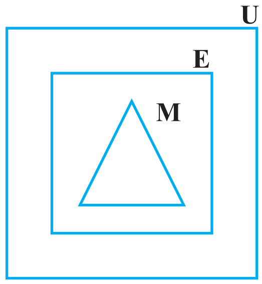
(iv) બધા જ વિદ્યાર્થીઓ ગણિતનો અભ્યાસ કરતા નથી પણ અંગ્રેજીનો અભ્યાસ કરતા બધા વિદ્યાર્થીઓ ગણિતનો પણ અભ્યાસ કરે છે.

ઉકેલ :

(i) અહીં જે વિદ્યાર્થી ગણિતનો અભ્યાસ કરે છે તે બધા જ વિદ્યાર્થીઓ અંગ્રેજીનો પણ અભ્યાસ કરે છે પરંતુ અંગ્રેજીના બધા જ વિદ્યાર્થીઓ ગણિતનો અભ્યાસ કરતા નથી.

$\therefore M \subset E \subset U$

આ વેન આકૃતિ 1.4 પ્રમાણે દર્શાવી શકાય.

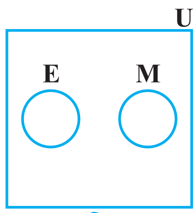


આકૃતિ 1.4

(ii) ગણિત અને અંગ્રેજી નો અભ્યાસ કરતો હોય તેવો એક પણ વિદ્યાર્થી નથી.

તેથી, $E \cap M = \phi$.

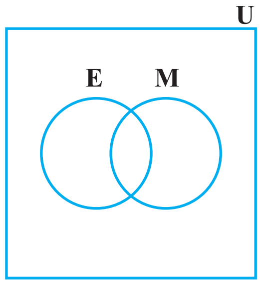
આ વેન આકૃતિ 1.5 પ્રમાણે દર્શાવી શકાય.



આકૃતિ 1.5

(iii) કેટલાક વિદ્યાર્થીઓ ગણિત અને અંગ્રેજી બંને નો અભ્યાસ કરે છે. કેટલાક ફક્ત ગણિતનો અભ્યાસ કરે છે અને કેટલાક ફક્ત અંગ્રેજીનો અભ્યાસ કરે છે.

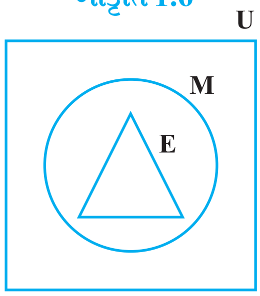
આ વેન આકૃતિ 1.6 પ્રમાણે દર્શાવી શકાય.



આકૃતિ 1.6

(iv) અંગ્રેજીનો અભ્યાસ કરતા બધા જ વિદ્યાર્થીઓ ગણિત ભણે છે. આથી $E \subset M \subset U$.

આ વેન આકૃતિ 1.7 પ્રમાણે દર્શાવી શકાય.



આકૃતિ 1.7

ઉદાહરણ 8 : કોઈ પણ ગણ A, B અને C માટે, $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C)$ થશે ?

તમારા જવાબની યથાર્થતા ચકાસો.

ઉકેલ : ના. ધારો કે ગણ A, B અને C નીચે પ્રમાણે છે :

$$A = \{1, 2, 3\}, B = \{2, 3, 5\}, C = \{4, 5, 6\}$$

હવે, $(A \cap B) \cup C = (\{1, 2, 3\} \cap \{2, 3, 5\}) \cup \{4, 5, 6\}$

$= \{2, 3\} \cup \{4, 5, 6\}$

$= \{2, 3, 4, 5, 6\}$

અને $A \cap (B \cup C) = \{1, 2, 3\} \cap [\{2, 3, 5\} \cup \{4, 5, 6\}]$

$= \{1, 2, 3\} \cap \{2, 3, 4, 5, 6\}$

$= \{2, 3\}$

તેથી, $(A \cap B) \cup C \neq A \cap (B \cup C)$

ઉદાહરણ 9 : ગણના ગુણધર્મોનો ઉપયોગ કરી સાબિત કરો કે કોઈ પણ ગણ A અને B માટે, $A - (A \cap B) = A - B$

ઉકેલ : $A - (A \cap B) = A \cap (A \cap B)'$ $(A - B = A \cap B')$

$= A \cap (A' \cup B')$ (દ' મોર્ગનના નિયમ પ્રમાણે)

$= (A \cap A') \cup (A \cap B')$ (વિભાજનનો નિયમ)

$= \phi \cup (A \cap B')$

$= A \cap B' = A - B$

વિસ્તૃત જવાબી પ્રશ્નો

ઉદાહરણ 10 : કોઈ પણ ગણ A, B અને C માટે,

$(A - B) \cap (C - B) = (A \cap C) - B$ થશે ? તમારા જવાબની યથાર્થતા ચકાસો.

ઉકેલ : હા,

$x \in (A - B) \cap (C - B)$

$\Rightarrow$ $x \in A - B$ અને $x \in C - B$

$\Rightarrow$ ($x \in A$ અને $x \notin B$) અને ($x \in C$ અને $x \notin B$)

$\Rightarrow$ ($x \in A$ અને $x \in C$) અને $x \notin B$

$\Rightarrow$ ($x \in A \cap C$) અને $x \notin B$

$\Rightarrow$ $x \in (A \cap C) - B$

તેથી, $[(A - B) \cap (C - B)] \subset [(A \cap C) - B]$ ... (1)

બીજી રીત

$(A - B) \cap (C - B)$

$= A \cap B' \cap C \cap B'$

$= A \cap C \cap B'$

$= (A \cap C) - B$

હવે તેનાથી ઉલટું

$y \in (A \cap C) - B$

$\Rightarrow$ $y \in (A \cap C)$ અને $y \notin B$

$\Rightarrow$ ($y \in A$ અને $y \in C$) અને ($y \notin B$)

$\Rightarrow$ ($y \in A$ અને $y \notin B$) અને ($y \in C$ અને $y \notin B$)

$\Rightarrow$ $y \in (A - B)$ અને $y \in (C - B)$

$\Rightarrow$ $y \in (A - B) \cap (C - B)$

તેથી, $[(A \cap C) - B] \subset [(A - B) \cap (C - B)]$ ... (2)

પરિણામ (1) અને (2) પરથી $(A - B) \cap (C - B) = (A \cap C) - B$

ઉદાહરણ 11 : આપેલ ગણ A, B અને C માટે સાબિત કરો કે, $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

ઉકેલ : પહેલાં આપણે $[A \cup (B \cap C)] \subset [(A \cup B) \cap (A \cup C)]$ સાબિત કરીશું.

$x \in A \cup (B \cap C)$

$\Rightarrow$ $x \in A$ અથવા $x \in B \cap C$

$\Rightarrow$ $x \in A$ અથવા ($x \in B$ અને $x \in C$)

$\Rightarrow$ ($x \in A$ અથવા $x \in B$) અને ($x \in A$ અથવા $x \in C$)

$\Rightarrow$ ($x \in A \cup B$) અને ($x \in A \cup C$)

$\Rightarrow$ $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$

તેથી, $[A \cup (B \cap C)] \subset [(A \cup B) \cap (A \cup C)]$ ... (1)

હવે, આપણે સાબિત કરીશું કે $[(A \cup B) \cap (A \cup C)] \subset [(A \cup (B \cap C)]$

$x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$\Rightarrow$ $x \in A \cup B$ અને $x \in A \cup C$

$\Rightarrow$ ($x \in A$ અથવા $x \in B$) અને ($x \in A$ અથવા $x \in C$)

$\Rightarrow$ $x \in A$ અથવા ($x \in B$ અને $x \in C$)

$\Rightarrow$ $x \in A$ અથવા ($x \in B \cap C$)

$\Rightarrow$ $x \in A \cup (B \cap C)$

તેથી, $[(A \cup B) \cap (A \cup C)] \subset [A \cup (B \cap C)]$ ... (2)

પરિણામ (1) અને (2) પરથી,

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

ઉદાહરણ 12 : જો P એ અવિભાજ્ય સંખ્યાઓનો ગણ હોય અને $S = \{t \mid 2^t - 1$ એ અવિભાજ્ય સંખ્યા છે$\}$, તો સાબિત કરો કે $S \subset P$.

ઉકેલ : અહીં, આપેલ વિધાન $x \in S \Rightarrow x \in P$ નું સમાનાર્થી પ્રેરણ $x \notin P \Rightarrow x \notin S$ થશે.

હવે આપણે ઉપરનું સમાનાર્થી પ્રેરણ અનિષ્ટાપત્તિની રીતથી સાબિત કરીશું.

ધારો કે $x \notin P$

$\therefore$ x એ વિભાજ્ય સંખ્યા છે અથવા $x = 1$ હોઈ શકે.

હવે આપણે ધારીશું કે $x \in S$

$\Rightarrow$ $2^x - 1 = m$ (જ્યાં m અવિભાજ્ય સંખ્યા છે.)

$\Rightarrow$ $2^x = m + 1$

આ બધી જ વિભાજ્ય સંખ્યાઓ x માટે સત્ય નથી, કારણ કે $x = 4$ લેતાં,

$2^4 = 16$ જે કોઈ પણ અવિભાજ્ય સંખ્યા m અને 1ના સરવાળા બરાબર ન થઈ શકે.

(**નોંધ :** ખરેખર તો $m = 15$ વિભાજ્ય છે.)

અથવા $x = 1$, પરંતુ $2^x - 1 = 1 \Rightarrow 1$ અવિભાજ્ય નથી અને $1 \notin S$.

આ આપણી ધારણા વિરુદ્ધ છે.

$\therefore$ $x \notin S$

જ્યારે, $x \notin P$, ત્યારે $x \notin S$ મળે.

તેથી, $S \subset P$.

બીજી રીત :

ધારો કે $m \notin P$

$\therefore$ m અવિભાજ્ય નથી.

$m = 1$ અથવા $m = pq, p > 1, q > 1$

હવે $2^m - 1 = 2^{pq} - 1$

$= (2^p)^q - 1 = (2^p - 1)((2^p)^{q-1} + (2^p)^{q-2} + ... + 1)$

હવે $2^p - 1 > 1$ કારણ કે $p > 1$

$(2^p - 1) \mid 2^{pq} - 1$ કારણ કે $q > 1$

$\therefore$ $2^{pq} - 1$ અવિભાજ્ય નથી.

$\therefore$ $m \notin P \Rightarrow m \notin S$

$\therefore$ $1 \notin P \Rightarrow 1 \notin S$ કારણ કે $2^1 - 1$ અવિભાજ્ય નથી.

$\therefore$ $S \subset P$

ઉદાહરણ 13 : 50 વિદ્યાર્થીઓએ ગણિત, ભૌતિકવિજ્ઞાન અને રસાયણવિજ્ઞાનની પરીક્ષા આપી. દરેક વિદ્યાર્થી ઓછામાં ઓછા એક વિષયમાં ઉત્તીર્ણ છે. 37 ગણિતમાં, 24 ભૌતિકવિજ્ઞાનમાં અને 43 રસાયણવિજ્ઞાનમાં ઉત્તીર્ણ થયા છે. વધુમાં વધુ 19 વિદ્યાર્થીઓ ગણિત અને ભૌતિકવિજ્ઞાનમાં, વધુમાં વધુ 29 ગણિત અને રસાયણવિજ્ઞાનમાં અને વધુમાં વધુ 20 ભૌતિકવિજ્ઞાન અને રસાયણવિજ્ઞાનમાં ઉત્તીર્ણ થાય છે. વધુમાં વધુ કેટલા વિદ્યાર્થીઓ ત્રણે વિષયોમાં ઉત્તીર્ણ થાય છે ?

ઉકેલ : ધારો કે M એ ગણિતમાં ઉત્તીર્ણ થતા વિદ્યાર્થીઓનો ગણ

P એ ભૌતિકવિજ્ઞાનમાં ઉત્તીર્ણ થતા વિદ્યાર્થીઓનો ગણ

C એ રસાયણ વિજ્ઞાનમાં ઉત્તીર્ણ થતા વિદ્યાર્થીઓનો ગણ

હવે, $n(M \cup P \cup C) = 50, n(M) = 37, n(P) = 24, n(C) = 43$

$n(M \cap P) \le 19, n(M \cap C) \le 29, n(P \cap C) \le 20$ (પક્ષ)

$50 = n(M \cup P \cup C) = n(M) + n(P) + n(C) - n(M \cap P) - n(M \cap C) - n(P \cap C) + n(M \cap P \cap C)$

$50 \ge 37 + 24 + 43 - 19 - 29 - 20 + n(M \cap P \cap C)$

$\Rightarrow$ $n(M \cap P \cap C) \le 50 - 36$

$\Rightarrow$ $n(M \cap P \cap C) \le 14$

આમ, ત્રણે વિષયમાં પાસ થનાર વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા વધુમાં વધુ 14 છે.

હેતુલક્ષી પ્રશ્નો

વિધાન સત્ય બને તે રીતે આપેલ ચાર વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરી નીચેના પ્રશ્નો ક્રમાંક 14 થી 16 વાળા પ્રશ્નોના ઉત્તર આપો :

ઉદાહરણ 14 : પ્રત્યેક ગણ X_r માં 5 ઘટકો અને પ્રત્યેક ગણ Y_r માં 2 ઘટકો છે તથા $\bigcup_{r=1}^{20} X_r = S = \bigcup_{r=1}^{n} Y_r$. જો S નો પ્રત્યેક ઘટક X_r ના બરાબર 10 ગણમાં તથા Y_r ના બરાબર 4 ગણમાં હોય તો $n =$ ....

(A) 10 (B) 20 (C) 100 (D) 50

ઉકેલ : અહીં, $n(X_r) = 5, \bigcup_{r=1}^{20} X_r = S$

જો X_r ના બધા ઘટક ભિન્ન હોય તો S માં 100 ઘટક મળે પરંતુ તે 10–10 ના જૂથમાં સમાન ઘટક છે.

$\therefore$ S માં ભિન્ન ઘટકોની સંખ્યા $\frac{100}{10} = 10$ છે.

આ જ રીતે $\frac{2n}{4} = 10$

$\therefore$ $n = 20$

સાચો વિકલ્પ (B) છે.

ઉદાહરણ 15 : બે સાન્ત ગણમાં અનુક્રમે m અને n ઘટકો છે. જો પ્રથમ ગણના ઉપગણોની સંખ્યા બીજા ગણના ઉપગણની સંખ્યા કરતાં 56 જેટલી વધુ હોય, તો m અને n નાં મૂલ્યો અનુક્રમે .... થાય.

(A) 7, 6 (B) 5, 1 (C) 6, 3 (D) 8, 7

ઉકેલ : ધારો કે બે સાન્ત ગણો A અને B છે.

$\therefore$ $n(A) = m, n(B) = n$

So $n(P(A)) = 2^m, n(P(B)) = 2^n$

હવે, $n(P(A)) - n(P(B)) = 56$, i.e., $2^m - 2^n = 56$

$\Rightarrow$ $2^n(2^{m-n} - 1) = 2^3 7$

$\Rightarrow$ $n = 3, 2^{m-n} - 1 = 7 \Rightarrow 2^{m-n} = 8 = 2^3$

$\Rightarrow$ $m - n = 3$

$\Rightarrow$ $m = n + 3 = 6$

સાચો વિકલ્પ (C) છે.

ઉદાહરણ 16 : ગણ, $(A \cup B \cup C) \cap (A \cap B' \cap C')' \cap C' =$ ....

(A) $B \cap C'$ (B) $A \cap C$ (C) $B \cup C'$ (D) $A \cap C'$

ઉકેલ : $(A \cup B \cup C) \cap (A \cap B' \cap C')' \cap C'$

$= (A \cup (B \cup C)) \cap (A' \cup (B \cup C)) \cap C'$

$= [(A \cap A') \cup (B \cup C)] \cap C'$

$= [\phi \cup (B \cup C)] \cap C'$

$= (B \cap C') \cup \phi = B \cap C'$

સાચો વિકલ્પ (A) છે.

નીચેના ક્રમાંક 17 અને 18 વાળા વિધાનો સત્ય બને તે રીતે ખાલી જગ્યા પૂરો :

ઉદાહરણ 17 : જો A અને B સાન્ત ગણ હોય તો $n(A) + n(B) =$ ....

ઉકેલ : $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

આથી, $n(A) + n(B) = n(A \cup B) + n(A \cap B)$

ઉદાહરણ 18 : જો ગણ A માં n સભ્યો હોય, તો તેના ઉપગણોની સંખ્યા = ...

ઉકેલ : 2^n

નીચેના પ્રશ્ન ક્રમાંક 19 અને 20 માં આપેલાં વિધાનો સત્ય છે કે અસત્ય તે જણાવો :

ઉદાહરણ 19 : ધારો કે ગણ R અને S નીચે પ્રમાણે વ્યાખ્યાયિત છે :

R = $\{x \in \mathbf{Z} \mid x$ એ 2 વડે વિભાજ્ય સંખ્યા $\}$

S = $\{y \in \mathbf{Z} \mid y$ એ 3 વડે વિભાજ્ય સંખ્યા $\}$

તો $R \cap S = \phi$

ઉકેલ :

6 એ 2 અને 3 બંને વડે વિભાજ્ય સંખ્યા છે.

આથી $6 \in R \cap S$

આથી $R \cap S \neq \phi$ આથી અસત્ય

ઉદાહરણ 20 : $\mathbf{Q} \cap \mathbf{R} = \mathbf{Q}$, જ્યાં **Q** એ સંમેય સંખ્યાઓનો ગણ અને **R** એ વાસ્તવિક સંખ્યાઓનો ગણ છે.

ઉકેલ :

$\mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$ હોવાથી

$\therefore$ $\mathbf{Q} \cap \mathbf{R} = \mathbf{Q}$. આથી સત્ય

સ્વાધ્યાય 1.3

ટૂંક જવાબી પ્રશ્નો

1. નીચે આપેલા ગણને યાદીની રીતે લખો :

   (i) $A = \{x \mid x \in \mathbf{R}, 2x + 11 = 15\}$ (ii) $B = \{x \mid x^2 = x, x \in \mathbf{R}\}$

   (iii) C = $\{x \mid x$ એ અવિભાજ્ય સંખ્યા p નો ધન અવયવ છે.$\}$

2. નીચે આપેલા ગણને યાદી સ્વરૂપે લખો :

   (i) $D = \{t \mid t^3 = t, t \in R\}$ (ii) $E = \left\{w \,\middle|\, \frac{w-2}{w+3} = 3, w \in \mathbf{R}\right\}$

   (iii) $F = \{x \mid x^4 - 5x^2 + 6 = 0, x \in \mathbf{R}\}$

3. જો Y = $\{x \mid x$ એ $2^{p-1}(2^p - 1)$ નો ધન અવયવ છે અને $2^p - 1$ અવિભાજ્ય સંખ્યા છે.$\}$. ગણ Y ને યાદી સ્વરૂપે લખો.

4. નીચેનાં વિધાનો સત્ય છે કે અસત્ય તે જણાવી તમારા જવાબ માટે કારણ આપો :

   (i) 35 $\in \{x \mid x$ ને બરાબર ચાર ધન અવયવો છે, $x \in$ N.$\}$

   (ii) 128 $\in \{y \mid y$ ના તમામ ધન અવયવોનો સરવાળો $2y$ થાય, $y \in$ N.$\}$

   (iii) 3 $\notin \{x \mid x^4 - 5x^3 + 2x^2 - 112x + 6 = 0, x \in R\}$

   (iv) 496 $\notin \{y \mid y$ ના તમામ ધન અવયવોનો સરવાળો $2y$ થાય, $y \in$ N.$\}$

5. જો $L = \{1, 2, 3, 4\}$, $M = \{3, 4, 5, 6\}$ અને $N = \{1, 3, 5\}$ હોય, તો $L - (M \cup N) = (L - M) \cap (L - N)$ ચકાસો.

6. A તથા B સાર્વત્રિક ગણ U ના ઉપગણ છે. તો સાબિત કરો કે,

(i) $A \subset (A \cup B)$ (ii) $(A \subset B) \Leftrightarrow A \cup B = B$ (iii) $(A \cap B) \subset A$

7. $S = \{1, 2, 3, ... , 100\}$ હોય, તો આપેલ ગણના નીચે પ્રમાણેના ઉપગણ મેળવો :

(i) જેના ઘટકો યુગ્મ સંખ્યાઓ હોય તેવા S ના ઉપગણ.

(ii) જેના ઘટકો પૂર્ણવર્ગ સંખ્યાઓ હોય તેવા S ના ઉપગણ.

8. જો $X = \{1, 2, 3\}$ આપેલ ગણ માટે n એ X નો કોઈ ઘટક હોય તેવા નીચે પ્રમાણેના ઘટકો ધરાવતા ગણ મેળવો :

(i) $4n$ (ii) $n + 6$ (iii) $\frac{n}{2}$ (iv) $n - 1$

9. $Y = \{1, 2, 3, ... 10\}$ અને a એ Y નો કોઈ ઘટક હોય તેવા નીચે પ્રમાણેની શરત પ્રમાણે ગણ મેળવો :

(i) $a \in Y$, પરંતુ $a^2 \notin Y$ (ii) $a + 1 = 6, a \in Y$ (iii) a નું મૂલ્ય 6 કરતાં નાનું હોય, જ્યાં $a \in Y$

10. જો A, B અને C આપેલ સાર્વત્રિક ગણ U ના ઉપગણ હોય તથા $A = \{2, 4, 6, 8, 12, 20\}$,

$B = \{3, 6, 9, 12, 15\}$, $C = \{5, 10, 15, 20\}$ અને U એ પૂર્ણ સંખ્યાઓના ગણ હોય, તો U, A, B અને C વચ્ચેનો સંબંધ દર્શાવતી વેન આકૃતિ દોરો.

11. ધારો કે U એક શાળામાં અભ્યાસ કરતા તમામ છોકરાઓ અને છોકરીઓ દર્શાવતો ગણ છે. જો ગણ G એ શાળામાં અભ્યાસ કરતી છોકરીઓ, ગણ B એ શાળામાં અભ્યાસ કરતા છોકરાઓ તથા ગણ S એ શાળામાં તરણ (swimming) પ્રવૃત્તિ કરતા વિદ્યાર્થીઓનો ગણ છે, તો U, G, B અને S વચ્ચે આંતરિક સંબંધ દર્શાવતી વેન આકૃતિ દોરો.

12. આપેલ ગણ A, B અને C માટે સાબિત કરો કે, $(A - B) \cap (A - C) = A - (B \cup C)$

નીચે આપેલા પ્રશ્ન ક્રમાંક 13 થી 17 વિધાનો પૈકી કયાં વિધાનો સત્ય કે અસત્ય છે તે જણાવી તમારા જવાબ માટે કારણ આપો :

13. પ્રત્યેક ગણ A અને B માટે, $(A - B) \cup (A \cap B) = A$

14. પ્રત્યેક ગણ A, B અને C માટે, $A - (B - C) = (A - B) - C$

15. પ્રત્યેક ગણ A, B અને C માટે, જો $A \subset B$ હોય, તો $(A \cap C) \subset (B \cap C)$

16. પ્રત્યેક ગણ A, B અને C માટે, જો $A \subset B$ હોય, તો $(A \cup C) \subset (B \cup C)$

17. પ્રત્યેક ગણ A, B અને C માટે, જો $A \subset C$ અને $B \subset C$, હોય, તો $(A \cup B) \subset C$.

ગણના ગુણધર્મોનો ઉપયોગ કરીને નીચેનાં ક્રમાંક 18 થી 22 વાળા વિધાનો સાબિત કરો :

18. પ્રત્યેક ગણ A અને B માટે, $A \cup (B - A) = A \cup B$

19. પ્રત્યેક ગણ A અને B માટે, $A - (A - B) = A \cap B$

20. પ્રત્યેક ગણ A અને B માટે, $A - (A \cap B) = A - B$

21. પ્રત્યેક ગણ A અને B માટે, $(A \cup B) - B = A - B$

22. જો $T = \left\{ x \,\middle|\, \frac{x+5}{x-7} - 5 = \frac{4x-40}{13-x} \right\}$ આપેલ ગણ હોય, તો T ખાલીગણ છે ? તમારા જવાબની સત્યાર્થતા ચકાસો.

વિસ્તૃત જવાબી પ્રશ્નો

23. પ્રત્યેક ગણ A, B અને C માટે સાબિત કરો કે, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

24. 100 વિદ્યાર્થીઓમાંથી 15 વિદ્યાર્થીઓ અંગ્રેજીમાં, 12 વિદ્યાર્થીઓ ગણિતમાં તથા 8 વિદ્યાર્થીઓ વિજ્ઞાનમાં ઉત્તીર્ણ થાય છે. 6 વિદ્યાર્થીઓ અંગ્રેજી અને ગણિતમાં, 7 વિદ્યાર્થીઓ ગણિત અને વિજ્ઞાનમાં, 4 વિદ્યાર્થીઓ અંગ્રેજી અને વિજ્ઞાનમાં ઉત્તીર્ણ થાય છે. તેમજ 4 વિદ્યાર્થીઓ ત્રણેય વિષયમાં ઉત્તીર્ણ થાય છે. તો,

(i) ગણિત અને અંગ્રેજીમાં ઉત્તીર્ણ થતા પણ વિજ્ઞાનમાં ઉત્તીર્ણ ન થતા વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા જણાવો.

(ii) ગણિત અને વિજ્ઞાનમાં ઉત્તીર્ણ થતા પણ અંગ્રેજીમાં ઉત્તીર્ણ ન થતા વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા જણાવો.

(iii) માત્ર ગણિતમાં ઉત્તીર્ણ થતા વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા જણાવો.

(iv) એક કરતાં વધુ વિષયમાં ઉત્તીર્ણ થતા વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા જણાવો.

25. 60 વિદ્યાર્થીઓના એક વર્ગમાં, 25 વિદ્યાર્થીઓ ક્રિકેટ અને 20 વિદ્યાર્થીઓ ટેનિસ રમે છે અને 10 વિદ્યાર્થીઓ બંને રમત રમે છે, તો એક પણ રમત ન રમતા વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા શોધો.

26. એક શાળાના 200 વિદ્યાર્થીઓની મોજણીમાં જ્ઞાત થયું કે, 120 વિદ્યાર્થીઓ ગણિત, 90 ભૌતિકવિજ્ઞાન, 70 રસાયણવિજ્ઞાન, 40 ગણિત અને ભૌતિકવિજ્ઞાન, 30 ભૌતિકવિજ્ઞાન અને રસાયણવિજ્ઞાન, 50 રસાયણવિજ્ઞાન અને ગણિતનો અભ્યાસ કરે છે. તેમ જ 20 વિદ્યાર્થીઓ આ પૈકી એકપણ વિષયનો અભ્યાસ કરતા નથી, તો ત્રણેય વિષયનો અભ્યાસ કરતા વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા મેળવો.

27. એક નગરનાં 10,000 કુટુંબોની તપાસમાં જ્ઞાત થયું કે, 40 % કુટુંબો સમાચારપત્ર A ખરીદે છે, 20 % કુટુંબો સમાચારપત્ર B ખરીદે છે, 10 % કુટુંબો સમાચારપત્ર C ખરીદે છે, 5 % કુટુંબો A અને B, 3 % કુટુંબો B અને C, 4 % કુટુંબો C અને A ની ખરીદી કરે છે. જો 2 % કુટુંબો ત્રણેય સમાચારપત્રો ખરીદતાં હોય, તો

(a) કેટલાં કુટુંબો ફક્ત સમાચારપત્ર A ખરીદે છે ?

(b) કેટલાં કુટુંબો સમાચારપત્ર A, B અને C પૈકી એક પણ ખરીદતાં નથી ?

28. 50 વિદ્યાર્થીઓના એક સમૂહમાં ફ્રેન્ચ, અંગ્રેજી અને સંસ્કૃત વિષયનો અભ્યાસ કરતા વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા નીચે પ્રમાણે છે :

ફ્રેન્ચ : 17, અંગ્રેજી : 13, સંસ્કૃત : 15

ફ્રેન્ચ અને અંગ્રેજી : 09, અંગ્રેજી અને સંસ્કૃત : 4

ફ્રેન્ચ અને સંસ્કૃત : 5, અંગ્રેજી, ફ્રેન્ચ અને સંસ્કૃત : 3. તો નીચે પ્રમાણે અભ્યાસ કરતા વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા શોધો :

(i) માત્ર ફ્રેન્ચ

(ii) માત્ર અંગ્રેજી

(iii) માત્ર સંસ્કૃત

(iv) અંગ્રેજી અને સંસ્કૃત, પરંતુ ફ્રેન્ચ નહિ.

(v) ફ્રેન્ચ અને સંસ્કૃત, પરંતુ અંગ્રેજી નહિ.

(vi) ફ્રેન્ચ અને અંગ્રેજી, પરંતુ સંસ્કૃત નહિ.

(vii) ત્રણેય ભાષાઓ પૈકી ઓછામાં ઓછી એક.

(viii) એક પણ ભાષાનો અભ્યાસ ન કરતા.

હેતુલક્ષી પ્રશ્નો

વિધાન સત્ય બને તે રીતે આપેલ ચાર વિકલ્પોમાંથી યોગ્ય વિકલ્પ પસંદ કરી નીચેના ક્રમાંક 29 થી 43 વાળા પ્રશ્નોના ઉત્તર આપો :

29. $A_1, A_2, ..., A_{30}$ આપેલ 30 ગણ છે. તે દરેકમાં 5 ઘટકો છે તથા $B_1, B_2, ..., B_n$ આપેલ n ગણ છે. તે દરેકમાં 3 ઘટકો છે, જો $\bigcup_{i=1}^{30} A_i = \bigcup_{j=1}^{n} B_j = S$ હોય અને ગણ S નો દરેક ઘટક A_i ના બરાબર 10 તથા B_j ના બરાબર 9 ગણમાં હોય, તો $n =$ ....

(A) 15 (B) 3 (C) 45 (D) 35

30. બે સાન્ત ગણમાં અનુક્રમે m અને n ઘટકો છે. પ્રથમ ગણના ઉપગણોની સંખ્યા બીજા ગણના ઉપગણની સંખ્યા કરતાં 112 જેટલી વધુ હોય, તો m અને n નાં મૂલ્યો અનુક્રમે .... થાય.

(A) 4, 7 (B) 7, 4 (C) 4, 4 (D) 7, 7

31. આપેલા ગણ A, B અને C માટે, $(A \cap B')' \cup (B \cap C) =$ ....

(A) $A' \cup B \cup C$ (B) $A' \cup B$ (C) $A' \cup C'$ (D) $A' \cap B$

32. જો F_1 એ સમતલના સમાંતર બાજુ ચતુષ્કોણનો ગણ હોય, F_2 એ સમતલના લંબચોરસનો ગણ, F_3 એ સમતલના સમબાજુ ચતુષ્કોણનો ગણ, F_4 એ સમતલના ચોરસનો ગણ અને F_5 એ સમતલના સમલંબ ચતુષ્કોણનો ગણ હોય, તો $F_1 =$ ....

(A) $F_2 \cap F_3$ (B) $F_3 \cap F_4$ (C) $F_2 \cup F_5$ (D) $F_2 \cup F_3 \cup F_4 \cup F_1$

33. જો S = ચોરસની અંદર રહેલાં બિંદુઓનો ગણ હોય, T = ત્રિકોણની અંદર રહેલાં બિંદુઓનો ગણ હોય અને C = વર્તુળની અંદર આવેલાં બિંદુઓનો ગણ હોય, તેમજ ત્રિકોણ અને વર્તુળ છેદતાં હોય અને તે ચોરસની અંદર હોય, તો

(A) $S \cap T \cap C = \phi$ (B) $S \cup T \cup C = C$ (C) $S \cup T \cup C = S$ (D) $S \cup T = S \cap C$

34. જો R એ a તથા b લંબાઈની બાજુઓ ધરાવતા લંબચોરસની અંદર આવેલાં બિંદુઓનો ગણ છે. તેની બે બાજુઓ x-અક્ષ અને y-અક્ષની ધન દિશામાં છે. (જ્યાં $a, b > 1$) તો,

(A) $R = \{(x, y) : 0 \le x \le a, 0 \le y \le b\}$ (B) $R = \{(x, y) : 0 \le x < a, 0 \le y \le b\}$

(C) $R = \{(x, y) : 0 \le x \le a, 0 < y < b\}$ (D) $R = \{(x, y) : 0 < x < a, 0 < y < b\}$

35. 60 વિદ્યાર્થીઓના વર્ગમાં, 25 વિદ્યાર્થીઓ ક્રિકેટ રમે છે, 20 વિદ્યાર્થીઓ ટેનિસ રમે છે અને 10 વિદ્યાર્થીઓ બંને રમતો રમે છે, તો બંને પૈકી એક પણ રમત ન રમતા વિદ્યાર્થીઓની સંખ્યા .... છે.

(A) 0 (B) 25 (C) 35 (D) 45

36. એક શહેરના 840 વ્યક્તિઓ પૈકી 450 વ્યક્તિઓ હિન્દી અને 300 વ્યક્તિઓ અંગ્રેજીની વાચન-ક્ષમતા ધરાવે છે. જ્યારે 200 વ્યક્તિઓ બંનેની વાચન ક્ષમતા ધરાવે છે, તો આ પૈકી એકપણ ભાષાની વાંચન-ક્ષમતા ન ધરાવતી વ્યક્તિઓ કેટલી ?

(A) 210 (B) 290 (C) 180 (D) 260

37. જો $X = \{8^n - 7n - 1 \mid n \in \mathbf{N}\}$ અને $Y = \{49n - 49 \mid n \in \mathbf{N}\}$ હોય, તો

(A) $X \subset Y$ (B) $Y \subset X$ (C) $X = Y$ (D) $X \cap Y = \phi$

38. એક સર્વેક્ષણમાં જાણવા મળ્યું કે 63 % વ્યક્તિઓ સમાચારની ચેનલ જુએ છે. 76 % વ્યક્તિઓ અન્ય ચેનલ જુએ છે. જો x % વ્યક્તિઓ બંને ચેનલ જોતી હોય, તો

(A) $x = 35$ (B) $x = 63$ (C) $39 \le x \le 63$ (D) $x = 39$

39. જો ગણ $A = \left\{(x, y) \middle| y = \frac{1}{x}, x \neq 0 x \in R\right\}$ અને $B = \{(x, y) \mid y = -x, x \in \mathbf{R}\}$ હોય, તો

(A) $A \cap B = A$ (B) $A \cap B = B$ (C) $A \cap B = \phi$ (D) $A \cup B = A$

40. ગણ A, B માટે, $A \cap (A \cup B) =$ ....

(A) A (B) B (C) ϕ (D) $A \cap B$

41. જો $A = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17\}$ $B = \{2, 4, \ldots, 18\}$ તથા પ્રાકૃતિક સંખ્યાગણ **N** ને સાર્વત્રિક ગણ લઈએ, તો $(A' \cup (A \cup B) \cap B') =$ ....

(A) ϕ (B) **N** (C) A (D) B

42. $S = \{x \in N \mid x$ એ 100 થી નાની 3 ની ગુણિત સંખ્યા $\}$ અને

$P = \{x \in N \mid x$ એ 20 થી નાની અવિભાજ્ય સંખ્યા $\}$ તો $n(S) + n(P) =$ ....

(A) 34 (B) 31 (C) 33 (D) 41

43. X અને Y આપેલ બે ગણ છે તથા X′ એ ગણ X નો પૂરકગણ હોય, તો $X \cap (X \cup Y)' =$ ....

(A) X (B) Y (C) ϕ (D) $X \cap Y$

નીચે આપેલાં પ્રશ્ન ક્રમાંક 44 થી 51 વાળા વિધાનો સત્ય બને તે રીતે ખાલી જગ્યા પૂરો :

44. ગણ $\{x \in \mathbf{R} : 1 \le x < 2\}$ ને અંતરાલ સ્વરૂપે .... રીતે લખાય.

45. જો $A = \phi$ હોય, તો P(A) માં ઘટકોની સંખ્યા .... છે.

46. A અને B સાન્ત ગણ છે. જો $A \subset B$ હોય, તો $n(A \cup B) =$ ....

47. જો A તથા B આપેલા ગણ હોય, તો $A - B =$ ....

48. ગણ $A = \{1, 2\}$ નો ઘાત ગણ ....

49. $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{2, 4, 6\}$ અને $C = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ હોય, તો આપેલા ગણ A, B, C ના સંદર્ભમાં સાર્વત્રિક ગણ = ...

50. $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $A = \{1, 2, 3, 5\}$, $B = \{2, 4, 6, 7\}$ અને

$C = \{2, 3, 4, 8\}$ હોય, તો (i) $(B \cup C)' =$ .... અને (ii) $(C - A)' =$ ....

51. કોઈ પણ ગણ A તથા B માટે $A - (A \cap B) =$ ....

52. આપેલ કોઈ ગણ A, B અને C માટે વિભાગ Iની અભિવ્યક્તિને વિભાગ IIની અભિવ્યક્તિ સાથે એવી રીતે જોડો કે જેથી વિધાન સત્ય બને.

વિભાગ I	વિભાગ II
(i) $((A' \cup B') - A)'$	(a) $A - B$
(ii) $[B' \cup (B' - A)]'$	(b) A
(iii) $(A - B) - (B - C)$	(c) B
(iv) $(A - B) \cap (C - B)$	(d) $(A \times B) \cap (A \times C)$
(v) $A \times (B \cap C)$	(e) $(A \times B) \cup (A \times C)$
(vi) $A \times (B \cup C)$	(f) $(A \cap C) - B$

પ્રશ્ન ક્રમાંક 53 થી 58નાં વિધાનો પૈકી કયાં વિધાનો સત્ય છે કે અસત્ય તે જણાવો :

53. જો A કોઈ ગણ હોય, તો $A \subset A$

54. જો $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ અને $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ તો $B \not\subset M$.

55. ગણ $\{1, 2, 3, 4\}$ અને $\{3, 4, 5, 6\}$ એ સમાન ગણ છે.

56. જો $\mathbf{Q}$ એ સંમેય સંખ્યાગણ હોય અને $\mathbf{Z}$ એ પૂર્ણાંક સંખ્યાગણ હોય, તો $\mathbf{Q} \cup \mathbf{Z} = \mathbf{Q}$.

57. ધારો કે ગણ R અને T નીચે પ્રમાણે વ્યાખ્યાયિત કરેલ છે :

$R = \{x \in \mathbf{Z} \mid x$ એ 2 વડે વિભાજ્ય સંખ્યા છે.$\}$

$T = \{x \in \mathbf{Z} \mid x$ એ 6 વડે વિભાજ્ય સંખ્યા છે.$\}$ તો, $T \subset R$.

58. જો $A = \{0, 1, 2\}$ અને $B = \{x \in \mathbf{R} \mid 0 \le x \le 2\}$ હોય, તો $A = B$.