# 14

# प्रायिकता
(Probability)

## 14.01 भूमिका (Introduction):

प्रायिकता के सिद्धान्त की उत्पत्ति 17वीं शताब्दी में यूरोप में हुई। वहाँ के उद्योगपतियों एवं व्यापारियों ने उनसे सम्बन्धित व्यवसाय के परिणामों के पूर्वानुमान करने के प्रयास किए, जिससे अधिक से अधिक लाभ हो सके। इन लोगों ने अपनी समस्याओं को तत्कालीन गणितज्ञों गेलीलियों, पास्कल, फर्मा कारडेनों आदि के सामने रखा। गणितज्ञों ने इन समस्याओं के समाधान हेतु गणितीय विधियों का विकास किया, जिससे गणित की इस शाखा की उत्पति हुई। 18वीं एवं 19वीं शताब्दी में प्रमुख गणितज्ञों लॉप्लास, गॉस और बरनौली आदि ने इस सिद्धान्त का और विकास किया। 20वीं शताब्दी में प्रायिकता सिद्धान्त पर आधारित प्रतिचयन सिद्धान्त, निर्णय सिद्धान्त आदि का प्रतिपादन हुआ, जिनका श्रेय आर. एस. फिशर तथा कार्ल पियर्सन आदि को जाता है। हमने प्रायिकता को परिभाषित करने के लिए सम प्रायिकता या सम संभाव्य परिणामों का उपयोग किया है। यह परिभाषा तार्किक दृष्टि से उचित प्रतीत नहीं होती है। इसलिए रूस के गणितज्ञ A.N. Kolomigrove ने एक अन्य प्रायिकता सिद्धान्त का विकास किया। जिसे अभिगृहीत आधारित प्रायिकता सिद्धान्त कहते है। उन्होंने 1933 में प्रकाशित अपनी पुस्तक 'प्रायिकता का आधार (Foundation of probability), में प्रायिकता की व्याख्या के लिए कुछ स्वतः प्रमाणित तथ्य (अभिगृहीत) निर्धारित किए।

आधुनिक युग में प्रायिकता के सिद्धान्त का उपयोग विभिन्न क्षेत्रों में भविष्य के संबंध में निर्णय लेने हेतु किया जा रहा है, जैसे किसी राज्य या देश का बजट बनाने में, बीमा कम्पनियों में, संयोग पर आधारित खेलों में, कृषि, अर्थशास्त्र, वैज्ञानिक अनुसंधान में, सैनिक विशेषज्ञ सुरक्षा सम्बन्धी नीति निर्धारण में, व्यापक रूप से व्यवसाय के क्षेत्र में, प्राकृतिक एवं भौतिक विज्ञान के क्षेत्र में, समाज एवं राज्य व्यवस्था की महत्त्वपूर्ण नीति निर्धारण में किया जाता है।

पूर्व में हमने प्रायिकता की संकल्पना को विभिन्न परिस्थितियों की अनिश्चितता की माप के रूप में पढ़ा है। हमारे सामने प्रतिदिन विभिन्न ऐसी घटनाएँ घटित होती है। जिनके एक से अधिक निश्चित और अपरिमित परिणाम हो सकते है। ऐसी घटनाओं के परिणामों का पूर्वानुमान करके व्यक्ति लाभ उठाने का प्रयास भी करता है। किसी भी घटना से संबंधित पूर्व सूचनाओं व परिस्थितियों के आधार पर परिणामों की संभावनाओं का पता करने के सिद्धान्त को प्रायिकता कहते हैं।

वर्तमान में प्रायिकता ज्ञात करने हेतु दो भिन्न विधियाँ प्रयोग में लायी जाती है। जिसमें से प्रथम जिसे चिरप्रतिष्ठित प्रायिकता सिद्धान्त (Classical theory of probability) कहते हैं इसमें किसी घटना की प्रायिकता ज्ञात करने के लिए हम घटना के अनुकूल परिणामों की संख्या का कुल परिणामों की संख्या के साथ अनुपात ज्ञात करते हैं। द्वितीय जिसे प्रायिकता की अभिगृहीती दृष्टिकोण (Axiomatic Approach to probability) कहते है इसमें प्रायिकताएँ निर्धारित करने के लिए अभिगृहीतों या नियमों को वर्णित (depict) किया गया है।

दोनो विधियों को भली प्रकार समझने के लिए कुछ महत्वपूर्ण शब्दों को इनके संदर्भ में जानना आवश्यक है। इन्हें आगे के अनुच्छेद में इन्हें चिरप्रतिष्ठित प्रायिकता सिद्धान्त तथा अभिगृहीती दृष्टिकोण के अनुसार ही परिभाषित करने का प्रयास किया गया है।

## 14.02 परिभाषाएँ (Definations):

### (A) प्रायिकता का चिरप्रतिष्ठित दृष्टिकोण

**1. यादृच्छिक प्रयोग (Random experiment)** : एक प्रयोग जिसके बारे में सभी संभव परिणाम पहले से ही ज्ञात हों तथा प्रयोग के किसी विशेष परिणाम के आने का निश्चित अनुमान नहीं लगाया जा सके, यादृच्छिक प्रयोग कहलाता है। जैसे एक सिक्के के उछाल में चित्त या पट दो परिणाम पहले से ज्ञात हैं, लेकिन निश्चित परिणाम नहीं बताया जा सकता। अतः सिक्के को उछालना यादृच्छिक प्रयोग है।

**2. अभिप्रयोग एवं घटना (Trial and event)** : किसी भी संदर्भ का कोई प्रयोग जिसका कई सम्भावित परिणामों में से एक परिणाम अवश्य होता हो, एक अभिप्रयोग कहलाता है तथा इसके सम्भावित परिणाम घटनाएँ कहलाती हैं। उदाहरणार्थ :

(i) एक सिक्के को उछालना एक अभिप्रयोग है और चित्त (H) या पट (T) आना एक घटना है।

(ii) एक पासे को उछालना एक अभिप्रयोग है और 1,2,3,4,5,6 में से किसी एक अंक का आना घटना है।

(iii) ताश की गड्डी में से दो पत्ते खींचना अभिप्रयोग है और संभावित परिणाम ${}^{52}C_2$ में से दोनों पत्तो का राजा होना ${}^{4}C_2$ एक घटना है।

**3. सरल घटना (Simple Event ) :** किसी अभिप्रयोग में एक समय में केवल एक घटना घटित हो तो उसे सरल घटना कहते हैं। उदाहरणार्थ : एक थैले में कुछ काली तथा सफेद गेंदें हैं उसमें से एक गेंद निकालना सरल घटना है।

**4. निश्शेष घटनाएँ या कुल स्थितियाँ (Exhaustive events or total number of cases):** किसी अभिप्रयोग के समस्त सम्भावित परिणाम उस अभिप्रयोग की निश्शेष घटनाएँ या कुल स्थितियाँ कहलाती हैं। उदाहरणार्थ :

(i) एक सिक्के को उछालना एक अभिप्रयोग है और चित्त (H) या पट (T) आ सकते हैं। अतः इस अभिप्रयोग में 2 निश्शेष घटनाएँ हैं।

(ii) एक पासे को उछालने पर 1, 2, 3, 4, 5, या 6 अंक आ सकता हैं। अतः इस अभिप्रयोग में 6 निश्शेष घटनाएँ हैं।

**5. अनुकूल घटनाएँ या स्थितियाँ (Favourable events or cases)** किसी अभिप्रयोग में किसी विशिष्ट घटनाओं की अनुकूल स्थितियाँ उस प्रयोग के उन परिणामों की संख्या है जिसमें वह विशिष्ट घटना घटित होती है। उदाहरणार्थ :

(i) एक पासे को उछालने पर सम अंक आने की अनुकूल घटनाएँ 2,4,6 अर्थात् 3 हैं।

(ii) ताश की गड्डी में से एक पत्ता खींचने में राजा आने की अनुकूल स्थितियाँ ${}^4C_1$ अर्थात् 4 हैं।

(iii) दो पासों को उछालने पर योग 5 आने के लिए 4 अनुकूल स्थितियाँ हैं : (1,4), (2,3), (3,2), (4,1)

**6. स्वतंत्र व आश्रित घटनाएँ (Independent and dependent events):**

(i) **स्वतन्त्र घटनाएँ** : दो या दो से अधिक घटनाएँ स्वतंत्र घटनाएँ कहलाती हैं यदि किसी एक के घटित होने या न होने का प्रभाव शेष घटनाओं के घटित होने या न होने पर नहीं पड़ता है।

उदाहरणार्थ : एक सिक्के तथा एक पासे के साथ साथ उछालने पर सिक्के पर पट तथा पासे पर 4 आना स्वतन्त्र घटनाएँ हैं।

(ii) **आश्रित घटनाएँ** : दो या दो से अधिक घटनाएँ इस प्रकार हों कि एक के घटित होने का प्रभाव दूसरे पर पड़ता हो तो उन्हें आश्रित घटनाएँ कहते हैं।

उदाहरणार्थ : ताश की साधारण गड्डी से खींचे गये एक पत्ते का पान का पत्ता होना तदुपरान्त बिना इस पत्ते को गड्डी में मिलाएँ पुनः खींचे गए पत्ते का हुकुम का पत्ता होना दोनो आश्रित घटनाएँ हैं।

**7. परस्पर अपवर्जी या असंयुक्त घटनाएँ (Mutually exclusive or disjoint events) :** दो या दो से अधिक घटनाएँ परस्पर अपवर्जी या असंयुक्त घटनाएँ कहलाती हैं यदि इनमें से कोई दो घटनाएँ एक साथ घटित नहीं हो सके अर्थात् यदि एक घटना घटित होती है, तो शेष घटनाएँ घटित नहीं हो सके। उदाहरणार्थ :

(i) एक सिक्के को उछालने पर चित्त या पट आना परस्पर अपवर्जी घटनाएँ हैं।

(ii) ताश की गड्डी में से एक पत्ता खींचने पर राजा होना या रानी होना परस्पर अपवर्जी घटनाएँ हैं।

**8. समप्रायिक घटनाएँ (Equally likely events ) :** यदि किसी प्रयोग में सभी घटनाओं के घटित होने की समान सम्भावना हो तो ऐसी घटनाओं को समप्रायिक घटनाएँ कहते हैं। उदाहरणार्थ :

(i) एक सिक्के को उछालने पर चित्त (H) या पट (T) आना समप्रायिक घटनाएँ हैं।

(ii) ताश की गड्डी में से पत्ते के खींचने पर लाल या काला पत्ता होना समप्रायिक घटनाएँ हैं।

**9. मिश्र घटनाएँ (Compound events) :** यदि दो या दो से अधिक घटनाएँ एक साथ घटित हों तो वे मिश्र घटनाएँ या संयुक्त घटनाएँ कहलाती हैं।

उदाहरणार्थ : दो थैलों में कुछ नीली व कुछ लाल गेंदें रखी हैं। किसी एक थैले का चुनाव कर उसमें से एक गेंद निकालना एक मिश्र घटना है क्योंकि दो थैलों में से एक का चयन कर और फिर चुने हुए थैले में से एक गेंद निकालना साथ–साथ घटित होने वाली घटना है।

## (B) प्रायिकता का अभिगृहितीय दृष्टिकोण में आवश्यक परिभाषाएँ

**1. प्रतिदर्श बिन्दु तथा प्रतिदर्श समष्टि (Sample point and sample space) :** किसी अभिप्रयोग का प्रत्येक परिणाम एक प्रतिदर्श बिन्दु कहलाता है तथा इन सभी प्रतिदर्श बिन्दुओं का समुच्चय उस अभिप्रयोग का प्रतिदर्श समष्टि कहा जाता है। इसे प्रायः S से व्यक्त किया जाता है। उदाहरणार्थः

(i) दो सिक्कों के उछाल में प्रतिदर्श बिन्दु (H,H), (H,T), (T,H), (T,T) हैं

तथा $S=\{(H,H), (H,T), (T,H), (T,T)\}$ प्रतिदर्श समष्टि हैं।

(ii) 3 बालक और 2 बालिकाओं में से 2 को चुना जाता है। इस अभिप्रयोग की प्रतिदर्श समष्टि होगी (बालक $B_1,B_2,B_3$, बालिका $G_1,G_2$) :

$$S=\{B_1B_2,B_2B_3,B_3B_1,B_1G_1,B_1G_2,B_2G_1,B_2G_2,B_3G_1,B_3G_2,G_1G_2\}$$

**2. प्रारंभिक घटना (Elementary events)** : यादृच्छिक प्रयोग से सम्बन्धित प्रतिदर्श समष्टि का एक अवयव वाला उपसमुच्चय प्रारंभिक घटना कहलाती है।

स्पष्टतः यादृच्छिक प्रयोग के प्रत्येक परिणाम के साथ एक प्रारम्भिक घटना जुड़ी होती है तथा विलोमतः

उदाहरणार्थ : एक सिक्के को दो बार उछालने पर प्रतिदर्श समष्टि S={HH, HT, TH, TT,} है यहाँ इस प्रतिदर्श समष्टि की चार प्रारंभिक घटनाएं $E_1 = \{HH\}$, $E_2 = \{HT\}$, $E_3 = \{TH\}$ यहाँ $E_4 = \{TT\}$ है।

**3. मिश्र घटना (Compound event)** : एक प्रयोग की प्रतिदर्श समष्टि S के वे उपसमुच्चय जो प्रतिदर्श समष्टि S के एक अवयव वाले उपसमुच्चयों के असंयुक्त सम्मिलन से बने समुच्चयों को मिश्र घटनाएँ कहते है। उदाहरणार्थ : एक पासे को उछालने पर विचार कीजिए। इस प्रयोग की प्रतिदर्श समष्टि $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ है। प्रारंभिक घटनाएँ

$E_1 = \{1\}$, $E_2 = \{2\}, .., E_6 = \{6\}$ हैं। यहाँ $A_1 = \{2, 4, 6\}$, $A_2 = \{1, 3, 5\}$ इत्यादि मिश्र घटनाएँ कहलाएँगी।

**4. असंभव व निश्चित घटनांए (Impossible and certain events)** : माना एक यादृच्छिक प्रयोग से सम्बन्धित प्रतिदर्श समष्टि S है तो $\phi$ तथा S इसके उपसमुच्चय होने के कारण घटनाएँ है। घटना $\phi$ को असंभव घटना तथा S को निश्चित घटना कहते है।

उदाहरणार्थः एक पासे को उछालने की घटना से सम्बन्धित प्रयोग पर विचार करे तथा इसमें $A_1 = 1$ से कम अंक आने की घटना $A_2 = 8$ से कम अंक आने की घटना हो तो $A_1$ निश्चित रूप से असंभव घटना होगी तथा $A_2$ निश्चित घटना होगी।

**5. घटना का घटित होना (Occurrence of an event)** : प्रतिदर्श समिष्ट S का उपसमुच्चय A किसी घटना का निरूपित करता है। यदि $\omega$ उस यादृच्छिक प्रयोग का एक परिणाम है तथा $\omega \in A$ तो कहा जा सकता है कि घटना घटित हुई तथा यदि $\omega \notin A$ तो कहा जा सकता है कि घटना घटित नहीं हुई।

उदाहरणार्थः एक निष्पक्ष पासे को फेंकने का यादृच्छिक प्रयोग पर विचार करते है। माना सम संख्या आने की घटना A है तो $A = \{2, 4, 6\}$ यदि एक प्रयोग में परिणाम 6 प्राप्त होता है एवं $6 \in A$ तब हम कह सकते है कि इस प्रयोग में घटना घटित हुई यदि परिणाम 5 प्राप्त होता है तो हम कहेंगे कि इस प्रयोग में घटना घटित नहीं हुई।

**6. घटनाओं का बीजगणित (Algebra of events)** : घटनाओं के बीजगणित को निम्न सारणी के माध्यम से आसानी से समझा जा सकता है:

| घटना का मौखिक विवरण | समुच्चय सिद्धान्त संकेतों में समानार्थक |
|---|---|
| A नहीं | $\bar{A}$ |
| A या B (A या B में से कम से कम एक) | $A \cup B$ |
| A तथा B | $A \cap B$ |
| A परन्तु B नहीं | $A \cap \bar{B}$ |
| न तो A एवं न ही B | $\bar{A} \cap \bar{B} = (\overline{A \cup B})$ |
| A तथा B में से यथार्थतः एक | $(A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cup B)$ |
| A, B तथा C में से यथार्थतः दो | $(A \cap B \cap \bar{C}) \cup (A \cap \bar{B} \cap C) \cup (\bar{A} \cap B \cap C)$ |
| A, B तथा C में से कम से कम एक | $A \cup B \cup C$ |
| A, B तथा C में से सभी | $A \cap B \cap C$ |

**7. परस्पर अपवर्जी या असंयुक्त (Mutually exclusive or disjoint event)**: माना एक यादृच्छिक प्रयोग की प्रतिदर्श समष्टि S है तथा $A_1$ व $A_2$ दो घटनाएँ है तो $A_1$ तथा $A_2$ परस्पर अपवर्जी होगी यदि $A_1 \cap A_2 = \phi$.

स्पष्टतः एक यादृच्छिक प्रयोग से सम्बन्धित प्रारंभिक घटनाएं परस्पर अपवर्जी होती है। घटनाएं जो परस्पर अपवर्जी नहीं है वह अनुकूल घटनाएँ कहलाती है।

**8. परस्पर अपवर्जी निःशेष घटनाओं का निकाय (Mutually exclusive and exhaustive system of events):**

माना एक यादृच्छिक प्रयोग की प्रतिदर्श समष्टि S है तथा $A_1, A_2, ...A_n$, S के उपसमुच्चय इस प्रकार है कि

(i) $A_i \cap A_j = \phi$, $i \neq j$ तथा (ii) $A_1 \cup A_2 \cup .... \cup A_n = S$

तो यह परस्पर अपवर्जी निश्शेष घटनाओं का निकाय निर्मित करता है।

## प्रश्नमाला 14.1

1. बल्लों के एक कार्टून में से 3 बल्ब यादृच्छया निकाले जाते हैं। प्रत्येक बल्ब को जांचा जाता है और उसे खराब (D) या ठीक (N) में वर्गीकृत करते हैं। इस परीक्षण का प्रतिदर्श समष्टि ज्ञात कीजिए।
2. एक ताश की गड्डी से 4 पत्ते निकाले जाते हैं, तो n(E) क्या होगा, जबकि E एक बादशाह, एक बेगम, एक गुलाम व एक इक्का निकालने की घटना है।
3. एक पासा फेंका जाता है। यदि पासे पर 4 दर्शाना E घटना है तथा सम संख्या आना F घटना है। क्या E तथा F परस्पर अपवर्जी घटना है?
4. दो पासों को एक साथ उछाला जाता है, तो
   (i) युग्मक होने का प्रतिदर्श समष्टि क्या है? (ii) अंको योग 8 होने का प्रतिदर्श समष्टि क्या है?

## 14.03 प्रायिकता की परिभाषा (Defination of Probability):

### प्रायिकता की चिरप्रतिष्ठित परिभाषा (Classical defination of probability):

यदि किसी अभिप्रयोग के कुल $n$ परिणाम समप्रायिक, परस्पर अपवर्जी एवम् निश्शेष हों और उनमें से $m$ परिणाम किसी विशेष घटना A के अनुकूल हों तो A की प्रायिकता अनुपात $m/n$ द्वारा परिभाषित की जाती है जिसे संकेत P(A) से व्यक्त करते हैं।

अतः $$P(A) = \frac{\text{A की अनुकूल स्थितियाँ}}{\text{A की निःश्शेष स्थितियाँ}} = \frac{m}{n}, \text{ (संख्यात्मक माप)}$$

यदि किसी अभिप्रयोग में घटना A का घटना निश्चित हो तो $m = n$ होगा तथा

$$P(A) = \frac{n}{n} = 1,$$

यदि किसी घटना A का घटना असम्भव हो तो $m = 0$ तथा

$$P(A) = \frac{0}{n} = 0,$$

इसलिए किसी भी घटना A के लिए $0 \leq P(A) \leq 1$

अर्थात् किसी भी घटना की प्रायिकता 0 से कम तथा 1 से अधिक नहीं हो सकती है और प्रायिकता की सीमा 0 से 1 तक होती है। घटना A के घटित न होने की प्रायिकता $P(\bar{A})$ द्वारा प्रदर्शित की जाती है।

अतः $$P(\bar{A}) = \frac{\text{घटना A की प्रतिकूल स्थितियाँ}}{\text{घटना A की निश्शेष स्थितियाँ}} = \frac{n-m}{n} = 1 - \frac{m}{n}$$

$\Rightarrow \quad P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

### प्रायिकता की अभिगृहीतीय दृष्टिकोण में परिभाषा (Defination of probability in axiomatic approach):

माना एक यादृच्छिक प्रयोग की प्रतिदर्श समष्टि S है तथा A इस समष्टि का उपसमुच्चय है जो एक घटना को दर्शाता है तो घटना A की प्रायिकता

$$P(A) = \frac{\text{A में अवयवों की संख्या}}{\text{S में अवयवों की संख्या}} = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\text{A में प्रारंभिक घटनाओं की संख्या}}{\text{S में प्रारंभिक घटनाओं की संख्या}}$$

इससे स्पष्ट है कि $P(\phi) = 0,\ P(S) = 1$ तथा $0 \leq P(A) \leq 1$.

## 14.04 संयोगानुपात (Odds) :

यदि किसी अभिप्रयोग में निःशेषी घटनाएँ $n$ तथा किसी घटना $A$ के अनुकूल स्थितियाँ $m$ हो तो घटना $A$ के प्रतिकूल स्थितियाँ $n-m$ होंगी। तब $A$ के पक्ष में संयोगानुपात $m:(n-m)$ और विपक्ष में संयोगानुपात $(n-m):m$ होगा।

घटना A के पक्ष में संयोगानुपात $= \dfrac{m}{n-m} = \dfrac{\frac{m}{n}}{\frac{n-m}{n}} = \dfrac{P(A)}{P(\bar{A})}$

घटना A के विपक्ष में संयोगानुपात $= \dfrac{n-m}{m} = \dfrac{\frac{n-m}{n}}{\frac{m}{n}} = \dfrac{P(\bar{A})}{P(A)}$

**प्रमेय** : किसी यादृच्छिक अभिप्रयोग में किसी घटना A के लिए सिद्ध कीजिए कि $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

**प्रमाण**: यदि किसी अभिप्रयोग में निःशेषी घटनाएँ $n$ तथा किसी घटना A के अनुकूल स्थितियाँ $m$ हो तो घटना A के प्रतिकूल स्थितियाँ $n-m$ होंगी।

घटना A के घटित न होने की प्रायिकता

$$P(\bar{A}) = \frac{n-m}{n} = 1 - \frac{m}{n} = 1 - P(A)$$

पुनः अभिगृहिती दृष्टिकोण में

$$P(\bar{A}) = \frac{\bar{A} \text{ में प्रारंभिक घटनाओं की संख्या}}{S \text{ में प्रारंभिक घटनाओं की संख्या}}$$

$$= \frac{n(S) - n(A)}{n(S)} = 1 - \frac{n(A)}{n(S)} = 1 - P(A)$$

### दृष्टांतीय उदाहरण

**उदाहरण 1: एक पासे के उछालने पर सम अंक आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।**

**हल:** एक पासे के फेंकने पर 6 तरह के अंक आ सकते हैं। अतः घटना की निश्शेष स्थितियाँ = 6, प्रदत्त घटना के लिए सम अंक 2,4,6 आयेंगे। जिनकी संख्या 3 हैं, अतः घटना के लिए अनुकूल स्थितियाँ = 3

$\therefore$ अभीष्ट प्रायिकता $= 3/6 = 1/2$

**उदाहरण 2: दो पासों के उछालने पर अंको का योग 7 आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।**

**हल:** दो पासों के फेंकने पर $6 \times 6 = 36$ परिणाम प्राप्त हो सकते हैं। अतः प्रदत्त घटना के लिए निश्शेष स्थितियाँ = 36

अंकों का योग 7 आने के लिए निम्नलिखित युग्म बनते हैं

(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1) जिनकी संख्या 6 है।

अतः घटना के लिए अनुकूल स्थितियाँ = 6

$\therefore$ अभीष्ट प्रायिकता $= 6/36 = 1/6$

**उदाहरण 3: यदि एक लीप वर्ष का यादृच्छिक चयन किया गया हो तो इस वर्ष में 53 सोमवार होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।**

**हल:** हमें ज्ञात है कि लीप वर्ष में 366 दिन होते हैं। अतः 52 पूर्ण सप्ताह तथा दो दिन शेष बचते हैं। इन दो दिनों की सात संभावनाएँ निम्नलिखित प्रकार से हो सकती हैं। 1. सोमवार और मंगलवार 2. मंगलवार और बुधवार 3. बुधवार और बृहस्पतिवार 4. बृहस्पतिवार और शुक्रवार 5. शुक्रवार और शनिवार 6. शनिवार और रविवार 7. रविवार और सोमवार।

अतः प्रदत्त घटना के लिए निश्शेष स्थितियाँ = 7 इन सात संभावित स्थितियों में से दो में सोमवार आते हैं। अतः प्रदत्त घटना के लिए अनुकूल स्थितियाँ = 2

$\therefore$ अभीष्ट प्रायिकता $= 2/7$

**उदाहरण 4: बारह टिकटों पर एक–एक संख्या 1 से 12 तक लिखी गयी हैं। यदि उनमें से कोई एक टिकट का यादृच्छिक चयन किया जाये तो इस पर लिखी हुयी संख्या के 2 या 3 के गुणज होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।**

**हलः** 1 से 12 तक अंकों में 2 या 3 के गुणज 2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12 हैं। अतः समप्रायिक 12 स्थितियों में से 8 अनुकूल हैं।

$\therefore$ अभीष्ट प्रायिकता $= \dfrac{8}{12} = \dfrac{2}{3}$

**उदाहरण 5: ताश की 52 पत्तों की गड्डी में से यादृच्छिक रूप से दो पत्ते निकाले जाते हैं। सिद्ध किजिए कि दोनो के गुलाम आने की प्रायिकता $\dfrac{1}{221}$ होगी।**

**हल :** गड्डी के 52 पत्तों में से दो पत्ते निकालने की निश्शेष स्थितियाँ= $^{52}C_2$

गड्डी के 4 गुलाम में से 2 निकालने की अनुकूल स्थितियाँ = $^{4}C_2$

$\therefore$ अभीष्ट प्रायिकता $= \dfrac{^{4}C_2}{^{52}C_2} = \dfrac{\frac{4\times3}{2\times1}}{\frac{52\times51}{2\times1}} = \dfrac{4\times3}{2\times1} \times \dfrac{2\times1}{52\times51} = \dfrac{1}{221}$

**उदाहरण 6: तीन सिक्के एक साथ उछाले जाते हैं, तो (i) केवल दो चित्त तथा (ii) कम से कम दो चित्त आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।**

**हल :** तीन सिक्कों को उछालने पर निश्शेष स्थितियाँ $= 2^3 = 8$

[HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT]

(i) केवल 2 चित्त आने की अनुकूल स्थितियाँ = 3

$\therefore$ अभीष्ट प्रायिकता $= 3/8$

(ii) कम से कम दो चित्त आने की अनुकूल स्थितियाँ = 4

$\therefore$ अभीष्ट प्रायिकता $= 4/8 = 1/2$

**उदाहरण 7: एक थैले में 3 सफेद एवं 5 काली गेंदें रखी गई हैं। यदि 2 गेंदें यादृच्छिक रूप से निकाली जाती हैं, तो दोनों गेंदें काली होने के पक्ष में संयोगानुपात ज्ञात कीजिए।**

**हलः** थैले में गेंदों की कुल संख्या = 3+5 = 8

8 में से 2 गेंदें निकालने की निश्शेष स्थितियाँ $= {}^{8}C_2 = 28$

5 काली गेंदों में से 2 काली गेंदें निकालने की अनुकूल स्थितियाँ $= {}^{5}C_2 = 10$

$\therefore$ प्रतिकूल स्थितियाँ = 28–10 = 18

अतः घटना के पक्ष में संयोगानुपात = अनुकूल स्थितियाँ : प्रतिकूल स्थितियाँ = 10 : 18 = 5 : 9

**उदाहरण 8: 4 पुरूष, 3 महिलाएं और 5 बच्चों के एक समूह से 4 व्यक्ति यादृच्छया चुने जाते हैं। चुने गये व्यक्तियों में ठीक दो बच्चे होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।**

**हल :** कुल व्यक्ति = 4+3+5 = 12

12 व्यक्तियों में से 4 व्यक्तियों के चयन करने की निश्शेष स्थितियाँ $= {}^{12}C_4$

प्रत्येक चुनाव में ठीक 2 बच्चे होने चाहिये जिनका चयन ${}^{5}C_2$ तरीकों से किया जा सकता है। 2 बच्चों के साथ शेष 2 व्यक्ति, 4 पुरूष + 3 महिलाएं = 7 व्यक्तियों में से चुने जायेंगें जिनके चयन के ${}^{7}C_2$ तरीके हैं। अतः अभीष्ट चयन के लिए अनुकूल स्थितियाँ $= {}^{5}C_2 \times {}^{7}C_2$

$\therefore$ अभीष्ट प्रायिकता $= \dfrac{{}^{5}C_2 \times {}^{7}C_2}{{}^{12}C_4} = \dfrac{\frac{5\times4\times7\times6}{2\times1\times2\times1}}{\frac{12\times11\times10\times9}{4\times3\times2\times1}} = \dfrac{5\times7\times6}{11\times5\times9} = \dfrac{14}{33}$

## प्रश्नमाला 14.2

1. एक पासे को उछालने पर 4 से बड़ा अंक आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।
2. एक सिक्के को दो बार उछाला जाता हैं। दोनों बार चित्त आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।
3. 1 से 17 तक की प्राकृत संख्याओं में से एक संख्या का यादृच्छिक चयन किया जाता है। प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि वह एक अभाज्य संख्या हो।
4. एक सिक्के के लगातार तीन उछालों में एकान्तरतः चित्त या पट आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।
5. यदि दो पासों को एक साथ उछाला जाता है तो युग्मक (doublet) अथवा 9 प्रदर्शित होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।
6. एक अलीप वर्ष में केवल 52 रविवार आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।
7. ताश की एक गड्डी के 52 पत्तों में से एक पत्ता खींचा जाता है, उस पत्ते के इक्का होने के पक्ष में संयोगानुपात ज्ञात कीजिए।
8. 12 विद्यार्थियों की एक कक्षा में 5 लड़के और शेष लड़कियाँ हैं। एक विद्यार्थी के चयन में लड़की होने के विपक्ष में संयोगानुपात ज्ञात कीजिए।
9. n व्यक्ति एक गोल मेज के चारों तरफ बैठते हैं। दो विशिष्ट व्यक्तियों के एक साथ बैठने के विपक्ष में क्या संयोगानुपात होंगें।
10. तीन पत्र तथा तीन उनके संगत लिफाफे हैं यदि सभी पत्र लिफाफों में यदृच्छया रखे जाते हैं, तो सभी पत्रों के सही लिफाफों में न रखने की क्या प्रायिकता है ?
11. प्रथम दो सौ पूर्णाकों में से एक अंक यादृच्छया चुना जाता है, इसकी 6 या 8 से विभाजित होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।
12. तीन पासों के एक फेंक में अंकों का योग 15 से अधिक होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।
13. शब्द ANGLE के अक्षर यादृच्छिक क्रम से एक पंक्ति में व्यवस्थित किए जाते हैं। स्वरों के एक साथ आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।
14. एक ताश की गड्डी में से एक पत्ता यादृच्छिक रूप से निकाला जाता है। इसके इक्का, राजा या रानी होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।
15. एक थैले में 6 सफेद, 7 लाल और 5 काली गेंदें हैं। इनमें से 3 गेंदें यादृच्छिक रूप से एक के बाद एक निकाली जाती हैं। इन तीनों गेंदों के सफेद होने की प्रायिकता क्या होगी, जबकि निकाली गयी गेंद वापस थैले में न रखी जाए ?

## 14.05 प्रायिकता का योग प्रमेय या पूर्ण प्रायिकता का प्रमेय (Addition theorem of probability or theorem of total probability):

**जब घटनाएँ परस्पर अपवर्जी हों–**

**प्रमेय 1 : दो परस्पर अपवर्जी घटनाओं में से किसी एक के घटित होने की प्रायिकता दोनों घटनाओं के घटित होने की प्रायिकता के योग के बराबर होती हैं। यदि $A$ व $B$ दो परस्पर अपवर्जी घटनाएँ हों, तो**

$$P(A + B) = P(A) + P(B)$$

या

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

**प्रमाणः** माना की घटनाओं की निश्शेषी स्थितियाँ $n$ तथा घटना $A$ और $B$ की अनुकूल स्थितियाँ क्रमशः $m_1$ तथा $m_2$ हैं

$$\therefore \qquad P(A) = \frac{m_1}{n}, \; P(B) = \frac{m_2}{n}$$

चूँकि $A$ तथा $B$ परस्पर अपवर्जी घटनाएँ हैं अतः इनकी अनुकूल स्थितियाँ पूर्णतया भिन्न–भिन्न होंगी एवं $A$ व $B$ में से कोई एक घटना घटित होने की अनुकूल स्थितियाँ $m_1+m_2$ होंगी :

$$P(A+B) = \frac{m_1+m_2}{n} = \frac{m_1}{n} + \frac{m_2}{n} = P(A)+P(B)$$

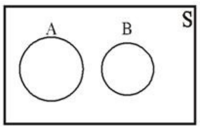
$$P(A+B) = P(A) + P(B)$$

**समुच्चय सिद्धान्त से प्रमाणः**

मानलो कि $S$ प्रतिदर्श समष्टि तथा $A$ तथा $B$ इसकी दो परस्पर अपवर्जी घटनाएँ हैं, तो इनका कोई भी अवयव उभयनिष्ठ नहीं होगा और दोनों घटनाएँ एक साथ घटित नहीं होगी।

चूँकि घटनाएँ $A$ तथा $B$ परस्पर अपवर्जी हैं। अतः $(A\cup B)$ में अवयवों की संख्या $A$ तथा $B$ में अलग – अलग अवयवों की संख्या के योगफल के समान (या बराबर) होगी।

अतएव $n(A\cup B) = n(A) + n(B)$



चित्र 14.01

$$P(A\cup B) = P(A+B) = \frac{n(A\cup B)}{n(S)} = \frac{n(A) + n(B)}{n(S)}$$

$$P(A\cup B) = \frac{n(A)}{n(S)} + \frac{n(B)}{n(S)}$$

$$\Rightarrow \quad P(A\cup B) = P(A) + P(B)$$

**व्यापकीकरण** : $n$ परस्पर अपवर्जी घटनाएँ हैं तो किसी एक घटना के घटित होने की प्रायिकता उन सभी घटनाओं के घटित होने की अलग–अलग प्रायिकता के योग के बराबर होती हैं, अर्थात्

$$P(A_1+A_2+A_3+\ldots A_n) = P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)+\ldots+P(A_n)$$

**जब घटनाएँ परस्पर अपवर्जी न हों–**

**प्रमेय 2. यदि $A$ व $B$ दो परस्पर अपवर्जी घटनाएँ नहीं हो तब इनमें से किसी एक के घटित होने की प्रायिकता निम्न प्रकार होती हैं:**

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

या

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

**प्रमाणः** माना की घटनाओं की निश्शेषी स्थितियाँ n तथा A और B की अनुकूल स्थितियाँ क्रमशः $m_1$ तथा $m_2$ है।

$$\therefore \quad P(A) = \frac{m_1}{n}, \quad P(B) = \frac{m_2}{n}$$

चूँकि $A$ तथा $B$ कोई दो घटनाएँ हैं इसलिए यह संभव है कि वे परस्पर अपवर्जी न हो। अतः इनमें कुछ उभयनिष्ठ घटनाएँ हो सकती हैं। माना $A$ तथा $B$ में उभयनिष्ठ अनुकूल घटनाएँ $m_3$ हैं।

$$P(AB) = \frac{m_3}{n}$$

घटनाएँ (A+B) के अनुकूल घटनाएँ $m_1 + m_2 - m_3$

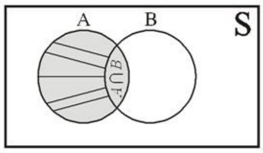
$$\therefore \quad P(A+B) = \frac{m_1+m_2-m_3}{n} = \frac{m_1}{n} + \frac{m_2}{n} - \frac{m_3}{n}$$

या $$P(A+B) = \mathrm{P(A)} + \mathrm{P(B)} - \mathrm{P(AB)}$$

या $$P(A\cup B) = \mathrm{P(A)} + \mathrm{P(B)} - \mathrm{P}(A\cap B)$$

**समुच्चय सिद्धान्त से प्रमाणः**

माना एक अभिप्रयोग का प्रतिदर्श समष्टि S है तथा समुच्चय A घटना A के घटित होने और समुच्चय B घटना B के घटित होने को प्रदर्शित करता है तथा घटनाएँ परस्पर अपवर्जी नहीं हैं अतः A,B की उभयनिष्ठ घटनाएँ समुच्चय $A\cap B$ द्वारा प्रदर्शित की जाती है।



चित्र 14.02

$(A\cup B) = (A-B) \cup (A\cap B) \cup (B-A)$

$A = (A-B) \cup (A\cap B)$

तथा $B = (B-A) \cup (A\cap B)$

$\therefore \; P(A) = P(A-B) + P(A\cap B)$ (i)

तथा $P(B) = P(B-A) + P(A\cap B)$ (ii)

$P(A\cup B) = P[(A-B) \cup (A\cap B) \cup (B-A)]$

$= P(A-B) + P(A\cap B) + P(B-A)$

$$= P(A) - P(A \cap B) + P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B)$$ [(i) व (ii) से]

$$= P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$\therefore \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

या $\quad P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

**उपप्रमेयः** यदि घटनाएँ परस्पर अपवर्जी हों तो,

$A \cap B = \varnothing$ तथा $P(A \cap B) = 0$

$\therefore \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

या $\quad \mathbf{P(A+B) = P(A) + P(B)}$

## 14.06 प्रायिकता का गुणन प्रमेय या मिश्र प्रायिकता का नियम

(Multiplication theorem of probability or theorem of compound probability):

कोई दो घटनाओं A तथा B के एक साथ घटित होने की प्रायिकता, A की प्रायिकता तथा B की प्रतिबन्धित प्रायिकता (जब A घटित हो चुकी हो) के गुणनफल के बराबर होती है (या B की प्रायिकता तथा A की प्रतिबन्धित प्रायिकता के गुणनफल के बराबर होती है)

अर्थात् $P(AB) = P(A) \cdot P\left(\frac{B}{A}\right)$ या $P(A \cap B) = P(A) \cdot P\left(\frac{B}{A}\right)$

$P(AB) = P(B) \cdot P\left(\frac{A}{B}\right)$ या $P(A \cap B) = P(B) \cdot P\left(\frac{A}{B}\right)$

**प्रमाणः** मानलो समप्रायिक तथा परस्पर अपवर्जी घटनाओं की कुल संख्या $n$ हैं जिसमें से $m$ घटनाएँ $A$ के अनुकूल हैं तथा $m_1$ घटनाएँ $A$ तथा $B$ दोनों के एक साथ घटित होने के अनुकूल है तब घटनाएँ $A$ के अनुकूल घटनाओं $m$ में सम्मिलित होंगी।

$$P(AB) = \frac{m_1}{n} = \frac{m_1}{m} \times \frac{m}{n}$$

परन्तु $\quad P(A) = \frac{m}{n}$

$$P\left(\frac{B}{A}\right) = \frac{A \text{ तथा } B \text{ के एक साथ घटित होने की घटनाएँ}}{A \text{ के अनुकूल घटनाएँ}} = \frac{m_1}{m}$$

$$P(AB) = P(A).\, P\left(\frac{B}{A}\right)$$

या $\quad P(AB) = P\left(\frac{B}{A}\right).\, P(A)$

इसी प्रकार हम सिद्ध कर सकते हैं कि

$P(AB) = P(B).\, P\left(\frac{A}{B}\right)$ या $P(AB) = P\left(\frac{A}{B}\right).\, P(B)$

अतः $\quad P(AB) = P(B).\, P\left(\frac{A}{B}\right)$ या $P(AB) = P(A).\, P\left(\frac{B}{A}\right)$

**उपप्रमेयः** यदि $A$ तथा $B$ स्वतंत्र घटनाएँ हों, तो

$$P\left(\frac{B}{A}\right) = P(B)$$

$$P(AB) = P(A).\, P(B)$$

व्यापकीकरणः यदि $A_1, A_2, \ldots, A_n$ स्वतंत्र घटनाएँ हों, तो

$P(A_1 A_2 A_3 \ldots A_n) = P(A_1).\, P(A_2).\, P(A_3) \ldots P(A_n)$

## 14.07 कम से कम एक घटना की प्रायिकताः

यदि $n$ स्वतंत्र घटनाओं के घटित होने की प्रायिकता क्रमशः $p_1, p_2, ..., p_n$ हों तो उनमें से कम से कम एक घटना के घटित होने की प्रायिकता ज्ञात करना।

माना $A_1, A_2, ..., A_n$ स्वतंत्र घटनाएं हैं जिनके घटित होने की प्रायिकताएँ क्रमशः $p_1, p_2, ..., p_n$ है

तब $P(A_1) = p_1, P(A_2) = p_2, ......... P(A_n) = p_n$ तथा

$$P(\bar{A}_1) = 1 - p_1, \quad P(\bar{A}_2) = 1 - p_2, ..., P(\bar{A}_n) = 1 - p_n$$

चूँकि $A_1, A_2, ..., A_n$ स्वतंत्र घटनाएँ है अतः $\bar{A}_1, \bar{A}_2, ..., \bar{A}_n$ भी स्वतंत्र घटनाएँ होंगी।

अतः प्रायिकता के गुणन प्रमेय से किसी भी घटना के घटित न होने की प्रायिकता

$$= P(\bar{A}_1 . \bar{A}_2 ..... \bar{A}_n)$$

$$= P(\bar{A}_1) P(\bar{A}_2) ..... P(\bar{A}_n)$$

$$= (1-p_1)(1-p_2) ...... (1-p_n)$$

अतः कम से कम एक घटना के घटित होने की प्रायिकता

= 1– (किसी भी घटना के घटित न होने की प्रायिकता)

$$= 1 - P(\bar{A}_1) P(\bar{A}_2) ..... P(\bar{A}_n)$$

$$= 1 - \{(1-p_1)(1-p_2) ...... (1-p_n)\}$$

### दृष्टांतीय उदाहरण

**उदाहरण 9: दो पासे उछालने पर दोनों के अंको का योग 7 या 11 आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।**

**हल :** दो पासे फेंकने पर निश्शेषी स्थितियाँ $= 6 \times 6 = 36$

योग 7 आने के लिए अनुकूल स्थितियाँ (6,1), (5,2), (4,3), (3,4), (2,5), (1,6) = 6

$$\therefore \quad P(7) = \frac{6}{36}$$

योग 11 आने के लिए अनुकूल स्थितियाँ (6,5), (5,6) = 2

$$\therefore \quad P(11) = \frac{2}{36}$$

क्योंकि घटनाएँ परस्पर अपवर्जी हैं, अतः कुल प्रायिकता

$$P(7+11) = P(7) + P(11) = \frac{6}{36} + \frac{2}{36} = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$$

**उदाहरण 10: किसी थैले में 2 सफेद, 4 काली ओर 5 लाल गेंदे हैं। तीन गेंदें यादृच्छया निकाली जाती हैं। तीनों गेंदों के समान रंग की होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।**

, , ∵ थैले में कुल 2+4+ 5 =11 गेंदें हैं जिसमें तीन गेंदें निकालने के कुल तरीके = $^{11}C_3$

तीनों गेंदें समान रंग की काली या लाल हो सकती हैं :

तीनों गेंदों के लाल होने की प्रायिकता $= \frac{^5C_3}{^{11}C_3} = \frac{10}{165}$

तीनों गेंदों के काली होने की प्रायिकता $= \frac{^4C_3}{^{11}C_3} = \frac{4}{165}$

∵ ये दोनों घटनाएँ परस्पर अपवर्जी हैं, अतः अभीष्ट प्रायिकता $= \frac{10}{165} + \frac{4}{165} = \frac{14}{165}$

**उदाहरण 11: ताश की गड्डी के 52 पत्तों में से एक पत्ता निकाला जाता है। इसके इक्का या पान का पत्ता होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।**

**हल :** माना निकाले गए पत्ते के इक्का होने की घटना को $A$ तथा पान का पत्ता होने की घटना को $B$ से व्यक्त करते हैं। यहाँ $A$ तथा $B$ परस्पर अपवर्जी घटनाएँ नहीं हैं क्योंकि निकाला गया पत्ता पान का इक्का होने पर दोनों घटनाएँ एक साथ घटित होंगी अतः प्रायिकता के योग प्रमेय से

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

घटना A के लिए निश्शेषी स्थितियाँ = $^{52}C_1 = 52$

तथा गड्डी में इक्कों की संख्या 4 है जिसकी अनुकूल स्थितियाँ = $^{4}C_1 = 4$

$$\therefore \; P(A) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$$

घटना $B$ के लिए निश्शेषी स्थितियाँ = $^{52}C_1 = 52$ घटना $B$ के लिए अनुकूल स्थितियाँ = $^{13}C_1 = 13$ (गड्डी में पान के 13 पत्ते हैं।)

$$\therefore \; P(B) = \frac{13}{52}$$

घटना $A$ तथा $B$ के साथ–साथ घटित होने की अनुकूल स्थिति = 1

$$\therefore \; P(AB) = \frac{1}{52} \text{ (जब पान का इक्का हो।)}$$

अतः $$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

$$P(A+B) = \frac{4}{52} + \frac{13}{52} - \frac{1}{52} = \frac{16}{52} = \frac{4}{13}$$

**उदाहरण 12: A, B, C भिन्न–भिन्न प्रतियोगिताओं में भाग लेते हैं। $A$ के सफल होने की प्रायिकता 2 / 5 है, $B$ की 1 / 8 तथा $C$ की 5 / 8 है।**

**प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि**

**(i) तीनों सफल हों (ii) कम से कम एक सफल हो।**

**हल :** यहाँ $P(A) = \frac{2}{5}$ अतः $P(\bar{A}) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$

$P(B) = \frac{1}{8}$ अतः $P(\bar{B}) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$

$P(C) = \frac{5}{8}$ अतः $P(\bar{C}) = 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$

(i) सफल होने की घटनाएँ परस्पर स्वतंत्र हैं, अतः तीनों के सफल होने की प्रायिकता, मिश्र प्रायिकता नियम से= $P(ABC) = P(A).P(B).P(C)$

$$= \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{5}{8} = \frac{1}{32}$$

(ii) कम से कम एक के सफल होने की प्रायिकता

$$= 1 - P(\bar{A}\,\bar{B}\,\bar{C})$$

$$= 1 - P(\bar{A})\cdot P(\bar{B})\cdot P(\bar{C})$$

$$= 1 - \frac{3}{5}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{3}{8} = 1 - \frac{63}{320} = \frac{257}{320}$$

**उदाहरण 13: मोहन 60% स्थितियों में सत्य बोलता है। सोहन 80% स्थितियों में सत्य बोलता है। किसी कथन पर उनका एक दूसरे से विरोधाभास होने की प्रायिकता क्या होगी।**

**हलः** माना A तथा B क्रमशः मोहन तथा सोहन के सत्य बोलने की घटना को व्यक्त करते है, तब

$$P(A) = \frac{60}{100} = \frac{3}{5} \Rightarrow P(\bar{A}) = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$$

$$P(B) = \frac{80}{100} = \frac{4}{5} \Rightarrow P(\bar{B}) = 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$$

(i) मोहन सत्य बोले व सोहन असत्य बोले $= A\bar{B}$

(ii) मोहन असत्य बोले व सोहन सत्य बोले $= \bar{A}B$

चूंकि $A, \bar{B}$ तथा $\bar{B}, A$ स्वतंत्र घटनाएँ हैं :

$$\therefore \quad P(\bar{A}B) = P(\bar{A}).\ P(B) = \frac{2}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{8}{25}$$

$$P(A\bar{B}) = P(A).\ P(\bar{B}) = \frac{3}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{3}{25}$$

पुनः $A\bar{B}$ तथा $\bar{A}B$ परस्पर अपवर्जी घटनाएँ हैं

$$\therefore P(\bar{A}B + A\bar{B}) = P(\bar{A}).\ P(B) + P(A).\ P(\bar{B}) = \frac{8}{25} + \frac{3}{25} = \frac{11}{25}$$

**उदाहरण 14: किसी कक्षा में छात्रों की अंकतालिकाएँ देखने से ज्ञात हुआ कि 40% छात्र गणित विषय में उत्तीर्ण है, 25% छात्र भौतिकी में उत्तीर्ण हैं एवं 15% छात्र गणित एवं भौतिकी दोनों में उत्तीर्ण हैं, कक्षा का एक छात्र यादृच्छया चुना जाता है। यदि यह छात्र गणित में उत्तीर्ण हो तब उसके भौतिकी में उत्तीर्ण होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।**

**हलः** माना चुने गये छात्र के गणित विषय में उत्तीर्ण होना घटना A है और भौतिकी में उत्तीर्ण होना घटना B है। तब दिया है कि

$$P(A) = \frac{40}{100} = \frac{2}{5} \text{ तथा } P(B) = \frac{25}{100} = \frac{1}{4} \text{ और } P(AB) = \frac{15}{100} = \frac{3}{20}$$

अब हमें $P\left(\frac{B}{A}\right)$ ज्ञात करनी हैं क्योंकि चुने गये छात्र यदि गणित में उत्तीर्ण हो तो भौतिकी में भी उसके उत्तीर्ण होने की प्रायिकता ज्ञात करनी हैं। प्रायिकता की गुणन प्रमेय के अनुसार

$$P(AB) = P(A) \cdot P\left(\frac{B}{A}\right)$$

या
$$\frac{3}{20} = \frac{2}{5} \cdot P\left(\frac{B}{A}\right)$$

$\therefore$ अभीष्ट प्रायिकता
$$P\left(\frac{B}{A}\right) = \frac{3}{20} \times \frac{5}{2} = \frac{3}{8}$$

**उदाहरण 15: एक पुस्तक की तीन स्वतंत्र समालोचकों द्वारा अनुकूल समीक्षा किये जाने के पक्ष में संयोगानुपात क्रमशः 5:2, 4:3 एवं 3:4 हैं। तीनों समालोचकों में से बहुमत पुस्तक के पक्ष में होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।**

**हलः** माना कि $E_1, E_2$ तथा $E_3$ तीन समालोचकों द्वारा पुस्तक की अनुकूल किये जाने की घटनाएँ हैं। ज्ञात है कि

$$P(E_1) = \frac{5}{7}, \quad P(E_2) = \frac{4}{7}, \quad P(E_3) = \frac{3}{7}$$

$$\therefore \quad P(\bar{E}_1) = \frac{2}{7}, \quad P(\bar{E}_2) = \frac{3}{7}, \quad P(\bar{E}_3) = \frac{4}{7}$$

तीनों समालोचकों का बहुमत पुस्तक के पक्ष में होने की स्थितियाँ निम्न होगी।

1. $E_1E_2E_3$ 2. $\bar{E}_1E_2E_3$ 3. $E_1\bar{E}_2E_3$ 4. $E_1E_2\bar{E}_3$

जिनकी प्रायिकताएँ क्रमशः होगी :

$$P(E_1E_2E_3) = P(E_1)\,P(E_2)\,P(E_3) = \frac{5}{7}\times\frac{4}{7}\times\frac{3}{7} = \frac{60}{343}$$

$$P(\bar{E}_1E_2E_3) = P(\bar{E}_1)\,P(E_2)\,P(E_3) = \frac{2}{7}\times\frac{4}{7}\times\frac{3}{7} = \frac{24}{343}$$

$$P(E_1\bar{E}_2E_3) = P(E_1)\,P(\bar{E}_2)\,P(E_3) = \frac{5}{7}\times\frac{3}{7}\times\frac{3}{7} = \frac{45}{343}$$

$$P(E_1E_2\bar{E}_3) = P(E_1)\,P(E_2)\,P(\bar{E}_3) = \frac{5}{7}\times\frac{4}{7}\times\frac{4}{7} = \frac{80}{343}$$

उपरोक्त घटनाएँ परस्पर अपवर्जी हैं। अतः अभीष्ट प्रायिकता

$$P(E_1E_2E_3) + P(\bar{E}_1E_2E_3) + P(E_1\bar{E}_2E_3) + P(E_1E_2\bar{E}_3)$$

$$= \frac{60}{343} + \frac{24}{343} + \frac{45}{343} + \frac{80}{343} = \frac{209}{343}$$

## प्रश्नमाला 14.3

1. ; fn fd l h ?kV u k A की प्रायिकता 2 / 11 है तो घटना 'A नहीं' की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।
2. ग्राम पंचायत में चार पुरूष व छः महिला सदस्य हैं यदि एक समिति के लिए यादृच्छया एक सदस्य चुना जाता है, तो एक महिला के चुने जाने की कितनी संभावना है?
3. एक पासा उछाले जाने पर निम्नलिखित घटनाओं की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।
   (i) एक अभाज्य संख्या का आना, (ii) 1 या 1 से छोटी संख्या आना, (iii) 6 से छोटी संख्या का आना
4. एक सिक्का चार बार उछाला जाता है। इन उछालों में से कम से कम तीन बार चित्त आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।
5. यदि एक सिक्के तथा एक पासे को एक साथ उछाला जाए, तो सिक्के पर चित्त तथा पासे पर समसंख्या आने की प्रायिकता क्या होगी ?
6. 20 मनुष्यों की कम्पनी में 5 स्नातक है। यदि यादृच्छिक रूप में 3 मनुष्य चुने जायें तो क्या प्रायिकता है कि उनमें से एक स्नातक है ?
7. किसी समस्या के हल करने के लिए A के विपक्ष में संयोगानुपात 4:3 है, B के पक्ष में संयोगानुपात 7:5 है। क्या संभावना है कि
   (i) समस्या हल हो जाएगी। (ii) समस्या हल नहीं होगी (iii) केवल एक के द्वारा ही हल हो पाएगी।
8. एक उपकरण तभी काम करेगा जबकि उसके तीनों घटक A,B और C काम कर रहें हो। एक वर्ष में A के खराब होने की प्रायिकता 0.15, B की 0.05 और C की 0.10 है। वर्ष के अन्त होने से पहले उपकरण के खराब होने की प्रायिकता क्या है ?
9. एक ताश की गड्डी में से दो बार में दो–दो पत्ते यादृच्छिक रूप से निकाले जाते हैं। यदि पहली बार निकाले गए पत्ते गड्डी में वापस नहीं रखे जाते हैं, तो पहली बार में दो इक्के और दूसरी बार में दो बादशाह निकलने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।
10. A और B दो घटनाएँ है जिसमें $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{1}{4}$ तथा $P(AB) = \frac{1}{12}$ है, तो $P\left(\frac{B}{A}\right)$ ज्ञात कीजिए।
11. कल्पना करें कि पुरूष व बच्चों का अनुपात 1 : 2 है, प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि एक परिवार में 5 बच्चों में (i) सभी लड़के होंगे (ii) उनमें से तीन लड़के एवं दो लड़कियाँ होंगी।
12. A एक निशाने को 6 में से 3 बार सही लगा सकता है, B, 4 में से 2 बार सही लगा सकता है तथा C, 4 में से एक बार सही लगा सकता है। वे एक साथ निशाना लगाते हैं। बताइए कि कम से कम दो व्यक्तियों द्वारा सही निशाना लगाए जाने की प्रायिकता क्या होगी ?

## विविध उदाहरण

**उदाहरण 16: A तथा B दो पासों को बारी–बारी से उछालने हैं। यदि B के 7 उछालता से पहले A, 6 उछालता है तो A जीतता है और यदि A के 6 उछालता से पहले B, 7 उछालता है तो B जीतता है। यदि A उछालता प्रारम्भ करे, तो सिद्ध कीजिए कि A के जीतने की प्रायिकता 30 / 61 है।**

**हलः** माना दो पासों पर अंको का योग 6 आना घटना $E_1$ हैं।

घटना $E_1$ के लिए निश्शेषी स्थितियाँ $= 6^2 = 36$

तथा अनुकूल स्थितियाँ (1,5), (2,4), (3,3), (4,2) और (5,1)

अर्थात् कुल अनुकूल स्थितियाँ 5 हैं।

$\therefore\ P(E_1) = \frac{5}{36}$ अतः $P(\bar{E}_1) = 1 - \frac{5}{36} = \frac{31}{36}$

पुनः माना कि दो पासों पर अंको का योग 7 आना घटना $E_2$ है

घटना $E_2$ के लिए निश्शेषी स्थितियाँ = 36

तथा अनुकूल स्थितियाँ = (6,1), (5,2), (4,3), (3,4), (2,5) और (1,6)

अर्थात् कुल अनुकूल स्थितियाँ 6 हैं।

$\therefore\ P(E_2) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ अतः $P(\bar{E}_2) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

यदि A खेल प्रारम्भ करता है तो उसके जीत की संभावनाएँ

(i) पहली ही फेंक में जीतने की प्रायिकता $P(E_1) = \frac{5}{36}$

(ii) पहली फेंक में 6 न आवे, B के पहली फेंक में 7 न आवे और A की दूसरी फेंक में 6 आने की घटना क्रमशः $\bar{E}_1, \bar{E}_2, E_1$ तथा

प्रायिकता $P(\bar{E}_1\bar{E}_2E_1) = P(\bar{E}_1).\ P(\bar{E}_2).\ P(E_1) = \frac{31}{36} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{36}$

(iii) इसी प्रकार A के तीसरी फेंक में जीतने की प्रायिकता

$$P(\bar{E}_1\bar{E}_2\bar{E}_1\bar{E}_2E_1) = P(\bar{E}_1).\ P(\bar{E}_2).\ P(\bar{E}_1).\ P(\bar{E}_2).\ P(E_1) = \frac{31}{36} \times \frac{5}{6} \times \frac{31}{36} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{36}$$

इसी प्रक्रिया से आगे की फेंकों के लिए प्रायिकताएँ ज्ञात की जा सकती हैं। अतः A के जीतने की प्रायिकता

$$= \frac{5}{36} + \frac{31}{36} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{36} + \frac{31}{36} \times \frac{5}{6} \times \frac{31}{36} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{36} + \ldots = \frac{5/36}{1 - \frac{31}{36} \times \frac{5}{6}} = \frac{30}{61}$$

(अनन्त गुणोत्तर श्रेढ़ी के योग से)

**उदाहरण 17: एक थैले में 6 लाल और 4 सफेद गेंदें हैं। थैले में से दो बार 2–2 गेंदें निकाली जाती हैं। पहली बार दो लाल और दूसरी बार दो सफेद गेंदें निकालने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए जबकि पहली बार गेंदें निकालने के पश्चात् उन्हें वापिस थैले में**

**(i) डाल दिया जाता है (ii) नहीं डाला जाता है।**

**हल : (i) जब गेंदें थैले में वापिस डाल दी जाती हैं :**

थैले में कुल गेंदें = 6 + 4 = 10

$\therefore$ थैले में से दो गेंदें निकालने के तरीके $= {}^{10}C_2$

6 लाल गेंदों में से 2 गेंदें निकालने के कुल तरीके $= {}^{6}C_2$

$\therefore$ पहली बार दो लाल गेंद आने की प्रायिकता $= \frac{{}^{6}C_2}{{}^{10}C_2}$

4 सफेद गेंदों में से 2 गेंदें निकालने के तरीके = $^4C_2$

$\therefore$ दूसरी बार दो सफेद गेंद आने की प्रायिकता $= \frac{^4C_2}{^{10}C_2}$

उपर्युक्त घटनाएँ स्वतंत्र है, अतः

अभीष्ट प्रायिकता $= \frac{^6C_2}{^{10}C_2} \times \frac{^4C_2}{^{10}C_2} = \frac{1}{3} \times \frac{2}{15} = \frac{2}{45}$

**(ii) जब गेंदें थेले में वापिस नहीं डाली जाती :**

दूसरी बार थेले में 10–2 = 8 गेंदें शेष रह जाती हैं

दूसरी बार दो सफेद गेंद आने की प्रायिकता $= \frac{^4C_2}{^8C_2}$

अतः अभीष्ट प्रायिकता $= \frac{^6C_2}{^{10}C_2} \times \frac{^4C_2}{^8C_2} = \frac{1}{3} \times \frac{3}{14} = \frac{1}{14}$

**उदाहरण 18: यदि A, B, C किसी यादृच्छिक प्रयोग के संगत तीन घटनाएँ हों तो सिद्ध कीजिए कि**

$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

**हलः** माना $E = B \cup C$ तब

$$P(A \cup B \cup C) = P(A \cup E)$$

$$= P(A) + P(E) - P(A \cap E) \quad (1)$$

अब $P(E) = P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(B \cap C)$ (2)

समुच्चयों के संघ व सर्वनिष्ठ नियमों से

$$A \cap E = A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

अतः $P(A \cap E) = P(A \cap B) + (A \cap C) - P\{(A \cap B) \cup (A \cap C)\}$

$$= P(A \cap B) + P(A \cap C) - P(A \cap B \cap C) \quad (3)$$

समीकरण (2) व (3) का समीकरण (1) में प्रयोग करने पर

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

**उदाहरण 19: जब ताश के 52 पत्तों की गड्डी से 5 पत्तों का एक समूह बनाया जाता है तो इस बात की प्रायिकता ज्ञात कीजिए। इसमें (i) सारे बादशाह हों (ii) न्यूनतम तीन बादशाह हों।**

**हलः** समूहों की कुल संभावित संख्या $= {^{52}C_5}$

(i) 4 बादशाहों सहित समूहों की संख्या $= {^4C_4} \times {^{48}C_1}$

$\therefore$ P (सारे बादशाह) $= \frac{^4C_4 \times {^{48}C_1}}{^{52}C_5} = \frac{1}{54145}$

(ii) P (न्यूनतम 3 बादशाह) = P (3 बादशाह) + P (4 बादशाह)

$$= \frac{^4C_3 \times {^{48}C_2}}{^{52}C_5} + \frac{^4C_4 \times {^{48}C_1}}{^{52}C_5} = \frac{94}{54145} + \frac{1}{54145} = \frac{19}{10829}$$

## विविध प्रश्नमाला–14

1. एक सिक्के को $n$ बार उछालने पर $n(S)$ है
   (A) $2n$ (B) $2^n$ (C) $n^2$ (D) $n/2$
2. दो पासों के उछालने पर उनका योगफल 3 आने की प्रतिदर्श समष्टि है
   (A) $(1, 2)$ (B) $\{(2, 1)\}$ (C) $\{(3, 3)\}$ (D) $\{(1, 2), (2, 1)\}$
3. एक सिक्का तथा एक पासा एक साथ उछालने पर प्रतिदर्श समष्टि के अवयवों की संख्या है
   (A) 12 (B) 6 (C) 64 (D) 36
4. किसी अभिप्रयोग का प्रत्येक परिणाम कहलाता है
   (A) प्रतिदर्श समष्टि (B) यादृच्छिक परीक्षण (C) प्रतिदर्श बिन्दु (D) क्रमित–युग्म
5. तीन सिक्को के उछालने पर कम से कम शीर्ष आने की घटना E हो, तो n(E) होगा
   (A) 6 (B) 3 (C) 4 (D) 8
6. यदि $E_1 \cap E_2 = \phi$ हो, तो $E_1$ व $E_2$ घटनाएं होंगी
   (A) अपवर्जी (B) स्वतंत्र (C) आश्रित (D) पूरक
7. एक लीप वर्ष में 53 सोमवार होने की अनुकूल घटनाएँ होंगी
   (A) 7 (B) 2 (C) 1 (D) 14
8. एक कलश में 4 सफेद, 3 काली तथा 2 लाल गेंदे हैं। तीनों गेदें अलग–अलग रंग की होने की अनुकूल स्थितियाँ होंगी
   (A) 9 (B) 24 (C) 12 (D) 7
9. दो परस्पर अपवर्जी घटनाओं में $P(A \cup B)$ का मान है
   (A) $P(A) + P(B)$ (B) $P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
   (C) $P(A) \cdot P(B)$ (D) $P(A) \cdot P(B/A)$
10. तीन विद्यार्थियों A, B तथा C के द्वारा प्रश्न हल करने की प्रायिकताएं क्रमशः 1/3, 1/3 तथा 1/4 हैं तो कम से कम एक द्वारा प्रश्न हल करने की प्रायिकता है
    (A) 1 / 24 (B) 1 / 4 (C) 3 / 4 (D) 1 / 9
11. दो पासों के एक साथ उछाले जाने पर उन पर प्रदर्शित अंकों का अन्तर एक होने की प्रायिकता होगी
    (A) 5 / 18 (B) 1 / 4 (C) 2 / 9 (D) 7 / 36
12. ताश की गड्डी से एक पत्ता निकाला जाता है, इसके लाल पत्ता होने की प्रायिकता है
    (A) 1 / 4 (B) 1 / 2 (C) 3 / 4 (D) 26 / 51
13. दो पासों को उछालने पर अंकों का योग 4 का गुणज आने की प्रायिकता है:
    (A) 1 / 4 (B) 1 / 3 (C) 1 / 9 (D) 5 / 9
14. 1, 2, 3, 4, 5, 6 एवं 8 अंकों से 5 अंकों की संख्याएँ बनायी जाए तो दोनों सिरों पर सम अंक आने की प्रायिकता है:
    (A) 5 / 7 (B) 4 / 7 (C) 3 / 7 (D) 2 / 7
15. तीन पासों की फेंक में तीनों पर समान अंक आने की प्रायिकता है:
    (A) 1 / 36 (B) 3 / 22 (C) 1 / 6 (D) 1 / 18
16. एक तैराकी दौड़ में A के पक्ष में संयोगानुपात 2:3 तथा B के विपक्ष में संयोगानुपात 4:1 है। A या B के दौड़ जीतने की प्रायिकता है:
    (A) 1 / 5 (B) 2 / 5 (C) 3 / 5 (D) 4 / 5
17. एक पंक्ति में यादृच्छिक रूप से 10 विद्यार्थी बैठे हैं। दो विशेष प्रकार के विद्यार्थी पास–पास नहीं बैठने की प्रायिकता है:
    (A) 1 / 5 (B) 2 / 5 (C) 3 / 5 (D) 4 / 5
18. एक ढ़ेरी में 12 मद है जिसमे 4 दोषपूर्ण है। 3 मद यादृच्छिक रूप से एक के बाद एक करके बिना ढ़ेरी में वापस रखे निकाले जाते है। उनमें कोई भी दोषपूर्ण नहीं होने की प्रायिकता है:
    (A) 3 / 55 (B) 13 / 55 (C) 14 / 55 (D) 17 /55

19. किसी निश्चित घटना की प्रायिकता होगी:

(A) 0 (B) 1 / 2 (C) 1 (D) 2

20. एक परिवार में तीन बच्चों में से कम से कम एक लड़का हो तो उस परिवार में 2 लड़के और 1 लड़की होने की प्रायिकता है:

(A) 1 / 2 (B) 1 / 3 (C) 1 / 4 (D) 3 / 4

21. एक अध्यापक के कक्षा में परीक्षा लेने की प्रायिकता 1 / 5 है। यदि एक विद्यार्थी दो बार अनुपस्थित रहे, तो वह कम से कम एक परीक्षा नहीं दे सकने की प्रायिकता है:

(A) 9 / 25 (B) 11 / 25 (C) 13 / 25 (D) 23 / 25

22. किसी वर्ष में जो लीप वर्ष न हो में 53 रविवार आने की प्रायिकता बताइए।

23. A और B दो परस्पर अपवर्जी घटनाएँ ऐसी है कि $p(A) = 0.3, P(B) = K$ और $P(A \cup B) = 0.5$ तो K का मान ज्ञात कीजिए।

24. 'PEACE' शब्द के अक्षरों से बनने वाले शब्दों में दोनों E के साथ आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

25. एक थैले में 6 लाल तथा 8 काली गेंदे है। चार–चार गेंदों को दो बार उससे निकाला जाता है। पहली बार के चारों गेंदो को निकालकर पुनः उसमें रख दिया जाता है। क्या प्रायिकता होगी कि पहली बार चारों गेंदें लाल तथा दूसरी बार चारों गेंदें काली हों?

26. एक व्यक्ति 5 में से 3 बार सत्य बोलता है। उसका कथन है कि 6 सिक्कों को उछालने पर 2 चित्त आयें तो इस घटना के वास्तविक रूप में सत्य होने की क्या प्रायिकता है ?

27. दो पासों का एक साथ उछालने पर इस बात की क्या प्रायिकता है कि उन पर न तो समान अंक आये और न ही अंको का योग 9 आये।

28. तीन सिक्कों को एक साथ उछाला जाता है, तो प्रायिकता ज्ञात कीजिए जबकि–

(1) ठीक दो शीर्ष हों (2) कम से कम दो शीर्ष हों

(3) अधिक से अधिक दो शीर्ष हों (4) तीनों शीर्ष हों।

29. एक घुड़दौड़ में 4 घोड़े A, B, C, D दौड़ते हैं। A, B, C व D के पक्ष में संयोगानुपात क्रमशः 1:3, 1:4, 1:5 तथा 1:6 है। इनमें से किसी एक के जीतने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

30. अगले 25 वर्षों में एक व्यक्ति के जीवित रहने की प्रायिकता 3 / 5 और उसकी पत्नी के उन्हीं 25 वर्षों जीवित रहने की प्रायिकता 2 / 3 हैं। निम्नलिखित प्रायिकताएँ ज्ञात कीजिए:

(1) दोनों के जीवित रहने की। (2) किसी के भी जीवित न रहने की।

(3) कम से कम एक के जीवित रहने की। (4) केवल पत्नी के जीवित रहने की।

31. किसी तथ्य में A और B स्वतंत्र गवाह है। A के सत्य बोलने की प्रायिकता $x$ तथा B के सत्य बोलने की प्रायिकता $y$ है। यदि किसी कथन पर A और B दोनों सहमत हो तो सिद्ध कीजिए कि इस कथन के सत्य होने की प्रायिकता $= \frac{xy}{1 - x - y + 2xy}$ होगी।

32. A,B,C तीन पुरूष बारी–बारी से एक सिक्का उछालते हैं। जिसके पहले चित्त आये उसी की जीत होती है। यदि A की बारी पहले हो तो उनकी जीत की संभावनाएँ क्या हैं ?

33. सुलक्षणा और सुनयना बारी–बारी से एक सिक्का उछालती है। जिसके पहले चित्त आये उसी की जीत होती है। यदि सुलक्षण की बारी पहले आये तो दोनों के जीतने की प्रायिकताएँ ज्ञात कीजिए।

34. संख्याओं के निम्न दो समूहों में से एक–एक अंक का चुनाव किया जाता है:

(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9), (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)

$p_1$ दोनों अंकों का योग 10 होने तथा $p_2$ दोनों अंकों का योग 8 होने की प्रायिकता हो तो $p_1 + p_2$ ज्ञात कीजिए।

35. यदि $P(A) = 0.4,\ P(B) = 0.8, P(B/A) = 0.6$ तो $P(A/B)$ और $P(A \cup B)$ ज्ञात कीजिए।

36. यदि $P(E) = 0.35,\ P(F) = 0.45, P(E \cup F) = 0.65$ तो $P(F/E)$ ज्ञात कीजिए।

37. एक पासे की पाँच उछालों में केवल 1 अंक आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

## महत्त्वपूर्ण बिन्दु

1. **अभिप्रयोग एवं घटना :** किसी भी संदर्भ का कोई प्रयोग जिसका कई सम्भावित परिणामों में से एक परिणाम अवश्य होता हो, एक अभिप्रयोग कहलाता है तथा इसके सम्भावित परिणाम घटनाएँ कहलाती हैं।
2. **निःशेष घटनाएँ या कुल स्थितियाँ :** किसी अभिप्रयोग के समस्त सम्भावित परिणाम उस अभिप्रयोग की निश्शेष घटनाएँ या कुल स्थितियाँ कहलाती हैं।
3. **अनुकूल घटनाएँ या स्थितियाँ :** किसी अभिप्रयोग में किसी विशिष्ट घटनाओं की अनुकूल स्थितियाँ उस प्रयोग के उन परिणामों की संख्या है जिससे वह विशिष्ट घटना घटित होती है।
4. **परस्पर अपवर्जी एवं असंयुक्त घटनाएँ :** दो या दो से अधिक घटनाएँ परस्पर अपवर्जी घटनाएँ कहलाती हैं यदि इनमें से कोई दो घटनाएँ एक साथ घटित नहीं हो सके अर्थात् यदि एक घटना घटित होती है, तो शेष घटनाएँ घटित नहीं हो सके।
5. (1) **स्वतन्त्र घटनाएँ :** दो या दो से अधिक घटनाएँ स्वतन्त्र घटनाएँ कहलाती है यदि किसी के घटित होने का प्रभाव शेष घटनाओं के घटित होने पर नहीं पड़ता है।

   (2) **आश्रित घटनाएँ:** दो या दो से अधिक घटनाएँ इस प्रकार हो कि एक के घटित होने का प्रभाव दूसरे पर पड़ता हो तो उन्हें आश्रित घटनाएँ कहते हैं।
6. **प्रतिदर्श बिन्दु तथा प्रतिदर्श समष्टि :** किसी अभिप्रयोग का प्रत्येक परिणाम एक प्रतिदर्श बिन्दु कहलाता है तथा इन सभी प्रतिदर्श बिन्दुओं का समुच्चय उस अभिप्रयोग का प्रतिदर्श समष्टि कहा जाता है। इसे प्रायः S से व्यक्त किया जाता है।
7. **प्रारंभिक घटना :** यादृच्छिक प्रयोग से सम्बन्धित प्रतिदर्श समष्टि का एक अवयव वाला उपसमुच्चय प्रारंभिक घटना कहलाती है।
8. **मिश्र घटना :** एक प्रयोग की प्रतिदर्श समष्टि S के वे उपसमुच्चय जो प्रतिदर्श समष्टि S के एक अवयव वाले उपसमुच्चयों के असंयुक्त सम्मिलन से बने समुच्चयों को मिश्र घटनाएं कहते है।
9. **असंमव व निश्चित घटना :** माना एक यादृच्छिक प्रयोग से सम्बन्धित प्रतिदर्श समष्टि S है तो $\phi$ तथा S इसके उपसमुच्चय होने के कारण घटनाएं है। घटना $\phi$ को असंभव घटना तथा S को निश्चित घटना कहते है।
10. **प्रायिकताः** घटना A के अनुकूल होने की प्रायिकता

$$P(A) = \frac{\text{घटना A के अनुकूल घटनाएँ}}{\text{निश्शेष घटनाएँ}} = \frac{m}{n}$$

या $$P(A) = \frac{\text{A में अवयवों की संख्या}}{\text{S में अवयवों की संख्या}} = \frac{n(A)}{n(S)}$$

घटना A के नहीं घटने की प्रायिकता

$$P(\bar{A}) = \frac{\text{घटना A प्रतिकूल घटनाएँ}}{\text{निश्शेष घटनाएँ}} = \frac{n-m}{n}$$

11. $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

    या $P(A) + P(\bar{A}) = 1$
12. प्रायिकता की सीमा $0 \le P(A) \le 1$
13. घटना A के पक्ष में संयोगानुपात $= \dfrac{m}{n-m} = \dfrac{P(A)}{P(\bar{A})}$
14. घटना A के विपक्ष में संयोगानुपात $= \dfrac{n-m}{m} = \dfrac{P(\bar{A})}{P(A)}$

15. **प्रायिकता का योग प्रमेय या पूर्ण प्रायिकता का प्रमेय :**

(1) अपवर्जी घटनाओं में से किसी एक के घटित होने की प्रायिकता दोनों घटनाओं की प्रायिकता के योग के बराबर होती है।

$P(A+B) = P(A) + P(B)$ या $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

$P(A+B+C+....) = P(A) + P(B) + P(C) +.... = P(A \cup B \cup C...)$

(2) अपवर्जी घटनाएँ नहीं हो तब

$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

या $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

16. **प्रायिकता का गुणन प्रमेय या मिश्र प्रायिकता का नियम :** कोई दो घटनाओं A तथा B के साथ घटित होने की प्रायिकता

$$P(AB) = P(A).\ P\left(\frac{B}{A}\right) \text{ या } P(A \cap B) = P(A).\ P\left(\frac{B}{A}\right)$$

या $$P(AB) = P(B).\ P\left(\frac{A}{B}\right) \text{ या } P(A \cap B) = P(B).\ P\left(\frac{A}{B}\right)$$

यदि A, B स्वतंत्र घटनाएँ हो तो

$P(AB) = P(A).\ P(B)$ या $P(A \cap B) = P(A).\ P(B)$

व्यापकीकरणः यदि $A_1, A_2, \ldots, A_n$ स्वतंत्र घटनाएँ हो, तो

$P(A_1A_2A_3, \ldots, A_n) = P(A_1).\ P(A_2).\ P(A_3), \ldots, P(A_n)$

17. यदि $A_1, A_2, \ldots, A_n$ स्वतंत्र घटनाएँ है जिनकी प्रायिकताएँ क्रमशः $p_1, p_2, \ldots, p_n$ हैं।

अतः कम से कम एक घटना के घटित होने की प्रायिकता

= 1 − किसी भी घटना के घटित न होने की प्रायिकता

$= 1 - P(\bar{A}_1)\, P(\bar{A}_2) \ldots P(\bar{A}_n)$

$= 1 - \{(1-p_1)\,(1-p_2) \ldots (1-p_n)\}$

## उत्तरमाला

### प्रश्नमाला 14.1

**1.** {DDD, DDN, DND, NDD, DNN, NDN, NND, NNN} **2.** 256 **3.** नहीं

**4.** (i) {(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)} (ii) {(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)}

### प्रश्नमाला 14.2

**1.** 1/3 **2.** 1 / 4 **3.** 7 / 17 **4.** 1 / 4 **5.** 5 / 18 **6.** 6 / 7 **7.** 1 : 12

**8.** 5 : 7 **9.** $\frac{n-3}{2}$ **10.** 5 / 6 **11.** 1 / 4 **12.** 5 / 108 **13.** 2 / 5 **14.** 3 / 13

**15.** 5 / 204

### प्रश्नमाला 14.3

**1.** 9 / 11 **2.** 3 / 5 **3.** (i) 1 / 2; (ii) 1 / 6; (iii) 5 / 6 **4.** 5 / 16 **5.** 1 / 4 **6.** 137 / 228

**7.** (i) 16 / 21; (ii) 5 / 21; (iii) 43 / 84 **8.** 0.27325 **9.** 6 / 270725 **10.** 1 / 4

**11.** (i) 1 / 32; (ii) 5 / 16 **12.** 3 / 8

### विविध प्रश्नमाला 14

**1.** (B) **2.** (D) **3.** (A) **4.** (C) **5.** (C) **6.** (A) **7.** (B)

**8.** (B) **9.** (A) **10.** (C) **11.** (A) **12.** (B) **13.** (A) **14.** (D)

**15.** (A) **16.** (C) **17.** (D) **18.** (C) **19.** (C) **20.** (B) **21.** (A)

**22.** $\frac{1}{7}$ **23.** 0.2 **24.** 2 / 5 **25.** (i) $\frac{150}{143143}$ **26.** $\frac{45}{143}$ **27.** $\frac{13}{18}$

**28.** $\frac{3}{8},\frac{1}{2},\frac{7}{8},\frac{1}{8}$ **29.** $\frac{319}{420}$ **30.** $\frac{2}{5},\frac{2}{15},\frac{13}{15},\frac{4}{15}$ **32.** $\frac{4}{7},\frac{2}{7},\frac{1}{7}$ **33.** $\frac{2}{3},\frac{1}{3}$

**34.** $\frac{16}{81}$ **35.** 0.3, 0.96 **36.** $\frac{3}{7}$ **37.** $5\left(\frac{1}{6}\right)^5$

## परिशिष्ट–अ

# Logarithms

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | Mean Differences | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 10 | 0000 | 0043 | 0086 | 0128 | 0170 | 0212 | 0253 | 0294 | 0334 | 0374 | 4 | 8 | 12 | 17 | 21 | 25 | 29 | 33 | 37 |
| 11 | 0414 | 0453 | 0492 | 0531 | 0569 | 0607 | 0645 | 0682 | 0719 | 0755 | 4 | 8 | 11 | 15 | 19 | 23 | 26 | 30 | 34 |
| 12 | 0792 | 0828 | 0864 | 0899 | 0934 | 0969 | 1004 | 1038 | 1072 | 1106 | 3 | 7 | 10 | 14 | 17 | 21 | 24 | 28 | 31 |
| 13 | 1139 | 1173 | 1206 | 1239 | 1271 | 1303 | 1335 | 1367 | 1399 | 1430 | 3 | 6 | 10 | 13 | 16 | 19 | 23 | 26 | 29 |
| 14 | 1461 | 1492 | 1523 | 1553 | 1584 | 1614 | 1644 | 1673 | 1703 | 1732 | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 21 | 24 | 27 |
| 15 | 1761 | 1790 | 1818 | 1847 | 1875 | 1903 | 1931 | 1959 | 1987 | 2014 | 3 | 6 | 8 | 11 | 14 | 17 | 20 | 22 | 25 |
| 16 | 2041 | 2068 | 2095 | 2122 | 2148 | 2175 | 2201 | 2227 | 2253 | 2279 | 3 | 5 | 8 | 11 | 13 | 16 | 18 | 21 | 24 |
| 17 | 2304 | 2330 | 2355 | 2380 | 2405 | 2430 | 2455 | 2480 | 2504 | 2529 | 2 | 5 | 7 | 10 | 12 | 15 | 17 | 20 | 22 |
| 18 | 2553 | 2577 | 2601 | 2625 | 2648 | 2672 | 2695 | 2718 | 2742 | 2765 | 2 | 5 | 7 | 9 | 12 | 14 | 16 | 19 | 21 |
| 19 | 2788 | 2810 | 2833 | 2856 | 2878 | 2900 | 2923 | 2945 | 2967 | 2989 | 2 | 4 | 7 | 9 | 11 | 13 | 16 | 18 | 20 |
| 20 | 3010 | 3032 | 3054 | 3075 | 3096 | 3118 | 3139 | 3160 | 3181 | 3201 | 2 | 4 | 6 | 8 | 11 | 13 | 15 | 17 | 19 |
| 21 | 3222 | 3243 | 3263 | 3284 | 3304 | 3324 | 3345 | 3365 | 3385 | 3404 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 |
| 22 | 3424 | 3444 | 3464 | 3483 | 3502 | 3522 | 3541 | 3560 | 3579 | 3598 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 15 | 17 |
| 23 | 3617 | 3636 | 3655 | 3674 | 3692 | 3711 | 3729 | 3747 | 3766 | 3784 | 2 | 4 | 6 | 7 | 9 | 11 | 13 | 15 | 17 |
| 24 | 3802 | 3820 | 3838 | 3856 | 3874 | 3892 | 3909 | 3927 | 3945 | 3962 | 2 | 4 | 5 | 7 | 9 | 11 | 12 | 14 | 16 |
| 25 | 3979 | 3997 | 4014 | 4031 | 4048 | 4065 | 4082 | 4099 | 4116 | 4133 | 2 | 3 | 5 | 7 | 9 | 10 | 12 | 14 | 15 |
| 26 | 4150 | 4166 | 4183 | 4200 | 4216 | 4232 | 4249 | 4265 | 4281 | 4298 | 2 | 3 | 5 | 7 | 8 | 10 | 11 | 13 | 15 |
| 27 | 4314 | 4330 | 4346 | 4362 | 4378 | 4393 | 4409 | 4425 | 4440 | 4456 | 2 | 3 | 5 | 6 | 8 | 9 | 11 | 13 | 14 |
| 28 | 4472 | 4487 | 4502 | 4518 | 4533 | 4548 | 4564 | 4579 | 4594 | 4609 | 2 | 3 | 5 | 6 | 8 | 9 | 11 | 12 | 14 |
| 29 | 4624 | 4639 | 4654 | 4669 | 4683 | 4698 | 4713 | 4728 | 4742 | 4757 | 1 | 3 | 4 | 6 | 7 | 9 | 10 | 12 | 13 |
| 30 | 4771 | 4786 | 4800 | 4814 | 4829 | 4843 | 4857 | 4871 | 4886 | 4900 | 1 | 3 | 4 | 6 | 7 | 9 | 10 | 11 | 13 |
| 31 | 4914 | 4928 | 4942 | 4955 | 4969 | 4983 | 4997 | 5011 | 5024 | 5038 | 1 | 3 | 4 | 6 | 7 | 8 | 10 | 11 | 12 |
| 32 | 5051 | 5065 | 5079 | 5092 | 5105 | 5119 | 5132 | 5145 | 5159 | 5172 | 1 | 3 | 4 | 5 | 7 | 8 | 9 | 11 | 12 |
| 33 | 5185 | 5198 | 5211 | 5224 | 5237 | 5250 | 5263 | 5276 | 5289 | 5302 | 1 | 3 | 4 | 5 | 6 | 8 | 9 | 10 | 12 |
| 34 | 5315 | 5328 | 5340 | 5353 | 5366 | 5378 | 5391 | 5403 | 5416 | 5428 | 1 | 3 | 4 | 5 | 6 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| 35 | 5441 | 5453 | 5465 | 5478 | 5490 | 5502 | 5514 | 5527 | 5539 | 5551 | 1 | 2 | 4 | 5 | 6 | 7 | 9 | 10 | 11 |
| 36 | 5563 | 5575 | 5587 | 5599 | 5611 | 5623 | 5635 | 5647 | 5658 | 5670 | 1 | 2 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 10 | 11 |
| 37 | 5682 | 5694 | 5705 | 5717 | 5729 | 5740 | 5752 | 5763 | 5775 | 5786 | 1 | 2 | 3 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 38 | 5798 | 5809 | 5821 | 5832 | 5843 | 5855 | 5866 | 5877 | 5888 | 5899 | 1 | 2 | 3 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 39 | 5911 | 5922 | 5933 | 5944 | 5955 | 5966 | 5977 | 5988 | 5999 | 6010 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 40 | 6021 | 6031 | 6042 | 6053 | 6064 | 6075 | 6085 | 6096 | 6107 | 6117 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 8 | 9 | 10 |
| 41 | 6128 | 6138 | 6149 | 6160 | 6170 | 6180 | 6191 | 6201 | 6212 | 6222 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 42 | 6232 | 6243 | 6253 | 6263 | 6274 | 6284 | 6294 | 6304 | 6314 | 6325 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 43 | 6335 | 6345 | 6355 | 6365 | 6375 | 6385 | 6395 | 6405 | 6415 | 6425 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 44 | 6435 | 6444 | 6454 | 6464 | 6474 | 6484 | 6493 | 6503 | 6513 | 6522 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 45 | 6532 | 6542 | 6551 | 6561 | 6571 | 6580 | 6590 | 6599 | 6609 | 6618 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 46 | 6628 | 6637 | 6646 | 6656 | 6665 | 6675 | 6684 | 6693 | 6702 | 6712 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 7 | 8 |
| 47 | 6721 | 6730 | 6739 | 6749 | 6758 | 6767 | 6776 | 6785 | 6794 | 6803 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 48 | 6812 | 6821 | 6830 | 6839 | 6848 | 6857 | 6866 | 6875 | 6884 | 6893 | 1 | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 49 | 6902 | 6911 | 6920 | 6928 | 6937 | 6946 | 6955 | 6964 | 6972 | 6981 | 1 | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 50 | 6990 | 6998 | 7007 | 7016 | 7024 | 7033 | 7042 | 7050 | 7059 | 7067 | 1 | 2 | 3 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 51 | 7076 | 7084 | 7093 | 7101 | 7110 | 7118 | 7126 | 7135 | 7143 | 7152 | 1 | 2 | 3 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 52 | 7160 | 7168 | 7177 | 7185 | 7193 | 7202 | 7210 | 7218 | 7226 | 7235 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 7 |
| 53 | 7243 | 7251 | 7259 | 7267 | 7275 | 7284 | 7292 | 7300 | 7308 | 7316 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 6 | 7 |
| 54 | 7324 | 7332 | 7340 | 7348 | 7356 | 7364 | 7372 | 7380 | 7388 | 7396 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 6 | 7 |

## परिशिष्ट–अ

# Logarithms

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | Mean Differences 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **55** | 7404 | 7412 | 7419 | 7427 | 7435 | 7443 | 7451 | 7459 | 7466 | 7474 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 5 | 5 | 6 | 7 |
| **56** | 7482 | 7490 | 7497 | 7505 | 7513 | 7520 | 7528 | 7536 | 7543 | 7551 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 5 | 5 | 6 | 7 |
| **57** | 7559 | 7566 | 7574 | 7582 | 7589 | 7597 | 7604 | 7612 | 7619 | 7627 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 5 | 5 | 6 | 7 |
| **58** | 7634 | 7642 | 7649 | 7657 | 7664 | 7672 | 7679 | 7686 | 7694 | 7701 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| **59** | 7709 | 7716 | 7723 | 7731 | 7738 | 7745 | 7752 | 7760 | 7767 | 7774 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| **60** | 7782 | 7789 | 7796 | 7803 | 7810 | 7818 | 7825 | 7832 | 7839 | 7846 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 | 6 | 6 |
| **61** | 7853 | 7860 | 7868 | 7875 | 7882 | 7889 | 7896 | 7903 | 7910 | 7917 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 | 6 | 6 |
| **62** | 7924 | 7931 | 7938 | 7945 | 7952 | 7959 | 7966 | 7973 | 7980 | 7987 | 1 | 1 | 2 | 3 | 3 | 4 | 5 | 6 | 6 |
| **63** | 7993 | 8000 | 8007 | 8014 | 8021 | 8028 | 8035 | 8041 | 8048 | 8055 | 1 | 1 | 2 | 3 | 3 | 4 | 5 | 5 | 6 |
| **64** | 8062 | 8069 | 8075 | 8082 | 8089 | 8096 | 8102 | 8109 | 8116 | 8122 | 1 | 1 | 2 | 3 | 3 | 4 | 5 | 5 | 6 |
| **65** | 8129 | 8136 | 8142 | 8149 | 8156 | 8162 | 8169 | 8176 | 8182 | 8189 | 1 | 1 | 2 | 3 | 3 | 4 | 5 | 5 | 6 |
| **66** | 8195 | 8202 | 8209 | 8215 | 8222 | 8228 | 8235 | 8241 | 8248 | 8254 | 1 | 1 | 2 | 3 | 3 | 4 | 5 | 5 | 6 |
| **67** | 8261 | 8267 | 8274 | 8280 | 8287 | 8293 | 8299 | 8306 | 8312 | 8319 | 1 | 1 | 2 | 3 | 3 | 4 | 5 | 5 | 6 |
| **68** | 8325 | 8331 | 8338 | 8344 | 8351 | 8357 | 8363 | 8370 | 8376 | 8382 | 1 | 1 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 | 6 |
| **69** | 8388 | 8395 | 8401 | 8407 | 8414 | 8420 | 8426 | 8432 | 8439 | 8445 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 | 6 |
| **70** | 8451 | 8457 | 8463 | 8470 | 8476 | 8482 | 8488 | 8494 | 8500 | 8506 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 | 6 |
| **71** | 8513 | 8519 | 8525 | 8531 | 8537 | 8543 | 8549 | 8555 | 8561 | 8567 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 | 5 |
| **72** | 8573 | 8579 | 8585 | 8591 | 8597 | 8603 | 8609 | 8615 | 8621 | 8627 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 | 5 |
| **73** | 8633 | 8639 | 8645 | 8651 | 8657 | 8663 | 8669 | 8675 | 8681 | 8686 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 | 5 |
| **74** | 8692 | 8698 | 8704 | 8710 | 8716 | 8722 | 8727 | 8733 | 8739 | 8745 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 | 5 |
| **75** | 8751 | 8756 | 8762 | 8768 | 8774 | 8779 | 8785 | 8791 | 8797 | 8802 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 5 | 5 |
| **76** | 8808 | 8814 | 8820 | 8825 | 8831 | 8837 | 8842 | 8848 | 8854 | 8859 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 5 | 5 |
| **77** | 8865 | 8871 | 8876 | 8882 | 8887 | 8893 | 8899 | 8904 | 8910 | 8915 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 |
| **78** | 8921 | 8927 | 8932 | 8938 | 8943 | 8949 | 8954 | 8960 | 8965 | 8971 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 |
| **79** | 8976 | 8982 | 8987 | 8993 | 8998 | 9004 | 9009 | 9015 | 9020 | 9025 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 |
| **80** | 9031 | 9036 | 9042 | 9047 | 9053 | 9058 | 9063 | 9069 | 9074 | 9079 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 |
| **81** | 9085 | 9090 | 9096 | 9101 | 9106 | 9112 | 9117 | 9122 | 9128 | 9133 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 |
| **82** | 9138 | 9143 | 9149 | 9154 | 9159 | 9165 | 9170 | 9175 | 9180 | 9186 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 |
| **83** | 9191 | 9196 | 9201 | 9206 | 9212 | 9217 | 9222 | 9227 | 9232 | 9238 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 |
| **84** | 9243 | 9248 | 9253 | 9258 | 9263 | 9269 | 9274 | 9279 | 9284 | 9289 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 |
| **85** | 9294 | 9299 | 9304 | 9309 | 9315 | 9320 | 9325 | 9330 | 9335 | 9340 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 |
| **86** | 9345 | 9350 | 9355 | 9360 | 9365 | 9370 | 9375 | 9380 | 9385 | 9390 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 |
| **87** | 9395 | 9400 | 9405 | 9410 | 9415 | 9420 | 9425 | 9430 | 9435 | 9440 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 |
| **88** | 9445 | 9450 | 9455 | 9460 | 9465 | 9469 | 9474 | 9479 | 9484 | 9489 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 |
| **89** | 9494 | 9499 | 9504 | 9509 | 9513 | 9518 | 9523 | 9528 | 9533 | 9538 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 |
| **90** | 9542 | 9547 | 9552 | 9557 | 9562 | 9566 | 9571 | 9576 | 9581 | 9586 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 |
| **91** | 9590 | 9595 | 9600 | 9605 | 9609 | 9614 | 9619 | 9624 | 9628 | 9633 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 |
| **92** | 9638 | 9643 | 9647 | 9652 | 9657 | 9661 | 9666 | 9671 | 9675 | 9680 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 |
| **93** | 9685 | 9689 | 9694 | 9699 | 9703 | 9708 | 9713 | 9717 | 9722 | 9727 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 |
| **94** | 9731 | 9736 | 9741 | 9745 | 9750 | 9754 | 9759 | 9763 | 9768 | 9773 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 |
| **95** | 9777 | 9782 | 9786 | 9791 | 9795 | 9800 | 9805 | 9809 | 9814 | 9818 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 |
| **96** | 9823 | 9827 | 9832 | 9836 | 9841 | 9845 | 9850 | 9854 | 9859 | 9863 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 |
| **97** | 9868 | 9872 | 9877 | 9881 | 9886 | 9890 | 9894 | 9899 | 9903 | 9908 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 |
| **98** | 9912 | 9917 | 9921 | 9926 | 9930 | 9934 | 9939 | 9943 | 9948 | 9952 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 |
| **99** | 9956 | 9961 | 9965 | 9969 | 9974 | 9978 | 9983 | 9987 | 9991 | 9996 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 | 4 |

परिशिष्ट–ब

# Antilogarithms

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | Mean Differences | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| ·00 | 1000 | 1002 | 1005 | 1007 | 1009 | 1012 | 1014 | 1016 | 1019 | 1021 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 |
| ·01 | 1023 | 1026 | 1028 | 1030 | 1033 | 1035 | 1038 | 1040 | 1042 | 1045 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 |
| ·02 | 1047 | 1050 | 1052 | 1054 | 1057 | 1059 | 1062 | 1064 | 1067 | 1069 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 |
| ·03 | 1072 | 1074 | 1076 | 1079 | 1081 | 1084 | 1086 | 1089 | 1091 | 1094 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 |
| ·04 | 1096 | 1099 | 1102 | 1104 | 1107 | 1109 | 1112 | 1114 | 1117 | 1119 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| ·05 | 1122 | 1125 | 1127 | 1130 | 1132 | 1135 | 1138 | 1140 | 1143 | 1146 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| ·06 | 1148 | 1151 | 1153 | 1156 | 1159 | 1161 | 1164 | 1167 | 1169 | 1172 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| ·07 | 1175 | 1178 | 1180 | 1183 | 1186 | 1189 | 1191 | 1194 | 1197 | 1199 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 |
| ·08 | 1202 | 1205 | 1208 | 1211 | 1213 | 1216 | 1219 | 1222 | 1225 | 1227 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 |
| ·09 | 1230 | 1233 | 1236 | 1239 | 1242 | 1245 | 1247 | 1250 | 1253 | 1256 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 |
| ·10 | 1259 | 1262 | 1265 | 1268 | 1271 | 1274 | 1276 | 1279 | 1282 | 1285 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 |
| ·11 | 1288 | 1291 | 1294 | 1297 | 1300 | 1303 | 1306 | 1309 | 1312 | 1315 | 0 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 3 |
| ·12 | 1318 | 1321 | 1324 | 1327 | 1330 | 1334 | 1337 | 1340 | 1343 | 1346 | 0 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 3 |
| ·13 | 1349 | 1352 | 1355 | 1358 | 1361 | 1365 | 1368 | 1371 | 1374 | 1377 | 0 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 |
| ·14 | 1380 | 1384 | 1387 | 1390 | 1393 | 1396 | 1400 | 1403 | 1406 | 1409 | 0 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 |
| ·15 | 1413 | 1416 | 1419 | 1422 | 1426 | 1429 | 1432 | 1435 | 1439 | 1442 | 0 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 |
| ·16 | 1445 | 1449 | 1452 | 1455 | 1459 | 1462 | 1466 | 1469 | 1472 | 1476 | 0 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 |
| ·17 | 1479 | 1483 | 1486 | 1489 | 1493 | 1496 | 1500 | 1503 | 1507 | 1510 | 0 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 |
| ·18 | 1514 | 1517 | 1521 | 1524 | 1528 | 1531 | 1535 | 1538 | 1542 | 1545 | 0 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 |
| ·19 | 1549 | 1552 | 1556 | 1560 | 1563 | 1567 | 1570 | 1574 | 1578 | 1581 | 0 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 |
| ·20 | 1585 | 1589 | 1592 | 1596 | 1600 | 1603 | 1607 | 1611 | 1614 | 1618 | 0 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 |
| ·21 | 1622 | 1626 | 1629 | 1633 | 1637 | 1641 | 1644 | 1648 | 1652 | 1656 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 |
| ·22 | 1660 | 1663 | 1667 | 1671 | 1675 | 1679 | 1683 | 1687 | 1690 | 1694 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 |
| ·23 | 1698 | 1702 | 1706 | 1710 | 1714 | 1718 | 1722 | 1726 | 1730 | 1734 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 |
| ·24 | 1738 | 1742 | 1746 | 1750 | 1754 | 1758 | 1762 | 1766 | 1770 | 1774 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 |
| ·25 | 1778 | 1782 | 1786 | 1791 | 1795 | 1799 | 1803 | 1807 | 1811 | 1816 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 |
| ·26 | 1820 | 1824 | 1828 | 1832 | 1837 | 1841 | 1845 | 1849 | 1854 | 1858 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 | 4 |
| ·27 | 1862 | 1866 | 1871 | 1875 | 1879 | 1884 | 1888 | 1892 | 1897 | 1901 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 | 4 |
| ·28 | 1905 | 1910 | 1914 | 1919 | 1923 | 1928 | 1932 | 1936 | 1941 | 1945 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 |
| ·29 | 1950 | 1954 | 1959 | 1963 | 1968 | 1972 | 1977 | 1982 | 1986 | 1991 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 |
| ·30 | 1995 | 2000 | 2004 | 2009 | 2014 | 2018 | 2023 | 2028 | 2032 | 2037 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 |
| ·31 | 2042 | 2046 | 2051 | 2056 | 2061 | 2065 | 2070 | 2075 | 2080 | 2084 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 |
| ·32 | 2089 | 2094 | 2099 | 2104 | 2109 | 2113 | 2118 | 2123 | 2128 | 2133 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 |
| ·33 | 2138 | 2143 | 2148 | 2153 | 2158 | 2163 | 2168 | 2173 | 2178 | 2183 | 0 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 |
| ·34 | 2188 | 2193 | 2198 | 2203 | 2208 | 2213 | 2218 | 2223 | 2228 | 2234 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 |
| ·35 | 2239 | 2244 | 2249 | 2254 | 2259 | 2265 | 2270 | 2275 | 2280 | 2286 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 |
| ·36 | 2291 | 2296 | 2301 | 2307 | 2312 | 2317 | 2323 | 2328 | 2333 | 2339 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 |
| ·37 | 2344 | 2350 | 2355 | 2360 | 2366 | 2371 | 2377 | 2382 | 2388 | 2393 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 |
| ·38 | 2399 | 2404 | 2410 | 2415 | 2421 | 2427 | 2432 | 2438 | 2443 | 2449 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 |
| ·39 | 2455 | 2460 | 2466 | 2472 | 2477 | 2483 | 2489 | 2495 | 2500 | 2506 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 4 | 5 | 5 |
| ·40 | 2512 | 2518 | 2523 | 2529 | 2535 | 2541 | 2547 | 2553 | 2559 | 2564 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 | 5 |
| ·41 | 2570 | 2576 | 2582 | 2588 | 2594 | 2600 | 2606 | 2612 | 2618 | 2624 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 | 5 |
| ·42 | 2630 | 2636 | 2642 | 2649 | 2655 | 2661 | 2667 | 2673 | 2679 | 2685 | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 | 6 |
| ·43 | 2692 | 2698 | 2704 | 2710 | 2716 | 2723 | 2729 | 2735 | 2742 | 2748 | 1 | 1 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 | 6 |
| ·44 | 2754 | 2761 | 2767 | 2773 | 2780 | 2786 | 2793 | 2799 | 2805 | 2812 | 1 | 1 | 2 | 3 | 3 | 4 | 4 | 5 | 6 |
| ·45 | 2818 | 2825 | 2831 | 2838 | 2844 | 2851 | 2858 | 2864 | 2871 | 2877 | 1 | 1 | 2 | 3 | 3 | 4 | 5 | 5 | 6 |
| ·46 | 2884 | 2891 | 2897 | 2904 | 2911 | 2917 | 2924 | 2931 | 2938 | 2944 | 1 | 1 | 2 | 3 | 3 | 4 | 5 | 5 | 6 |
| ·47 | 2951 | 2958 | 2965 | 2972 | 2979 | 2985 | 2992 | 2999 | 3006 | 3013 | 1 | 1 | 2 | 3 | 3 | 4 | 5 | 5 | 6 |
| ·48 | 3020 | 3027 | 3034 | 3041 | 3048 | 3055 | 3062 | 3069 | 3076 | 3083 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 | 6 | 6 |
| ·49 | 3090 | 3097 | 3105 | 3112 | 3119 | 3126 | 3133 | 3141 | 3148 | 3155 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 | 6 | 6 |

## परिशिष्ट–ब

# Antilogarithms

| Degrees | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | Mean Differences 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ·50 | 3162 | 3170 | 3177 | 3184 | 3192 | 3199 | 3206 | 3214 | 3221 | 3228 | 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| ·51 | 3236 | 3243 | 3251 | 3258 | 3266 | 3273 | 3281 | 3289 | 3296 | 3304 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 5 | 5 | 6 | 7 |
| ·52 | 3311 | 3319 | 3327 | 3334 | 3342 | 3350 | 3357 | 3365 | 3373 | 3381 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 5 | 5 | 6 | 7 |
| ·53 | 3388 | 3396 | 3404 | 3412 | 3420 | 3428 | 3436 | 3443 | 3451 | 3459 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 6 | 7 |
| ·54 | 3467 | 3475 | 3483 | 3491 | 3499 | 3508 | 3516 | 3524 | 3532 | 3540 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 6 | 7 |
| ·55 | 3548 | 3556 | 3565 | 3573 | 3581 | 3589 | 3597 | 3606 | 3614 | 3622 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 7 |
| ·56 | 3631 | 3639 | 3648 | 3656 | 3664 | 3673 | 3681 | 3690 | 3698 | 3707 | 1 | 2 | 3 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| ·57 | 3715 | 3724 | 3733 | 3741 | 3750 | 3758 | 3767 | 3776 | 3784 | 3793 | 1 | 2 | 3 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| ·58 | 3802 | 3811 | 3819 | 3828 | 3837 | 3846 | 3855 | 3864 | 3873 | 3882 | 1 | 2 | 3 | 4 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| ·59 | 3890 | 3899 | 3908 | 3917 | 3926 | 3936 | 3945 | 3954 | 3963 | 3972 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| ·60 | 3981 | 3990 | 3999 | 4009 | 4018 | 4027 | 4036 | 4046 | 4055 | 4064 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 6 | 7 | 8 |
| ·61 | 4074 | 4083 | 4093 | 4102 | 4111 | 4121 | 4130 | 4140 | 4150 | 4159 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| ·62 | 4169 | 4178 | 4188 | 4198 | 4207 | 4217 | 4227 | 4236 | 4246 | 4256 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| ·63 | 4266 | 4276 | 4285 | 4295 | 4305 | 4315 | 4325 | 4335 | 4345 | 4355 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| ·64 | 4365 | 4375 | 4385 | 4395 | 4406 | 4416 | 4426 | 4436 | 4446 | 4457 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| ·65 | 4467 | 4477 | 4487 | 4498 | 4508 | 4519 | 4529 | 4539 | 4550 | 4560 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| ·66 | 4571 | 4581 | 4592 | 4603 | 4613 | 4624 | 4634 | 4645 | 4656 | 4667 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 9 | 10 |
| ·67 | 4677 | 4688 | 4699 | 4710 | 4721 | 4732 | 4742 | 4753 | 4764 | 4775 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| ·68 | 4786 | 4797 | 4808 | 4819 | 4831 | 4842 | 4853 | 4864 | 4875 | 4887 | 1 | 2 | 3 | 4 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| ·69 | 4898 | 4909 | 4920 | 4932 | 4943 | 4955 | 4966 | 4977 | 4989 | 5000 | 1 | 2 | 3 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| ·70 | 5012 | 5023 | 5035 | 5047 | 5058 | 5070 | 5082 | 5093 | 5105 | 5117 | 1 | 2 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 11 |
| ·71 | 5129 | 5140 | 5152 | 5164 | 5176 | 5188 | 5200 | 5212 | 5224 | 5236 | 1 | 2 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 10 | 11 |
| ·72 | 5248 | 5260 | 5272 | 5284 | 5297 | 5309 | 5321 | 5333 | 5346 | 5358 | 1 | 2 | 4 | 5 | 6 | 7 | 9 | 10 | 11 |
| ·73 | 5370 | 5383 | 5395 | 5408 | 5420 | 5433 | 5445 | 5458 | 5470 | 5483 | 1 | 3 | 4 | 5 | 6 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| ·74 | 5495 | 5508 | 5521 | 5534 | 5546 | 5559 | 5572 | 5585 | 5598 | 5610 | 1 | 3 | 4 | 5 | 6 | 8 | 9 | 10 | 12 |
| ·75 | 5623 | 5636 | 5649 | 5662 | 5675 | 5689 | 5702 | 5715 | 5728 | 5741 | 1 | 3 | 4 | 5 | 7 | 8 | 9 | 10 | 12 |
| ·76 | 5754 | 5768 | 5781 | 5794 | 5808 | 5821 | 5834 | 5848 | 5861 | 5875 | 1 | 3 | 4 | 5 | 7 | 8 | 9 | 11 | 12 |
| ·77 | 5888 | 5902 | 5916 | 5929 | 5943 | 5957 | 5970 | 5984 | 5998 | 6012 | 1 | 3 | 4 | 5 | 7 | 8 | 10 | 11 | 12 |
| ·78 | 6026 | 6039 | 6053 | 6067 | 6081 | 6095 | 6109 | 6124 | 6138 | 6152 | 1 | 3 | 4 | 6 | 7 | 8 | 10 | 11 | 13 |
| ·79 | 6166 | 6180 | 6194 | 6209 | 6223 | 6237 | 6252 | 6266 | 6281 | 6295 | 1 | 3 | 4 | 6 | 7 | 9 | 10 | 11 | 13 |
| ·80 | 6310 | 6324 | 6339 | 6353 | 6368 | 6383 | 6397 | 6412 | 6427 | 6442 | 1 | 3 | 4 | 6 | 7 | 9 | 10 | 12 | 13 |
| ·81 | 6457 | 6471 | 6486 | 6501 | 6516 | 6531 | 6546 | 6561 | 6577 | 6592 | 2 | 3 | 5 | 6 | 8 | 9 | 11 | 12 | 14 |
| ·82 | 6607 | 6622 | 6637 | 6653 | 6668 | 6683 | 6699 | 6714 | 6730 | 6745 | 2 | 3 | 5 | 6 | 8 | 9 | 11 | 12 | 14 |
| ·83 | 6761 | 6776 | 6792 | 6808 | 6823 | 6839 | 6855 | 6871 | 6887 | 6902 | 2 | 3 | 5 | 6 | 8 | 9 | 11 | 13 | 14 |
| ·84 | 6918 | 6934 | 6950 | 6966 | 6982 | 6998 | 7015 | 7031 | 7047 | 7063 | 2 | 3 | 5 | 6 | 8 | 10 | 11 | 13 | 15 |
| ·85 | 7079 | 7096 | 7112 | 7129 | 7145 | 7161 | 7178 | 7194 | 7211 | 7228 | 2 | 3 | 5 | 7 | 8 | 10 | 12 | 13 | 15 |
| ·86 | 7244 | 7261 | 7278 | 7295 | 7311 | 7328 | 7345 | 7362 | 7379 | 7396 | 2 | 3 | 5 | 7 | 8 | 10 | 12 | 13 | 15 |
| ·87 | 7413 | 7430 | 7447 | 7464 | 7482 | 7499 | 7516 | 7534 | 7551 | 7568 | 2 | 3 | 5 | 7 | 9 | 10 | 12 | 14 | 16 |
| ·88 | 7586 | 7603 | 7621 | 7638 | 7656 | 7674 | 7691 | 7709 | 7727 | 7745 | 2 | 4 | 5 | 7 | 9 | 11 | 12 | 14 | 16 |
| ·89 | 7762 | 7780 | 7798 | 7816 | 7834 | 7852 | 7870 | 7889 | 7907 | 7925 | 2 | 4 | 5 | 7 | 9 | 11 | 13 | 14 | 16 |
| ·90 | 7943 | 7962 | 7980 | 7998 | 8017 | 8035 | 8054 | 8072 | 8091 | 8110 | 2 | 4 | 6 | 7 | 9 | 11 | 13 | 15 | 17 |
| ·91 | 8128 | 8147 | 8166 | 8185 | 8204 | 8222 | 8241 | 8260 | 8279 | 8299 | 2 | 4 | 6 | 8 | 9 | 11 | 13 | 15 | 17 |
| ·92 | 8318 | 8337 | 8356 | 8375 | 8395 | 8414 | 8433 | 8453 | 8472 | 8492 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 15 | 17 |
| ·93 | 8511 | 8531 | 8551 | 8570 | 8590 | 8610 | 8630 | 8650 | 8670 | 8690 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 |
| ·94 | 8710 | 8730 | 8750 | 8770 | 8790 | 8810 | 8831 | 8851 | 8872 | 8892 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 |
| ·95 | 8913 | 8933 | 8954 | 8974 | 8995 | 9016 | 9036 | 9057 | 9078 | 9099 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 15 | 17 | 19 |
| ·96 | 9120 | 9141 | 9162 | 9183 | 9204 | 9226 | 9247 | 9268 | 9290 | 9311 | 2 | 4 | 6 | 8 | 11 | 13 | 15 | 17 | 19 |
| ·97 | 9333 | 9354 | 9376 | 9397 | 9419 | 9441 | 9462 | 9484 | 9506 | 9528 | 2 | 4 | 7 | 9 | 11 | 13 | 15 | 17 | 20 |
| ·98 | 9550 | 9572 | 9594 | 9616 | 9638 | 9661 | 9683 | 9705 | 9727 | 9750 | 2 | 4 | 7 | 9 | 11 | 13 | 16 | 18 | 20 |
| ·99 | 9772 | 9795 | 9817 | 9840 | 9863 | 9886 | 9908 | 9931 | 9954 | 9977 | 2 | 5 | 7 | 9 | 11 | 14 | 16 | 18 | 20 |