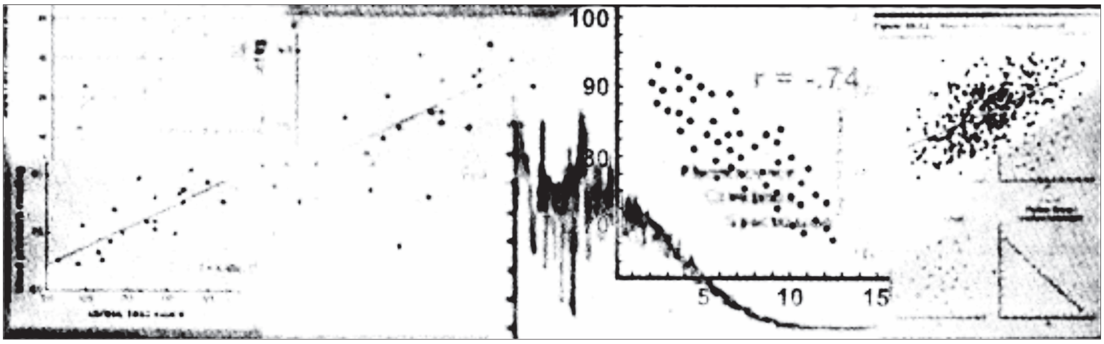
সপ্তম অধ্যায়

সহসম্বন্ধ (Corelation)



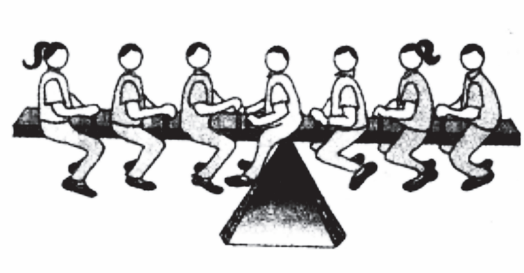
> তুমি এই অধ্যায়ৰ অধ্যয়নৰ পৰা
> - সহসম্বন্ধ শব্দটোৰ অৰ্থ বুজি পাবা ;
> - দুটা চলকৰ মাজৰ সম্পৰ্কৰ বিষয়ে জানিব পাৰিবা;
> - সহসম্বন্ধৰ বিভিন্ন জোখ নিৰূপণ কৰিব পাৰিবা;
> - চলকৰ সম্পৰ্কৰ মাত্ৰা আৰু দিশ বিশ্লেষণ কৰিব পাৰিবা।

1. সূচনা

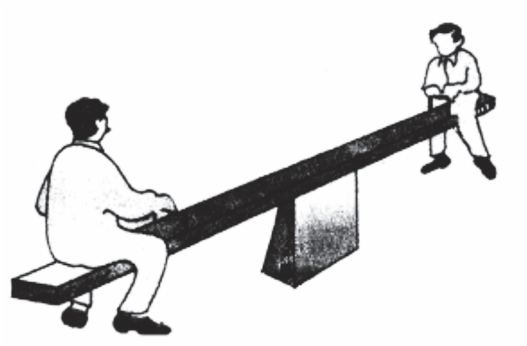
আগৰ অধ্যায়বোৰত এক বৃহৎ তথ্যৰাশিৰ পৰা কিদৰে সংক্ষিপ্ত জোখ নিৰূপণ কৰিব পাৰি আৰু সদৃশ চলকৰ মাজত কেনেকৈ পৰিৱৰ্তন হয় সেই বিষয়ে শিকিব পাৰিছা। এতিয়া দুটা চলকৰ মাজৰ সম্পৰ্ক কিদৰে পৰীক্ষা কৰিব পাৰি শিকিবা।

গ্ৰীষ্মকালত যেতিয়া উত্তাপ বৃদ্ধি পায়, পৰ্যটকৰ দ্বাৰা পাহাৰীয়া অঞ্চলসমূহ ভৰি পৰে। আইচক্ৰীমৰ যথেষ্ট বিক্ৰী বাঢ়ে। গতিকে পৰ্যটকৰ সংখ্যা আৰু আইচক্ৰীমৰ বিক্ৰী উত্তাপৰ সৈতে জড়িত। সেইদৰে, বিলাহীৰ যোগান যেতিয়া স্থানীয় বজাৰত বৃদ্ধি পায়, ইয়াৰ দাম কমে। শস্য চপোৱাৰ বতৰত যেতিয়া স্থানীয় বজাৰলৈ বিলাহী আহিবলৈ ধৰে ইয়াৰ দাম প্ৰতি কিলোগ্ৰামত ৪০ টকাৰ পৰা ৪ টকালৈ বা তাতকৈও কম হ'বলৈ ধৰে। গতিকে যোগান দামৰ সৈতে জড়িত। পদ্ধতিগতভাৱে এনেবোৰ সম্বন্ধ পৰীক্ষা কৰাৰ এটা মাধ্যম হৈছে সহসম্বন্ধ বিশ্লেষণ। ই বিশ্লেষণ কৰা প্ৰশ্নবোৰ হৈছে ঃ

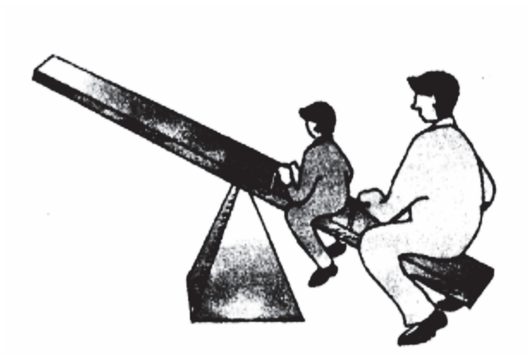
- দুটা চলকৰ মাজত সম্বন্ধ আছেনে ?



- এটা চলকৰ মানৰ পৰিৱৰ্তন হ'লে আনটোৰো পৰিৱৰ্তন হয়নে ?



- দুয়োটা চলকে একে দিশত গতি কৰেনে ?



- সম্বন্ধটো কিমান দৃঢ় ?

2. সম্বন্ধৰ প্ৰকাৰ

বিভিন্ন ধৰণৰ সম্বন্ধ লক্ষ্য কৰোঁ আহাঁ। চাহিদাৰ পৰিমাণৰ পৰিৱৰ্তন আৰু বস্তুৰ দামৰ সম্বন্ধ চাহিদা তত্ত্বৰ এক অপৰিহাৰ্য অংগ। যিটো তোমালোকে দ্বাদশ শ্ৰেণীত (XII) পঢ়িবলৈ পাবা। কম মাত্ৰাৰ বৰষুণ নিম্ন কৃষি উৎপাদনশীলতাৰ সৈতে জড়িত। এনে ধৰণৰ সম্বন্ধসমূহক কাৰণ আৰু ফলাফল হিচাপে ব্যাখ্যা কৰিব পাৰি। আনবোৰ সমকালীনতা (coincidence) হ'ব পাৰে। পৰিভ্ৰমী চৰাইৰ এখন উদ্যানলৈ আগমন আৰু এটা অঞ্চলৰ জন্ম হাৰৰ সম্বন্ধক কাৰণ আৰু ফলাফল আখ্যা দিব নোৱাৰি। এই সম্বন্ধবোৰ সাধাৰণ সমকালীনতা। জোতা এযোৰৰ আকাৰ আৰু তোমাৰ পকেটত থকা টকাৰ মাজৰ সম্বন্ধও আন এটা তেনে উদাহৰণ। যদিও সম্বন্ধ আছে, তাক ব্যাখ্যা কৰাটো এক সমস্যা।

আন এটা উদাহৰণত দুটা চলকৰ ওপৰত এক তৃতীয় চলকৰ প্ৰভাৱে চলক দুটাৰ মাজত এক সম্বন্ধ গঢ়ি তুলিব পাৰে। আইচক্ৰীমৰ বৰ্দ্ধিত বিক্ৰী পানীত বুৰি মৃত্যু হোৱা সংখ্যাৰ লগত জড়িত হ'ব পাৰে। আইচক্ৰীম খোৱা বাবে পানীত বুৰি লোকসকলৰ মৃত্যু হোৱা নাই। তাপমাত্ৰ বৃদ্ধি পোৱা বাবে আইচক্ৰীমৰ বিক্ৰী বাঢ়িছে। তদুপৰি উত্তাপ কমাবলৈ বহুতো লোক চুইমিং পুললৈ যাবলৈ ধৰে। এইটোৱেই বোধহয় পানীত বুৰ গৈ মৃত্যু হোৱা লোকৰ সংখ্যা বঢ়াইছে। গতিকে আইচক্ৰীম বিক্ৰী আৰু পানীত বুৰি মৃত্যু হোৱাসকলৰ যোগাত্মক (high) সহসম্বন্ধৰ পিছত আছে তাপমাত্ৰা।

সহসম্বন্ধই কি জোখে ?

সহসম্বন্ধই চলকসমূহৰ মাজত থকা সম্বন্ধৰ ব্যাপকতা আৰু দিশৰ জোখ অধ্যয়ন কৰে। সহসম্বন্ধই সহবিচলনৰ জোখ নিৰ্ণয় কৰে কাৰণ আৰু ফলাফল নহয়। সহসম্বন্ধই কেতিয়াও কাৰণ আৰু ফলাফল বুজাই বুলি ব্যাখ্যা কৰিব নালাগে। দুটা চলক X আৰু Y ৰ মাজত সহসম্বন্ধৰ অৰ্থ হ'ল যেতিয়া এটা চলক এটা দিশত গতি কৰে, আনটো চলক একে দিশে (যোগাত্মক পৰিৱৰ্তন) নাইবা বিপৰীত দিশে (ঋণাত্মক পৰিৱৰ্তন) গতি কৰে, কিন্তু এটা নিৰ্দিষ্ট পথত। সৰলীকৰণৰ বাবে আমি ইয়াত ধৰি লম যে সহসম্বন্ধ ৰৈখিক হ'ব। ইয়াৰ অৰ্থ হ'ল চলক দুটাৰ মাজৰ আপেক্ষিক পৰিৱৰ্তন লেখ কাগজত এডাল পোন বা সৰল ৰেখাৰে দেখুৱাব পাৰি।

সহসম্বন্ধৰ প্ৰকাৰ

সহসম্বন্ধক সাধাৰণতে যোগাত্মক আৰু ঋণাত্মক হিচাপে ভাগ কৰা হয়। চলক দুটা যেতিয়া একেলগে একে দিশে গতি কৰে তেতিয়া সহসম্বন্ধ যোগাত্মক বোলা হয়।

যেতিয়া আয় বৃদ্ধি পায় উপভোগো বৃদ্ধি পায়। যেতিয়া আয় হ্ৰাস পায় উপভোগো হ্ৰাস পায়। আইচক্ৰীমৰ বিক্ৰী আৰু তাপমাত্ৰা একে দিশে গতি কৰে। চলক দুটা যেতিয়া বিপৰীত দিশে গতি কৰে সহসম্বন্ধ ঋণাত্মক হয়। যেতিয়া আপেলৰ দাম কমে ইয়াৰ চাহিদা বৃদ্ধি পায়। যেতিয়া দাম বাঢ়ে ইয়াৰ চাহিদা কমে। অধ্যয়নত যদি বেছি সময় অতিবাহিত কৰা, বিফলতাৰ সম্ভাৱনা কমিব। যদি অধ্যয়নত কম সময় অতিবাহিত কৰা বিফলতাৰ সম্ভাৱনা বেছি হ'ব। এইবোৰ ঋণাত্মক সহসম্বন্ধৰ উদাহৰণ। চলকসমূহ বিপৰীত দিশে গতি কৰে।

3. সহসম্বন্ধ জোখা কৌশল

সহসম্বন্ধৰ অধ্যয়নৰ বাবে বিস্তৃতভাৱে ব্যৱহাৰ হোৱা কৌশলসমূহ হ'ল প্ৰকীৰ্ণ চিত্ৰ (Scatter diagram), কাৰ্ল পিয়েৰচনৰ সহসম্বন্ধ গুণাঙ্ক বা সহগ আৰু স্পিয়াৰমেনৰ অনুস্থিতি (Rank) সহসম্বন্ধ।

প্ৰকীৰ্ণ চিত্ৰত দৃষ্টি নিক্ষেপ কৰিলে চলকৰ মাজত থকা সম্বন্ধৰ প্ৰকৃতি গম পোৱা যায়। ই কোনো নিৰ্দিষ্ট সাংখ্যিক (numerical) মান নিদিয়ে। দুটা চলকৰ মাজত থকা ৰৈখিক সম্বন্ধৰ সাংখ্যিক মাপ নিৰ্দ্ধাৰণ কৰে কাৰ্ল পিয়েৰচনৰ সহসম্বন্ধ সহগে। যেতিয়া চলকৰ মাজৰ সম্বন্ধক এডাল সৰল ৰেখাৰে দেখুৱাব পৰা যায় তেতিয়া তাক ৰৈখিক সম্বন্ধ বোলা হয়। সহসম্বন্ধৰ আন এটা মাপ হৈছে স্পিয়াৰমেনৰ অনুস্থিতি (rank)ৰ সহসম্বন্ধ। ই স্বকীয় চলকৰ গুণৰ ভিত্তিত প্ৰদান কৰা অনুস্থিতিসমূহৰ মাজত থকা ৰৈখিক সম্বন্ধ জুখি উলিয়ায়। এই গুণবোৰ হ'ল মানুহৰ বুদ্ধিমত্তা, শাৰীৰিক অৱয়ব, নম্ৰতা ইত্যাদি যিবোৰ চলকৰ মান সাংখ্যিকভাৱে জুখিব নোৱাৰি।

প্ৰকীৰ্ণ চিত্ৰ (Scatter Diagram)

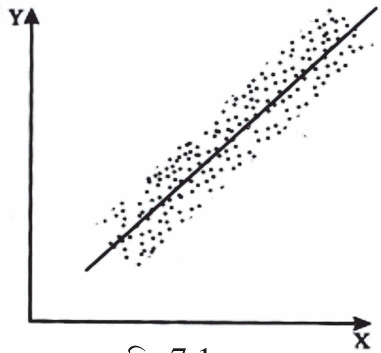
কোনো সাংখ্যিক মান গণনা নকৰাকৈ চিত্ৰৰ সহায়ত সম্বন্ধৰ প্ৰকাৰ পৰীক্ষা কৰিবলৈ প্ৰকীৰ্ণ চিত্ৰ এবিধ উপযোগী কৌশল। এই পদ্ধতিত চলক দুটাৰ মানসমূহ লেখ কাগজত বিন্দু হিচাপে উপস্থাপন কৰা হয়। এইদৰে অংকন কৰা বিন্দুবোৰেই প্ৰকীৰ্ণ চিত্ৰ বোলে। এই প্ৰকীৰ্ণ চিত্ৰৰ পৰা সম্বন্ধৰ প্ৰকৃতিৰ এটা ভাল আভাস পোৱা যায়। এই চিত্ৰত বিন্দুবোৰ ঘনকৈ নে পাতলিয়াকৈ সিঁচৰতি হৈ আছে আৰু কেনে দিশত আছে তাৰ পৰাই চলকৰ সম্বন্ধ বুজা যায়। বিন্দুবোৰ যদি এডাল ৰেখাত থাকে তেতিয়া সহসম্বন্ধটোক সম্পূৰ্ণ (perfect) আৰু একৰ সমান (unity) বুলি কোৱা হয়। বিন্দুবোৰ যদি ৰেখাডালৰ চাৰিওফালে সিঁচৰতি হৈ থাকে তেতিয়া সহসম্বন্ধ ভাল নহয় বুলি ক'ব পাৰি। সহসম্বন্ধক ৰৈখিক বুলি কোৱা হয় যদিহে বিন্দুবোৰ এডাল ৰেখাত নাইবা ৰেখাৰ কাষত থাকে।

চিত্ৰ নং 7.1 ৰ পৰা 7.5 লৈ দিয়া প্ৰকীৰ্ণ চিত্ৰসমূহে দুটা চলকৰ মাজত থকা সম্বন্ধৰ আভাস দিয়ে। 7.1 চিত্ৰত বিন্দুবোৰ এডাল ওপৰলৈ উঠি যোৱা ৰেখাৰ চাৰিওফালে দেখা গৈছে। ই চলক দুটা একে দিশত গতি কৰা বুজাইছে। যেতিয়া X বৃদ্ধি পাব Y ও বৃদ্ধি পাব। ইয়াক যোগাত্মক (positive) সহসম্বন্ধ বোলে। 7.2 চিত্ৰত বিন্দুবোৰ এডাল তললৈ যোৱা ৰেখাৰ চাৰিওফালে দেখা গৈছে। এইবাৰ চলক দুটা বিপৰীত দিশত গতি কৰা বুজাইছে। যেতিয়া X বাঢ়ে Y হ্ৰাস পাব আৰু X কমিলে Y বাঢ়িব। ইয়াক ঋণাত্মক (negative) সহসম্বন্ধ বোলে। 7.3 চিত্ৰত সিঁচৰতি হৈ থকা বিন্দুবোৰ কোনো ধৰণৰ উৰ্দ্ধমুখী বা নিম্নমুখী ৰেখাৰ কাষত থকা নাই। ই সহসম্বন্ধ নথকা বুজাইছে। 7.4 আৰু 7.5 চিত্ৰত বিন্দুবোৰ কোনো ধৰণৰ উৰ্দ্ধমুখী বা নিম্নমুখী ৰেখাৰ কাষত সিঁচৰতি হৈ থকা নাই। বিন্দুবোৰ ৰেখাডালতেই আছে। ইয়াক যথাক্ৰমে সম্পূৰ্ণ যোগাত্মক (perfect positive) আৰু সম্পূৰ্ণ ঋণাত্মক (perfect negative) সহসম্বন্ধ বোলা হয়।

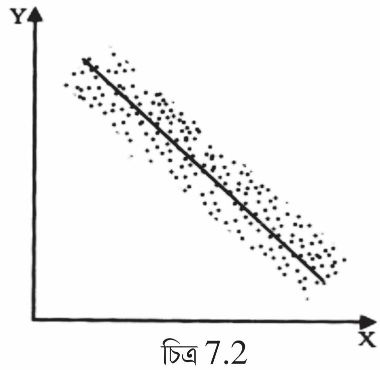
প্ৰকীৰ্ণ চিত্ৰৰ পৰা আমি দুটা চলকৰ মাজৰ সহসম্বন্ধৰ প্ৰকৃতি আৰু ব্যাপকতাৰ ধাৰণা কৰিব পাৰো।

কাৰ্যাৱলী

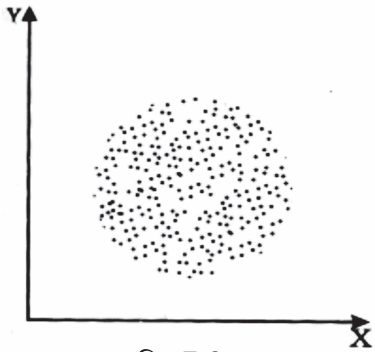
- তোমাৰ শ্ৰেণীৰ ছাত্ৰ-ছাত্ৰীসকলৰ উচ্চতা, ওজন আৰু দশম শ্ৰেণীৰ যিকোনো দুটা বিষয়ৰ নম্বৰৰ তথ্য সংগ্ৰহ কৰা। এবাৰত দুটাকৈ চলক লৈ এই তথ্যখিনিৰ প্ৰকীৰ্ণ চিত্ৰ অংকন কৰা। কেনে ধৰণৰ সম্বন্ধ দেখা পালা?



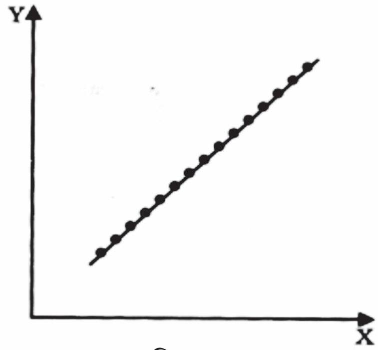
চিত্ৰ 7.1



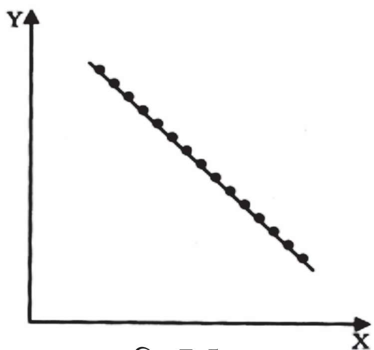
চিত্ৰ 7.2



চিত্ৰ 7.3



চিত্ৰ 7.4



চিত্ৰ 7.5

কাৰ্ল পিয়েৰশ্যনৰ সহসম্বন্ধ গুণাঙ্ক

ইয়াক গুণফল বা গুণাঙ্ক ঘূৰ্ণক (product moment) সহসম্বন্ধ আৰু সাধাৰণ সহসম্বন্ধ বুলিও জনা যায়। ই x আৰু y দুটা চলকৰ ৰৈখিক (linear) সম্বন্ধৰ সঠিক সাংখ্যিক মান দিয়ে। ৰৈখিক সম্বন্ধ এইদৰে দিব পাৰি

$$Y = a + bX$$

এই ধৰণৰ সম্বন্ধক এডাল সৰল ৰেখাৰে বৰ্ণাব পাৰি। ৰেখাডালৰ Y অক্ষৰ ছেদাংশক (intercept) a ৰে আৰু প্ৰবণতা বা ঢালক (slope) b ৰে দেখুৱা হৈছে। ই X ৰ মানৰ অতি ক্ষুদ্ৰ পৰিৱৰ্তনৰ বাবে হোৱা Y ৰ মানৰ পৰিৱৰ্তন নিৰ্দেশ কৰে। আনহাতে, যদি চলকৰ মাজৰ সম্বন্ধক সৰল ৰেখাৰে বুজাব নোৱাৰি যেনে $Y = X^2$ তেতিয়া সহসম্বন্ধৰ মান শূন্য হ'ব। স্পষ্টভাৱে বুজা যায় যে শূন্য সহসম্বন্ধই দুটা চলকৰ মাজত কোনো সম্বন্ধ নথকা নুবুজায়।

ধৰি লোৱা $X_1, X_2, ..., X_N$, X ৰ N সংখ্যক মান আৰু $Y_1, Y_2, ... Y_N$, Y ৰ তদনুৰূপ মান। পিছলৈ সহজ কৰিবলৈ প্ৰতিসৰ্গসমূহ (subscripts) বাদ দিয়া হৈছে। X আৰু Y ৰ গাণিতিক মাধ্য হ'ব

$$\overline{X} = \frac{\Sigma X}{N}; \quad \overline{Y} = \frac{\Sigma Y}{N}$$

আৰু প্ৰসৰণ (variance) তলত দিয়া হ'ল

$$\sigma_X^2 = \frac{\sum (X - \overline{X})^2}{N} = \frac{\sum X^2}{N} - \overline{X}^2$$

$$\sigma_Y^2 = \frac{\sum (Y - \overline{Y})^2}{N} = \frac{\sum Y^2}{N} - \overline{Y}^2$$

প্ৰসৰণৰ যোগাত্মক বৰ্গমূলেই ক্ৰমে X আৰু Y ৰ মানক বিচলন হ'ব। X আৰু Y ৰ সহপ্ৰসৰণ (covariance) হ'ল

সহপ্ৰসৰণ

$$\text{Cov}(X, \quad Y) = \frac{\sum (X - \overline{X})(Y - \overline{Y})}{N} = \frac{\sum xy}{N}$$

য'ত $x = X - \overline{X}$ আৰু $y = Y - \overline{Y}$ ক্ৰমে গাণিতিক মাধ্যৰ পৰা লোৱা X আৰু Y ৰ i তম মানৰ বিচলন। X আৰু Y চলকৰ সহপ্ৰসৰণৰ বীজগণিতীয় চিহ্নই (±) সহসম্বন্ধ গুণাঙ্কৰ চিহ্ন নিৰ্ণয় কৰে। সহপ্ৰসৰণ শূন্য হ'লে, সহসম্বন্ধ গুণাঙ্ক সদায় শূন্য হ'ব।

গুণাংক ঘূৰ্ণক সহসম্বন্ধ (product moment correlation) বা পিয়েৰচনৰ সহসম্বন্ধ গুণাঙ্কৰ সংজ্ঞা দিয়া হয় এইদৰে

$$r = \Sigma xy \Big/ N\sigma_x\sigma_y \text{ ....(1)}$$

$$\text{or,} \quad r = \frac{\Sigma(X - \overline{X})(Y - \overline{Y})}{\sqrt{\sum (X - \overline{X})^2}\sqrt{\Sigma(Y - \overline{Y})^2}} \text{ ....(2)}$$

$$\text{or,} \quad r = \frac{\sum XY - \frac{(\sum X)(\sum Y)}{N}}{\sqrt{\sum X^2 - \frac{(\sum X)^2}{N}}\sqrt{\sum Y^2 - \frac{(\sum Y)^2}{N}}} \text{ ....(3)}$$

$$\text{or,} \quad r = \frac{N\sum XY - (\sum X)(\sum Y)}{\sqrt{N\sum X^2 - (\sum X)^2} \bullet \sqrt{N\sum Y^2 - (\sum Y)^2}} \text{ ....(4)}$$

সহসম্বন্ধ গুণাঙ্কৰ ধৰ্ম বা বৈশিষ্ট্যসমূহ

আমি এতিয়া সহসম্বন্ধ গুণাঙ্কৰ বৈশিষ্ট্যসমূহ আলোচনা কৰোঁ আহাঁ।

- r ৰ কোনো একক নাই। ই এটা বিশুদ্ধ (pure) সংখ্যা। ইয়াৰ অৰ্থ হ'ল r ৰ মান জোখৰ এককৰ দ্বাৰা প্ৰভাৱিত নহয়। উদাহৰণস্বৰূপে, উচ্চতা (ফুটৰ হিচাপত) আৰু ওজনৰ (কিঃগ্ৰাঃৰ হিচাপত) মাজৰ সহসম্বন্ধ গুণাঙ্ক (r) হ'ব 0.7।
- r ৰ ঋণাত্মক মানে বিপৰীত সম্বন্ধ বুজায়। এটা চলকৰ পৰিৱৰ্তন আনটো চলকৰ বিপৰীত দিশৰ পৰিৱৰ্তনৰ সৈতে জড়িত। যেতিয়া কোনো এটা বস্তুৰ দাম বাঢ়ে, ইয়াৰ চাহিদা কমে। যেতিয়া সুতৰ

হাৰ বাঢ়ে, পুঁজি বা ঋণৰ চাহিদাও কমে। কাৰণ এতিয়া ঋণ বেছি ব্যয়বহুল (costlier) হৈ পৰিল।

- r যদি যোগাত্মক হয়, দুয়োটা চলকে একে দিশত গতি কৰে। কফিৰ দাম যেতিয়া বাঢ়ে, ইয়াৰ বিকল্প চাহৰ চাহিদাও বাঢ়ে। উন্নত জলসিঞ্চন ব্যৱস্থা উচ্চ উৎপাদনৰ সৈতে জড়িত। তাপমাত্ৰা বৃদ্ধি পালে আইচক্ৰীমৰ বিক্ৰী বাঢ়ে।
- যদি $r = 0$ হয়, চলক দুটাৰ মাজত সহসম্বন্ধ নাথাকে। চলক দুটাক মাজত কোনো ৰৈখিক সম্বন্ধ নাই। অৱশ্যে আন ধৰণৰ সম্বন্ধ থাকিব পাৰে।
- যদি $r = 1$ বা $r = -1$ হয়, সহসম্বন্ধ সম্পূৰ্ণ (perfect) হয়। চলক দুটাৰ মাজৰ সম্বন্ধ সম্পূৰ্ণ বুজায়।
- r ৰ উচ্চ মানে তীব্ৰ (strong) ৰৈখিক সম্বন্ধ বুজায়। যেতিয়া r ৰ মান +1 বা -1 ৰ ওচৰত থাকে তেতিয়া ইয়াৰ মান উচ্চ বুলি কোৱা হয়।
- r ৰ নিম্ন মানে দুৰ্বল (weak) ৰৈখিক সম্বন্ধ বুজায়। যেতিয়া r ৰ মান শূন্যৰ ওচৰত থাকে তেতিয়া ইয়াৰ মান নিম্ন বুলি কোৱা হয়।
- সহসম্বন্ধ গুণাঙ্কৰ মান +1 আৰু -1 ৰ মাজত থাকে, $-1 \leq r \leq 1$। যদি কোনো অনুশীলনীত r ৰ মান এই পৰিসৰৰ (range) বাহিৰত থাকে তেতিয়া গণনাত ভুল থকা সূচায়।
- r ৰ মান চলকৰ মূল বিন্দু আৰু জোখৰ পৰিৱৰ্তনৰ দ্বাৰা প্ৰভাৱিত নহয়। X আৰু Y দুটা চলকৰ বাবে দুটা নতুন চলক ধৰা হওঁক।

$$U = \frac{X - A}{B}; \qquad V = \frac{Y - C}{D}$$

য'ত A আৰু C যথাক্ৰমে X আৰু Y ৰ অনুমিত মাধ্য বা গড়। B আৰু D সাধাৰণ উৎপাদক। তেতিয়া

$$r_{xy} = r_{uv}$$

উপ-বিচলন পদ্ধতিৰ দৰে, এই বৈশিষ্ট্যটো অতি সৰলভাৱে সহসম্বন্ধ গুণাঙ্ক নিৰ্ণয় কৰাৰ বাবে ব্যৱহৃত হয়।

তোমালোকে প্ৰথম অধ্যায়ত পঢ়িছা যে পৰিসাংখ্যিক পদ্ধতিসমূহ ব্যৱহাৰিক জ্ঞানৰ বিকল্প নহয়। ইয়াত আন এটা উদাহৰণ, যিয়ে সহসম্বন্ধ গণনা কৰাৰ আগতে তথ্যসমূহ বুজি পোৱাত গুৰুত্ব আৰোপ কৰে। কেইখনমান গাঁৱত মহামাৰী বিয়পি পৰাত চৰকাৰে প্ৰভাৱিত গাঁও কেইখনলৈ এটা চিকিৎসকৰ দল পঠিয়াইছে। মৃত্যুবৰণ কৰা লোকৰ সংখ্যা আৰু গাঁও কেইখনলৈ যোৱা ডাক্তৰৰ সংখ্যাৰ মাজত যোগাত্মক সহসম্বন্ধ পোৱা গৈছে। স্বাভাৱিকতে চিকিৎসকসকলে আগবঢ়োৱা স্বাস্থ্য সেৱাৰ সুবিধাসমূহে মৃত্যু হোৱা লোকৰ সংখ্যা হ্ৰাস কৰাৰ সম্ভাৱনাই ঋণাত্মক সহসম্বন্ধ সূচায়। আন কাৰণতহে এনে ঘটিছে। তথ্যখিনিয়ে কোনো এক বিশেষ সময়কহে ব্যক্ত কৰে। উল্লিখিত বেছিভাগ মৃত্যুৰ কাৰণ হয়তো মাৰাত্মক (terminal) য'ত চিকিৎসকৰ কৰিব লগীয়া বিশেষ একো নাই। তদুপৰি চিকিৎসকৰ উপস্থিতিত উপকৃত হোৱাটো কিছু সময়ৰ পিছতহে পৰিলক্ষিত হয়। এনেকুৱাও হ'ব পাৰে যে যিবোৰ মৃত্যুৰ খবৰ পোৱা গৈছিল সেইবোৰ মহামাৰীৰ বাবে নহয়। ৰাজ্যখনলৈ হঠাতে চুনামি (tsunami) অহাত মৃত্যুৰ সংখ্যা বৃদ্ধি পায়।

কৃষকৰ শিক্ষা গ্ৰহণ কৰা বছৰৰ সংখ্যা আৰু প্ৰতি একৰত হোৱা বছৰেকীয়া উৎপাদনৰ মাজৰ সম্বন্ধ পৰীক্ষা কৰি r ৰ গণনা প্ৰক্ৰিয়া ব্যাখ্যা কৰো আহা।

উদাহৰণ 1

কৃষকৰ শিক্ষা গ্ৰহণ কৰা বছৰৰ সংখ্যা	প্ৰতি একৰত বছৰেকীয়া উৎপাদন ('000 টকাত)
0	4
2	4
4	6
6	10
8	10
10	8
12	7

1 নং সূত্ৰৰ বাবে Σxy, σ_x, σ_y ৰ মান আৱশ্যকীয়। তলত দিয়া 7.1 তালিকাৰ পৰা এই মানসমূহ পাম

7.1 নং তালিকাৰ পৰা,

$$\Sigma_{xy} = 42$$

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\Sigma (X - \overline{X})^2}{N}} = \sqrt{\frac{112}{7}}$$

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\Sigma (Y - \overline{Y})^2}{N}} = \sqrt{\frac{38}{7}}$$

এই মানসমূহ 1নং সূত্ৰত বহুৱালে

$$r = \frac{42}{7\sqrt{\frac{112}{7}}\ \sqrt{\frac{38}{7}}} = 0.664$$

2 নং সূত্ৰৰ পৰাও একে মানেই পাম,

$$r = \frac{\Sigma(X - \overline{X})(Y - \overline{Y})}{\sqrt{\Sigma(X - \overline{X})^2}\ \sqrt{\Sigma(Y - \overline{Y})^2}} \quad \text{.................(2)}$$

$$r = \frac{42}{\sqrt{112}\ \sqrt{38}} = 0.664$$

তালিকা 7.1

কৃষকৰ শিক্ষা-গ্ৰহণৰ বছৰ আৰু বছৰি উৎপাদনৰ মাজৰ r নিৰূপণ কৰা

শিক্ষা গ্ৰহণৰ বছৰ X	$(X-\overline{X})$	$(X-\overline{X})^2$	প্ৰতি একৰত বছৰি উৎপাদন ('000 টকাত) (Y)	$(Y-\overline{Y})$	$(Y-\overline{Y})^2$	$(X-\overline{X})(Y-\overline{Y})$
0	-6	36	4	-3	9	18
2	-4	16	4	-3	9	12
4	-2	4	6	-1	1	2
6	0	0	10	3	9	0
8	2	4	10	3	9	6
10	4	16	8	1	1	4
12	6	36	7	0	0	0
$\Sigma X=42$		$\Sigma (X-\overline{X})^2 = 112$	$\Sigma Y = 49$		$\Sigma (Y-\overline{Y})^2 = 38$	$\Sigma (X-\overline{X})(Y-\overline{Y}) = 42$

গতিকে, কৃষকৰ শিক্ষা গ্ৰহণৰ বছৰ আৰু প্ৰতি একৰত হোৱা উৎপাদনৰ যোগাত্মক (positive) সহসম্বন্ধ আছে। r ৰ মানো ডাঙৰ। ইয়াৰ পৰা বুজা যায় যে, কৃষকে যিমান বেছি বছৰ শিক্ষাত অতিবাহিত কৰিব, প্ৰতি একৰত হোৱা উৎপাদন বেছি হ'ব। ইয়ে কৃষকৰ শিক্ষাৰ ওপৰত গুৰুত্ব আৰোপ কৰে।

সূত্ৰ নং (3)

$$r = \frac{\sum XY - \frac{(\sum X)(\sum Y)}{N}}{\sqrt{\sum X^2 - \frac{(\sum X)^2}{N}}\sqrt{\sum Y^2 - \frac{(\sum Y)^2}{N}}} \quad ......(3)$$

ব্যৱহাৰ কৰিবলৈ তলত দিয়া মানসমূহ গণনা কৰিব লাগিব

অৰ্থাৎ ΣXY, ΣX^2, ΣY^2।

এতিয়া r ৰ মান পাবলৈ সূত্ৰ নং (3) ব্যৱহাৰ কৰা।

r ৰ বিভিন্ন মানৰ তাৎপৰ্য জানো আহা। ধৰা হ'ল ইংৰাজী আৰু পৰিসংখ্যা বিজ্ঞানত লাভ কৰা নম্বৰৰ মাজৰ সহসম্বন্ধ 0.1। ইয়াৰ অৰ্থ হ'ল বিষয় দুটাৰ মাজৰ সহসম্বন্ধ যোগাত্মক যদিও সম্বন্ধটো দুৰ্বল। ইংৰাজী বেছি নম্বৰ লাভ কৰা ছাত্ৰ-ছাত্ৰীয়ে আপেক্ষিকভাৱে পৰিসংখ্যা বিজ্ঞানত কম নম্বৰো পাব পাৰে। r ৰ মান যদি 0.9 ধৰিলো হয়, ইংৰাজীত বেছি নম্বৰ পোৱা ছাত্ৰ-ছাত্ৰীসকলে নিশ্চিতভাৱে পৰিসংখ্যা বিজ্ঞানতো বেছি নম্বৰ পাব।

ঋণাত্মক সহসম্বন্ধৰ এটা উদাহৰণ হ'ল স্থানীয় বজাৰলৈ অহা শাক-পাচলি আৰু শাক-পাচলিৰ দামৰ মাজৰ সম্পৰ্ক। r ৰ মান যদি 0.9 হয়, স্থানীয় বজাৰৰ শাক-পাচলিৰ যোগান কম দামৰ শাক-পাচলিৰ সৈতে জড়িত হৈ পৰিব। এই মান -0.1 হ'লে, কম দামত শাক-পাচলিৰ যোগান বাঢ়িব। অৱশ্যে r ৰ মান -0.9 থকাত যিমান কম দাম হৈছিল সিমান নহয়। হ্ৰাস পোৱা দামৰ পৰিমাণ r ৰ পৰম (absolute) মানৰ ওপৰত নিৰ্ভৰ কৰে। r ৰ মান শূন্য হ'লে বজাৰত যোগান বৃদ্ধি পালেও দাম নকমিলেহেঁতেন। দাম কমাৰ আৰু এটা সম্ভাৱনীয়তা হৈছে যদিহে এটা ভাল পৰিবহণ নেটৱৰ্কৰ দ্বাৰা বৰ্দ্ধিত যোগান আন বজাৰলৈ পঠিয়াব পাৰি।

কাৰ্যাৱলী

- তলত দিয়া তালিকাখন চোৱা। চলিত দামত বাৰ্ষিক ৰাষ্ট্ৰীয় আয়ৰ বৃদ্ধি আৰু মুঠ দেশীয় উৎপাদনৰ (GDP) শতাংশ হিচাপে মুঠ দেশীয় সঞ্চয়ৰ মাজত r নিৰূপণ কৰা।

সহসম্বন্ধ গুণাঙ্ক নিৰূপণ কৰিবলৈ উপ-বিচলন পদ্ধতি

চলকসমূহ যেতিয়া ডাঙৰ হয়, r ৰ এটা বৈশিষ্ট্য ব্যৱহাৰ কৰি গণনাৰ সমস্যা যথেষ্ট পৰিমাণে লাঘৱ কৰিব পাৰি। এই বৈশিষ্ট্যটো হ'ল r মাপৰ মূলবিন্দু আৰু মাত্ৰা নিৰপেক্ষ (independent of change in origin and scale)। ইয়াক উপ-বিচলন পদ্ধতি নামেৰেও জনা যায়।

তালিকা 7.2

বছৰ	ৰাষ্ট্ৰীয় আয়ৰ বাৰ্ষিক বৃদ্ধি	মুঠ কেন্দ্ৰীয় উৎপাদনৰ শতাংশ হিচাপে মুঠ দেশীয় সঞ্চয়
1992-93	14	24
1993-94	17	23
1994-95	18	26
1995-96	17	27
1996-97	16	25
1997-98	12	25
1998-99	16	23
1999-00	11	25
2000-01	8	24
2001-02	10	23

উৎস ঃ অৰ্থনৈতিক সমীক্ষা, (2004-05) Pg. 8,9

এই পদ্ধতিত X আৰু Y চলক দুটা তলত দিয়া ধৰণে পৰিৱৰ্তন কৰা হয় ঃ

$$U = \frac{X - A}{h}; \quad V = \frac{Y - B}{k}$$

য'ত A আৰু B অনুমিত গড়, h আৰু k সাধাৰণ উৎপাদক।

তেতিয়া $r_{UV} = r_{XY}$

দৰ সূচকাংক (price index) আৰু মুদ্ৰাৰ যোগানৰ মাজত সহসম্বন্ধ বিশ্লেষণ কৰি এইটো বৈশিষ্ট্য ব্যাখ্যা কৰিব পাৰি।

উদাহৰণ 2

দৰ সূচকাংক (X)	120	150	190	220	230
মুদ্ৰাৰ যোগান (Y)	1800	2000	2500	2700	3000

(কোটি টকাৰ হিচাপত)

তলত উপ-বিচলন পদ্ধতিৰ দ্বাৰা সৰলীকৰণ প্ৰক্ৰিয়াটো বুজোৱা হৈছে।

ধৰি লোৱা হ'ল A=100; h= 10; B=1700 আৰু k= 100। পৰিৱৰ্তিত চলকৰ তালিকাখন তলত দিয়া হৈছেঃ

উপ-বিচলন পদ্ধতিৰ দ্বাৰা দৰ সুচকাংক আৰু মুদ্ৰা যোগানৰ মাজৰ r নিৰ্ণয়

তালিকা 7.3

U $\left(\frac{X-100}{10}\right)$	V $\left(\frac{Y-1700}{100}\right)$	U^2	V^2	UV
2	1	4	1	2
5	3	25	9	15
9	8	81	64	72
12	10	144	100	120
13	13	169	169	169

$\Sigma U=41$; $\Sigma V=35$; $\Sigma U^2 = 423$; $\Sigma V^2 =343$ $\Sigma UV = 378$

এই মানসমূহ সূত্ৰ নং (3)ত বহুৱালে

$$r = \frac{\Sigma UV - \frac{(\Sigma U)(\Sigma V)}{N}}{\sqrt{\Sigma U^2 - \frac{(\Sigma U)^2}{N}}\sqrt{\Sigma V^2 - \frac{(\Sigma V)^2}{N}}} \quad \text{...............(3)}$$

$$r = \frac{378 - \frac{41 \times 35}{5}}{\sqrt{423 - \frac{(41)^2}{5}}\sqrt{343 - \frac{(35)^2}{5}}}$$

$$= 0.98$$

দৰ সূচকাংক আৰু মুদ্ৰাৰ যোগানৰ মাজৰ তীব্ৰ যোগাত্মক (strong positive) সহসম্বন্ধ বিত্তীয় (Monetary) নীতিৰ এক গুৰুত্বপূৰ্ণ ভিত্তি। মুদ্ৰাৰ যোগান যেতিয়া বাঢ়ে দৰ সুচকাংকও বৃদ্ধি পায়।

কাৰ্যাৱলী

- ভাৰতৰ জনসংখ্যা আৰু ৰাষ্ট্ৰীয় আয়ৰ কিছুমান উদাহৰণ লোৱা। উপ-বিচলন পদ্ধতিৰ দ্বাৰা সহসম্বন্ধ নিৰূপণ কৰা আৰু কিমান সহজ হৈছে মন কৰা।

স্পিয়াৰমেনৰ অনুস্থিতি (rank) সহসম্বন্ধ

ব্ৰিটিছ বা ব্ৰিটেইনৰ মনোবৈজ্ঞানিক চি ই স্পিয়াৰমেনে অনুস্থিতি (rank) সহসম্বন্ধ উলিয়াইছিল। দৰ, আয়, ওজন ইত্যাদি চলকৰ জোখ উলিওৱাৰ দৰে যেতিয়া চলকসমূহৰ অৰ্থপূৰ্ণ জোখ উলিয়াব নোৱাৰি তেতিয়া ইয়াৰ ব্যৱহাৰ কৰা হয়। চলকসমূহৰ জোখ যেতিয়া সন্দেহজনক হয় তেতিয়া অনুস্থিতি যুক্ত (ranking) কৰাটো অৰ্থপূৰ্ণ হয়। ধৰি লোৱা এখন আওহতীয়া গাঁৱৰ ছাত্ৰ-ছাত্ৰীসকলৰ উচ্চতা আৰু ওজনৰ সহসম্বন্ধ নিৰূপণ কৰিব লাগে। জোখৰ মাপ বা ওজন জোখা যন্ত্ৰ একোৱেই নাই। এইবোৰ ব্যৱহাৰ নকৰাকৈ ছাত্ৰ-ছাত্ৰীসকলক উচ্চতা বা ওজনৰ হিচাপত অনুস্থিতিযুক্ত কৰিব পাৰি।

এনেকুৱা পৰিস্থিতিও হ'ব পাৰে যেতিয়া তুমি

ন্যায়পৰায়ণতা, সততা ইত্যাদি গুণসমূহ জুখিব লাগে। গুণসমূহ সংখ্যাৰে প্ৰকাশ কৰাতকৈ অনুস্থিতিযুক্ত কৰাটো এটা ভাল বিকল্প হ'ব পাৰে। তদুপৰি, কেতিয়াবা চৰম মান (extreme values) থকা দুটা চলকৰ মাজৰ সহসম্বন্ধ গুণাংক চৰম মান নথকা সহসম্বন্ধ গুণাঙ্কতকৈ বেলেগ হ'ব পাৰে। এনে পৰিস্থিতিসমূহত অনুস্থিতি সহসম্বন্ধ সাধাৰণ সহসম্বন্ধতকৈ বেছি ভাল বিকল্প হ'ব।

অনুস্থিতি সহসম্বন্ধ গুণাঙ্ক আৰু সাধাৰণ সহসম্বন্ধ গুণাঙ্কৰ তাৎপৰ্য সমান। ইয়াৰ সূত্ৰ সাধাৰণ সহসম্বন্ধ গুণাঙ্কৰ পৰাই লোৱা হৈছে য'ত স্বকীয় মানসমূহৰ সলনি অনুস্থিতি ব্যৱহাৰ কৰা হৈছে। সহসম্বন্ধ নিৰূপণ কৰিবলৈ অনুস্থিতি (rank) ব্যৱহাৰ কৰা হয়। অনুস্থিতি (rank) এককসমূহৰ বাবে নিৰ্দ্ধাৰণ কৰা হয়, চলকৰ মানৰ বাবে নহয়। অনুস্থিতি সহসম্বন্ধ গুণাঙ্কই এই স্থানসমূহৰ মাজত থকা ৰৈখিক সম্বন্ধৰ জোখ নিৰ্ণয় কৰে। ই অনুস্থিতিসমূহৰ গুণাঙ্ক ঘূৰ্ণক সহসম্বন্ধ (product moment correlation)। ইয়াৰ সূত্ৰ হ'ল

$$r_K = 1 - \frac{6\sum D^2}{n^3 - n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

য'ত, n ৰাশিৰ সংখ্যা, D হ'ল দুটা চলকৰ বাবে নিৰ্দ্ধাৰণ কৰা অনুস্থিতিৰ (rank) মাজৰ বিচলন (deviation)। অনুস্থিতিসমূহ যেতিয়া পুনৰাবৃত্তি কৰা হয় তেতিয়া সূত্ৰটো হ'ব

$$r_K = 1 - \frac{6\left[\sum D^2 + \frac{\left(m_1^3 - m_1\right)}{12} + \frac{\left(m_2^3 - m_2\right)}{12} + \ldots\right]}{n\left(n^2 - 1\right)}$$

য'ত m_1, m_2 .... অনুস্থিতিসমূহৰ পুনৰাবৃত্তিৰ সংখ্যা

আৰু $\frac{m_1^3 - m_1}{12}$ তদনৰূপ শুধৰণি উপাদান।

এই শুধৰণি দুয়োটা চলকৰ প্ৰতিটো পুনৰাবৃত্তি হোৱা মানৰ বাবে আৱশ্যকীয়। যদি তিনিটা মানৰ পুনৰাবৃত্তি হয়, প্ৰতিটো মানৰ বাবে এটা শুধৰণি হ'ব। প্ৰতিবাৰে m_1 ৰ দ্বাৰা কোনো এটা মান পুনৰাবৃত্তি হোৱাৰ সংখ্যা বুজায়।

সাধাৰণ সহসম্বন্ধ গুণাঙ্কৰ সকলো বৈশিষ্ট্যই ইয়াত কাৰ্যকৰী হয়। পিয়েৰচনৰ সহসম্বন্ধ গুণাঙ্কৰ দৰে এই সহসম্বন্ধ গুণাঙ্কও +1 আৰু -1 ৰ মাজত থাকে। যি কি নহওঁক, সাধাৰণতে পিয়েৰচনৰ পদ্ধতিটোৰ দৰে এই পদ্ধতিটো সঠিক (accurate) নহয়। ইয়াৰ কাৰণ হ'ল ই তথ্যৰ সকলো মান ব্যৱহাৰ নকৰে। কোনো তথ্য শৃংখলাৰ (series), মাত্ৰা অনুসৰি সজোৱা সকলো মানৰ প্ৰথম অন্তৰ বা পাৰ্থক্য (first differences) প্ৰায় ধ্ৰুৱক (constant) নহয়। তথ্য শৃংখলাৰ মাজত কম পাৰ্থক্যৰে সাধাৰণতে তথ্যসমূহ কেন্দ্ৰীয় মানৰ চাৰিওফালে ঘনীভূত (Cluster) হয়। যদি প্ৰথম পাৰ্থক্যবোৰ ধ্ৰুৱক হয় তেতিয়া r আৰু r_k দুয়োটাই একে গণনাৰ ফল দিব। ক্ৰমিক (consecutive) মানসমূহৰ পাৰ্থক্যই হ'ল প্ৰথম পাৰ্থক্য বা অন্তৰ। যেতিয়া চৰম মান থাকে তেতিয়া পিয়েৰচনৰ গুণাঙ্কতকৈ অনুস্থিতি (rank) সহসম্বন্ধ শ্ৰেয়ঃ (preferred)। সাধাৰণতে r_k ৰ মান r ৰ সমান বা কম হয়।

অনুস্থিতি সহসম্বন্ধ নিৰূপণ পদ্ধতি তিনিটা পৰিস্থিতিৰ বাবে ব্যাখ্যা কৰা হ'ব।

1. অনুস্থিতিসমূহ (rank) দিয়া থাকিলে।
2. অনুস্থিতিসমূহ দিয়া নাথাকিলে তথ্যৰ পৰা নিৰ্ণয় কৰি ল'ব লাগিব।
3. অনুস্থিতিসমূহ পুনৰাবৃত্তি হ'লে।

পৰিস্থিতি 1 ঃ অনুস্থিতিসমূহ দিয়া থাকিলে।

উদাহৰণ 3

এটা সৌন্দৰ্য্য প্ৰতিযোগিতাত তিনিজন বিচাৰকে পাঁচজন লোকক বিচাৰ কৰিছে। কোন দুজন বিচাৰপতিৰ সৌন্দৰ্য্য সম্পৰ্কে উমৈহতীয়া ধাৰণা প্ৰায় একে উলিয়াব লাগে।

প্ৰতিযোগী					
বিচাৰক	1	2	3	4	5
A	1	2	3	4	5
B	2	4	1	5	3
C	1	3	5	2	4

বিচাৰক 3 যোৰৰ বাবে 3 বাৰকৈ অনুস্থিতি (rank) সহসম্বন্ধ নিৰ্ণয় কৰিব লাগিব। ইয়াৰ বাবে (4) নং সূত্ৰ ব্যৱহাৰ কৰা হ'ব।

$$r_s = 1 - \frac{6\sum D^2}{n^3 - n} \text{..................}(4)$$

A আৰু B ৰ মাজৰ অনুস্থিতি সহসম্বন্ধ তলত দিয়া ধৰণে গণনা কৰা হ'ব ঃ

A	B	D	D^2
1	2	-1	1
2	4	-2	4
3	1	2	4
4	5	-1	1
5	3	2	4
মুঠ			14

এই মানসমূহ (4) নং সূত্ৰত বহুৱালে

$$r_s = 1 - \frac{6\sum D^2}{n^3 - n} \text{..................}(4)$$

$$= 1 - \frac{6 \times 14}{5^3 - 5} = 1 - \frac{84}{120} = 1 - 0.7 = 0.3$$

A আৰু C ৰ মাজৰ অনুস্থিতি সহসম্বন্ধ তলত দিয়া ধৰণে গণনা কৰা হ'ব ঃ

A	C	D	D^2
1	1	0	0
2	3	-1	1
3	5	-2	4
4	2	2	4
5	4	1	1
মুঠ			10

এই মানসমূহ (4) নং সূত্ৰত বহুৱাৰ ফলত অনুস্থিতি সহসম্বন্ধ পোৱা গ'ল 0.5। একেদৰে, B আৰু C বিচাৰকৰ মাজৰ অনুস্থিতি সহসম্বন্ধ পোৱা গ'ল 0.9। গতিকে, A আৰু C বিচাৰক দুজনৰ ধাৰণা প্ৰায় একে। B আৰু C বিচাৰক দুজনৰ মতামত বহুত বেলেগ।

পৰিস্থিতি 2 ঃ অনুস্থিতিসমূহ দিয়া নাথাকিলে।

উদাহৰণ 4

5 জন ছাত্ৰ-ছাত্ৰীয়ে অৰ্থনীতি আৰু পৰিসংখ্যা বিজ্ঞানত লাভ কৰা নম্বৰৰ শতাংশ দিয়া আছে। অনুস্থিতি সহসম্বন্ধ উলিয়াবলৈ অনুস্থিতিসমূহ গণনা কৰি উলিয়াব লাগিব।

ছাত্ৰ-ছাত্ৰী	পৰিসংখ্যা বিজ্ঞানৰ নম্বৰ (X)	অৰ্থনীতিৰ নম্বৰ (Y)
A	85	60
B	60	48
C	55	49
D	65	50
E	75	55

ছাত্ৰ-ছাত্ৰী	পৰিসংখ্যা বিজ্ঞানৰ ৰেংক (R_x)	অৰ্থনীতিৰ ৰেংক (R_y)
A	1	1
B	4	5
C	5	4
D	3	3
E	2	2

স্থান প্ৰদান কৰা সম্পূৰ্ণ হ'লে (4)নং সূত্ৰ ব্যৱহাৰ কৰি অনুস্থিতি সহসম্বন্ধ নিৰূপণ কৰিব লাগিব।

পৰিস্থিতি 3 ঃ অনুস্থিতি সমূহৰ পুনৰাবৃত্তি হ'লে।

উদাহৰণ 5 X আৰু Y ৰ মানসমূহ দিয়া আছে

X	25	45	35	40	15	19	35	42
Y	55	60	30	35	40	42	36	48

অনুস্থিতি সহসম্বন্ধ নিৰূপণ কৰিবলৈ মানসমূহৰ স্থান গণনা কৰি ল'ব লাগিব। পুনৰাবৃত্তি হোৱা মানসমূহক উমৈহতীয়া অনুস্থিতি (rank) দিয়া হয়। পুনৰাবৃত্তি হোৱা মানসমূহ এটা আনটোৰ পৰা সামান্য বেলেগ হ'লে হয়তো যি স্থান হ'লহেঁতেন তাৰ মাধ্য বা গড়েই উমৈহতীয়া অনুস্থিতি। একাদিক্ৰমে মানসমূহৰ বাবে এটাৰ পিছত আনটোকৈ স্থান নিৰ্দ্ধাৰণ কৰা হয়। স্থানসমূহৰ পুনৰাবৃত্তি হ'লে স্পিয়েৰমেনৰ সূত্ৰটো হ'ব

$$r_s = 1 - \frac{6\left[\Sigma D^2 + \frac{(m_1^3 - m_1)}{12} + \frac{(m_2^3 - m_2)}{12} + \ldots\ldots\right]}{n(n^2 - 1)}$$

য'ত $m_1, m_2, \ldots\ldots$ অনুস্থিতিসমূহৰ পুনৰাবৃত্তিৰ সংখ্যা আৰু $\frac{m_1^3 - m_1}{12}$ তদনুৰূপ শুধৰণি উপাদান।

চতুৰ্থ আৰু পঞ্চম স্থানত x ৰ মান 35। এতেকে দুয়োটা স্থানৰ বাবে গড় হ'ব $\frac{4+5}{2} = 4.5$ তম স্থান।

X	Y	X ৰ অনুস্থিতি R'	Yৰ অনুস্থিতি R''	অনুস্থিতিৰ বিচলন D=R'-R''	D^2
25	55	6	2	4	16
45	60	1	1	0	0
35	30	4.5	8	-3.5	12.25
40	35	3	7	-4	16
15	40	8	5	3	9
19	42	7	4	3	9
35	36	4.5	6	-1.5	2.25
42	48	2	3	-1	1
মুঠ					$\Sigma D^2 = 65.5$

আৱশ্যকীয় শুধৰণি হ'ব

$$\frac{m^3 - m}{12} = \frac{2^3 - 2}{12} = \frac{1}{2}$$

তলৰ সমীকৰণটো ব্যৱহাৰ কৰিলে

$$r_s = 1 - \frac{6\left[\Sigma D^2 + \frac{(m^3 - m)}{12}\right]}{n^3 - n} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots(5)$$

মানসমূহ বহুৱালে আমি পাম

$$r_s = 1 - \frac{6(65.5 + 0.5)}{8^3 - 8} = 1 - \frac{396}{504}$$

$$= 1 - 0.786 = 0.214$$

গতিকে X আৰু Y ৰ মাজত যোগাত্মক অনুস্থিতি সহসম্বন্ধ আছে। X আৰু Y চলক দুটা একে দিশত গতি কৰে। অৱশ্যে, সম্বন্ধটো তীব্ৰ (strong) বুলি বৰ্ণনা কৰিব নোৱাৰি।

কাৰ্যাৱলী

- নৱম আৰু দশম শ্ৰেণীৰ পৰীক্ষাত তোমাৰ 10 জন সহপাঠীয়ে লাভ কৰা নম্বৰৰ তথ্য সংগ্ৰহ কৰা। তেওঁলোকৰ মাজৰ অনুস্থিতি সহসম্বন্ধ গুণাঙ্ক গণনা কৰা। তোমাৰ তথ্যৰ পুনৰাবৃত্তি নাথাকিলে, পুনৰাবৃত্তি হোৱা তথ্যৰ সংহতি এটাৰ পৰা অনুশীলনীটো আকৌ এবাৰ কৰা। কি কি পৰিস্থিতিত অনুস্থিতি সহসম্বন্ধ গুণাঙ্ক সাধাৰণ সহসম্বন্ধ গুণাঙ্কতকৈ শ্ৰেয় ঃ ? তথ্যবোৰ যদি সঠিককৈ জোখা হয় তেতিয়াও অনুস্থিতি সহসম্বন্ধ গুণাঙ্ক সাধাৰণ সহসম্বন্ধ গুণাঙ্কতকৈ শ্ৰেয়ঃ বুলি ক'বানে? তোমাৰ পছন্দ কেতিয়া নিৰপেক্ষ হ'ব। শ্ৰেণীত আলোচনা কৰা।

4. সামৰণি

দুটা চলকৰ মাজৰ সম্বন্ধ অধ্যয়নৰ বাবে আমি কিছুমান পদ্ধতি আলোচনা কৰিলোঁ, বিশেষকৈ ৰৈখিক সম্বন্ধ। প্ৰকীৰ্ণ চিত্ৰই সম্বন্ধৰ এটা চাক্ষুস বিৱৰণ আগবঢ়ায়। ই ৰৈখিক সম্বন্ধতেই কেৱল সীমাৱদ্ধ নহয়। কাৰ্ল পিয়েৰচনৰ সহসম্বন্ধ গুণাঙ্ক আৰু স্পিয়াৰমেনৰ সহসম্বন্ধৰ দৰে সহসম্বন্ধৰ মাপ ৰৈখিক সম্বন্ধৰ মাপ হিচাপে সীমাবদ্ধ। চলকসমূহক যেতিয়া সঠিকভাৱে জুখিব নোৱাৰি, অনুস্থিতি সহসম্বন্ধ অৰ্থপূৰ্ণভাৱে ব্যৱহাৰ কৰিব পাৰি। এই মাপবোৰে কাৰ্যকৰণ বা কাৰণ আৰু ফলাফল (causation) নুবুজায়। সহসম্বন্ধৰ জ্ঞানে দুটা সম্বন্ধ থকা চলকৰ এটাৰ পৰিৱৰ্তনে আনটোৰ ওপৰত ঘটোৱা পৰিৱৰ্তনৰ দিশ আৰু তীব্ৰতৰ আভাস দিয়ে।

পুনৰুক্তি

- সহসম্বন্ধ বিশ্লেষণে দুটা চলকৰ মাজৰ সম্বন্ধ অধ্যয়ন কৰে।
- প্ৰকীৰ্ণ চিত্ৰই দুটা চলকৰ মাজৰ সম্বন্ধৰ প্ৰকৃতিৰ চাক্ষুস বিৱৰণ দিয়ে।
- কাৰ্ল পিয়েৰচনৰ সহসম্বন্ধ গুণাঙ্ক r ৰ দ্বাৰা কেৱল দুটা চলকৰ মাজৰ ৰৈখিক সম্বন্ধৰ সাংখ্যিক জোখহে উলিওৱা হয়। r, -1 আৰু +1 ৰ মাজত থাকে।
- যেতিয়া চলকসমূহ সঠিকভাৱে জুখিব নোৱাৰি তেতিয়া ৰৈখিক সম্বন্ধৰ সাংখ্যিক মাপ নিৰ্ণয় কৰিবলৈ স্পিয়াৰমেনৰ অনুস্থিতি সহসম্বন্ধ ব্যৱহাৰ কৰিব পাৰি।
- পুনৰাবৃত্তি হোৱা স্থানসমূহৰ বাবে শুধৰণি উপাদানৰ প্ৰয়োজন হয়।
- সহসম্বন্ধই কাৰণ আৰু ফলাফল (causation) নুবুজায়। ই কেৱল সহপ্ৰসৰণ (covariation) হে বুজায়।

অনুশীলনী

1. উচ্চতা (ফুটৰ হিচাপত) আৰু ওজন (Kg. হিচাপত)ৰ মাজৰ সহসম্বন্ধ গুণাঙ্কৰ একক হ'ল
   (i) কিঃগ্ৰাঃ / ফুট
   (ii) শতাংশ
   (iii) কোনো একক নাথাকে
2. সাধাৰণ সহসম্বন্ধ গুণাঙ্কৰ পৰিসৰ হ'ব
   (i) 0 ৰ পৰা অসমীলৈ
   (ii) ঋণাত্মক একৰ পৰা যোগাত্মক একলৈ
   (iii) ঋণাত্মক অসীমৰ পৰা অসীমলৈ
3. যদি r_{xy} যোগাত্মক হয়, x আৰু y ৰ মাজৰ সম্বন্ধ
   (i) y বাঢ়িলে x বাঢ়িব
   (ii) y কমিলে x কমিব
   (iii) y বাঢ়িলে x ৰ পৰিৱৰ্তন নহয়

4. যদি $r_{xy} = 0$ হয়, x আৰু y চলক দুটা
   (i) ৰৈখিক সম্বন্ধ থকা
   (ii) ৰৈখিক সম্বন্ধ নথকা
   (iii) স্বতন্ত্ৰ
5. তলত দিয়া তিনিটা মাপৰ ভিতৰত কোনটোৱে যিকোনো সম্বন্ধ জুখিব পাৰে
   (i) কাৰ্ল পিয়েৰচনৰ সহসম্বন্ধ গুণাঙ্ক
   (ii) স্পিয়াৰমেনৰ অনুস্থিতি সহসম্বন্ধ
   (iii) প্ৰকীৰ্ণ চিত্ৰ
6. যদি সঠিকভাৱে জুখিব পৰা তথ্য পোৱা যায়, সাধাৰণ সহসম্বন্ধ গুণাঙ্ক
   (i) অনুস্থিতি সহসম্বন্ধ গুণাঙ্কতকৈ বেছি শুদ্ধ
   (ii) অনুস্থিতি সহসম্বন্ধ গুণাঙ্কতকৈ কম শুদ্ধ
   (iii) অনুস্থিতি সহসম্বন্ধ গুণাঙ্কৰ দৰে শুদ্ধ
7. সম্বন্ধৰ জোখ হিচাপে সহপ্ৰসৰণতকৈ r কিয় শ্ৰেয়ঃ?
8. তথ্যৰ প্ৰকাৰৰ ওপৰত নিৰ্ভৰ কৰি r ৰ মান -1 আৰু 1 এই পৰিসৰৰ বাহিৰত থাকিব পাৰেনে?
9. সহসম্বন্ধই কাৰণ আৰু ফলাফল (causation) বুজাই নেকি?
10. কেতিয়া অনুস্থিতি সহসম্বন্ধ সাধাৰণ সহসম্বন্ধ গুণাঙ্কতকৈ অধিক সঠিক হয়?
11. শূন্য সহসম্বন্ধই স্বতন্ত্ৰতা বুজাব নে?
12. সাধাৰণ সহসম্বন্ধ গুণাঙ্কই যিকোনো ধৰণৰ সম্বন্ধ জুখিব পাৰেনে?
13. এসপ্তাহৰ বাবে স্থানীয় বজাৰৰ পৰা পাঁচবিধ শাক-পাচলিৰ দাম সংগ্ৰহ কৰা। ইয়াৰ সহসম্বন্ধ গুণাঙ্ক নিৰ্ণয় কৰা আৰু ফলাফলৰ তাৎপৰ্য ব্যাখ্যা কৰা।
14. তোমাৰ শ্ৰেণীৰ সহপাঠীসকলৰ উচ্চতা জোখা। একেলগে বেঞ্চত বহা বন্ধুৰ উচ্চতা কিমান সোধা। এই দুটা চলকৰ সহসম্বন্ধ গুণাঙ্ক নিৰ্ণয় কৰা। এতিয়া ফলাফলৰ তাৎপৰ্য ব্যাখ্যা কৰা।
15. সঠিকভাৱে জোখ ল'ব নোৱাৰা কেইটামান চলকৰ তালিকা কৰা।
16. r ৰ মান 1, -1 আৰু 0 হোৱাৰ তাৎপৰ্য ব্যাখ্যা কৰা।
17. অনুস্থিতি সহসম্বন্ধ গুণাঙ্ক পিয়েৰচনৰ সহসম্বন্ধ গুণাঙ্কতকৈ কিয় বেলেগ?
18. দেউতাক (X) আৰু পুতেকৰ (Y) উচ্চতাৰ মাজৰ সহসম্বন্ধ গুণাঙ্ক নিৰ্ণয় কৰা ঃ (উচ্চতা ইঞ্চিত দিয়া আছে)

X	65	66	57	67	68	69	70	72
Y	67	56	65	68	72	72	69	71

(উত্তৰ ঃ $r = 0.603$)

19. X আৰু Y ৰ মাজৰ সহসম্বন্ধ গুণাংক নিৰ্ণয় কৰা আৰু সম্বন্ধ সম্পৰ্কে মন্তব্য আগবঢ়োৱা ঃ

X	-3	-2	-1	1	2	3
Y	9	4	1	1	4	9

(উত্তৰ ঃ $r = 0$)

20. X আৰু Y ৰ মাজৰ সহসম্বন্ধ গুণাংক নিৰ্ণয় কৰা আৰু সম্বন্ধ সম্পৰ্কে মন্তব্য আগবঢ়োৱা ঃ

X	1	3	4	5	7	8
Y	2	6	8	10	14	16

(উত্তৰ ঃ $r = 1$)

কাৰ্যাৱলী

- ইয়াত আলোচনা কৰা সকলো সূত্ৰ প্ৰয়োগ কৰি ভাৰতৰ ৰাষ্ট্ৰীয় আয় আৰু ৰপ্তানিৰ অতি কমেও 10 টা মান লৈ r নিৰ্ণয় কৰা।