अध्याय

15

सांख्यिकी
(Statistics)

सांख्यिकी का परिचय

प्राचीन काल से भारतवर्ष में गणित की शाखा सांख्यिकी का उपयोग किया जा रहा है जो निम्न उदाहरणों द्वारा प्रकट होता है:–

– महाभारत काल में दमयन्ती के स्वयंवर पर राजा नल के साथ जाते हुए राजा ऋतुपर्ण ने एक पेड़ के न्यादर्श (Sample) के आधार पर पूरे पेड़ पर लगे फल एवं पत्तों की सही संख्या बता देना।

– चन्द्रगुप्त मौर्य के शासन काल (324–300 ई.पू.) में जन्म–मृत्यु का पंजीकरण एवं इसके आधार पर शासन की व्यवस्था करने का वर्णन कौटिल्य के अर्थशास्त्र में मिलता है।

इसी प्रकार शासन व्यवस्था चलाने में, युद्ध काल में सांख्यिकी के उपयोग के अनेक उदाहरण मिलते हैं। दैनिक जीवन में भी जब हम समाचार पत्रों, इलेक्ट्रोनिक मीडिया में कई चैनलों, पत्रिकाओं और अन्य संचार साधनों का अवलोकन करते हैं तो नगरों के तापमान, स्थान–स्थान पर वर्षा की स्थिति, विभिन्न कम्पनियों के शेयरों की स्थिति आदि की तथ्यात्मक एवं तुलनात्मक जानकारी आंकड़ों के द्वारा मिलती है।

हम जीवन भर किसी न किसी रूप से इन आंकड़ों का उपयोग करते रहते हैं। अतः हमारे लिए यह बहुत जरूरी हो जाता है कि इन आंकडों से हम अपनी इच्छानुसार अर्थपूर्ण सूचनाएँ उपलब्ध करना जान जाएँ। अर्थपूर्ण सूचनाएँ उपलब्ध करने से संबंधित अध्ययन गणित की इस शााखा में किया जाता है जिसे सांख्यिकी कहा जाता है।

अतः इस अध्याय में हम आँकड़ों का संग्रह, प्रस्तुतीकरण, चित्रों द्वारा निरूपण, असमूहित आँकड़ों का माध्य, माध्यक एवं बहुलक का विस्तार से अध्ययन करने का प्रयास करेंगे।

आंकड़ों का संग्रह– आँकड़ों को एकत्रित करने के स्रोतों के आधार पर इन्हें दो भागों में विभाजित किया जा सकता है–

(1) प्राथमिक आंकड़ें (Primary data) (2) द्वितीयक आँकड़ें (Secondary data)

(1) **प्राथमिक आँकड़ें**– जिन आँकड़ों को नए सिरे से पहली बार एकत्रित किया जाता है उन्हें प्राथमिक आँकड़ें कहते हैं। जैसे–विद्यालय की कक्षा–नवीं में पढ़ने वाले छात्रों का भार, लम्बाई इत्यादि। प्राथमिक आँकड़ों को निम्न विधियों से एकत्रित किया जाता है

(i) प्रत्यक्ष व्यक्तिगत अन्वेषण से (Direct personal investigation): इस विधि में अन्वेषक स्वयं

सम्बन्धितों से सीधा सम्पर्क करके जानकारी प्राप्त करता है।

(ii) परोक्ष अन्वेषण से (Indirect Investigation): जब अन्वेषण का क्षेत्र विस्तृत हो एवं अन्वेषक द्वारा स्वयं जाना संभव न हो तो निम्न प्रकार से सूचनाएँ एकत्र की जाती है–

(क) प्रगणकों द्वारा अनुसूचियाँ भरवाकर– इस विधि में अन्वेषक द्वारा अनुसूचियाँ तैयार करके प्रगणकों को दी जाती है जो क्षेत्र में जाकर संबंधित विषय में आँकड़ें एकत्र करते हैं।

(ख) सूचकों द्वारा प्रश्नावलियाँ भरवाकर– इस विधि में अन्वेषक द्वारा अध्ययन विषय पर प्रश्नावली तैयार करके सूचकों तक भिजवाई जाती है तथा सूचकों से उत्तर प्राप्त किए जाते हैं।

(ग) स्थानीय स्रोतों या संवाददाताओं द्वारा–ऐसी सूचनाएँ जिनको नियमित एकत्र करना जरूरी होता है तो अन्वेषक द्वारा विभिन्न स्थानों पर स्थानीय व्यक्तियों या संवाददाताओं को सूचना देने के लिए नियुक्त कर देता है।

(घ) विशेषज्ञों के माध्यम से परोक्ष मौखिक अन्वेषण–इस विधि में अन्वेषण सूचनाएँ उन व्यक्तियों से प्राप्त नहीं करते जो अन्वेषण से प्रत्यक्ष रूप से सम्बद्ध हो वरन् अप्रत्यक्ष रूप से संबद्ध तृतीय पक्षकारों के सहयोग से प्राप्त करते हैं। जैसे–यदि विद्यार्थियों का वार्षिक मूल्यांकन बिना परीक्षा लिए करना हो तो संबंधित अध्यापक द्वारा ऐसा किया जा सकता है।

(2) द्वितीयक आँकड़ें **(Secondary data):** वे आँकड़ें जिनका संकलन पहले से किया हुआ हो और प्रकाशित या अप्रकाशित स्थिति में हो द्वितीयक आंकड़े कहलाते हैं। इनके दो प्रमुख स्रोत है

(i) प्रकाशित स्रोत **(Published Sources):** सरकारी, गैर सरकारी व अन्य अन्वेषक समय–समय पर विभिन्न विषयों पर आँकड़े एकत्र कर उन्हें प्रकाशित करवाते है। इनके स्रोत इस प्रकार हैं–

(क) अन्तर्राष्ट्रीय प्रकाशन–संयुक्त राष्ट्र संघ (U.N.O.) अन्तर्राष्ट्रीय श्रम संगठन (I.L.O) मुद्राकोष (I.M.F.) जैसे संगठन अपने से संबंधित आँकड़ो का संग्रह कर अपने सदस्यों के लिए प्रकाशित करवा लेते हैं।

(ख) सरकारी प्रकाशन (Government Publication): केन्द्र व राज्य सरकारों के अनेक मंत्रालयों, विभागों द्वारा अपने से संबंधित आँकड़ें एकत्रित कर प्रकाशित करवा देते हैं।

(ग) अर्ध सरकारी प्रकाशन (Semi Government Publication): स्थानीय निकाय (नगर पालिका / ग्राम पंचायत) समय–समय पर शिक्षा, बिजली, जन्म–मृत्यु, राजस्व रिकार्ड का ब्यौरा प्रकाशित करती है।

इसी प्रकार विश्वविद्यालय, शोध संस्थान, शिक्षक संघ, विभिन्न पत्र–पत्रिकाएँ एवं शोधार्थियों द्वारा कई प्रकार के आँकड़े एकत्र कर प्रकाशित किए जाते हैं।

(ii) अप्रकाशित स्रोत (Unpublished Sources): कभी–कभी सरकार या अन्य संस्थाओं द्वारा महत्वपूर्ण विषयों पर आँकड़े एकत्र किए जाते हैं लेकिन प्रकाशित नहीं होते। ऐसी सामग्री फाइलों, प्रलेखों, रजिस्टरों से प्राप्त की जाती है।

प्रश्नावली 15.1

1. प्राथमिक एवं द्वितीयक आँकड़े क्या हैं अंतर स्पष्ट करें।
2. प्राथमिक आँकड़ों के संकलन की विधियों की व्याख्या कीजिए।

आँकड़ों का प्रस्तुतीकरणः–

आँकड़ों को एकत्रित करने के बाद ही अन्वेषक को इन आँकड़ों को प्रस्तुत करने के लिए उपयुक्त विधियों का चयन करना होता है जो अर्थपूर्ण हो, सरलता से समझी जा सकती हो और एक बार में ही उसके लक्षणों को जाना जा सकता हो।

आँकड़े जिस प्रकार तथा जिस रूप से प्राप्त हो उसी क्रम में संकलित किए जाएँ तो इन्हें ''यथा प्राप्त आँकड़ें'' (Raw data) कहते हैं। इन्हें कच्चे आँकड़ें भी कहा जाता है जैसे–विज्ञान की परीक्षा में 10 विद्यार्थियों द्वारा प्राप्त किए अंक

62	75	65	40	35	70	25	20	36	55

क्या इसे देखकर आप न्यूनतम व अधिकतम अंक प्राप्त कर सकते हैं? यदि उक्त आँकड़ों को आरोही (छोटे से बड़े) या अवरोही (बड़े से छोटे) के क्रम में रखा जाये तो और सरलता से अधिकतम व न्यूनतम अंक प्राप्त कर सकते हैं। आँकड़ों का आरोही क्रम इस प्रकार है

20	25	35	36	40	55	62	65	70	75

इस प्रकार हम स्पष्ट देख सकते हैं कि न्यूनतम प्राप्तांक 20 और अधिकतम प्राप्तांक 75 है। आँकड़ों के अधिकतम व न्यूनतम मानों के अंतर को आँकड़ों का परिसर (range) कहा जाता है। अतः यहाँ पर परिसर $75 - 20 = 55$ है।

यदि आँकड़े अधिक संख्या में है तो आरोही या अवरोही क्रम में लिखने की बजाय सारणी रूप में लिखा जाता है।

आँकड़ों का सारणी रूप में प्रस्तुतीकरणः–

एक विद्यालय की दसवीं कक्षा के 20 छात्रों के विज्ञान की अर्द्धवार्षिक परीक्षा में 10 में से प्राप्त अंक क्रमशः निम्न प्रकार है–

5	4	3	4	5	8	4	3	8	2
4	5	4	3	8	5	3	4	2	8

इन यथा प्राप्त आँकड़ों को देखने पर कक्षा के स्तर का ठीक अनुमान लगाना कठिन है परन्तु यदि हम इन आँकड़ों से एक व्यवस्थित सारणी बना लें तो यह कार्य हमारे लिए सुगम हो जाएगा। ''किसी अंक की जितनी बार आवृत्ति होती है वह उस अंक की बारम्बारता (Frequency) कहलाती है।'' इसे "f" से निरूपित करते हैं।

उक्त आँकड़ों से सारणी निम्न विधि से तैयार करते हैं–

(i) प्रथम स्तम्भ में वे अंक लिख लेते हैं जो विद्यार्थियों ने प्राप्त किए हैं। कोई अंक छूटना नहीं चाहिए।

(ii) अब प्रत्येक स्तम्भ के प्रत्येक अंक को लेते हुए, दूसरे स्तम्भ में उस अंक के प्रत्येक प्राप्तांक के लिए एक खड़ी रेखा जिसे मिलान चिन्ह (Tally Mark) कहते हैं, खींचते जाते हैं।

(iii) किसी अंक के सामने चार खड़ी रेखाएँ आने पर पाँचवीं बार उसी अंक की आवृत्ति हो तो पाँचवीं रेखा को अलग से न लगाकर पूर्व में अंकित चार रेखाओं (||||) को एक आड़ी रेखा से काट दें।

(iv) अब छठवीं बार उसी अंक की आवृत्ति होने पर फिर खड़ी रेखा खींच दे एवं पुनः यही क्रम चलने (~~||||~~) दें।

(v) दूसरे स्तम्भ का कार्य पूर्ण होने पर तीसरे स्तम्भ में प्रत्येक अंक की आवृत्ति मिलान चिन्ह की गिनती करके लिख देते हैं।

सारणी

प्राप्तांक	मिलान चिन्ह	बारम्बारता (f)
2	II	2
3	IIII	4
4	~~IIII~~ I	6
5	IIII	4
8	IIII	4
		$\overline{\sum f = 20}$

इस प्रकार के बारम्बारता बंटन को अवर्गीकृत बारम्बारता बंटन सारणी(ungrouped frequency distribution table) कहा जाता है।

यदि आँकड़ों की संख्या बहुत अधिक हो तो आँकड़े को समूहों में रखकर छोटा कर लेते हैं इन समूहों को वर्ग (classes) कहा जाता है और इनके माप को 'वर्ग अंतराल' (class interval) का वर्गमाप (class size) या वर्ग चौड़ाई (class width) कहा जाता है। प्रत्येक वर्ग की निम्नतम संख्या को निम्न वर्ग सीमा (Lower class limit) और अधिकतम संख्या को उपरि वर्ग सीमा (upper class limit) कहा जाता है। इनको सारणी रूप में प्रकट करने लिए हम अगले उदाहरण द्वारा समझेंगे।

जैसे–वन महोत्सव के दौरान 30 विद्यालयों में से प्रत्येक विद्यालय में 50 पौधे लगाए गए। एक महीने बाद लगाए गए पौधों में से बच गए पौधों की संख्या निम्न थी

22	6	48	0	28	22	17	10	32	6
22	22	28	26	17	36	10	22	28	0
28	22	48	32	10	48	25	36	6	32

सारणी

बचे हुए पौधों की संख्या	मिलान चिन्ह	विद्यालयों की संख्या (बारम्बारता)
0 — 10	~~IIII~~ III	8
11 — 20	II	2
21 — 30	~~IIII~~ ~~IIII~~ II	12
31 — 40	~~IIII~~	5
41 — 50	III	3
कुल योग		$\overline{\sum f = 30}$

आँकड़ों के प्रस्तुतीकरण की इस विधि को वर्गीकृत बारम्बारता बंटन सारणी (Grouped Frequency Distribution Table) कहा जाता है। इस सारणी को देखकर हम सरलता से अनुमान लगा सकते हैं एवं निष्कर्ष निकाल सकते हैं।

प्रश्नावली 15.2

1. एक माध्यमिक विद्यालय के कक्षा 10 के 30 छात्रों का भार (किलो ग्राम में) निम्नलिखित हैः

34	34	36	37	38	33	34	35	36	37	38	33	34	35	34
33	37	35	34	36	38	36	35	34	35	37	38	34	35	35

उपर्युक्त आँकड़ों को बारम्बारता सारणी में निरुपति कीजिए।

2. एक गाँव में जन्मे 30 बच्चों का भार (किलो ग्राम में) निम्न प्रकार थाः

3.4	3.6	3.0	3.8	3.6	3.8	2.9	3.4	2.9	3.4
3.0	3.4	3.2	3.1	3.2	3.2	3.1	3.2	3.4	3.0
3.1	3.2	3.5	3.7	3.1	3.0	2.9	3.0	3.1	3.2

उपर्युक्त को बारम्बारता सारणी में निरूपित कीजिए।

3. तीन सिक्कों को एक साथ 30 बार उछाला गया। प्रत्येक बार चित (Head) आने की संख्या निम्न है

0	1	2	2	1	2	3	1	3	0
1	3	1	1	2	2	0	1	2	1
3	0	0	1	1	2	3	2	2	0

उपर्युक्त आँकड़ों से एक बारम्बारता सारणी बनाइए।

4. दसवीं कक्षा के 30 विद्यार्थियों के रक्त समूह ये हैं

AB O O A B O A O B A O B A O O

A AB O A A O O AB B A O B A B O

इन आँकड़ों को बारम्बारता सारणी के रूप में प्रस्तुत कीजिए।

बताइए कि इन विद्यार्थियों में कौनसा रक्त समूह अधिक सामान्य है और कौनसा रक्त समूह विरलतम समूह है।

5. एक परीक्षा में कक्षा नवी के 30 छात्रों के प्राप्तांक निम्नलिखित हैं। इन प्राप्तांको से 10 वर्ग अंतराल वाले 5 वर्गों की बारम्बारता सारणी बनाइएः

19 27 40 3 33 41 18 8 20 0 23 49 16 36 14

39 6 12 29 28 22 24 37 10 23 38 35 9 49 23

6. निम्नलिखित बंटन के लिए पाँच–पाँच के वर्ग अन्तराल लेकर बारम्बारता सारणी का निर्माण कीजिए।

13	11	8	19	0	44	27	10	8	35	13
27	30	17	43	23	19	43	17	7		

7. 50 दशमलव स्थान तक शुद्ध π का मान नीचे दिया गया है

3.14159265358979323846264338327950288419716939937510

(i) दशमलव बिन्दु के बाद आने वाले 0 से 9 तक के अंको की एक बारम्बारता बंटन सारणी बनाइए।

(ii) सबसे अधिक बार और सबसे कम बार आने वाले अंक कौन–कौन से हैं?

8. 40 इंजिनियरों की उनके आवास से कार्यस्थल की दूरियाँ (किलो मीटर में) निम्न है

5	3	10	20	25	11	13	7	12	31
19	10	12	17	18	11	32	17	16	2
3	18	15	12	5	3	8	7	9	7
14	12	9	2	15	6	7	15	12	6

0 — 5 को (जिसमें 5 सम्मिलित नहीं है) पहला अंतराल लेकर ऊपर दिए हुए आँकड़ों से वर्गमाप 5 वाली एक वर्गीकृत बारम्बारता बंटन सारणी बनाइए। इस सारणीबद्ध निरूपण में आपको कौन–कौन से मुख्य लक्षण देखने को मिलते हैं?

9. तीस बच्चों से यह पूछा गया कि पिछले सप्ताह उन्होंने कितने घण्टों तक पढ़ाई की। प्राप्त परिणाम ये रहे हैं:

2	3	5	8	6	9	8	7	14	12
6	17	1	15	8	2	12	4	3	10
3	2	6	1	12	5	8	5	8	4

(i) वर्ग चौड़ाई 5 लेकर इन आँकड़ों की एक वर्गीकृत बारम्बारता बंटन सारणी बनाइए।

(ii) कितने बच्चों ने सप्ताह में 15 या अधिक घण्टों तक पढ़ाई की?

आँकड़ों का आलेखीय निरूपणः

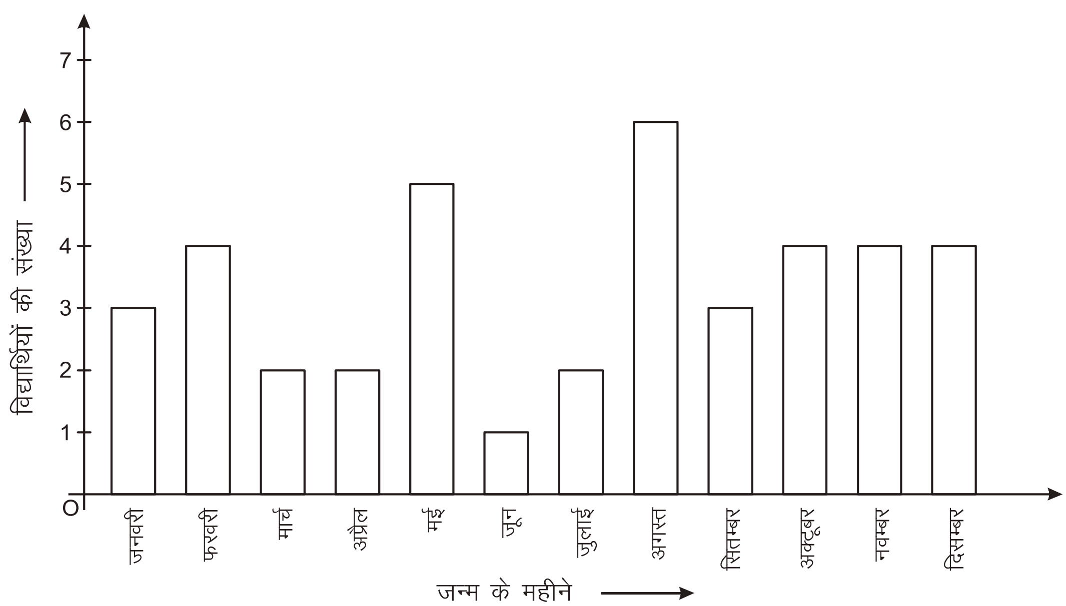
सृष्टि की रचना के बाद जैसे–जैसे सभ्यता का विकास हुआ वैसे–वैसे मनुष्य ने आवश्यकतानुसार विज्ञान व गणित का विकास किया। इसमें सांख्यिकी का विकास भी होता गया और संदेश पहुँचाने हेतु चित्रों का प्रयोग होने लगा। जिसे आलेखीय निरूपण कह सकते हैं। इन आलेखों को देखने मात्र से वह व्यक्ति अनुमान लगा सकता है जो कुशल गणितज्ञ नहीं है। इसी के अन्तर्गत आँकड़ों का आलेखीय निरूपण तीन प्रकार से करते हैं।

(1) दण्ड आलेख (Bar Graph)

(2) आयत चित्र (Histograms)

(3) बारम्बारता बहुभुज (Frequency polygon)

(1) **दण्ड आलेख**– दण्ड आलेख आँकड़ों का एक चित्रीय निरूपण होता है जिसमें प्रायः एक अक्ष (मान लीजिए x-अक्ष) पर एक चर को प्रकट करने वाले एक समान चौड़ाई के दण्ड खींचे जाते हैं जिनके बीच में बराबर–बराबर दूरियाँ छोड़ी जाती हैं। दूसरे चर के मान दूसरे अक्ष (मान लीजिए y-अक्ष) पर दिखाए जाते हैं दण्डों की ऊँचाइयाँ चर के मानों पर निर्भर करती हैं इसे हम निम्न उदाहरण द्वारा समझ सकते हैं।



उदाहरण 1: नवी कक्षा के 40 विद्यार्थियों से उनके जन्म का महीना बताने के लिए कहा गया। इस प्रकार प्राप्त आँकड़ों से निम्नलिखित आलेख बनाया गयाः

ऊपर दिए गए आलेख को देखकर निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिएः

(i) मई माह में कितने विद्यार्थियों को जन्म हुआ?

(ii) सबसे अधिक विद्यार्थियों का जन्म किस माह में हुआ?

(iii) सबसे कम विद्यार्थियों का जन्म किस माह में हुआ?

हलः यहाँ चर 'जन्म दिन का महीना' है और चर का मान 'जन्म लेने वाले विद्यार्थियों की संख्या' है।

(i) मई माह में 5 विद्यार्थियों का जन्म हुआ।

(ii) सबसे अधिक विद्यार्थियों का जन्म अगस्त महीने में हुआ।

(iii) सबसे कम विद्यार्थियों का जन्म जून महीने में हुआ।

उदाहरण 2: एक परिवार की मासिक आय दो लाख रूपए है, विभिन्न मदों के अन्तर्गत हर महीने होने वाले खर्च की योजना बनाई थीः

सारणी–3

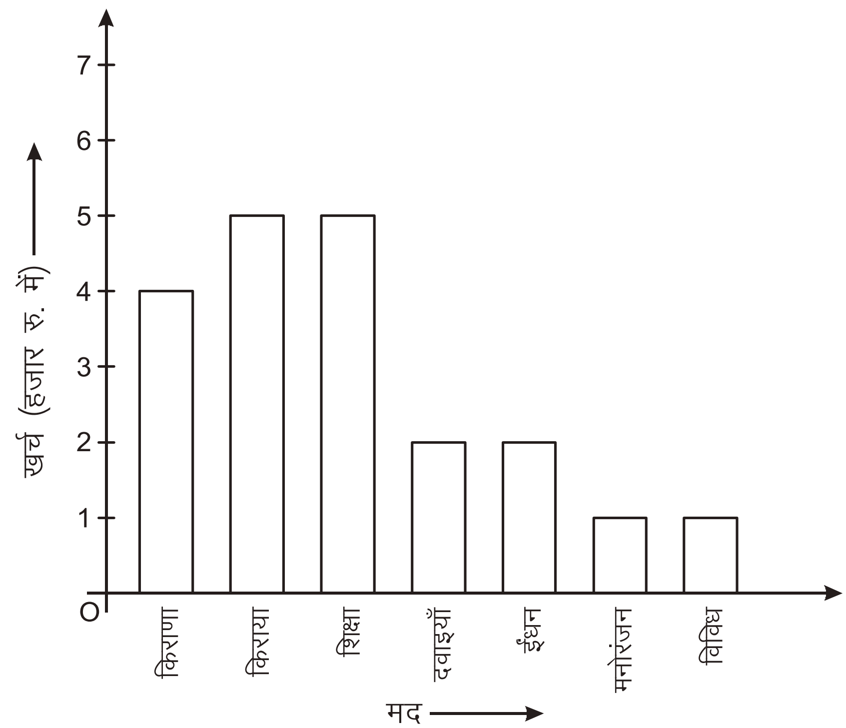
मद	खर्च (हजार रूपयों में)
किराणों का सामान	4
किराया	5
बच्चों की शिक्षा	5
दवाइयाँ	2
ईंधन	2
मनोरंजन	1
विविध	1

ऊपर दिए गए आँकड़ों का एक दण्ड आलेख बनाइए।

हलः उक्त आँकड़ों का दण्ड आलेख निम्नलिखित चरणों में बनाते हैं'–

1. कोई भी पैमाना (Scale) लेकर हम क्षैतिज अक्ष पर मदों (चर) को निरूपित करते है, यहाँ दण्ड की चौड़ाई का कोई महत्व नहीं होता फिर दण्ड की चौड़ाई समान लेते हैं व दो दण्ड के बीच की दूरी भी समान लेते हैं। यहाँ एक मद को एक सेंटीमीटर से निरूपित करेंगे।
2. खर्च (मूल्य) को उर्ध्वाधर अक्ष पर निरूपित करते है क्योंकि अधिकतम खर्च 5000 रुपये है अतः हम पैमाना $= 1000$ रुपये लेते हैं।
3. अपने पहले मद (किराणे के सामान) को निरूपित करने हेतु 1 इकाई की चौड़ाई 4 की ऊँचाई वाला एक आयतकार दण्ड बनाते हैं।
4. इसी प्रकार दो क्रमागत दण्डों के बीच 1 इकाई का खाली स्थान छोड़कर अन्य मदों को निरूपित किया जाता है। (देखिए आकृति 2)

उक्त आकृति में ही हम अन्य मदों में हुए खर्च का तुलनात्मक रूप से अध्ययन कर सकते हैं। अतः सारणी रूप में आँकड़ों के प्रस्तुतीकरण के बजाय यह एक उत्तम निरूपण है।



(2) आयत चित्र (आधार लम्बाई परिवर्तन के साथ)

आयत चित्र वर्गीकृत एवं संतत बारम्बारता बंटन का आयतीय निरूपण है जिसमें वर्ग अंतराल आधार होते हैं तथा आयतों की ऊँचाइयाँ उन वर्गों की बारम्बारता के समानुपाती होती है।

वर्ग अंतराल को x-अक्ष व बारम्बारताओं को y-अक्ष पर उचित पैमाना लेते हुए इस प्रकार अंकित किया जाता है कि निर्मित आयतों का क्षेत्रफल सम्बन्धित बारम्बारताओं के समानुपाती रहे।

अतः हम चार भिन्न प्रकार की बारम्बारता बंटन से सम्बन्धित आयत चित्रों के निर्माण का अध्ययन करेंगे।

(क) जब बारम्बारता बंटन वर्गीकृत एवं संतत हो तथा वर्ग अंतराल समान हो।

(ख) जब बारम्बारता बंटन वर्गीकृत एवं संतत हो परन्तु वर्ग अंतराल असमान हो।

(ग) जब बारम्बारता बंटन वर्गीकृत तो है परन्तु संतत नहीं है।

(घ) जब बारम्बारता बंटन अवर्गीकृत है तथा बटन के मध्य बिन्दु दिए गए हो।

अब हम उक्त तथ्यों को कुछ उदाहरणों से स्पष्ट करेंगे।

उदाहरण 3: निम्नलिखित बारम्बारता बंटन का आयत चित्र बनाइए।

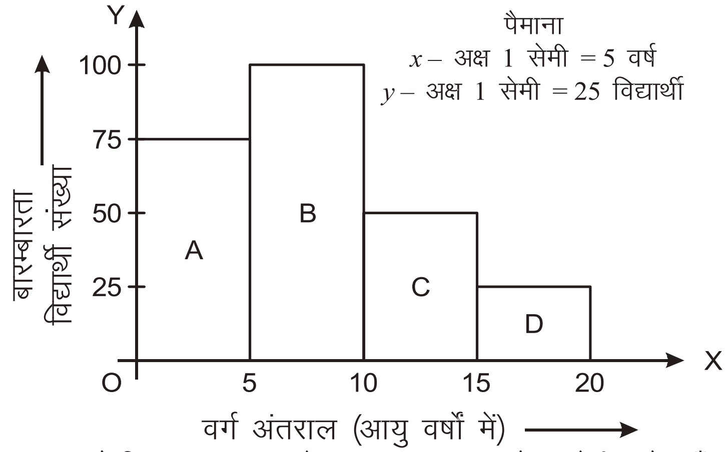
सारणी–4

वर्ग (आयु वर्षों में)	0 — 5	5 — 10	10 — 15	15 – 20
विद्यार्थियों की संख्या	72	103	50	25

हलः यहाँ बारम्बारता बंटन वर्गीकृत एवं संतत है तथा वर्ग अंतराल भी समान है। अतः x-अक्ष पर वर्ग अंतराल अर्थात् आयु वर्षों में (पैमाना 1 सेमी = 5 वर्ष) अंकित करेंगे।

अब चूंकि 0 — 5 वर्ग अंतराल में विद्यार्थियों की संख्या 72 है अतः बारम्बारता के सामने x-

अक्ष के समान्तर रेखा खींचकर वर्ग अंतराल 0 — 5 पर आयत A की रचना करेंगे। इसी प्रक्रिया से आयत B, C, D का निर्माण करेंगे।



अतः यह स्पष्ट है कि इन सब आयतों का आधार समान है (1 सेमी) और ऊँचाई बारम्बारता के बराबर है इसलिए आयतों का क्षेत्रफल बारम्बारता के समानुपात में होगा।

उदाहरण 4: किसी औद्योगिक संस्थान के कार्मिकों का साप्ताहिक वेतन निम्न सारणी में दिया गया है इसका आयत चित्र बनाइए।

सारणी–5

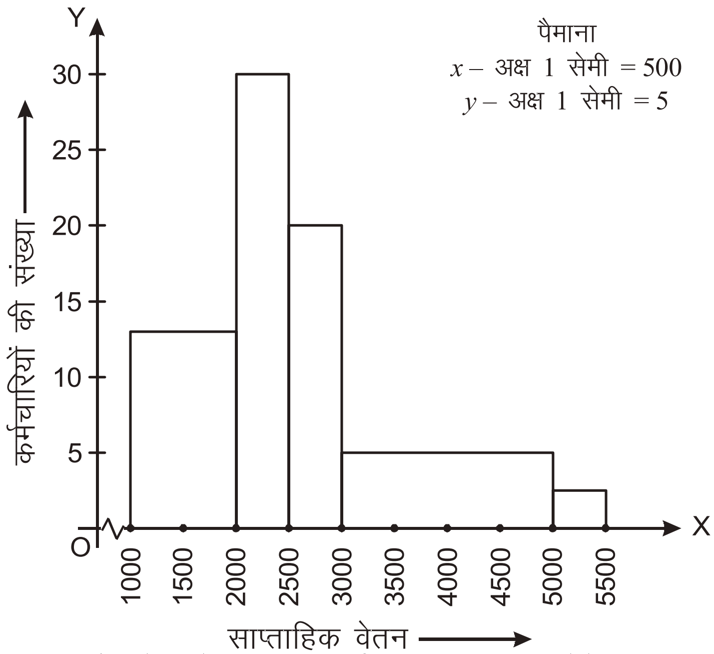
साप्ताहिक वेतन	1000—2000	2000—2500	2500—3000	3000—5000	5000—5500
कर्मचारियों की संख्या	26	30	20	16	1

हलः यहाँ बारम्बारता बंटन वर्गीकृत एवं संतत है परन्तु वर्ग अंतराल असमान है अतः आयतों की ऊँचाइयाँ ज्ञात करने हेतु निम्न क्रिया विधि का उपयोग करेंगे जिससे ऊँचाइयाँ बारम्बारताओं के समानुपाती बनी रहे। (अ) सबसे कम अंतराल वाले वर्ग का अंतराल (h) लिखेंगे, यहाँ $h = 500$ (ब) सूत्र – वर्ग की पुनः निर्धारित बारम्बारता $= \frac{h}{\text{वर्ग अंतराल}} \times$ वर्ग अंतराल की बारम्बारता से बारम्बारता का पुनः निर्धारण करेंगे। अतः नई सारणी प्राप्त करेंगे।

सारणी–6

साप्ताहिक वेतन (रुपयों में)	कर्मचारियों की संख्या	पुनः निर्धारित कर्मचारियों की संख्या
1000 — 2000	26	$\frac{500}{1000} \times 26 = 13$
2000 — 2500	30	$\frac{500}{500} \times 30 = 30$
2500 — 3000	20	$\frac{500}{500} \times 20 = 20$

3000 — 5000	16	$\frac{500}{2000} \times 16 = 4$
5000 — 5500	1	$\frac{500}{500} \times 1 = 1$



अब x-अक्ष पर (पैमानो 1 सेमी =500) वर्ग अंतराल अंकित करेंगे तथा y-अक्ष पर कर्मचारियों की संख्या (पैमाना 1 सेमी =5) अंकित करेंगे। पुनः निर्धारित बारम्बारता बंटन के आधार पर आयत A, B, C, D, E का निर्माण करेंगे। यही अभीष्ट बारम्बारता बंटन का आयत चित्र होगा।

उदाहरण 5: बारम्बारता बंटन का आयत चित्र बनाइए।

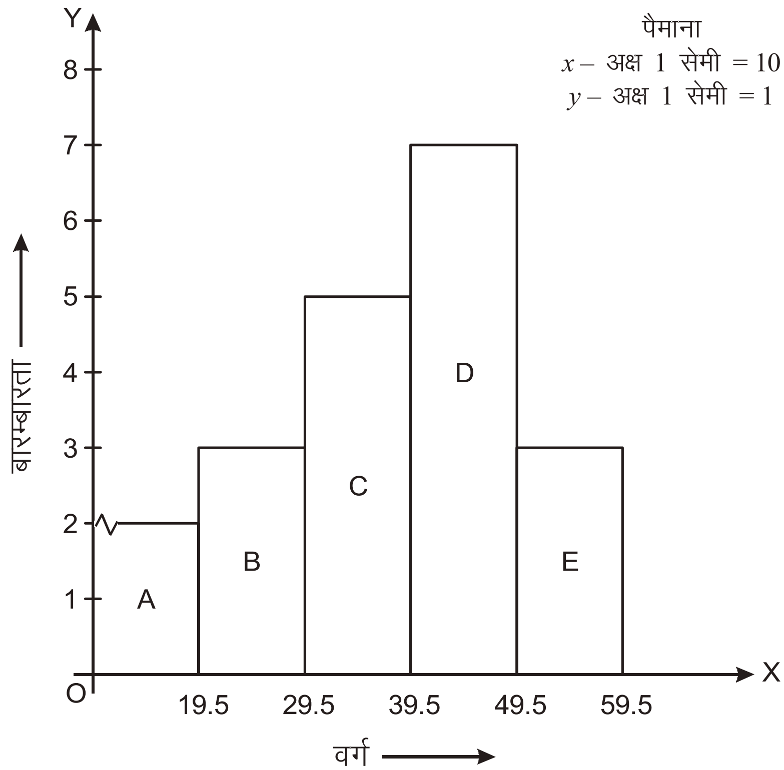
वर्ग	10 — 19	20 — 29	30 — 39	40 — 49	50 — 59
बारम्बारता	2	3	5	7	3

हलः यहाँ बारम्बारता बंटन वर्गीकृत तो है परन्तु संतत नहीं है अतः इसे समावेशी विधि द्वारा संतत बनायेंगे। इस प्रकार प्राप्त बारम्बारता बंटन सारणी–8 के अनुसार होगा।

सारणी–8

वर्ग	9.5 — 19.5	19.5 — 29.5	29.5 — 39.5	39.5 — 49.5	49.5 — 59.5
बारम्बारता	2	3	5	7	3

अब यहाँ बारम्बारता बंटन वर्गीकृत एवं संतत है तथा वर्ग अंतराल भी समान है। अतः x-अक्ष पर वर्ग अंतराल (पैमाना 1 सेमी =10) अंकित करेंगे तथा y-अक्ष पर बारम्बारताएँ (पैमाना 1 सेमी =1)



उदाहरण 6: निम्न बारम्बारता बंटन के लिए आयत चित्र बनाइए।

सारणी–9

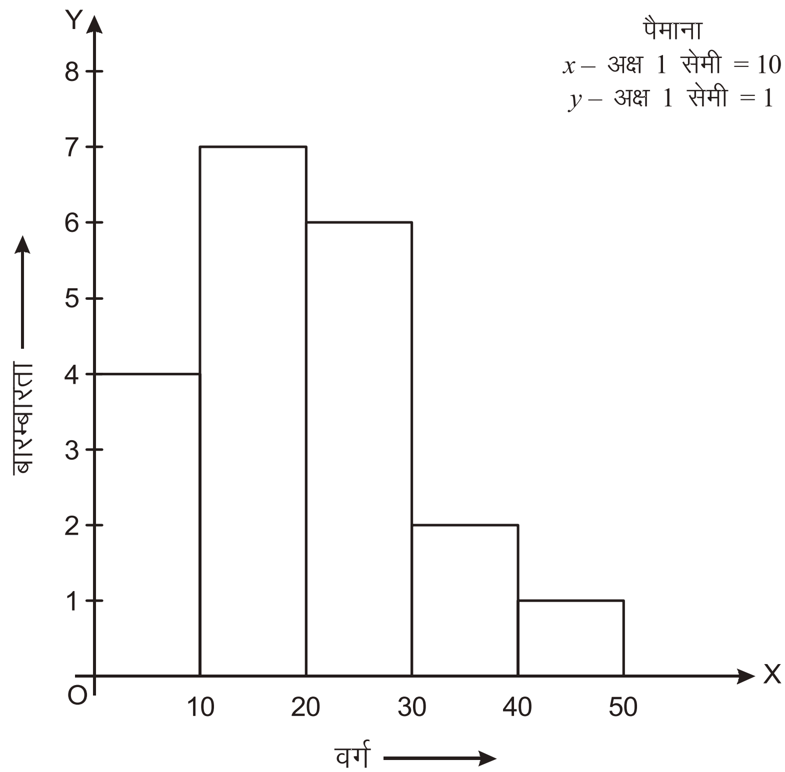
मध्य बिन्दु	5	15	25	35	45
बारम्बारता	4	7	6	2	1

हलः यहाँ बारम्बारता बंटन अवर्गीकृत है तथा बंटन के मध्य बिन्दु दिए गए है। अतः इसे वर्गीकृत बारम्बारता बंटन बदलते है।

सारणी–10

वर्ग	0 — 10	10 — 20	20 — 30	30 — 40	40 — 50
बारम्बारता	4	7	6	2	1

अब यह बारम्बारता बंटन वर्गीकृत एवं संतत है तथा वर्ग अंतराल भी समान है। अतः x-अक्ष पर वर्ग अंतराल पैमाना (1 सेमी = 10) अंकित करेंगे तथा y-अक्ष पर बारम्बारताएँ पैमाना (1 सेमी = 1) लेकर आयत चित्र का निर्माण करने पर निम्न आयत चित्र प्राप्त होगा।



(3) **बारम्बारता बहुभुज (Frequency Polygon):**

बारम्बारता बंटन के आलेखी निरूपण का एक प्रकार बारम्बारता बहुभुज भी है। बारम्बारता बहुभुज का निर्माण दो प्रकार से किया जा सकता है।

(1) आयत चित्र के माध्यम से

(2) बिना आयत चित्र की सहायता से

(1) आयत चित्र के माध्यम से बारम्बारता बहुभुज बनाने के लिए निम्नलिखित क्रिया विधि सहायक सिद्ध होती है।

(i) दिए गए बारम्बारता बंटन के लिए आयत चित्र का निर्माण कीजिए।

(ii) प्रत्येक आयत के ऊपर क्षैतिज रेखा का मध्य बिन्दु ज्ञात कीजिए।

(iii) क्रमशः आयत के इन मध्य बिन्दुओं को सरल रेखाओं से मिलाइए।

(iv) प्रारम्भिक आयत के मध्य बिन्दु को इससे पूर्व संभावित वर्ग अन्तराल के x-अक्ष पर स्थित मध्य बिन्दु से मिलाएँ।

(v) अंतिम आयत के मध्य बिन्दु को इससे आगे बनाने वाले संभावित वर्ग अंतराल के x-अक्ष पर स्थित मध्य बिन्दु से मिलाए।

इस प्रकार प्राप्त चित्र बारम्बारता बहुभुज होता है।

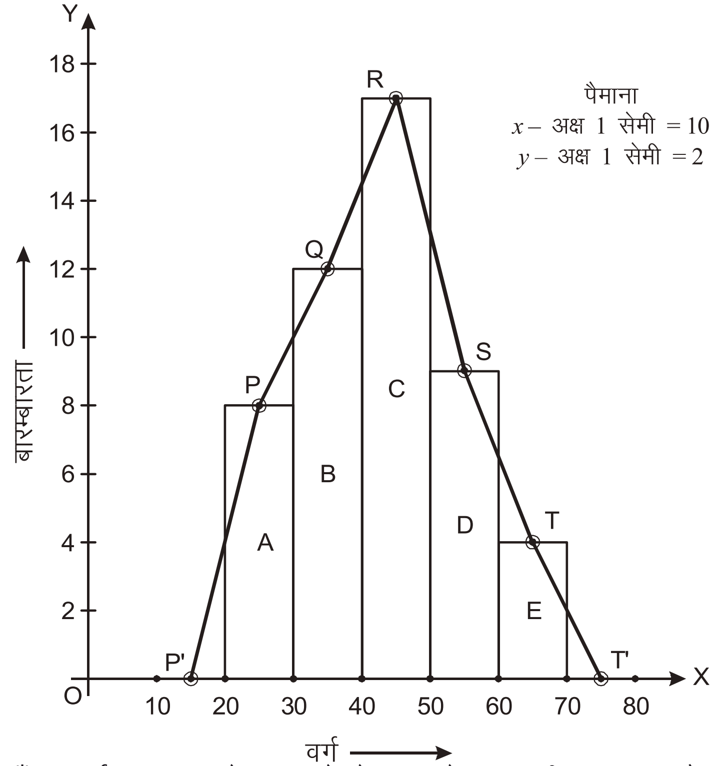
टिप्पणीः बिन्दु सं. (iv) व (v) की यदि संभावना नहीं है जैसे परीक्षा में प्राप्तांकों की संख्या 0 से नीचे नहीं हो सकती है तथा अधिकतम प्राप्तांक 100 से अधिक न हो तो ऐसी स्थिति में इन बिन्दुओं को प्रारम्भिक व अंतिम उर्ध्वाधर रेखाओं के मध्य बिन्दुओं से मिला दें।

उदाहरण 7: निम्नलिखित बारम्बारता बंटन के लिए आयत चित्र बनाते हुए बारम्बारता बहुभुज का निर्माण कीजिएः

सारणी–11

वर्ग	20 — 30	30 — 40	40 — 50	50 — 60	60 — 70
बारम्बारता	8	12	17	9	4

हलः दिया गया बारम्बारता बंटन वर्गीकृत एवं संतत है अतः पूर्व में बताई गई विधि से आयत चित्र का निर्माण करते हैं। इस प्रकार प्राप्त आयतों A, B, C, D, E के ऊपर की क्षैतिज रेखा के मध्य बिन्दुओं P, Q, R, S, T को क्रमित सरल रेखाओं द्वारा मिला दें।



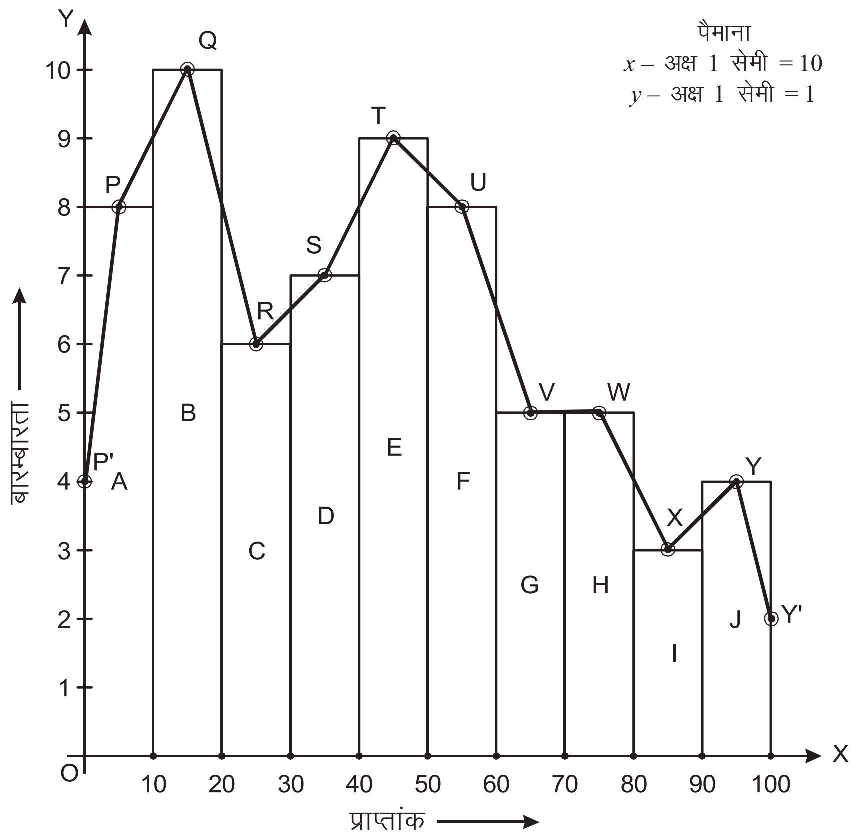
चूँकि यहाँ पर पूर्व तथा अंत के अंतरालों के संबंध में कुछ नहीं कहा गया है अतः सिरों को इन अंतरालों के x-अक्ष पर स्थित मध्य बिन्दुओं से मिलाने पर दिए गए बारम्बारता बंटन के लिए बारम्बारता बहुभुज P'PQRSTT' प्राप्त होता है।

उदाहरण 8ः निम्नलिखित बारम्बारता बंटन के लिए आयत चित्र बनाते हुए बारम्बारता बहुभुज का निर्माण कीजिए।

सारणी–12

प्राप्तांक	0 – 10	10 – 20	20 – 30	30 – 40	40 – 50	50 – 60	60 – 70	70 – 80	80 – 90	90 – 100
विद्यार्थियों की संख्या	8	10	6	7	9	8	8	6	3	4

हलः दिया गया बारम्बारता बंटन वर्गीकृत एवं संतत है अतः पूर्व में बताई विधि अनुसार आयत चित्र निर्माण करते है



इस प्रकार प्राप्त आयतों A, B, C, D, E, F, G, H, I, J के ऊपर को क्षैतिज रेखा के मध्य बिन्दुओं P, Q, R, S, T, U, V, W, X, Y को क्रमिक रेखाओं द्वारा मिला देते हैं।

चूंकि यहाँ पर विद्यार्थी के प्राप्तांक 0 से कम तथा 100 से अधिक नहीं हो सकते है अतः इनसे पूर्व तथा पश्चात् अंतराल नहीं होगा अतः प्रथम आयत पर स्थित बिन्दु P को इससे पूर्व उर्ध्वाधर रेखा के मध्य बिन्दु P' से तथा अंतिम आयत पर स्थित बिन्दु Y को इससे पश्चात् उर्ध्वाधर रेखा के मध्य बिन्दु Y' से चित्रानुसार मिला कर बहुभुज OP' PQRSTUVWXYY'K प्राप्त करते हैं। यही दी गई बारम्बारता बंटन का अभीष्ट बारम्बारता बहुभुज होगा।

(2) आयत चित्र का निर्माण किए बिना भी बारम्बारता बहुभुज बनाना हो तो निम्न क्रिया विधि सहायक सिद्ध होती है।

(i) यदि बारम्बारता बंटन वर्गीकृत है तो वर्ग चिन्ह ज्ञात करते है। अब यह बारम्बारता बंटन अवर्गीकृत रूप में आ जाएगा।

(ii) उचित पैमाना लेकर इन वर्ग चिन्हों को x-अक्ष पर अंकित करना

(iii) उचित पैमाना लेकर इन बारम्बारताओं को y-अक्ष पर अंकित करना

(iv) अब बिन्दुओं $(x_1, f_1), (x_2, f_2)...$ को अंकित करना।

(v) अब रेखा खण्डों द्वारा इन बिन्दुओं को मिलाना।

(vi) प्रारम्भ वाले वर्ग से पूर्व की कक्षा तथा अंतिम वर्ग के पश्चात् वाली कक्षा के मध्य बिन्दुओं से इन सिरों को मिलायेंगे इस प्रकार प्राप्त बारम्बारता बंटन के लिए बारम्बारता बहुभुज प्राप्त होता है।

टिप्पणीः 1. यहाँ बारम्बारता बंटन किसी भी प्रकार का हो बहुभुज आसानी से बनाया जाता सकता है।

2. यदि प्रथम से पूर्व तथा अंतिम के पश्चात् वर्ग अंतराल बनाना संभव नहीं है तो इन वर्ग अंतरालों के प्रारम्भिक बिन्दु एवं अंतिम बिन्दु पर उर्ध्वाधर रेखाएं खींच देते है एवं इस वर्ग अंतराल की आधी बारम्बारता वाले बिन्दु पर इन सिरों का मिला देते है। इस प्रकार दिए गए बारम्बारता बंटन के लिए बारम्बारता बहुभुज प्राप्त होगा।

उदाहरण 9: दिए गए बारम्बारता बंटन के लिए बारम्बारता बहुभुज बनाइए।

सारणी—13

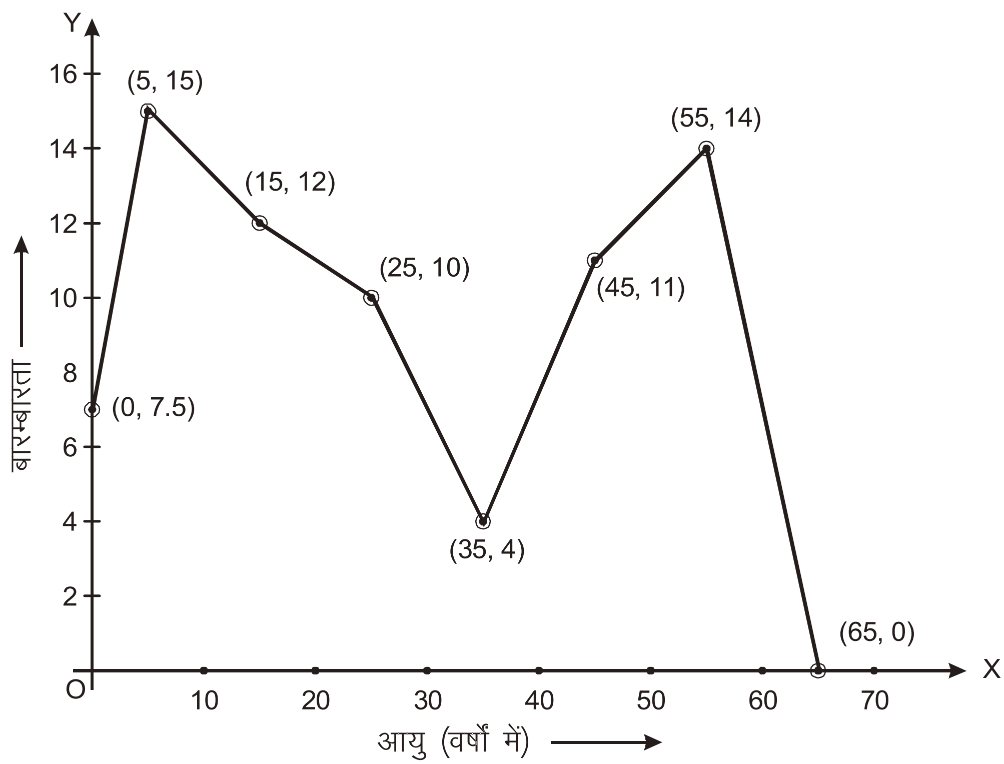
आयु (वर्षों में)	0 — 10	10 — 20	20— 30	30 — 40	40 — 50	50 — 60
बारम्बारता	15	12	10	4	11	14

हलः यह बारम्बारता बंटन वर्गीकृत एवं संतत है। अतः यहाँ पर वर्ग के आधार पर निम्नांकित सारणी प्राप्त होती है।

सारणी—14

आयु (वर्षों में)	0 — 10	10 — 20	20— 30	30 — 40	40 — 50	50 — 60
वर्ग चिन्ह	5	15	25	35	45	55
बारम्बारता	15	12	10	4	11	14

अब ग्राफ पेपर पर उचित पैमाना मानते हुए बिन्दु (5, 15), (15, 12), (25, 10), (35, 4), (45, 11), (55, 14) अंकित करेंगे।



चूँकि आयु ऋणात्मक नहीं हो सकती है अतः सिरे (5, 15) को पूर्व कल्पित वर्ग की शून्य बारम्बारता वाले मध्य बिन्दु से मिलाने के स्थान पर इसवर्ग की निम्न सीमा अर्थात् O पर उर्ध्वाधर रेखा खींचेंगे एवं इस रेखा पर वर्ग की आधी बारम्बारता वाले बिन्दु (0, 7.5) पर सिरे को मिलायेंगे।

इस प्रकार दिए गए बारम्बारता बंटन के लिए बहुभुज चित्र अनुसार प्राप्त होगा।

उदाहरण 10: निम्न बारम्बारता बंटन के लिए बारम्बारता बहुभुज का निर्माण कीजिए।

सारणी–15

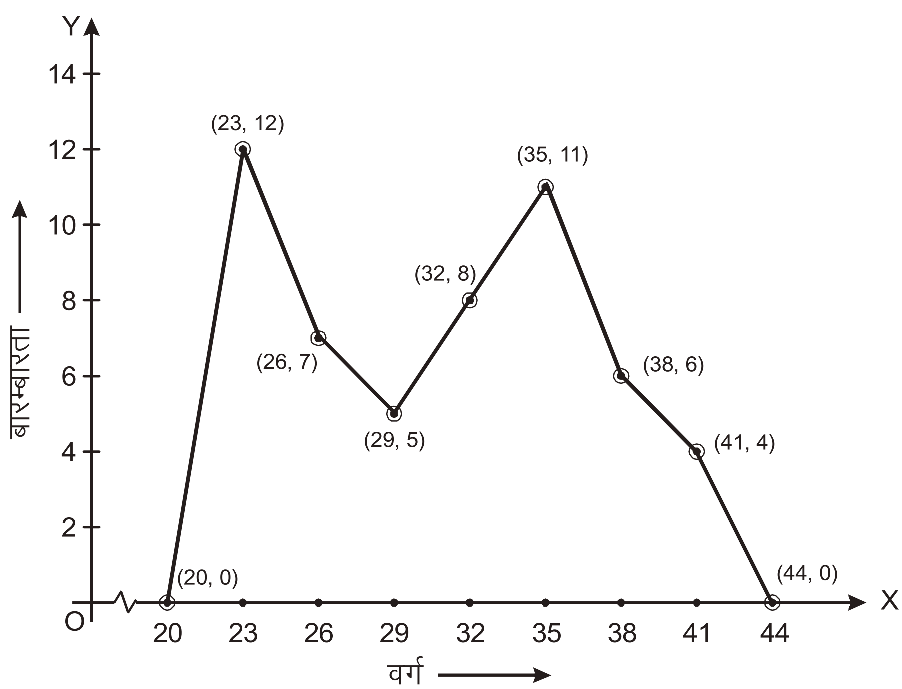
वर्ग	22—24	25—27	28—30	31—33	34—36	37—39	40—42
बारम्बारता	12	7	5	8	11	6	4

हलः यहाँ बारम्बारता बंटन वर्गीकृत तो है परन्तु संतत नहीं है। क्योंकि वर्गों को संतत बनाने पर भी वर्ग चिन्ह में कोई परिवर्तन नहीं होता है। अतः यहाँ हम इसे संतत बनाने के स्थान पर वर्ग चिन्ह ज्ञात करके बारम्बारता बहुभुज बनायेंगे।

सारणी–16

वर्ग	22—24	25—27	28—30	31—33	34—36	37—39	40—42
वर्ग चिन्ह	23	26	29	32	35	38	41
बारम्बारता	12	7	5	8	11	6	4

अब ग्राफ पेपर पर उचित पैमाना मानते हुए बिन्दु (23, 12), (26, 7), (29, 5), (32, 8), (35, 11), (38, 6), (41, 4) अंकित करेंगे।



उक्त विधि अनुसार बिन्दु (23, 12) को बिन्दु (20, 0) एवं बिन्दु (41, 4) को बिन्दु (44, 0) से मिलाकर अभीष्ट बारम्बारता बहुभुज प्राप्त करते है।

प्रश्नावली 15.3

1. एक संगठन ने पूरे विश्व में 15–44 (वर्षों में) की आयु वाली महिलाओं में बीमारी और मत्यु के कारणों का पता लगाने के लिए किए गए सर्वेक्षण से निम्नलिखित आँकड़े (% में) प्राप्त किए:

सारणी–17

क्र. सं.	कारण	महिला मत्यु दर (%)
1.	जनन स्वास्थ्य अवस्था	31.8
2.	तंत्रिका मनोविकारी अवस्था	25.4
3.	क्षति	12.4
4.	हृदय वाहिका अवस्था	4.3
5.	श्वसन अवस्था	4.1
6.	अन्य कारण	22.0

(i) उपर्युक्त सूचनाओं को दण्ड आलेख से व्यक्त करें।

(ii) कौनसी अवस्था पूरे विश्व की महिलाओं के खराब स्वास्थ्य और मृत्यु का बड़ा कारण है?

2. भारतीय समाज के विभिन्न क्षेत्रों में प्रति हजार लड़कों पर लड़कियों की (निकटतम दस तक की) संख्या के आँकड़े नीचे दिए दिए गए है

सारणी–18

क्र. सं.	क्षेत्र	प्रति हजार लड़कों पर लड़कियों की संख्या
1.	अनुसूचित जाति	940
2.	अनुसूचित जनजाति	970
3.	गैर अनूसूचित जाति / जनजाति	920
4.	पिछडेद्य जिले	950
5.	गौर पिछड़े जिले	920
6.	ग्रामीण	930
7.	शहरी	910

(i) उपर्युक्त सूचनाओं को दण्ड आलेख से व्यक्त करें।

(ii) इस आलेख से कौन–कौन से निष्कर्ष निकाल सकते है चर्चा करें।

3. एक राज्य के विधानसभा चुनाव में विभिन्न पार्टियों द्वारा जीती गई सीटों के परिणाम नीचे दिए गए है:

राजनैतिक पार्टी	A	B	C	D	E	F
जीती गई सीटें	75	55	37	29	10	37

(i) मतदान के परिणामों को निरूपित करने वाला एक दण्ड आलेख खींचिए।

(ii) किस पार्टी ने अधिकतम सीटें जीती हैं?

निम्न बारम्बारता सारणियों के आयत चित्र बनाइए

(प्रश्न 4 से 8 तक)

सारणी—20

4.

वर्ग	0 — 5	5 — 10	10 — 15	15 — 20	20 — 25
बारम्बारता	18	15	14	8	10

सारणी—21

5.

वर्ग	0 — 20	20 — 40	40 — 60	60 — 80	80 — 100
बारम्बारता	5	6	12	4	3

सारणी—22

6.

वर्ग	3 — 6	6 — 12	12 — 13	13 — 14	14 — 15
बारम्बारता	150	420	100	110	50

सारणी—23

7.

वर्ग	5 — 9	10 — 14	15 — 19	20 — 24
बारम्बारता	3	5	8	2

सारणी—24

8.

वर्ग	8	14	20	26	32
बारम्बारता	10	15	25	9	6

9. निम्न बारम्बारता बंटन के लिए आयत चित्र की सहायता से बारम्बारता बहुभुज का निर्माण कीजिए।

सारणी—25

वर्ग अंतराल	0 — 5	5 — 10	10 — 15	15 — 20	20 — 25	25 — 30	30 — 35
बारम्बारता	1	2	4	6	5	3	2

10. निम्न बारम्बारता बंटन के लिए आयत चित्र की सहायता से बारम्बारता बहुभुज का निर्माण कीजिए। अधिकतम अंक 10 ही है।

सारणी—26

प्राप्तांक	2 — 4	4 — 6	4 — 6	6 — 8	8 — 10
विद्यार्थियों की संख्या	7	8	4	9	2

11. निम्न बारम्बारता बंटन के लिए बारम्बारता बहुभुज का निर्माण कीजिए।

सारणी—27

विचर x	5	10	15	20	25	30
बारम्बारता f	2	6	4	1	5	2

12. निम्न बारम्बारता बंटन के लिए बारम्बारता बहुभुज का निर्माण कीजिए।

सारणी—28

उत्पादन (टनों में)	0—10	10—20	20—30	30—40	40—50	50—60	60—70
बारम्बारता	8	18	23	37	47	26	16

केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप:

इस अध्याय में अब तक हमने बारम्बारता बंटन सारणियों, दण्ड आलेखों, आयत चित्रों और बारम्बारता बहुभुजों की सहायता से आँकड़ों को विभिन्न रूपों में प्रस्तुत किया है। इन आँकड़ों को अर्थपूर्ण बनाने के लिए हमें सदैव ही सभी आँकड़ों का अध्ययन करने की आवश्यकता होती है। केन्द्रीय प्रवृत्ति के मापों या औसतों की सहायता से ऐसा किया जा सकता है।

एक ऐसी स्थिति लीजिए जहाँ दो छात्रों प्रवीण और आकाश को उनकी परीक्षा कॉपियाँ दी गई है। परीक्षा में 10—10 अंकों के पाँच प्रश्न थे। इस परीक्षा में उनके प्राप्तांक ये थे:

सारणी—29

प्रश्न की क्रम संख्या	1	2	3	4	5
प्रवीण के प्राप्तांक	10	8	9	8	7
आकाश के प्राप्तांक	4	7	10	10	10

परीक्षा की कॉपियाँ प्राप्त होने पर दोनों के औसत प्राप्तांक थे

प्रवीण के औसत प्राप्तांक $= \frac{42}{5} = 8.4$

आकाश के औसत प्राप्तांक $= \frac{41}{5} = 8.2$

क्योंकि प्रवीण का औसत प्राप्तांक आकाश के औसत प्राप्तांक से अधिक था, इसलिए प्रवीण का कहना है कि उसका प्रदर्शन अच्छा रहा है। परन्तु आकाश इससे सहमत नहीं था। उसने दोनों के प्राप्तांकों को आरोही क्रम में रखा और मध्य प्राप्तांक इस प्रकार प्राप्त किया।

सारणी—30

प्रवीण के प्राप्तांक	7	8	8	9	10
आकाश के प्राप्तांक	4	10	10	10	10

आकाश का कहना है कि उसका सबसे मध्य का प्राप्तांक 10 था, जो कि प्रवीण के सबसे मध्य के प्राप्तांक अर्थात् 8 से अधिक था इसलिए परीक्षा में उसके प्रदर्शन को उत्तम माना जाना चाहिए।

परन्तु प्रवीण उसके तर्क से सहमत नहीं था। प्रवीण को अपने कथन से सहमत कराने हेतु

आकाश ने एक अन्य युक्ति अपनाई। उसने बताया कि उसने 10 अंक तीन बार प्राप्त किए हैं जबकि प्रवीण ने केवल एक बार प्राप्त किए है। अतः परीक्षा में उसका प्रदर्शन अच्छा रहा है।

इन दोनों के विवाद को सुलझाने हेतु उनके द्वारा अपनाए गए तीन मापों को देखें और पता लगाएँ कि इन तीनों मापों में से कौन सा माप निर्णायक सिद्ध होता है?

पहली स्थिति में प्रवीण ने जो औसत प्राप्तांक प्राप्त किया था वह 'माध्य' (mean) है। मध्य प्राप्तांक जिसको आकाश ने अपने तर्क में प्रयोग किया था वह 'माध्यक' (median) है। अपनी दूसरी युक्ति में आकाश ने अधिक बार अधिक अंक प्राप्त करने की बात कही थी वह 'बहुलक' (mode) है।

आइए, पहले हम माध्य पर विस्तार से चर्चा करेंगे।

अनेक प्रेक्षणों का माध्य (या औसत) सभी प्रेक्षणों के मानों के योग को प्रेक्षणों की कुल संख्या से भाग देने से प्राप्त होता है। इसे प्रतीक $\bar{x}$ से जिसे x दण्ड (x bar) पढ़ा जाता है प्रकट किया जाता है।

उदाहरण 11: व्यक्तियों की दैनिक आय क्रमशः 250 रु. 200 रु. 225 रु. 300 रु 275 रु. है इनका माध्य ज्ञात करो।

हलः प्रेक्षणों का माध्य $(\bar{x}) = \dfrac{\text{सभी प्रेक्षणों का योग}}{\text{प्रेक्षणों की कुल संख्या}} = \dfrac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5}{5}$

$$= \frac{250 + 200 + 225 + 300 + 275}{5} = \frac{1250}{5} = 250 \text{ रु.}$$

अतः 5 व्यक्तियों की औसत आय 250 रु. है।

अब 30 व्यक्तियों की आय का माध्य ज्ञात करने के लिए हमें $x_1 + x_2 + x_3 ... + x_{30}$ लिखना होगा, जो कठिन कार्य है हम संकलन (summation) के लिए प्रतीक $\sum$ का प्रयोग करते हैं। अतः $x_1 + x_2 + x_3 ... + x_{30}$ के स्थान पर $\sum_{j=1}^{30} x_j$ जिसे x_j का योग पढ़ा जाता है जबकि j का मान 1 से 30 तक विचरण करता है।

$$\text{अतः } \bar{x} = \frac{\sum_{j=1}^{30} x_j}{30}$$

इसी प्रकार यदि प्रेक्षणों की संख्या n हो तो $\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_j}{n}$

माध्यक– दिए हुए प्रेक्षणों का वह मान होता है जो इसे ठीक–ठीक दो भागों में विभक्त कर देता है। अतः जब आँकड़ों को आरोही (या अवरोही) क्रम में लिखते हैं, तब अवर्गीकृत आँकड़ों का माध्यक इस प्रकार परिकलित किया जाता हैः

(i) जब प्रेक्षणों की संख्या (n) विषम होती है जब माध्यक $\left(\dfrac{n+1}{2}\right)$ वें प्रेक्षण का मान होता है।

उदाहरण के लिए यदि $n = 13$ है तो $\left(\frac{13+1}{2}\right)$ वें अर्थात 7 वें प्रेक्षण का मान माध्यक होगा।

(ii) जब प्रेक्षणों की संख्या (n) सम होती है तब माध्यक $\left(\frac{n}{2}\right)$ वें और $\left(\frac{n}{2}+1\right)$ वें प्रेक्षण का माध्य होता है। जैसे– यदि $n = 16$ है तो $\left(\frac{16}{2}\right)$ वें और $\left(\frac{16}{2}+1\right)$ वें प्रेक्षणों के मानों का माध्य अर्थात् 8वें और 9वें प्रेक्षणों के मानों का माध्य ही माध्यक होगा।

उदाहरण 12: एक कक्षा के 9 विद्यार्थियों की लम्बाइयाँ (से.मी.) ये हैं:

155 160 145 149 150 147 152 144 148

इन आँकड़ों का माध्यक ज्ञात करो।

हलः सर्वप्रथम हम इन आँकड़ों को आरोही क्रम में लिखते हैं।

144 145 147 148 149 150 152 155 160

क्योंकि विद्यार्थियों की संख्या 9 है अर्थात् विषम है इसलिए हम $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ वें $= \left(\frac{9+1}{2}\right)$ वें $=5$ वें विद्यार्थी की लम्बाई जो 149 सेमी है ज्ञात करके माध्यक प्राप्त करते हैं। अतः माध्यक =149 से.मी.

उदाहरण 13: कबड्डी की एक टीम द्वारा अनेक मैचों में प्राप्त किए गए अंक इस प्रकार हैं

17 2 7 27 15 5 14 8 10 24
48 10 8 7 18 28

टीम द्वारा प्राप्त किए गए अंकों का माध्यक ज्ञात कीजिए।

हलः अंकों को आरोही क्रम में लिखने पर

2 5 7 7 8 8 10 10 14 15
17 18 24 27 28 48

यहाँ 16 पद हैं जो कि सम संख्या है। अतः $\left(\frac{16}{2}\right)$ वें और $\left(\frac{16}{2}+1\right)$ वें अर्थात् 8 वें और 9 वें पद हैं।

अतः 8 वें और 9 वें पद के मानों का माध्य ही माध्यक होगा।

इसलिए माध्यक $= \frac{10+14}{2} = \frac{24}{2} = 12$

अतः कबड्डी टीम द्वारा प्राप्त किए गए माध्यक अंक 12 हैं।

बहुलकः प्रेक्षण का वह मान होता है जो बार–बार घटित होता रहता है अर्थात् अधिकतम बारम्बारता वाले प्रेक्षण को बहुलक कहा जाता है।

रेडिमेड व जूता उद्योग केन्द्रीय प्रवृत्ति के इस माप का काफी प्रयोग करते हैं। बहुलक की सहायता से ये उद्योग निर्णय लेते हैं कि किस माप का उत्पादन बढ़ाना चाहिए।

उदाहरण 14: 20 विद्यार्थियों द्वारा (10 में से) प्राप्त किए गए निम्नलिखित अंकों का बहुलक ज्ञात कीजिए।

4, 6, 5, 9, 3, 2, 7, 7, 6, 5, 4, 9, 10, 10, 3, 4, 7, 6, 9, 9

हल: आँकड़ों का आरोही क्रम में लिखने पर

2, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5, 6, 6, 6, 7, 7, 7, 9, 9, 9, 9, 10, 10

यहाँ 9 सबसे अधिक बार अर्थात् चार बार आया है।

अतः बहुलक 9 है।

प्रश्नावली 15.4

1. एक टीम ने फुटबाल के 10 मैचों में निम्नलिखित गोल किए:

   2 3 4 5 0 1 3 3 4 3

   इन गोलों का माध्य, माध्यक और बहुलक ज्ञात करो।

2. गणित की परीक्षा में 15 छात्रों ने (100 में से) निम्नलिखित अंक प्राप्त किए:

   41 39 48 52 46 62 54 40 96 52
   98 40 42 52 60

   इन आँकड़ों के माध्य, माध्यक और बहुक ज्ञात कीजिए।

3. निम्नलिखित प्रेक्षणों को आरोही क्रम में व्यस्थित किया गया है। यदि आँकड़ों का माध्यक 63 हो तो x का मान ज्ञात करो:

   29 32 48 50 x $x + 2$ 72 78 84 95

4. आँकड़ों 14 25 14 28 18 17 18 14 23
   22 14 18 का बहुलक ज्ञात कीजिए।

5. निम्न सारणी से एक फैक्ट्री में काम कर रहे 60 कर्मचारियों का माध्य वेतन ज्ञात कीजिए।

सारणी–31

वेतन (रुपयो में)	3000	4000	5000	6000	7000	8000	9000	10000
कर्मचारियों की संख्या	16	12	10	8	6	4	3	1

विविध प्रश्नमाला 15

1. बंटन 5, 5, 6, 4, 9, 5, 3, 2, 7, 6, 3, 8, 4 में वर्ग अंतराल 3 — 5 की बारम्बारता है:

(A) 3 (B) 4 (C) 6 (D) 7 ( )

2. निम्नलिखित बारम्बारता बंटन का परिसर होगा

3.2 2.8 3.1 2.1 3.2 2.4 2.1 2.8 2.7 2.7

(A) 2.7 (B) 3.1 (C) 2.4 (D) 1.1 ( )

3. निम्न बारम्बारता बंटन में 25 वर्ष से कम आयु के विद्यार्थियों की संख्या है

आयु (वर्षों में)	5 — 10	10 — 15	15 — 20	20 — 25	25 — 30
विद्यार्थियों की संख्या	3	6	8	8	2

(A) 8 (B) 16 (C) 9 (D) 25 ( )

4. दण्ड आलेख में आयत की ऊँचाई होती है

(A) वर्ग की आवृत्ति के व्युत्क्रमानुपात में (B) वर्ग की आवृत्ति के समानुपात में

(C) वर्ग अंतराल के समानुपात में (D) वर्ग अंतराल के व्युत्क्रमानुपात में ( )

5. विद्यालय की किसी कक्षा के परीक्षा परिणाम का तुलनात्मक अध्ययन किया जा सकता है
(A) वृत्ताकार लेखाचित्र से (B) दण्ड लेखाचित्र से
(C) रैखिक लेखाचित्र से (D) उपर्युक्त सभी से ( )

6. बंटन 6, 1, 2, 3, 9, 8, 3, 4, 8, 2, 3 का परिसर (परास) होगा
(A) 4 (B) 8 (C) 7 (D) 6 ( )

7. यदि विचर का बंटन 5, 1, 5, 2, 3, 6, 5, 4 हो तो विचर 5 की बारम्बारता होगी
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 ( )

8. 11, 2, 7, 8, 9, 3, 5 की माध्यक होगी
(A) 7 (B) 9 (C) 5 (D) 11 ( )

9. 15, 0, 10, 5 का माध्य होगा
(A) 15 (B) 10 (C) 5 (D) 7.5 ( )

10. 4, 3, 4, 5, 4, 2, 4, 1 में बहुलक होगा
(A) 1 (B) 2 (C) 5 (D) 4 ( )

अतिलघूत्तरात्मक प्रश्न

11. बंटन 3, 2, 0, 10, 8, 5, 13, 5, 6, 6, 0, 14 से वर्ग अंतराल 0 — 5 की बारम्बारता लिखिए।
12. यदि 5, 8, 4, x, 6, 9 अंकों का माध्य 7 हो तो x का मान ज्ञात करो।
13. परास किसे कहते हैं?
14. आयत चित्र किसे कहते हैं?
15. 9, 7, 9, 8, 3, 9, 8, 3, 5, 7, 5, 3 की बारम्बारता सारणी बनाइए।
16. किसी बारम्बारता बंटन का समान्तर माध्य 15 है तथा $\sum f = 20$ हो तो $\sum f x$ का मान लिखो।
17. बंटन 5, 2, 3, 7, 5, 4, 3, 2, 1 का माध्यक लिखिए।
18. बंटन 12, 1, 6, 4, 10, 8, 1, 4 का माध्यक ज्ञात करो।
19. बंटन 4, 3, 4, 1, 2, 4, 7, 5, 3 का बहुलक लिखिए।

महत्त्वपूर्ण बिन्दु

1. आँकड़े मुख्यतः दो प्रकार के होते हैं: (i) प्राथमिक (ii) द्वितीयक
2. प्राथमिक आँकड़ों के संकलन की निम्न विधियाँ हैं:
(i) प्रत्यक्ष व्यक्तिगत अन्वेषण से (ii) परोक्ष अन्वेषण से
3. परोक्ष आँकड़े निम्न प्रकार प्राप्त करते हैं–
(i) प्रगणकों द्वारा अनुसूचियाँ भरवाकर।
(ii) सूचकों द्वारा प्रश्नावलियाँ भरवाकर।
(iii) स्थानीय स्रोतों या संवाददाताओं द्वारा सूचना प्राप्ति।
(iv) विशेषज्ञों के माध्यम से परोक्ष मौखिक अन्वेषण द्वारा।
4. ऐसे आँकड़ें जो पहले से ही किसी व्यक्ति या संस्था द्वारा किसी विशिष्ट उद्देश्य के लिए एकत्रित किए गए हों तथा इसका उपयोग किसी अन्य अन्वेषक द्वारा हो तो इस प्रकार के आँकड़े द्वितीयक आँकड़े कहलाते है।
5. द्वितीयक आँकड़े प्रकाशित या अप्रकाशित हो सकते है।

6. प्रकाशित आँकड़ों के मुख्य स्रोत निम्न है
(i) अन्तर्राष्ट्रीय संगठन (ii) सरकारी प्रकाशन (iii) अर्द्धसरकारी प्रकाशन (iv) परिषदों एवं व्यापारिक संगठनों के प्रकाशन (v) अनुसंधान संस्थानों के प्रकाशन (vi) पत्र–पत्रिकाएँ (vii) शोधार्थियों के प्रकाशित स्रोत
7. बारम्बारता बंटन में प्राप्तांकों के लिए सामान्यतः विचर (x) का प्रयोग किया जाता है।
8. विचर (x) के अधिकतम एवं न्यूनतम मान के अंतर को परास कहते हैं।
9. किसी वर्ग के निम्नतम एवं उच्चतम मान उस वर्ग की निम्न तथा ऊपरी सीमाएँ कहलाती हैं।
10. किसी वर्ग की ऊपरी तथा निम्न सीमाओं का औसत वर्ग का मध्यमान या वर्ग चिन्ह (Class mark) कहलाता है। इसे x से व्यक्त करते हैं।
11. सांख्यिकी विश्लेषण में प्रमुख रूप से काम आने वाले आलेख निम्न प्रकार हैं–
(क) दण्ड आलेख (ख) आयत चित्र (ग) बारम्बारता बहुभुज
12. असमूहित आँकड़ों के केन्द्रीय प्रवृत्ति के तीन माप है
(i) माध्यः प्रेक्षणों के सभी मानों के योग में प्रेक्षणों की कुल संख्या का भाग देने पर माध्य प्राप्त होता है। $\bar{x} = \frac{\sum f x}{\sum f}$
(ii) माध्यकः सबसे मध्य के प्रेक्षण को माध्यक कहते हैं।
(iii) बहुलकः सबसे अधिक बार आने वाले प्रेक्षण को बहुलक कहते है।

उत्तरमाला

प्रश्नमाला 15.1

1. प्राथमिक आँकड़ेः– अन्वेषक द्वारा अपने प्रयोग के लिए नए सिरे से पहली बार जिन आँकड़ों को एकत्रित किया जाता है उन्हें प्राथमिक आँकड़े कहते हैं।
द्वितीयक आँकड़ेः– वे आँकड़े जिनका संकलन पहले से किया हुआ हो और प्रकाशित या अप्रकाशित स्थिति में हो, द्वितीयक आँकड़े कहलाते हैं।
2. पृष्ठ 1 व 2 पर उल्लेखित हैं।

प्रश्नमाला 15.2

1.

विचर x	33	34	35	36	37	38
गणना चिह्न	|||	~~||||~~ |||	~~||||~~ ||	||||	||||	||||
बारम्बारता (f)	3	8	7	4	4	4

2.

विचर	2.9	3.0	3.1	3.2	3.3	3.4	3.5	3.6	3.7	3.8
गणना चिह्न	|||	~~||||~~	~~||||~~	~~||||~~ |	–	~~||||~~	|	||	|	||
बारम्बारता (f)	3	5	5	6	–	5	1	2	1	2

3.

सिरों की संख्या	गणना चिह्न	बारम्बारता (f)
0	~~||||~~ |	6
1	~~||||~~ ~~||||~~	10

2	𝍸 ||||	9
3	𝍸	5
योग		30

4.

रक्त समूह	गणना चिह्न	छात्रों की संख्या
A	𝍸 ||||	9
B	𝍸		6
O	𝍸 𝍸 ||	12
AB	|||	3
कुल योग		30

5.

वर्ग	गणना चिह्न	बारम्बारता
0 — 10	𝍸	5
10 — 20	𝍸		6
20 — 30	𝍸 ||||	9
30 — 40	𝍸		6
40 — 50	||||	4

6.

वर्ग	गणना चिह्न	बारम्बारता (*f*)
0 — 5			1
5 — 10	|||	3
10 — 15	||||	4
15 — 20	||||	4
20 — 25			1
25 — 30	||	2
30 — 35			1
35 — 40			1
40 — 45	|||	3

7. (i)

अंक	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	कुल योग
बारम्बारता	2	5	5	8	4	5	4	4	5	8	50

(ii) सबसे अधिक बार आने वाले अंक 3 और 9 हैं। सबसे कम बार आने वाला अंक 0 है।

8.

दूरी (किलो मीटर में)	गणना चिह्न	बारम्बारता
0 — 5	𝍸	5
5 — 10	𝍸𝍸|	11
10 — 15	𝍸𝍸|	11
15 — 20	𝍸||||	9
20 — 25	|	1
25 — 30	|	1
30 — 35	||	2
		40

9.

घण्टों की संख्या	बारम्बारता
0 — 5	10
5 — 10	13
10 — 15	5
15 — 20	2
कुल योग	30

(ii) 2 बच्चे

प्रश्नमाला 15.3

1. (ii) जनन स्वास्थ्य अवस्था
3. (ii) पार्टी A

प्रश्नमाला 15.4

1. माध्य $= 2.8$, माध्यिका $= 3$, बहुलक $= 3$
2. माध्य $= 54.8$, माध्यक $= 52$, बहुलक $= 52$
3. $x = 62$
4. 14
5. 60 कर्मचारियों का माध्य वेतन रुपये 5083.33 है।

विविध प्रश्नमाला 15

1. (ख), 2. (घ), 3. (घ), 4. (ख), 5. (ख), 6. (ख),
7. (ग), 8. (क), 9. (घ), 10. (घ), 11. -4, 12. -10,
13. विचर के अधिकतम तथा न्यूनतम मान के अंतर को परास कहते है।
14. आयत चित्र वर्गीकृत एवं सतत बारम्बारता बंटन का आयतीय निरूपण है।
15.

x	3	5	7	8	9
f	3	2	2	2	3

16. 300 17. 3 18. 5 19. 4