

लघुत्तम समापवर्त्य और महत्तम समापवर्त्य

(L.C.M and H.C.F.)

□ लघुत्तम समापवर्त्य (L.C.M.)

दो या दो से अधिक संख्याओं का लघुतम समापर्त्य (LCM) वह छोटी से छोटी संख्या है, जिसमें दी गई संख्याओं से पूरा-पूरा भाग हो जाता है। उदाहरण के लिए यदि मान लिया जाए कि तीन संख्याएँ 4, 3 तथा 6 हैं, तो वह सबसे छोटी संख्या 12 होगी, जिसमें 4, 3, 6 से भाग देने पर क्रमशः 3, 4 तथा 2 भागफल आता है।

4, 3 तथा 6 से भाग देने पर 24, 36, 48... आदि भी पूर्ण रूप से विभाजित हो जाते हैं, परंतु लघुतम समापवर्त्य केवल 12 ही होगा वयोंकि सबसे छोटी विभाज्य संख्या यही है।

- लघुत्तम समापवर्त्य ज्ञात करने की भाग विधि

इस विधि में सबसे पहले संख्याओं को कामा (,) लगाकर एक पंक्ति में लिखते हैं फिर उस संख्या (जैसे 2, 3, 4, 5, 7, 11..... इत्यदि) द्वारा भाग देते हैं, जो कम से कम दो संख्याओं को विभाजित करती हो। प्राप्त भागफलों तथा शेष संख्याओं को नीचे पुनः एक पंक्ति में लिखते हैं और पुनः उपर्युक्त क्रिया को दोहराते हैं। यह क्रिया तब तक करते हैं, जब तक कि नीचे की पंक्ति में सभी संख्याएं अभाज्य संख्याएं प्राप्त न हो जाएं। अब भाजकों तथा नीचे की पंक्ति में बची अभाज्य संख्याओं को गुणा करते हैं। यही गुणनफल संख्याओं का लघुतम समापवर्त्य होता है।

☞ उदाहरणार्थ प्रश्न देखें-

प्रश्न : 8, 12 तथा 16 का ल.स. क्या होगा?

हल :

| | | | |
|---|----|-----|----|
| 2 | 8, | 12, | 16 |
| 2 | 4, | 6, | 8 |
| 2 | 2, | 3, | 4 |
| 2 | 1, | 3, | 2 |
| 3 | 1, | 3, | 1 |
| | 1. | 1. | 1 |

$$8, 12 \text{ तथा } 16 \text{ का ल.स.} = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \Rightarrow 48$$

प्रश्न : वह छोटी से छोटी संख्या ज्ञात करें, जो 10, 20, 30, 40 तथा 50 से पूर्णतया विभक्त हो।

५८

| | |
|---|--------------------|
| 2 | 10, 20, 30, 40, 50 |
| 2 | 5, 10, 15, 20, 25 |
| 2 | 5, 5, 15, 10, 25 |
| 3 | 5, 5, 15, 5, 25 |
| 5 | 5, 5, 5, 5, 25 |
| 5 | 1, 1, 1, 1, 5 |
| | 1, 1, 1, 1, 1 |

$$10, 20, 30, 40 \text{ तथा } 50 \text{ का L.C.M.} = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 5 \Rightarrow 600$$

प्रश्न : वह छोटी से छोटी संख्या ज्ञात करें, जिसे 15, 20, 30, 40 तथा 45 से भाग देने पर प्रत्येक अवस्था में 7 शेष बचे।

हल :

| | |
|---|--------------------|
| 2 | 10, 20, 30, 40, 45 |
| 2 | 5, 10, 15, 20, 45 |
| 2 | 5, 5, 15, 10, 45 |
| 3 | 5, 5, 15, 5, 45 |
| 3 | 5, 5, 5, 5, 15 |
| 5 | 5, 5, 5, 5, 5 |
| | 1 1 1 1 1 |

$$15, 20, 30, 40 \text{ तथा } 45 \text{ का ल.स.} = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \Rightarrow 360$$

अभीष्ट संख्या = $360 + 7 \Rightarrow 367$

महत्तम समापवर्त्य (H.C.F)

वह बड़ी से बड़ी संख्या जो दी हुई संख्याओं को पूर्णतया विभाजित कर दे, वह उन संख्याओं का महत्तम समापवर्त्य (Highest Common Factor) कहलाती है।

जैसे - 18, 24, 30 की समापवर्तक संख्याएँ 2, 3, 6 हैं, अर्थात् ये सभी दी हुई संख्याएँ 18, 24, 30 को पूरा-पूरा विभाजित कर देंगी तथा इनमें सबसे बड़ी संख्या 6 है। अतः इनका महत्तम समापवर्तक 6 होगा।

- महत्तम समापवर्तक (HCF) ज्ञात करने की भाग विधि

भाग विधि में, दी हुई संख्याओं में से सबसे पहले दो संख्याएं लेते हैं और उनका म.सा. ज्ञात करते हैं। इस विधि में छोटी संख्या से बड़ी संख्या में भाग देते हैं और जो शेष बचता है उससे छोटी संख्या में भाग देते हैं और फिर जो संख्या शेष बचती है, उससे प्रथम शेष (भाजक) को भाग देते हैं। इसी क्रिया को तब तक करते हैं जब तक कि शेष शून्य न हो जाए। अंतिम भाजक ही इन दो संख्याओं का महत्तम समावर्तक होता है। यदि संख्याएं दो से अधिक हों, तो दोनों संख्याओं के म.स. के साथ तीसरी संख्या से समाप्त क्रिया करते हैं। ऐसे में जो म.स. प्राप्त होता है वही तीनों संख्याओं का म.स. होता है।

☞ उदाहरणार्थ प्रश्न देखें-

प्रश्न : 12 और 18 का म.स. ज्ञात कीजिए।

हल :

$$\begin{array}{r} 12)18(1 \\ \hline 12 \\ 6)12(2 \\ \hline 12 \\ 0 \end{array}$$

अतः अंतिम भाजक 6 ही म.स. होगा।

10. वह कौन्सी न्यूनतम संख्या है जिसे दोगुना करने पर वह 12, 18, 21 और 30 से पूर्णतया विभाजित हो जाती है?
 (a) 2520 (b) 1260 (c) 630 (d) 196

उत्तर—(c)

| |
|--|
| 12, 18, 21 तथा 30 से पूर्णतया विभाजित होने वाली संख्या 12, 18, 21 तथा 30 का ल.स.प. होगी। |
| $\begin{array}{ c c c c } \hline 2 & & 12, 18, 21, 30 \\ \hline 2 & & 6, 9, 21, 15 \\ \hline 3 & & 3, 9, 21, 15 \\ \hline 3 & & 1, 3, 7, 5 \\ \hline 5 & & 1, 1, 7, 5 \\ \hline 7 & & 1, 1, 7, 1 \\ \hline & & 1, 1, 1, 1 \\ \hline \end{array}$ |
| ल.स.प. = $2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 \times 7 \Rightarrow 1260$ |
| अभीष्ट संख्या = $1260 \div 2 \Rightarrow 630$ |

11. 24 आड़, 36 खूबानी और 60 केले हैं और उन्हें कई पंक्तियों में इस प्रकार रखा जाना है कि प्रत्येक पंक्ति में समान संख्या में केवल एक प्रकार का फल हो। ऐसा करने के लिए पंक्तियों की न्यूनतम संख्या कितनी होनी चाहिए?

- (a) 12 (b) 9 (c) 10 (d) 6

उत्तर—(a)

| |
|--|
| संख्या 24, 36, तथा 60 का म.स. ही अभीष्ट न्यूनतम संख्या होगी |
| अर्थात् |
| $24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$ |
| $36 = 2 \times 2 \times 3 \times 3$ |
| $60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$ |
| ∴ अभीष्ट म.स. = $2 \times 2 \times 3 \Rightarrow 12$ |
| अतः प्रत्येक पंक्ति में फलों को समान संख्या में रखने के लिए अभीष्ट न्यूनतम संख्या = 12 |

12. एक व्यक्ति के पास क्रमशः 10, 15 और 20 मीटर लंबाई की तीन लोहे की छड़ें हैं। वह तीनों छड़ों में से बराबर लंबाई के टुकड़े काटना चाहता है। वह बिना कुछ बरबाद किए उसमें से कम से कम कुल कितने टुकड़े काट सकता है?

- (a) 45 (b) 15 (c) 9 (d) 30

उत्तर—(c)

| |
|---|
| 10 = 5×2 |
| 15 = 5×3 |
| 20 = $5 \times 2 \times 2$ |
| ∴ अभीष्ट म.स. = 5 |
| अतः एक टुकड़े की लंबाई = 5 मीटर |
| ∴ 10 मीटर = $5 + 5$ (2 टुकड़े) |
| 15 मीटर = $5 + 5 + 5$ (3 टुकड़े) |
| 20 मीटर = $5 + 5 + 5 + 5$ (4 टुकड़े) |
| ∴ कुल टुकड़ों की संख्या = $2 + 3 + 4 = 9$ |

13. मान लें कि x एक लघुतम संख्या है जिसे जब 2000 में जोड़ा जाए, तो परिणामी संख्या 12, 16, 18 और 21 से विभाज्य हो जाती है। x के अंकों का योग है-

- (a) 7 (b) 4 (c) 6 (d) 5

उत्तर—(a)

| | |
|---|----------------|
| 2 | 12, 16, 18, 21 |
| 2 | 6, 8, 9, 21 |
| 2 | 3, 4, 9, 21 |
| 2 | 3, 2, 9, 21 |
| 3 | 3, 1, 9, 21 |
| 3 | 1, 1, 3, 7 |
| 7 | 1, 1, 1, 7 |
| | 1, 1, 1, 1 |

$$\text{ल.स.} = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 7 \Rightarrow 1008$$

$$\therefore \text{संख्या } 12, 16, 18 \text{ और } 21 \text{ से विभाज्य संख्या} = 2 \times 1008 \\ = 2016$$

इस प्रकार संख्या 2000 में संख्या 16 जोड़ देने पर प्राप्त संख्या दी गई संख्या से पूर्णतया विभाज्य हो जाएगी।
 अतः संख्या 16 के अंकों का योग = $1 + 6 \Rightarrow 7$

14. दो संख्याओं का अनुपात 3 : 4 है और उनका महत्तम समापवर्तक 15 है, तो संख्याओं का योग क्या होगा?

- (a) 105 (b) 120 (c) 115 (d) 110

उत्तर—(a)

माना संख्याएं $3x$ एवं $4x$ हैं

$$\therefore 3x \text{ एवं } 4x \text{ का ल.स.} = 12x$$

पहली संख्या \times दूसरी संख्या = ल.स. \times म.स.

$$3x \times 4x = 12x \times 15$$

$$\therefore x = 15$$

$$\therefore \text{पहली संख्या} = 3x$$

$$= 3 \times 15 = 45$$

$$\text{तथा दूसरी संख्या} = 4x$$

$$= 4 \times 15 = 60$$

अतः दोनों संख्याओं का योग = $45 + 60 \Rightarrow 105$

द्वितीय विधि-

संख्याओं का योग = संख्याओं के अनुपात का योग \times संख्याओं का महत्तम समापवर्तक

$$= (3+4) \times 15 = 105$$

15. दो संख्याओं का अनुपात 3 : 4 है और उनका लघुतम समापवर्त्य 120 है। उन संख्याओं का योग है-

- (a) 70 (b) 105 (c) 140 (d) 35

उत्तर—(a)

माना संख्याएं $3x$ एवं $4x$ हैं

$$3x \text{ एवं } 4x \text{ का ल.स.} = 12x$$

प्रश्नानुसार

$$12x = 120$$

$$x = \frac{120}{12} = 10$$

$$\begin{aligned}\therefore \text{संख्याएं} &= 3x \text{ एवं } 4x \\&= 3 \times 10 \text{ एवं } 4 \times 10 \\&= 30 \text{ एवं } 40\end{aligned}$$

अतः संख्याओं का योग = $30 + 40 \Rightarrow 70$

16. 2 संख्याओं का महतम समापवर्तक और लघुतम समापवर्त्य क्रमशः 21 और 84 है। यदि दो संख्याओं का अनुपात $1 : 4$ है, तो दो संख्याओं में से बड़ी संख्या क्या होगी?
- (a) 108 (b) 48 (c) 12 (d) 84

उत्तर—(d)

माना दोनों संख्याएं क्रमशः x एवं $4x$ हैं।

\therefore पहली संख्या \times दूसरी संख्या = म.स. \times ल.स.

$$\begin{aligned}x \times 4x &= 21 \times 84 \\4x^2 &= 21 \times 84 \\x^2 &= \frac{21 \times 84}{4} \\x^2 &= 21 \times 21 \\x &= 21\end{aligned}$$

अतः बड़ी संख्या = $4x$

$$= 4 \times 21 \Rightarrow 84$$

द्वितीय विधि

यदि संख्याओं का ल.स. और म.स. का अनुपात संख्याओं के अनुपात के समान हो, तो ल.स. और म.स. ही अभीष्ट उत्तर होता है। अर्थात्

$$\frac{84}{21} = \frac{4}{1}$$

$$\text{या } \frac{4}{1} = \frac{4}{1}$$

अतः संख्याओं में बड़ी संख्या = 84

17. दो संख्याओं का ल.स. 495 तथा म.स. 5 है। यदि उन संख्याओं का योग 100 हो, तो उनका अंतर है—

- (a) 10 (b) 46
(c) 70 (d) 90

उत्तर—(a)

दो संख्याओं का म.स. = 5

तथा उनका ल.स. = 495

माना संख्याएं $5x$ तथा $5y$ हैं।

$$\therefore 5x \text{ और } 5y \text{ का ल.स.} = 5xy = 495$$

$$xy = 99$$

तथा $5x + 5y = 100$

$$x + y = 20$$

$$\begin{aligned}\text{या } (x - y)^2 &= (x + y)^2 - 4xy \\&= (20)^2 - 4 \times 99 \\&= 400 - 396 = 4 \\x - y &= 2 \\5x - 5y &= 5(x - y) \\&= 5 \times 2 \Rightarrow 10\end{aligned}$$

18. दो संख्याओं के ल.स. एवं म.स. का गुणनफल 24 है। दोनों संख्याओं का अंतर 2 है। वे संख्याएं ज्ञात कीजिए।

- (a) 8 और 6 (b) 8 और 10
(c) 2 और 4 (d) 6 और 4

उत्तर—(d)

माना म.स. = a

अतः संख्याएं = ax, ay

ल.स.प. = axy

ल.स. \times म.स. = 24

$$a^2xy = 24$$

$$a^2xy = 2 \times 3 \times 2 \times 2$$

$$a^2 = 4$$

$$x = 3 \text{ और } y = 2$$

$$\begin{aligned}\therefore \text{संख्याएं} &= 2 \times 3 \text{ और } 2 \times 2 \\&= 6 \text{ और } 4\end{aligned}$$

19. किसी दूध वाले की एक टंकी में 75 लीटर तथा दूसरी में 45 लीटर दूध है। उस बड़े से बड़े बर्टन की माप जो दोनों टंकियों के दूध को पूरा-पूरा माप सके, निम्न होगी—

- (a) 1 लीटर (b) 5 लीटर
(c) 15 लीटर (d) 25 लीटर

उत्तर—(c)

75 एवं 45 का म.स.प. = 15

अतः उस बड़े से बड़े बर्टन की माप = 15 लीटर

20. दो संख्याओं का महतम समापवर्त्यक (H.C.F.) और लघुतम समापवर्त्य (L.C.M.) क्रमशः 44 और 264 है। यदि पहली संख्या को 2 से भाग दिया जाए, तो भागफल 44 होता है, दूसरी संख्या निम्नलिखित में से क्या होगी?

- (a) 147 (b) 528
(c) 132 (d) 264

उत्तर—(c)

प्रश्नानुसार

$$\frac{\text{पहली संख्या}}{2} = 44$$

$$\therefore \text{पहली संख्या} = 44 \times 2 = 88$$

$$\therefore \text{पहली संख्या} \times \text{दूसरी संख्या} = \text{ल.स.} \times \text{म.स.}$$

$$88 \times \text{दूसरी संख्या} = 44 \times 264$$

$$\therefore \text{दूसरी संख्या} = \frac{44 \times 264}{88} \Rightarrow 132$$