அத்தியாயம் 12

நிகழ்தகவு கோட்பாடு - ஓர் அறிமுகம் (INTRODUCTION TO PROBABILITY THEORY)

K1RNDD

வாழ்க்கையில் நிகழும் ஒவ்வொரு நிகழ்வும் நிகழ்தகவைச் சார்ந்தே அமைகின்றது

பியரி சைமன் லாப்லாஸ்

12.1 அறிமுகம் (Introduction)

லாப்லாஸ்
1749-1827

பிளைசி பாஸ்கல் (Blaise Pascal) மற்றும் பியரி டி பெர்மாட் (Pierre de Fermat) ஆகிய இரு புகழ் பெற்ற பிரெஞ்சு கணிதவியலார்களால் உருவாக்கப்பட்ட நிகழ்தகவு கோட்பாட்டிற்கு 1654–ல் ஒரு சூதாட்ட களத்தில் நிகழ்ந்த விவாதமே மூல காரணமாக அமைந்தது. நிகழ்தகவுக் கோட்பாட்டின் அடிப்படைக் கொள்கைகளை முதன் முதலில் பாஸ்கல் மற்றும் பெர்மாட் ஆகியோர் வடிவமைத்தனர். லாப்லாஸ் தனது ஆழ்ந்த ஆராய்ச்சிக்குப் பின்னர் 1812 ல் வெளியிட்ட வரலாற்றுச் சிறப்பு மிக்க கட்டுரையின் வாயிலாக நிகழ்தகவு கோட்பாட்டிற்கு அடித்தளம் அமைத்தார். புள்ளியியலில் பேயிஸின் (Bayesian) கோட்பாடு மூலமாக நிகழ்தகவுக்கு விளக்கம் அளித்தவர் லாப்லாஸ் ஆவார்.

தொடக்கத்தில் விளையாட்டுகளின் மூலம் அறியப்பட்ட நிகழ்தகவானது தற்போது பயன்பாட்டுக் கணிதத்தில் மிக முக்கியத்துவம் வாய்ந்த பகுதியாக விளங்குகிறது. ஆயுள் காப்பீட்டுப் பிரிமியம் நிர்ணயத்திலிருந்து தேர்தல் கருத்துக்கணிப்பு முடிவுகள் வரை மற்றும் வாயுவினுள் உள்ள மூலக் கூறுகளின் தன்மைகளை அறிய நிகழ்தகவினைப் பயன்படுத்துவதைக் காணலாம்.

பள்ளிப் பாடப் பகுதியில் நிகழ்தகவு சேர்க்கப்பட்டதற்கு அதன் வாழ்வியல் பயன்பாடு ஒரு முக்கிய காரணமாக அமைகின்றது. 'நிகழ்தகவு' எனும் சொல்லானது வாய்ப்பு, நிகழக்கூடியது, ஊகிக்கக் கூடியது, நிகழும் சாத்தியக் கூறு, சாதக அல்லது பாதக விகிதம், இடையூறு, எதிர்பார்ப்பு என்ற பலப் பொருளைத் தருகின்றது.

அன்றாட வாழ்வில் பல தருணங்களில் நமது அனுமானங்கள் நிச்சயமற்றதாக அமைகின்றது. இந்த நிச்சயமற்ற தன்மையை அளக்கும் கணிதப்பிரிவே நிகழ்தகவுக் கோட்பாடு என அழைக்கப்படுகிறது. ஒரு நிகழ்ச்சியின் நிகழக்கூடிய வாய்ப்பின் அளவினைக் கணிப்பது நிகழ்தகவு ஆகும்.

கற்றலின் நோக்கங்கள்

இப்பாடப்பகுதி நிறைவுறும்போது மாணவர்கள் அறிந்திருக்க வேண்டியவைகளாக

- நிகழ்தகவின் வழக்கமான கோட்பாட்டையும் அடிப்படை அணுகுமுறைகளையும் அறிதல்
- ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகள், ஒன்றையொன்று விலக்கா நிகழ்ச்சிகள் மற்றும் யாவுமளாவிய நிகழ்ச்சிகளைப் புரிந்து கொள்ளுதல்
- சார்பு நிலை நிகழ்தகவு , சார்பிலா நிகழ்ச்சிகள் பற்றிய கருத்துக்களைப் புரிந்து கொள்ளுதல்
- பேயிஸ் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்தும் முறையினை அறிந்து கொள்ளுதல்
- நடைமுறை வாழ்க்கையில் நிகழ்தகவுக் கோட்பாடுகளைப் பயன்படுத்த அறிந்து கொள்ளுதல் ஆகியவை எதிர்பார்க்கப்படுகின்றன.

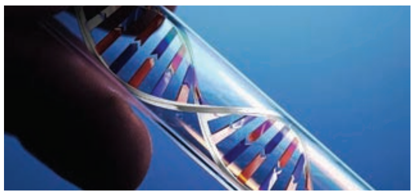
06_12 Probability New.indd 244 25-03-2019 14:01:16

12.2 அடிப்படை வரையறைகள்(Basic definitions)

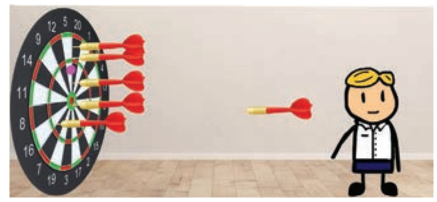
நிகழ்தகவுக் கோட்பாட்டைக் கற்பதற்கு முன்பு நாம் முந்தைய வகுப்புகளில் அடிக்கடி பயன்படுத்திய சில வரையறைகளை நினைவு கூர்வோம்.

சோதனை

நிர்ணயிக்கப்பட்ட சோதனை | **சமவாய்ப்புச் சோதனை**



(மரபணு நிர்ணயித்தல்)



(இலக்கைத் தாக்குதல்)

வரையறை 12.1

ஒரு செயல்பாடு வரையறுக்கப்பட்ட முடிவுகளைக் கொண்டிருக்குமேயானால், அச்செயல்பாட்டினைச் சோதனை (experiment) என வரையறுக்கலாம்.

வரையறை 12.2

நிர்ணயிக்கப்பட்ட சோதனை (Deterministic Experiment): ஒரே மாதிரியான சூழ்நிலையில், ஒரு சோதனையின் முடிவுகளை முன்கூட்டியே உறுதியாகக் கணிக்க முடியுமாயின், அது நிர்ணயிக்கப்பட்ட சோதனையாகும்.

வரையறை 12.3

சமவாய்ப்புச் சோதனை (Random Experiment or non deterministic) என்பது

(i) ஒரு சோதனையில் கிடைக்கக் கூடிய எல்லாதவிதச் சாத்தியக் கூறுகளை முன்கூட்டியே அறிந்திருக்க முடியும்.

(ii) சோதனைக்கு முன்பே முடிவினைக் கணிக்க இயலாது மற்றும்

(iii) ஒரே மாதிரியான சூழ்நிலையில் இச்சோதனையை மீண்டும் மீண்டும் பயன்படுத்த இயலும்.

ஒரு பகடையை "உருட்டுவது", ஒரு நாணயத்தைச் "சுண்டுவது" முதலியன சமவாய்ப்புச் சோதனைக்கு உதாரணங்களாகும்.

வரையறை 12.4

ஒரு சமவாய்ப்புச் சோதனையில் கிடைக் கூடிய அடிப்படை நிகழ்வுகளை (முடிவுகளை) மேலும் பிரிக்க இயலாது எனில் அது ஒரு சாதாரண நிகழ்ச்சியாகும் (simple event).

வரையறை 12.5

சமவாய்ப்புச் சோதனையின் எல்லா நிகழ்வுகளையும் கொண்ட கணமானது கூறுவெளி (Sample space) எனப்படும். ஒரு கூறுவெளியின் ஒவ்வொரு நிகழ்வும் சாதாரண நிகழ்வாகும்.

விளக்க எடுத்துக்காட்டு 12.1

(1) (i) ஒரு பகடையை ஒருமுறை உருட்டிக் கிடைக்கக்கூடிய கூறுவெளியானது

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

(ii) ஒரு நாணயத்தைச் சுண்டினால் கிடைக்கும் கூறுவெளி $S = \{H, T\}$.

(2) (i) தலைவிழும் வரை ஒரு நாணயத்தை எத்தனை முறை சுண்ட வேண்டும் என முன்பே அறிய இயலாது. இச்சோதனையின் கூறுவெளி $S = \{H, TH, TTH, TTTH, ...\}$ என்ற முடிவுறாக் கணம் ஆகும்.

06_12 Probability New.indd 245 25-03-2019 14:01:17

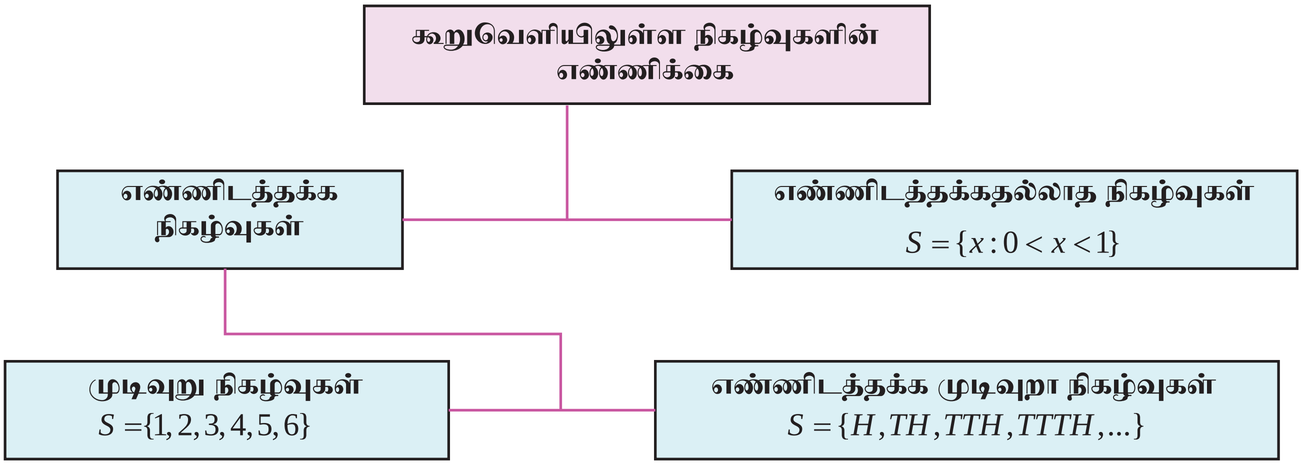
(ii) தொடர்வண்டிப் பயணச்சீட்டு வாங்கப் பயணச்சீட்டு வழங்கும் இடத்தில் காத்திருக்கும் பயணிகளின் எண்ணிக்கைக்குத் தொடர்புடைய கூறுவெளியானது $S = \{0,1,2,...\}$.

(3) (i) சமவாய்ப்பு முறையில் 0-க்கும் 1-க்கும் இடையில் ஒரு எண்ணைத் தேர்ந்தெடுக்க அமையும் சோதனையின் கூறுவெளி $S = \{x: 0 < x < 1\}$.

(ii) ஒரு மின் விளக்கின் ஆயுள் காலத்தைக் காட்டும் (t மணிநேரத்தில்) நிகழ்ச்சியின் கூறுவெளி $S = \{ t: 0 < t < 1000\}$

எடுத்துகாட்டு (2) மற்றும் (3) ல் அமைந்துள்ள இரு வகையான முடிவுறா கணங்களை வேறுபடுத்தும்போது, அதில் ஒன்று மற்றொன்றைவிடக் குறிப்பிடத்தக்க அதிக உறுப்புகளைப் பெற்றுள்ளது என அறியலாம். குறிப்பாக (2) ல் உள்ள கூறுவெளி S-ல் உள்ள உறுப்புகள் எண்ணிடத்தக்கவை. ஆனால் (3) ல் உள்ள கூறுவெளியின் உறுப்புகள் எண்ணிடத்தக்கதல்ல. எண்ணிடத்தக்க மற்றும் முடிவற்ற (countably infinite) கணங்களின் உறுப்புகளைப் பட்டியலிட்டு அவைகளை இயல் எண்கள் கணம் N-உடன் ஒன்றுக் கொன்று தொடர்புபடுத்தலாம். ஆனால் எண்ணணிடத்தக்க இயலாத கணங்களை இவ்வாறு தொடர்புபடுத்த இயலாது.

மேலே உள்ள எடுத்துக்காட்டுகள் மூலம் ஒரு கூறுவெளியில் உள்ள உறுப்புகள் எண்ணிடத்தக்கவையாக அல்லது எண்ணிடத்தக்கவை அல்லாதவையாக இருக்கும் என்பது தெளிவாகிறது.



12.3 முடிவுறு கூறுவெளி (Finite Sample Space)

இப்பகுதியில் முடிவுறு கூறுப்புள்ளிகள் உடைய கூறுவெளிகளை மட்டுமே காண்போம்.

நிகழ்ச்சிகளின் வகைகள் :

இந்தப் பாட பகுதியில் நாம் அடிக்கடிப் பயன்படுத்தக்கூடிய சில முக்கிய நிகழ்ச்சிகளை (Events) வரையறுப்போம்.

- நிச்சயம் நிகழக்கூடிய நிகழ்ச்சி (Sure event or certain event)
- இயலா நிகழ்ச்சி (Impossible event)
- நிரப்பி நிகழ்ச்சி (Complementary event)
- ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சி (Mutually exclusive events)
- ஒன்றையொன்று விலக்கா நிகழ்ச்சி (Mutually inclusive event)
- யாவுமளாவிய நிகழ்ச்சிகள் (Exhaustive events)
- சமவாய்ப்பு நிகழ்ச்சிகள் (Equally likely events)
- சார்பிலா நிகழ்ச்சிகள் (Independent events) (நிகழ்தகவு கொள்கைகளைப் பற்றி அறிந்த பின் வரையறுக்கப்படும்)

06_12 Probability New.indd 246 25-03-2019 14:01:18

வரையறை 12.6

கூறுவெளியானது முடிவுறு உறுப்புகளைக் கொண்டிருந்தால் அதன் ஒவ்வொரு உட்கணமும் ஒரு நிகழ்ச்சியாகும். அதாவது கூறுவெளியின் அடுக்குக்கணம் $\mathscr{P}(S)$ -இல் உள்ள உறுப்புகள் ஒவ்வொன்றும் ஒரு நிகழ்ச்சியாகும். ஒரு நிகழ்வானது கூறுபுள்ளிகளின் தொகுப்பாகும். இந்நிலையில் S ஆனது உறுதியான அல்லது நிச்சயம் நிகழக்கூடிய நிகழ்ச்சி என அழைக்கப்படும். S–இல் உள்ள வெற்றுக் கணம் $\varnothing$ ஆனது இயலா நிகழ்ச்சி என அழைக்கப்படும்.

வரையறை12.7

ஒவ்வொரு நிகழ்ச்சி A–உடன் $\bar{A}$ என்ற மற்றொரு நிகழ்ச்சியைத் தொடர்புபடுத்தலாம். $\bar{A}$ என்பது A ன் நிரப்பியாகும். நிகழ்ச்சி $\bar{A}$ –ஐ, A இல்லா நிகழ்ச்சி எனவும் அழைக்கலாம்..

விளக்க எடுத்துக்காட்டு 12.2

கூறுவெளி $S = \{1,2,3,4\}$–ன் எல்லா உட்கணங்களின் (S–ன் அடுக்குக்கணம்) கணம்,

$$\mathscr{P}(S) = \big\{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\},$$
$$\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}\big\}$$

(i) $\mathscr{P}(S)$–ன் எல்லா உறுப்புகளும் ஒவ்வொரு நிகழ்ச்சியாகும்.

(ii) $\varnothing$ என்பது இயலா நிகழ்ச்சியாகும்.

(iii) $\{1\},\{2\},\{3\},\{4\}$ என்பவை சாதாரண நிகழ்ச்சிகளாகும்

(iv) $\{1, 2,3,4\}$ என்பது நிச்சயம் நிகழக்கூடிய நிகழ்ச்சி (Sure event or certain event) ஆகும்.

வரையறை 12.8

இரு நிகழ்ச்சிகள் ஒரே சமயத்தில் நிகழக்கூடியவையல்ல எனில் அவை ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகள் (Mutually exclusive events) ஆகும்.

$A_1, A_2, A_3,..., A_k$ என்பன ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகள் (mutually exclusive) எனில் $A_i \cap A_j = \varnothing$, $i \neq j$

வரையறை 12.9

இரு நிகழ்ச்சிகள் ஒரே சமயத்தில் நிகழக்கூடியவை எனில் அவை ஒன்றையொன்று விலக்கா நிகழ்ச்சிகள் (Mutually inclusive events) ஆகும். $A_1, A_2, A_3,..., A_k$ என்பன ஒன்றையொன்று விலக்கா நிகழ்ச்சிகள் எனில், $A_i \cap A_j = \varnothing$, $i \neq j$

விளக்க எடுத்துக்காட்டு 12.3

ஒரு பகடையை உருட்டும் போது கிடைக்கும் கூறுவெளியானது $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

(i) $\{1, 3\} \cap \{2, 4, 5, 6\} = \varnothing$, என்பதால் $\{1,3\}$ மற்றும் $\{2,4,5,6\}$ ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகளாகும்.

(ii) $\{1,6,\},\{2,3,5\}$ ஆகியன ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகளாகும்.

(iii) $\{2,3,5\},\{5,6\}$ என்ற நிகழ்ச்சிகள் ஒன்றையொன்று விலக்கா நிகழ்ச்சிகளாகும் ஏனெனில் $\{2, 3, 5\} \cap \{5, 6\} = \{5\} \neq \varnothing$

வரையறை 12.10

$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_k = S$ எனில் $A_1, A_2, A_3, ..., A_k$ ஆகியவை யாவுமளாவிய நிகழ்ச்சிகள் என அழைக்கப்படும்.

வரையறை 12.11

(i) $A_i \cap A_j = \varnothing$, $i \neq j$ (ii) $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup, \cdots, \cup A_k = S$ எனில் $A_1, A_2, A_3, ..., A_k$ ஆகியவை ஒன்றையொன்று விலக்கும் மற்றும் யாவுமளாவிய நிகழ்ச்சிகளாகும்.

06_12 Probability New.indd 247 25-03-2019 14:01:24

விளக்க எடுத்துக்காட்டு 12.4

ஒரு பகடையை உருட்டும் போது கிடைக்கும் கூறுவெளியானது, $S = \{1,2,3,4,5,6\}$.

இக்கூறுவெளியில் $\{2,3\},\{1,3,5\},\{4,6\},\{6\}$ மற்றும் $\{1,5\}$ என்பவை சில நிகழ்ச்சிகளாகும்.

(i) $\{2, 3\}\cup\{1, 3, 5\}\cup\{4, 6\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = S$ (கூறுவெளி), என்பதால் $\{2,3\},\{1,3,5\},\{4,6\}$ ஆகியவை யாவுமளாவிய நிகழ்ச்சிகளாகும்.

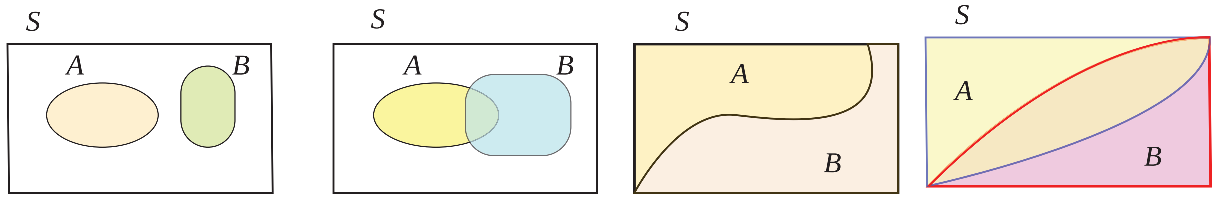
(ii) அதே போன்று $\{2,3\},\{4,6\}$ மற்றும் $\{1,5\}$ ஆகியவையும் யாவுமளாவிய நிகழ்ச்சிகளாகும்.

(iii) $\{1,3,5\},\{4,6\},\{6\}$ மற்றும் $\{1,5\}$ ஆகியவை யாவுமளாவிய நிகழ்ச்சிகள் அல்ல.

(ஏனெனில் $\{1, 3, 5\}\cup\{4, 6\}\cup\{6\}\cup\{1, 5\} \neq S$).

(iv) $\{2,3\},\{4,6\}$, மற்றும் $\{1,5\}$ ஆகியவை ஒன்றையொன்று விலக்கும் மற்றும் யாவுமளாவிய நிகழ்ச்சிகளாகும். ஏனெனில் $\{2,3\}\cap\{4,6\} = \varnothing$, $\{2,3\}\cap\{1,5\} = \varnothing$, $\{4,6\}\cap\{1,5\} = \varnothing$ மற்றும் $\{2, 3\}\cup \{4, 6\}\cup \{1, 5\} = S$.

வென்படங்களின் வாயிலாகப் பல்வகை நிகழ்ச்சிகளுடன் கூடிய கூறுவெளிகளைக் கண்டறிவது எளிது என்பதனைக் கீழ்க்காணும் படங்கள் விளக்குகிறது.



A மற்றும் B ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகள்

A மற்றும் B ஒன்றையொன்று விலக்கா நிகழ்ச்சிகள்

A மற்றும் B ஒன்றையொன்று விலக்கும் மற்றும் யாவுமளாவிய நிகழ்ச்சிகள்

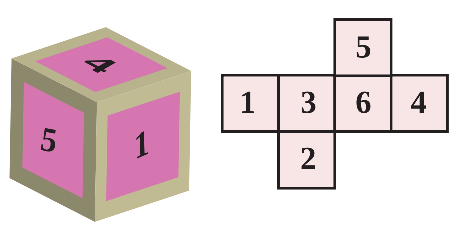
A மற்றும் B ஒன்றையொன்று விலக்கா மற்றும் யாவுமளாவிய நிகழ்ச்சிகள்

வரையறை 12.12

ஒவ்வொரு நிகழ்ச்சியும் நிகழும் வாய்ப்பினைச் சமமாக பெற்றிருப்பின் அவை சமவாய்ப்பு நிகழ்ச்சிகள் (Equally likely events) என அழைக்கப்படும்.

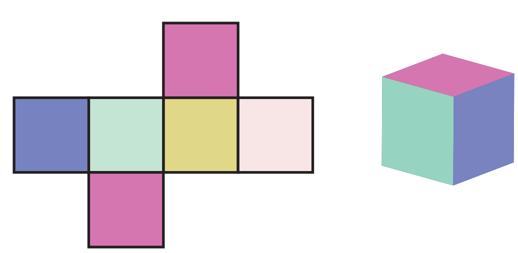
(i) சமவாய்ப்பு நிகழ்ச்சிக்கு ஓர் எடுத்துக்காட்டு: ஒரு சீரான பகடை உருட்டப்படுகிறது

பகடையில் தோன்றும் எண்	1	2	3	4	5	6
நிகழ்வதற்கான வாய்ப்பு	1	1	1	1	1	1



(ii) சமவாய்ப்பில்லாத நிகழ்ச்சிகளுக்கு ஓர் எடுத்துக்காட்டு: படத்தில் காட்டிய ஒரு நிறம் பூசப்பட்ட பகடை உருட்டப்படுகிறது.

பகடையில் தோன்றும் நிறம்					
நிகழ்வதற்கான வாய்ப்பு	1	1	1	2	1



06_12 Probability New.indd 248 25-03-2019 14:01:27

இதே போல் ஒரு நாணயத்தைச் சுண்டிவிடும் போது தலை அல்லது பூ வீழும் நிகழ்ச்சிகள் சமவாய்ப்பு நிகழ்ச்சிகளாகும்.

கூறுவெளிகளைக் காணும் முறைகள்

விளக்க எடுத்துக்காட்டு 12.5

(i) இரு நாணயங்களைச் சுண்டிவிடும் போது கிடைக்கும் கூறுவெளியானது

$S=\{H,T\}\times\{H,T\}=\{(H,H),(H,T),(T,H),(T,T)\}$ அல்லது $\{HH,HT,TH,TT\}$

(ii) ஒரே சமயத்தில், ஒரு நாணயம் சுண்டப்படுகிறது மற்றும் ஒரு பகடை உருட்டப்படுகிறது எனில் கிடைக்கும் கூறுவெளியானது

$S=\{H,T\}\times\{1,2,3,4,5,6\} = \{H1,H2,H3,H4,H5,H6,T1,T2,T3,T4,T5,T6\}$ அல்லது

$S=\{(H,1),(H,2),(H,3),(H,4),(H,5),(H,6),(T,1),(T,2),(T,3),(T,4),(T,5),(T,6)\}$.

நாணயம் மற்றும் பகடையால் கிடைக்கும் முடிவுகளை (out comes) வரிசை மாற்றியும் கூறுவெளியை எழுதலாம். சில சமவாய்ப்பு சோதனைகளால் கிடைக்கும் கூறுவெளிகள் பின்வரும் அட்டவணையில் பட்டியலிடப்பட்டுள்ளது.

சமவாய்ப்புச் சோதனை	முடிவுகளின் மொத்த எண்ணிக்கை	கூறுவெளி
சீரான ஒரு நாணயத்தைச் சுண்டுதல்	$2^1=2$	$\{H, T\}$
சீரான இரு நாணயங்களைச் சுண்டுதல்	$2^2=4$	$\{HH, HT, TH, TT\}$
சீரான மூன்று நாணயங்களைச் சுண்டுதல்	$2^3=8$	$\{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\}$
ஒரு சீரான பகடையை உருட்டுதல்	$6^1=6$	{1, 2,3, 4, 5,6}
இரு சீரான பகடைகளை உருட்டுதல் அல்லது ஒரு சீரான பகடையை இருமுறை உருட்டுதல்	$6^2=36$	{(1,1) ,(1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6), (6,1), (6,2),(6,3), (6,4), (6,5), (6,6)}
52 சீட்டுகளைக் கொண்ட ஆட்ட சீட்டுக் கட்டிலிருந்து ஒன்றை உருவுதல்	$52^1=52$	Heart ♥ A 2 3 4 5 6 7 8 9 10 J Q K சிவப்பு நிறம் Diamond ♦ A 2 3 4 5 6 7 8 9 10 J Q K சிவப்பு நிறம் Spade ♠ A 2 3 4 5 6 7 8 9 10 J Q K கருப்பு நிறம் Club ♣ A 2 3 4 5 6 7 8 9 10 J Q K கருப்பு நிறம்

குறியீடுகள்

A மற்றும் B என்பன இரு நிகழ்ச்சிகள் என்க.

(i) $A \cup B$ என்பது A அல்லது B அல்லது இரண்டும் நிகழ்வது

(ii) $A \cap B$ என்பது A மற்றும் B ஒரே நேரத்தில் நிகழ்வது.

$A \cap B$ என்பதை AB எனவும் குறிப்பிடலாம்.

(iii) $\bar{A}$ அல்லது A' அல்லது A^c என்பது A நிகழாமையைக் குறிக்கிறது .

(iv) $(A \cap \bar{B})$ என்பது A மட்டும் நிகழ்வதைக் குறிக்கிறது.

முன்னறி நிகழ்தகவு: அனுபவம் அல்லது உற்றுநோக்கல் மூலமாக அல்லாமல் கருத்தியல் முடிவுகள் அல்லது கோட்பாடுகளை உருவாக்குதல் மூலம் பெறப்பட்ட அறிவு

12.4 நிகழ்தகவு (Probability)

12.4.1 நிகழ்தகவின் பழமையான (முன்னறி நிகழ்தகவு) வரையறை (பெர்னோலியின் சமவாய்ப்புக் கொள்கை)

(Classical definition (Apriori) of probability (Bernoulli's principle of equally likely))

முன்வகுப்பில் நிகழ்தகவின் வரையறையைப் பயன்படுத்திக் கணிதத்தில் தீர்வு கண்டோம். இங்கு நிகழ்தகவின் அடிப்படைக் கொள்கைகளின் அணுகுமுறையைப் பற்றி அறிவோம் (பின் நிகழ்தகவு).

பின் நிகழ்தகவு: அனுபவம் அல்லது உற்று நோக்கல் மூலமாக பெறப்பட்ட அறிவு

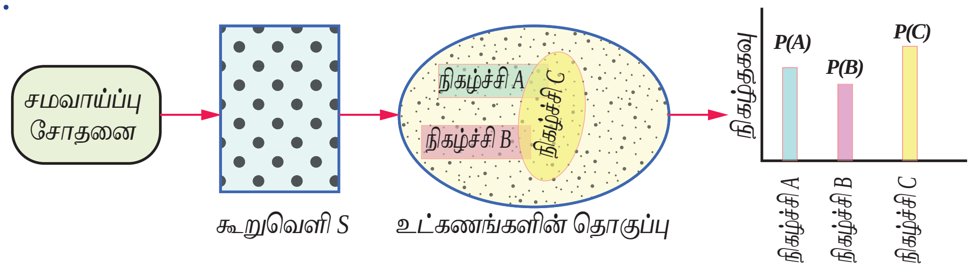
பழமையான கொள்கைகளின் கீழ் வரும் அடிப்படைக் கொள்கையில் எதேச்சையான சோதனையின் விளைவுகள் சமவாய்ப்பில் இருக்கும். ஒரு சோதனையில் யாவுமளாவிய மற்றும் ஒன்றையொன்று விலக்கிய சமவாய்ப்புள்ள முடிவுகள் n எண்ணிக்கையிலும், அவற்றில் m எண்ணிக்கையுள்ள முடிவுகள் A-விற்கு சாதகமாகவும் இருப்பின் A-யினுடைய நிகழ்தகவு $\frac{m}{n}$ ஆகும். அதாவது , $P(A)=\frac{m}{n}$.

வரையறை 12.13

ஒரு சமவாய்ப்பு சோதனையின் கூறுவெளி S எனவும் அதன் ஏதேனும் ஒரு நிகழ்ச்சி A எனவும் கொள்க. S மற்றும் A –லுள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை முறையே $n(S)$ மற்றும் $n(A)$ எனில் A –ன் நிகழ்தகவு,

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{A\text{-க்கு சாதகமான முடிவுகளின் எண்ணிக்கை}}{S\text{-ல் உள்ள யாவுமளாவிய முடிவுகளின் எண்ணிக்கை}}$$

ஒவ்வொரு நிகழ்தகவியல் மாதிரிகளை உள்ளடக்கிய செயல்முறை பின்வரும் படத்தில் விளக்கப் பட்டுள்ளன.



நிகழ்தகவின் பழமையான வரையறையானது முடிவுறு எண்ணிக்கையுள்ள சாத்தியமான முடிவுகள் (outcomes) கொண்ட சோதனைகளுக்கு மட்டும் பயன்படும் வகையில் வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது. மேலும் இவ்வரையறையின் மூலம், சோதனைகளின் சமவாய்ப்பு நிகழ்ச்சிகளுடன் தொடர்புடைய மற்றும் சேர்ப்பியலை (combinatorial) முதன்மையாகக் கொண்ட கணக்கீடுகளை மட்டுமே தீர்க்கக் கூடியதாக அமைந்துள்ளது. 'தலை விழும்வரை நாணயத்தை

06_12 Probability New.indd 250
25-03-2019 14:01:38

சுண்டுதல்' போன்ற சில முக்கிய சமவாய்ப்புச் சோதனைகளின் நிகழ்ச்சிகளின் (events) கணம் ஒரு முடிவுறா கணத்தை உருவாக்குவதால் இவ்வரையறையைப் பயன்படுத்த இயலாது.

நிகழ்தகவின் வழக்கமான வரையறைகளின் இத்தகைய வரம்புகள், நிகழ்தகவின் நவீன வரையறையின் பரிணாம வளர்ச்சிக்கு வழிவகுத்தது.

ரஷ்யக் கணிதவியலாளரான ஆண்ட்ரே நிக்கோலவிச் கொல்மோ குரோவ் நவீன நிகழ்தகவு கொள்கைக்கு அடித்தளம் அமைத்தார். அவர் ரிச்சார்ட் ஃபான் மைசஸ் அறிமுகப்படுத்திய கூறுவெளியை அளவை இயலுடன் (measure theory) இணைத்து 1933–ல் நிகழ்தகவு அடிப்படைக் கொள்கையை அறிமுகப்படுத்தினார். நவீன நிகழ்த்தகவுக் கோட்பாட்டினைத் தர்க்க ரீதியாக உருவாக்க இவருடைய நிகழ்தகவுக் கொள்கையே அடிப்படையாக அமைந்தது.

கொல்மோ குரோவ்

12.4.2 நிகழ்தகவின் அடிப்படைக் கொள்கைகள் (Axioms of probability)

S என்பது ஒரு சமவாய்ப்புச் சோதனையின் முடிவுற்ற கூறுவெளி. $\mathscr{P}(S)$ என்பது நிகழ்ச்சிகளின் தொகுப்பு எனவும், P என்பது $\mathscr{P}(S)$–ல் வரையறுக்கப்படும் மெய்மதிப்புடைய சார்பு எனவும் கொள்க. $P(A)$ என்பது கீழ்க்காணும் கொள்கைகளை நிறைவு செய்தால், A-வின் நிகழ்தகவு $P(A)$ என அழைக்கப்படுகிறது.

- $[P_1]$ ஏதேனும் ஒரு நிகழ்ச்சி A–க்கு $P(A) \geq 0$ (குறையற்ற எண் கொள்கை) (Non-negativity axiom)
- $[P_2]$ ஒன்றையொன்று விலக்கும் ஏதேனும் இரு நிகழ்ச்சிகள் A மற்றும் B-க்கு
  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ (கூட்டல் கொள்கை) (Additivity axiom)
- $[P_3]$ நிச்சய நிகழ்ச்சிக்கு, $P(S) = 1$ (சமப்படுத்துதல் கொள்கை) (Normalization axiom)

குறிப்பு 12.1

(i) $0 \leq P(A) \leq 1$

(ii) $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ என்பவை ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகள் எனில்,

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \cdots + P(A_n)$$

முடிவுறு கூறுவெளிகள் உடைய நிகழ்தகவிற்கான சில தேற்றங்கள்(நிரூபணமின்றி)

கூறு வெளியிலுள்ள நிகழ்ச்சிகள் சமவாய்ப்பு நிகழ்ச்சிகள் எனில், தேற்றம் 12.1-யைப் பயன்படுத்தலாம். அவ்வாறில்லையெனில் தேற்றம் 12.2 -யைப் பயன்படுத்தலாம்.

தேற்றம் 12.1

S என்ற கூறுவெளியின் ஏதேனும் ஒரு உட்கணம் A என்க. $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(S)}$ எனில் $P(A)$ என்பது $[P_1], [P_2]$ மற்றும் $[P_3]$ என்ற நிகழ்தகவுக் கொள்கைகளை நிறைவு செய்யும்.

தேற்றம் 12.2

$S = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$ என்பது ஒரு முடிவுறு கூறுவெளி என்க. கூறுவெளி S -ல் உள்ள ஒவ்வொரு கூறுப்புள்ளி a_i -க்கும் p_i என்ற மெய் எண்ணுடன் தொடர்புபடுத்தி,

பின்வரும் பண்புகளை

06_12 Probability New.indd 251 25-03-2019 14:01:45

(i) ஒவ்வொரு $p_i \geq 0$. (ii) $\sum p_i = p_1 + p_2 + p_3 + \cdots + p_n = 1$, நிறைவு செய்தால் p_i என்பது a_i -ன் நிகழ்தகவு என அழைக்கப்படும்.

A என்ற நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவு $P(A)$ ஆனது A–ன் கூறுபுள்ளிகளின் நிகழ்தகவு கூடுதல் என வரையறுக்கப்பட்டால், $P(A)$ என்ற சார்பானது $[P_1], [P_2]$, மற்றும் $[P_3]$ என்ற நிகழ்தகவு கொள்கைகளை நிறைவு செய்யும்.

குறிப்பு: சில சமயங்களில் முடிவுறு கூறுவெளியிலுள்ள கூறுபுள்ளிகளையும் அதற்குரிய நிகழ்தகவுகளையும் பின்வருமாறு அட்டவணைப்படுத்தலாம்.

நிகழ்ச்சிகள்	$a_1 \quad a_2 \quad a_3 \ \ldots \quad a_n$
நிகழ்தகவு	$p_1 \quad p_2 \quad p_3 \ \ldots \quad p_n$

விளக்க எடுத்துக்காட்டு 12.6

(1) $S = \{1,2,3\}$ என்க. $\wp(S)$ என்பது S–ன் அடுக்குக்கணம் மற்றும் $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$ எனில் $P(\{1\}) = \frac{1}{3}, P(\{2\}) = \frac{1}{3}$ மற்றும் $P(\{3\}) = \frac{1}{3}$, ஆகியவை நிகழ்தகவின் அடிப்படை கொள்கைகள் $[P_1], [P_2]$ மற்றும் $[P_3]$–ஐ நிறைவு செய்யும். இங்குச் சோதனையின் எல்லா முடிவுகளும் சமவாய்ப்பு நிகழ்ச்சிகள் ஆகும்.

(2) $S = \{1,2,3\}$ என்க. $\mathscr{P}(S)$ என்பது S–ன் அடுக்குக்கணம் ஆகும். A எனும் நிகழ்ச்சியில் உள்ள உறுப்புகளின் நிகழ்தகவின் கூடுதல், நிகழ்தகவு $P(A)$ என வரையறுக்கப்பட்டால் $P(\{1\}) = \frac{1}{2}, P(\{2\}) = \frac{1}{4}$ மற்றும் $P(\{3\}) = \frac{1}{4}$, ஆகியவை நிகழ்தகவின் அடிப்படை கொள்கைகள் $[P_1], [P_2]$ மற்றும் $[P_3]$–ஐ நிறைவு செய்யும்.

(3) $S = \{1,2,3\}$ மற்றும் $\mathscr{P}(S)$ என்பது S–ன் அடுக்குக்கணம் ஆகும். A எனும் நிகழ்ச்சியில் உள்ள உறுப்புகளின் நிகழ்தகவின் கூடுதல், நிகழ்தகவு $P(A)$ என வரையறுக்கப்பட்டால் $P(\{1\}) = 0, P(\{2\}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ எனில் $P(\{3\}) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}$, ஆகியவை நிகழ்தகவின் அடிப்படை கொள்கைகள் $[P_1], [P_2]$ மற்றும் $[P_3]$–ஐ நிறைவு செய்யும்.

(2) மற்றும் (3)–ல் சோதனையின் முடிவுகள் சமவாய்ப்பு நிகழ்ச்சிகள் அல்ல.

குறிப்பு 12.2

நிகழ்தகவின் மதிப்புகள் விகிதமுறா எண்களாகவும் இருக்கலாம்.

வகுப்பறைச் செயல்பாடு

ஒவ்வொரு மாணவரும் ஒரு நாணயத்தை 10 முறை சுண்டவேண்டும்.

$$p = \frac{\text{கிடைக்கும் தலைகளின் எண்ணிக்கை}}{10}$$ எனக் கணக்கிடுக.

அனைத்து மாணவர்களும் நாணயத்தை சுண்டும்போது கிடைக்கக்கூடிய தலைகளின் மொத்த எண்ணிக்கையின் விகிதம் காண்க. நாணயத்தைச் சுண்டும் எண்ணிக்கை அதிகரிக்கும் போது $p \to \frac{1}{2}$ என அறியலாம்.

06_12 Probability New.indd 252 25-03-2019 14:01:53

எடுத்துக்காட்டு 12.1

A, *B* மற்றும் *C* என்ற ஒன்றையொன்று விலக்கிய மூன்று நிகழ்ச்சிகளை மட்டும் கொண்ட ஒரு சோதனையின் நிகழ்ச்சிகளின் நிகழ்தகவுகள் பின்வருமாறு கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. இவை நிகழ்தகவிற்கான சாத்தியமானவையா என ஆராய்க.

(i) $P(A)=\frac{4}{7}$, $P(B)=\frac{1}{7}$, $P(C)=\frac{2}{7}$.

(ii) $P(A)=\frac{2}{5}$, $P(B)=\frac{1}{5}$, $P(C)=\frac{3}{5}$.

(iii) $P(A)=0.3$, $P(B)=0.9$, $P(C)=-0.2$.

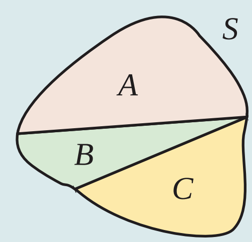
(iv) $P(A)=\frac{1}{\sqrt{3}}$, $P(B)=1-\frac{1}{\sqrt{3}}$, $P(C)=0$.

(v) $P(A)=0.421$, $P(B)=0.527$ $P(C)=0.042$.

தீர்வு

ஒவ்வொரு சோதனையிலும் சரியான மூன்று ஒன்றையொன்று விலக்கிய நிகழ்ச்சிகள் மட்டுமே உள்ளன. எனவே அவை யாவுமளாவிய நிகழ்ச்சிகளாகும்.

$$\Rightarrow S = A \cup B \cup C$$



எனவே நிகழ்தகவின் அடிப்படைக் கொள்கையின்படி

$P(A)\geq 0$, $P(B)\geq 0$, $P(C)\geq 0$ மற்றும்

$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)=P(S)=1$ ஆகும்

(i) $P(A)=\frac{4}{7}\geq 0$, $P(B)=\frac{1}{7}\geq 0$ மற்றும் $P(C)=\frac{2}{7}\geq 0$

$$P(S)=P(A)+P(B)+P(C)=\frac{4}{7}+\frac{1}{7}+\frac{2}{7}=1$$

எனவே கொடுக்கப்பட்டுள்ள நிகழ்தகவுகள் சாத்தியமானவையே.

(ii) $P(A)=\frac{2}{5}\geq 0$, $P(B)=\frac{1}{5}\geq 0$ மற்றும் $P(C)=\frac{3}{5}\geq 0$

ஆனால் $P(S)=P(A)+P(B)+P(C)=\frac{2}{5}+\frac{1}{5}+\frac{3}{5}=\frac{6}{5}>1$

எனவே கொடுக்கப்பட்டுள்ள நிகழ்தகவுகள் சாத்தியமானதல்ல.

(iii) $P(C)=-0.2$ ஒரு குறை எண்ணாயிருப்பதால் கொடுக்கப்பட்டுள்ள நிகழ்தகவுகள் சாத்தியமானதல்ல

(iv) சாத்தியமானது. ஏனெனில்

$P(A)=\frac{1}{\sqrt{3}}\geq 0$, $P(B)=1-\frac{1}{\sqrt{3}}\geq 0$ மற்றும் $P(C)=0\geq 0$

மேலும் $P(S)=P(A)+P(B)+P(C)=\frac{1}{\sqrt{3}}+1-\frac{1}{\sqrt{3}}+0=1$.

(v) $P(A)=0.421\geq 0$, $P(B)=0.527\geq 0$ மற்றும் $P(C)=0.042\geq 0$

என இருந்தாலும்,

$P(S)=P(A)+P(B)+P(C)=0.421+0.527+0.042=0.990<1$ என்பதால் கொடுக்கப்பட்ட நிகழ்தகவுகள் சாத்தியமற்றவை.

06_12 Probability New.indd 253 25-03-2019 14:02:05

எடுத்துக்காட்டு 12.2

முதல் 10 மிகை முழு எண்களில் இருந்து ஒரு எண் தேர்ந்தெடுக்கப்படுகிறது. அந்த எண் (i) இரட்டைப் படை (ii) மூன்றின் மடங்காக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

தீர்வு

கூறுவெளி $S=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $n(S)=10$

A என்பது இரட்டைப்படை எண் கிடைக்கும் நிகழ்ச்சி என்க.

B என்பது மூன்றின் மடங்கு கிடைக்கும் நிகழ்ச்சி என்க.

$A=\{2, 4, 6, 8, 10\}, \quad n(A)=5,$

$B=\{3, 6, 9\}, \quad n(B)=3$

P (இரட்டைப்படை எண் கிடைக்க)$= P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}.$

P (மூன்றின் மடங்கு கிடைக்க)$= P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{3}{10}.$

எடுத்துக்காட்டு 12.3

மூன்று நாணயங்கள் ஒரே சமயத்தில் சுண்டப்படுகின்றன. (i) சரியாக ஒரு தலை (ii) குறைந்தது ஒரு தலை (iii) அதிகபட்சமாக ஒரு தலை கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவுகளைக் காண்க.

தீர்வு

மூன்று நாணயங்களைச் ஒரு முறை சுண்டுவதும் ஒரே நாணயத்தை மூன்று முறைச்சுண்டுவதும் ஒன்றே என்பதைக் கவனிக்கவும். கூறுவெளி $S=\{H,T\}\times\{H,T\}\times\{H,T\}$

$S=\{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\}, \quad n(S)=8$

A என்பது ஒரு தலை விழும் நிகழ்ச்சி, B என்பது குறைந்தபட்சம் ஒரு தலை விழும் நிகழ்ச்சி மற்றும் C என்பது அதிகபட்சமாக ஒரு தலை விழும் நிகழ்ச்சி என்க.

$A=\{HTT, THT, TTH\}; \quad n(A)=3$

$B=\{HTT, THT, TTH, HHT, HTH, THH, HHH\}; \quad n(B)=7$

$C=\{TTT, HTT, THT, TTH\}; \quad n(C)=4.$

எனவே தேவைப்படும் நிகழ்தகவுகள்

(i) $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{3}{8}$

(ii) $P(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{7}{8}$

(iii) $P(C)=\frac{n(C)}{n(S)}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}.$

குறிப்பு 12.3

கூறுவெளியில் உள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை மிகவும் சிறிய அளவில் இருந்தால் கூறுவெளியின் உறுப்புகளை விரல் விட்டு எண்ணிவிடலாம். ஆனால் உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை மிக அதிக அளவில் இருந்தால் சேர்ப்பியல் (Combinatorices) முறையைப் பயன்படுத்திக் கூறுவெளியில் உள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையைக் கணக்கிடலாம்.

பின்வரும் கணக்கில் உள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையைச் சேர்ப்பியலைப் பயன்படுத்திக் கணக்கிடலாம்.

06_12 Probability New.indd 254

25-03-2019 14:02:11

எடுத்துக்காட்டு 12.4

பத்து நாணயங்கள் சுண்டப்படுகின்றன (i) சரியாக இரு தலைகள் (ii) அதிகபட்சமாக இரண்டு தலைகள் (*iii*)குறைந்தது இரண்டு தலைகள் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவினைக் காண்க.

தீர்வு

ஒரே நேரத்தில் பத்து நாணயங்களைச் சுண்டுவதும், ஒரே நாணயத்தைப் பத்துமுறை சுண்டுவதும் ஒரே கூறுவெளியைக் கொடுக்கும்.

S என்பது கூறுவெளி என்க

அதாவது $$S = \overbrace{\{H,T\}\times\{H,T\}\times\{H,T\}\times\cdots\times\{H,T\}}^{10\text{முறை}}$$

A என்பது சரியாக இரு தலைகள் கிடைப்பதற்கான நிகழ்ச்சி

B என்பது அதிகபட்சமாக இரு தலைகள் கிடைப்பதற்கான நிகழ்ச்சி மற்றும்

C என்பது குறைந்தபட்சம் இரு தலைகள் கிடைப்பதற்கான நிகழ்ச்சி என்க.

பத்து நாணயங்கள் சுண்டப்படும்போது கூறுவெளியின் உள்ள

உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை $2^n = 2^{10} = 1024$

$$n(S) = 1024$$

$$n(A) = {}^{10}C_2 = 45$$

$$n(B) = {}^{10}C_0 + {}^{10}C_1 + {}^{10}C_2 = 1 + 10 + 45 = 56$$

$$n(C) = {}^{10}C_2 + {}^{10}C_3 + {}^{10}C_4 + \cdots + {}^{10}C_{10}$$

$$= n(S) - ({}^{10}C_0 + {}^{10}C_1) = 1024 - 11 = 1013$$

தேவையான நிகழ்தகவுகள்

(i) $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(S)} = \dfrac{45}{1024}$

(ii) $P(B) = \dfrac{n(B)}{n(S)} = \dfrac{56}{1024} = \dfrac{7}{128}$

(iii) $P(C) = \dfrac{n(C)}{n(S)} = \dfrac{1013}{1024}.$

எடுத்துக்காட்டு 12.5

ஒரு சீரான பகடையை ஒரு முறை உருட்டி விடும்போது

(i) இரட்டைப்படை எண் (ii) மூன்றின் மடங்காக கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

தீர்வு

S என்பது கூறுவெளி, A என்பது இரட்டைப்படை எண் மற்றும்

B என்பது மூன்றின் மடங்காகக் கிடைப்பதற்கான நிகழ்ச்சி என்க.

எனவே

$S = \{1,2,3,4,5,6\} \quad \Rightarrow n(S) = 6$

$A = \{2,4,6\} \quad \Rightarrow n(A) = 3$

$B = \{3,6\} \quad \Rightarrow n(B) = 2$

06_12 Probability New.indd 255 25-03-2019 14:02:18

தேவையான நிகழ்தகவுகள்.

(i) P (இரட்டைப்படை எண் கிடைக்க) $= P(A) = \dfrac{n(A)}{n(S)} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$

(ii) P (மூன்றின் மடங்கு கிடைக்க) $= P(B) = \dfrac{n(B)}{n(S)} = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$.

எடுத்துக்காட்டு 12.6

ஒரு சோடிப் பகடைகளை உருட்டி விடும்போது அவற்றின் கூட்டுத் தொகை

(i) 7 (ii) 7 அல்லது 9 (iii) 7 அல்லது 12 கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க?

தீர்வு

கூறுவெளி $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \times \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$$S = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\}$$

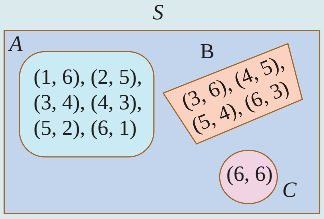
நிகழக்கூடிய மொத்த நிகழ்ச்சிகள் $= 6^2 = 36 = n(S)$

A என்பது கூடுதல் 7 கிடைக்கும் நிகழ்ச்சி, *B* என்பது கூடுதல் 9 கிடைக்கும் நிகழ்ச்சி மற்றும் *C* என்பது கூடுதல் 12 கிடைக்கும் நிகழ்ச்சி என்க.

$A = \{(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)\} \Rightarrow n(A) = 6$

$B = \{(3,6), (4,5), (5,4), (6,3)\} \Rightarrow n(B) = 4$

$C = \{(6,6)\} \Rightarrow n(C) = 1$



(i) P (கூடுதல் 7 கிடைக்க) $= P(A)$

$$= \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

(ii) P (7 அல்லது 9 கிடைக்க) $= P(A$ அல்லது $B) = P(A \cup B)$

$$= P(A) + P(B)$$

(A மற்றும் B ஒன்றையொன்று விலக்கிய நிகழ்ச்சிகள், $A \cap B = \varnothing$)

$$= \frac{n(A)}{n(S)} + \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{6}{36} + \frac{4}{36} = \frac{5}{18}$$

(iii) P (7 அல்லது 12 கிடைக்க) $= P(A$ அல்லது $C) = P(A \cup C)$

$$= P(A) + P(C)$$

(A மற்றும் C ஒன்றையொன்று விலக்கிய நிகழ்ச்சிகள்)

$$= \frac{n(A)}{n(S)} + \frac{n(C)}{n(S)} = \frac{6}{36} + \frac{1}{36} = \frac{7}{36}.$$

06_12 Probability New.indd 256 25-03-2019 14:02:26

எடுத்துக்காட்டு 12.7

நடப்பு ஆண்டுக்கான FIDE சதுரங்கப் போட்டியில் (World Chess Federation) கோப்பையை வென்றிட X, Y மற்றும் Z என்ற மூன்று நபர்கள் போட்டியிடுகின்றனர். X–ன் வெற்றி வாய்ப்பு Y –ன் வெற்றி வாய்ப்பைப் போல 3 மடங்காக இருக்கும். Y–ன் வெற்றி வாய்ப்பு Z–ன் வெற்றி வாய்ப்பைப் போல 2 மடங்காக இருக்கும் எனில் ஒவ்வொருவரும் கோப்பையை வெல்லுவதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

தீர்வு

நடப்பு ஆண்டுக்கான FIDE கோப்பையை X, Y மற்றும் Z வெற்றிபெறும் நிகழ்ச்சிகளை A, B மற்றும் C என்க. X–ன் வெற்றி வாய்ப்பு Y –ன் வெற்றி வாய்ப்பைப் போல 3 மடங்காக இருக்கும். எனக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. எனவே

$$A : B \; :: \; 3 : 1. \qquad (1)$$

Y–ன் வெற்றி வாய்ப்பு Z–ன் வெற்றி வாய்ப்பைப் போல 2 மடங்காக இருக்கும். எனவே

$$B : C :: \; 2 : 1 \qquad (2)$$

(1) மற்றும் (2)–லிருந்து

$$A : B : C :: \; 6 : 2 : 1$$

$A = 6k$, $B = 2k$, $C = k$, இங்கு k என்பது ஒரு விகித மாறிலி ஆகும்.

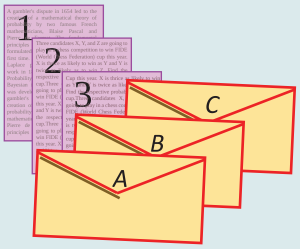
கோப்பையை X வெல்வதற்கான நிகழ்தகவு $P(A) = \frac{6k}{9k} = \frac{2}{3}$

கோப்பையை Y வெல்வதற்கான நிகழ்தகவு $P(B) = \frac{2k}{9k} = \frac{2}{9}$ மற்றும்

கோப்பையை Z வெல்வதற்கான நிகழ்தகவு $P(C) = \frac{k}{9k} = \frac{1}{9}$.

எடுத்துக்காட்டு 12.8

மூன்று வெவ்வேறு நபர்களுக்கு மூன்று கடிதங்கள் எழுதப்பட்டு மூன்று உறைகளில் வைக்கப்பட்டு அவர்களுக்கான விலாசமும் எழுதப்பட்டுள்ளன. முகவரியைப் பார்க்காமலே கடிதங்களை உறையிலிடும்போது (i) ஒரு கடிதம் சரியான உறையிலிட (ii) எல்லாக் கடிதங்களுமே தவறாக உறையிலிட நிகழ்தகவுகளைக் காண்க.



தீர்வு

A, B மற்றும் C என்பவை உறைகளைக் குறிக்கும் என்க. 1, 2 மற்றும் 3 ஆனது முறையே A, B மற்றும் C–க்கான கடிதங்களைக் குறிக்கும் என்க.

கடிதங்களை உறைகளில் இடுவதற்கான எல்லா சாத்தியக் கூறுகளும் அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

முடிவுகள்

உறைகள்	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6
A	1	1	2	2	3	3
B	2	3	1	3	1	2
C	3	2	3	1	2	1

c_i என்பது கிடைக்க கூடிய நிகழ்ச்சி என்க.

X என்பது ஒரு கடிதம் மட்டும் சரியான உறையிலிடும் நிகழ்ச்சி என்க.

Y என்பது மூன்று கடிதங்களுமே தவறாக உறையிலிடுவதற்கான நிகழ்ச்சி என்க.

$$S = \{c_1,\; c_2,\; c_3,\, c_4,\; c_5,\; c_6\},\; n(S) = 6$$

06_12 Probability New.indd 257 25-03-2019 14:02:28

$$X = \{c_2, c_3, c_6\}, \qquad n(X) = 3$$
$$Y = \{c_4, c_5\} \qquad n(Y) = 2$$

$$\text{(i)} \quad P(X) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \qquad \text{(ii)} \quad P(Y) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

எடுத்துக்காட்டு 12.9

$\begin{bmatrix} x & y \\ z & 1 \end{bmatrix}$ என்பது M என்ற அணி என்க. சமவாய்ப்பு முறையில் x, y மற்றும் z ன் மதிப்புகள், $\{1, 2, 3\}$ என்ற கணத்திலிருந்து மதிப்புக்களைப் பெறலாம். மேலும் மதிப்புகள் திரும்பத் திரும்பப் பயன்படுத்தலாம் (அதாவது, $x = y = z$) எனில், அணி M ஆனது பூச்சிய கோவை அணியாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு என்ன?

தீர்வு

M என்பது பூச்சிய கோவை அணி எனில் $\begin{vmatrix} x & y \\ z & 1 \end{vmatrix} = 0$. அதாவது, $x - yz = 0$. (x, y, z)–களை தேர்வு செய்யவேண்டிய வாய்ப்புகளுக்கான கணம், $\{(1,1,1), (2,1,2), (2,2,1), (3,1,3), (3,3,1)\} = A$ என்க.

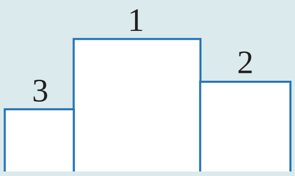
சாதகமான நிகழ்ச்சிகளின் எண்ணிக்கை $\qquad n(A) = 5$

மொத்த நிகழ்ச்சிகளின் எண்ணிக்கை $\qquad n(S) = 3^3 = 27$

கொடுத்துள்ள அணி பூஜ்ஜியக் கோவை அணியாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{5}{27}$

எடுத்துக்காட்டு 12.10

ஒரு விளையாட்டுப் போட்டியில் வெற்றி பெறுபவர் ஏறும் வெற்றி மேடையானது படத்தில் உள்ளவாறு மூன்று நிலைகளாக அமைக்கப்பட்டுள்ளன. சிவப்பு வர்ணம் உட்பட ஆறு வர்ணங்களைக் கொண்டு மூன்று நிலைகளுக்கும் வெவ்வேறான வர்ணங்கள் பூச வேண்டும். சிறிய நிலை மேடைக்கு (3வது நிலை) சிவப்பு வர்ணம் பூசப்படுவதற்கான நிகழ்தகவு என்ன?



தீர்வு

S என்பது கூறுவெளி என்க.

A என்பது சிறிய நிலை (3 வது நிலை) சிவப்பு வர்ணம் பூசும் நிகழ்ச்சி என்க.

$$n(S) = 6P_3 = 6 \times 5 \times 4 = 120$$

$$n(A) = 5 \times 4 = 20$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{20}{120} = \frac{1}{6}.$$

	6	6	3
$n(S)$	6	5	4
$n(A)$	5	4	சிவப்பு

12.4.3 சாதக மற்றும் சாதகமற்ற விகிதங்கள் (Odds)

புள்ளியியல் மற்றும் நிகழ்தகவில் விகிதங்கள் என்ற சொல் அதிக அளவில் பயன்படுத்தப்படுகிறது. ஒரு நிகழ்ச்சியில் A–க்குச் சாதக மற்றும் அதற்கு பாதகமாக உள்ள நிகழ்வினைத் தொடர்பு படுத்துவது விகிதமாகும். 'a' என்பது ஒரு நிகழ்ச்சி எத்தனை வழிகளில் நிகழ்கிறது மற்றும் 'b' என்பது அதே நிகழ்ச்சி எத்தனை வழிகளில் நடக்க இயலாது என்பதையும் குறிக்கிறது என்க.

A என்ற நிகழ்வில் A நிகழ்வதற்கு சாதகமான விகிதம் $a : b$ மற்றும்

$$P(A) = \frac{a}{a+b}.$$

மேலும் ஒரு நிகழ்ச்சி நிகழ்வதற்குச் சாதகமான விகிதம் $a : b$ என்பதனை அந்நிகழ்ச்சிக்கு பாதகமான விகிதம் $b : a$ என எழுதலாம். ஒரு நிகழ்ச்சி நிகழ்வதற்கான நிகழ்தகவு p எனில், p க்கு சாதமான விகிதம் $1-p$ ஆகும் மற்றும் $1-p$ –க்கு பாதகமான விகிதம் p ஆகும்.

விளக்க எடுத்துக்காட்டு 12.7

(i) ஒரு பகடை ஒரு முறை உருட்டப்படுகிறது. கூறுவெளியை S என்க. A என்பது 5 விழும் நிகழ்ச்சி என்க.

$n(S)=6$, $n(A)=1$ மற்றும் $n(\bar{A})=5$.

A –க்கு சாதகமான விகிதமானது $1:5$ அல்லது $\frac{1}{5}$, A –க்குச் சாதகமற்ற விகிதம் $5:1$ அல்லது $\frac{5}{1}$,

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(A)+n(\bar{A})}=\frac{1}{5+1}=\frac{1}{6} = \frac{n(A)}{n(S)}.$$

K21JF1

(ii) B என்ற நிகழ்ச்சிக்குச் சாதகமான விகிதம் 3:5, எனில் $P(B)=\frac{3}{8}$

(iii) C என்ற நிகழ்ச்சிக்குச் சாதகமற்ற விகிதம் 4:11, எனில் $P(C)=\frac{11}{15}$.

எடுத்துக்காட்டு 12.11

இரண்டு பத்து ரூபாய், 4 நூறு ரூபாய் மற்றும் 6 ஐந்து ரூபாய் தாள்கள் ஒருவர் பாக்கெட்டில் உள்ளது. சமவாய்ப்பு முறையில் 2 தாள்கள் எடுக்கப்படுகின்றன. அவ்விரண்டு தாள்கள் நூறு ரூபாய் தாள்களாக இருப்பதற்குச் சாதக விகிதம் மற்றும் அதன் நிகழ்தகவு என்ன?

தீர்வு

S என்பது கூறுவெளி என்க.

A என்பது 2 நூறு ரூபாய்த் தாள்களை எடுக்கும் நிகழ்ச்சி என்க.

எனவே $n(S)=12c_2=66$, $n(A)=4c_2=6$ மற்றும் $n(\bar{A})=66-6=60$

A -விற்கு சாதகமான விகிதம் 6: 60 அதாவது A விற்கு சாதகமான விகிதம் 1: 10, மற்றும் $P(A)=\frac{1}{11}$.

பயிற்சி 12.1

(1) பின்வரும் ஒன்றையொன்று விலக்கிய A, B, C மற்றும் D என்ற நான்கு நிகழ்ச்சிகளை மட்டும் கொண்ட ஒரு சோதனையின் நிகழ்ச்சிகளின் நிகழ்தகவுகள் சாத்தியமானவையா எனத் தீர்மானிக்கவும்.

(i)	$P(A) = 0.15$,	$P(B) = 0.30$,	$P(C) = 0.43$,	$P(D) = 0.12$
(ii)	$P(A) = 0.22$,	$P(B) = 0.38$,	$P(C) = 0.16$,	$P(D) = 0.34$
(iii)	$P(A) = \frac{2}{5}$,	$P(B) = \frac{3}{5}$,	$P(C) = -\frac{1}{5}$,	$P(D) = \frac{1}{5}$

06_12 Probability New.indd 259 25-03-2019 14:02:44

(2) இரண்டு நாணயங்கள் ஒரே சமயத்தில் சுண்டப்படுகின்றன.

(அ) ஒரு தலை மற்றும் ஒரு பூ

(ஆ) அதிகபட்சமாக இரு பூ கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவுகளைக் காண்க.

(3) ஒரு பெட்டியில் 5 மாம்பழங்களும் 4 ஆப்பிள் பழங்களும் உள்ளன. சமவாய்ப்பு முறையில் இரண்டு பழங்கள் எடுக்கப்பட்டால் (i) ஒரு மாம்பழமும் ஒரு ஆப்பிள் பழமும் (ii) இரண்டும் ஒரே வகையைச் சார்ந்ததாகவும் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவுகளைக் காண்க.

(4) (i) ஒரு சாதாரண வருடத்தில் (ii) ஒரு லீப் வருடத்தில் 53 ஞாயிற்றுக் கிழமைகள் வருவதற்கான நிகழ்தகவுகளைக் காண்க.

(5) எட்டு நாணயங்கள் ஒரு முறை சுண்டப்படுகின்றன. (i) சரியாக இரண்டு பூக்கள். (ii) குறைந்தபட்சம் இரண்டு பூக்கள் (iii) அதிகபட்சமாக இரண்டு பூக்கள் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவுகளைக் காண்க.

(6) முதல் 100 மிகை முழுக்களிலிருந்து ஒரு எண் தேர்ந்தெடுக்கப்படுகிறது. அது ஒரு பகா எண் அல்லது 8-இன் மடங்காக இருக்க நிகழ்தகவு யாது?

(7) ஒரு பையில் 7 சிவப்பு மற்றும் 4 கருப்பு நிறப் பந்துகளும் உள்ளன. 3 பந்துகள் சமவாய்ப்பு முறையில் எடுக்கப்பட்டால்

(i) எல்லாப் பந்துகளும் சிவப்பு நிறப் பந்துகள்

(ii) ஒரு சிவப்பு மற்றும் இரண்டு கருப்புநிறப் பந்துகள் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவுகளைக் காண்க.

(8) 52 சீட்டுக்களைக் கொண்ட ஒரு கட்டிலிருந்து ஒரு சீட்டு உருவப்படுகிறது. அச்சீட்டு

(i) ஒரு ace அல்லது king (ii) 6 அல்லது அதற்கும் குறைவான எண்

(iii) queen அல்லது 9 கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவுகளைக் காண்க.

(9) ஒரு கிரிக்கெட் சங்கத்தில் 16 உறுப்பினர்கள் உள்ளனர். அவர்களின் 5 பேர் மட்டுமே பந்து விசும் திறம் படைத்தவர்கள். இவர்களுள் 11 பேர் கொண்ட ஒரு குழுவில் குறைந்தது 3 பந்து விச்சாளர்களாவது இடம் பெறுவதற்கான நிகழ்தகவு காண்க.

(10) (i) ஒரு நிகழ்ச்சி A நிகழ சாதக விகிதம் 5 க்கு 7 எனில் $P(A)$ -ஐ காண்க

(ii) $P(B)=\dfrac{2}{5}$ எனில் நிகழ்ச்சி B நிகழ சாதகவிகிதத்தைக் காண்க.

12.5 நிகழ்தகவின் சில அடிப்படைத் தேற்றங்கள்

இதுவரை தீர்க்கப்பட்ட கணக்குகள்யாவும் ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகளுடன் தொடர்புடையவை. அதாவது $P(A$ அல்லது $B)$ $=$ $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$ என்ற சூத்திரம் பயன்படுத்தப்பட்டது. ஆனால் நிகழ்வுகள் ஒன்றையொன்று விலக்கா நிகழ்ச்சிகள் எனில் $(A\cap B)$ இருமுறை கணக்கில் எடுத்துக் கொள்ளப்படுகிறது. நிகழ்ச்சிகள் ஒன்றையொன்று விலக்கா நிகழ்ச்சிக்குத் தனிச் சூத்திரம் உள்ளது.

நிகழ்தகவியலில் உள்ள எல்லாத் தேற்றங்களும் நேரடியாகவோ அல்லது மறைமுகமாகவோ, நிகழ்தகவின் அடிப்படைக் கொள்கைகளைப் பயன்படுத்தித் தருவிக்கப்படுகின்றன. நிகழ்தகவின் சில அடிப்படைத் தேற்றங்களை இங்கு தருவிப்போம்.

தேற்றம் 12.3

நடக்க இயலா நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவு பூச்சியம் ஆகும். அதாவது,

$$\boxed{P(\varnothing)=0}$$

நிரூபணம்

நடக்கவியலா நிகழ்ச்சி $\varnothing$ ல் கூறுபுள்ளி கிடையாது. எனவே, $S\cup\varnothing=S$

$P(S\cup\varnothing)=P(S)$

$P(S)+P(\varnothing)=P(S)$ (S மற்றும் $\varnothing$ ஆகியவை ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகளாகும்)

$P(\varnothing)=0$

06_12 Probability New.indd 260 25-03-2019 14:02:48

எடுத்துக்காட்டு 12.12

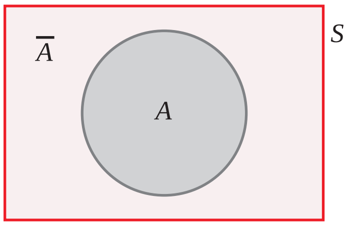
ஒரு பகடையை உருட்டிவிடும்போது 7 கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

தீர்வு

7 கிடைப்பதற்கான நிகழ்ச்சி நடக்கவியலா நிகழ்ச்சி ஆகும். எனவே P (7 கிடைக்கப்பெற) = 0.

தேற்றம் 12.4

$\overline{A}$ என்பது A என்ற நிகழ்வின் நிரப்பியானால்,



$$\boxed{P(\overline{A}) = 1 - P(A)}$$

நிரூபணம்

S என்பது கூறுவெளி எனில்

$$A \cup \overline{A} = S$$

$$P(A \cup \overline{A}) = P(S)$$

$$P(A) + P(\overline{A}) = P(S)$$ (ஏனெனில் A மற்றும் $\overline{A}$ ஒன்றையொன்று விலக்கும் தன்மையுடையதால்)

$$= 1$$

$$P\left(\overline{A}\right) = 1 - P\left(A\right) \text{ அல்லது } P\left(A\right) = 1 - P\left(\overline{A}\right)$$

எடுத்துக்காட்டு 12.13

ஒன்பது நாணயங்கள் ஒரு முறை சுண்டப்படும்போது குறைந்தது இரண்டு தலைகள் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

தீர்வு

S என்பது கூறுவெளி என்க. A என்பது குறைந்தது இரண்டு தலைகள் கிடைப்பதற்கான நிகழ்ச்சி என்க. $\overline{A}$ என்பது அதிகபட்சமாக ஒரு தலை கிடைக்கும் நிகழ்ச்சிகள் ஆகும்.

$$n(S) = 2^9 = 512, \quad n(\overline{A}) = 9C_0 + 9C_1 = 1 + 9 = 10$$

$$P\left(\overline{A}\right) = \frac{10}{512} = \frac{5}{256}$$

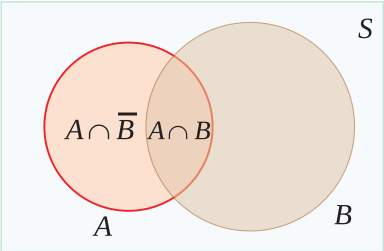
$$P\left(A\right) = 1 - P\left(\overline{A}\right) = 1 - \frac{5}{256} = \frac{251}{256}$$

$n(A) = \sum_{r=2}^{9} 9C_r$ என கணக்கிடுதலைக் காட்டிலும் $n(\overline{A}) = \sum_{r=0}^{1} 9C_r$ எனக் கணக்கிட எளியது

தேற்றம் 12.5

A, B என்பன ஏதேனும் இரு நிகழ்ச்சிகள் மற்றும் $\overline{B}$ என்பது B –ன் நிரப்பியெனில்

$$\boxed{P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B)}$$



நிரூபணம்

படத்திலிருந்து தெளிவாக

$$(A \cap \overline{B}) \cup (A \cap B) = A$$

06_12 Probability New.indd 261 25-03-2019 14:02:54

$$P[(A\cap\bar{B})\cup(A\cap B)] = P(A)$$

$$P(A\cap\bar{B})+P(A\cap B) = P(A)$$

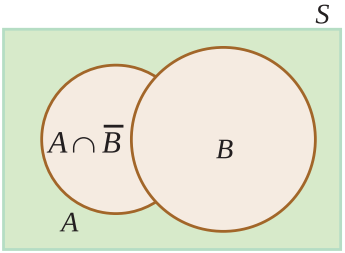
$(A\cap\bar{B})$ மற்றும் $A\cap B$ ஒன்றுக்கொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகளாக இருப்பதால்

$$P(A\cap\bar{B})=P(A)-P(A\cap B)$$ ■

தேற்றம் 12.6 (நிகழ்தகவின் கூட்டல் தேற்றம்)

A, B என்பன ஏதேனும் இரு நிகழ்ச்சிகள் எனில்

$$\boxed{P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)}$$



நிரூபணம்

படத்திலிருந்து,

$$A\cup B = (A\cap\bar{B})\cup B$$

$$P(A\cup B) = P[(A\cap\bar{B})\cup B]$$

$= P(A\cap\bar{B})+P(B)$ (ஏனெனில் $(A\cap\bar{B})$ மற்றும் B ஆகியன ஒன்றுக்கொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகள்)

$$= [P(A)-P(A\cap B)]+P(B)$$

எனவே $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$ ■

குறிப்பு 12.4

மேற்கண்ட தேற்றத்தை மூன்று நிகழ்ச்சிகளுக்கும் விரிவுபடுத்தலாம்.

(i) $P(A\cup B\cup C)=\{P(A)+P(B)+P(C)\}$
$-\{P(A\cap B)+P(B\cap C)+P(C\cap A)\}+P(A\cap B\cap C)$

(ii) $P(A\cup B\cup C)=1-P(\overline{A\cup B\cup C})=1-P(\bar{A}\cap\bar{B}\cap\bar{C})$

எடுத்துக்காட்டு 12.14

P(A) = 0.52, P(B) = 0.43, மற்றும் $P(A\cap B) = 0.24$, எனில்

(i) $P(A\cap\bar{B})$ (ii) $P(A\cup B)$ (iii) $P(\bar{A}\cap\bar{B})$ (iv) $P(\bar{A}\cup\bar{B})$ காண்க.

தீர்வு

(i) $P(A\cap\bar{B}) = P(A)-P(A\cap B)$
$= 0.52-0.24=0.28$
$P(A\cap\bar{B}) = 0.28.$

(ii) $P(A\cup B) = P(A)+P(B)-P(A\cap B)$
$= 0.52+0.43-0.24$
$P(A\cup B) = 0.71.$

(iii) $P(\bar{A}\cap\bar{B}) = P(\overline{A\cup B})$ (டி மார்கன் விதிப்படி)
$= 1-P(A\cup B)$
$= 1-0.71=0.29.$

06_12 Probability New.indd 262 25-03-2019 14:03:08

(iv) $P(\bar{A}\cup\bar{B}) = P(\overline{A\cap B})$ (டி மார்கன் விதிப்படி)

$= 1-P(A\cap B)=1-0.24$

$= 0.76.$

எடுத்துக்காட்டு 12.15

போட்டித் தேர்வுகளுக்கு தயாராகும் ஒரு பெண்ணிற்கு மாநில அரசுப் பணி கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு 0.12, மற்றும் மத்திய அரசு வேலை கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு 0.25, மற்றும் இரு பணிகளும் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு 0.07 எனில் (i) இரண்டில் ஒரு பணி கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு (ii) ஒரே ஒரு பணி மட்டுமே கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு காண்க.

தீர்வு

I என்பது மாநில அரசு பணி கிடைப்பதற்கான நிகழ்ச்சி என்க. C என்பது மத்திய அரசு பணி கிடைப்பதற்கான நிகழ்ச்சி என்க.

கொடுக்கப்பட்டவை $P(I) = 0.12$, $P(C) = 0.25$, மற்றும் $P(I\cap C)=0.07$

(i) P (இரண்டிலொரு பணி கிடைப்பதற்கான) $= P(I$ அல்லது $C) = P(I\cup C)$

$= P(I)+P(C)-P(I\cap C)$

$= 0.12 + 0.25 - 0.07 = 0.30$

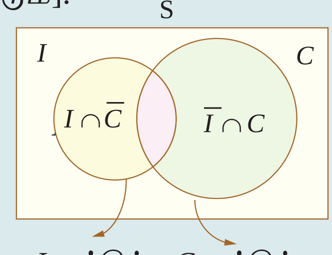
(ii) P(ஒரே ஒரு பணி கிடைப்பதற்கான) $= P[I$ மட்டும் அல்லது C மட்டும்$]$.

$= P(I\cap\bar{C})+P(\bar{I}\cap C)$

$= \{P(I)-P(I\cap C)\}+\{P(C)-P(I\cap C)\}$

$= \{0.12 - 0.07\} + \{0.25 - 0.07\}$

$= 0.23.$



பயிற்சி 12.2

(1) A மற்றும் B ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகள், $P(A)=\frac{3}{8}$ மற்றும் $P(B)=\frac{1}{8}$ எனில்

(i) $P(\bar{A})$ (ii) $P(A\cup B)$ (iii) $P(\bar{A}\cap B)$ (iv) $P(\bar{A}\cup\bar{B})$ காண்க.

(2) A மற்றும் B என்பன ஒரு சமவாய்ப்புச் சோதனையின் நிகழ்ச்சிகள் மற்றும்

$P(A)=0.35, P(A$ அல்லது $B)=0.85$, மற்றும் $P(A$ மற்றும் $B)=0.15$ எனில்

(i) $P(B$ மட்டும்$)$ (ii) $P(\bar{B})$ (iii) $P(A$ மட்டும்$)$ காண்க.

(3) ஒரு பகடை இருமுறை உருட்டப்படுகிறது. 'முதல் முறை வீசுவதில் 5 விழுவது' நிகழ்ச்சி A எனவும் 'இரண்டாவது முறை வீசுவதில் 5 விழுவது' B எனக் கொண்டால் $P(A\cup B)$ -ஐ காண்க.

(4) A என்ற நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவு 0.5, B என்ற நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவு 0.3, மற்றும் A-யும் B-யும் ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சி எனில் கீழ்க்காணும் நிகழ்தகவுகளைக் காண்க.

(i) $P(A\cup B)$ (ii) $P(A\cap\bar{B})$ (iii) $P(\bar{A}\cap B)$.

06_12 Probability New.indd 263 25-03-2019 14:03:16

(5) ஒரு நகரத்தில் இரு தீயணைக்கும் வண்டிகள் தனித்தனியாகச் செயல்படும் வகையில் உள்ளன. ஒவ்வொரு தீயணைக்கும் வண்டி கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு 0.96.

(i) தேவையான பொழுது தீயணைக்கும் வண்டி கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு என்ன?

(ii) தேவையான பொழுது ஒரு தீயணைக்கும் வண்டியும் கிடைக்காமல் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு என்ன?

(6) ஒரு தொடர்வண்டி செல்லும் புதிய பாலத்தின் அமைப்பிற்காக விருது கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு 0.48 நேர்த்தியான முறையில் மூலப்பொருட்களைப் பயன்படுத்தியதற்காக விருது கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு 0.36 மற்றும் மேற்கண்ட இரு விருதுகளையும் பெறுவதற்கான நிகழ்தகவு 0.2 எனில் (i) குறைந்தது ஒரு விருதாவது கிடைப்பதற்கு (ii) ஒரே ஒரு விருது மட்டும் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவுகள் யாவை?

12.6 சார்புநிலை நிகழ்தகவு (நிபந்தனை நிகழ்தகவு) (Conditional Probability)

விளக்க எடுத்துக்காட்டு 12.8

சார்புநிலை நிகழ்தகவின் கருத்தாக்கத்தினை அறிந்து கொள்ள முதலில் ஒரு எடுத்துக்காட்டினைக் காண்போம்.

ஒரு சீரான பகடை உருட்டப்படுவதாகக் கொள்வோம். அதன் கூறுவெளி $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. இப்போது நாம் இரு வினாக்களை எழுப்புவோம்.

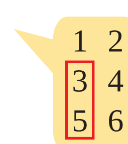
Q_1 : பகடையில் 2-க்கு மேற்பட்ட ஒற்றைப்படைஎண் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

Q_2 : பகடையில் ஒற்றைப்படை எண் விழுந்திருப்பின், அது 2-க்கு மேற்பட்ட ஒற்றைப்படை எண் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

நிலை 1

2-க்கு மேற்பட்ட ஒற்றைப்படை எண்கள் கிடைப்பதற்கான நிகழ்ச்சிகள் $\{3, 5\}$.

P_1 என்பது 2-க்கு மேற்பட்ட ஒற்றைப்படை எண்கள் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு என்க

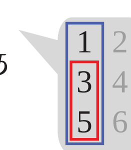


$$P_1 = \frac{n(\{3,5\})}{n(\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\})} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

நிலை 2

இங்கு முதலில் கூறுவெளி S-ஐ ஒற்றைப்படை எண்கள் மட்டுமே கொண்ட ஒரு உட்கணத்திற்குக் கட்டுப்படுத்துகிறோம்.

அதாவது $S_1 = \{1, 3, 5\}$ என்ற உட்கணத்திற்குக் கட்டுப்படுத்துகிறோம். பிறகு 2 -க்கு மேற்பட்ட ஒற்றைப்படை எண் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு P_2.



$$P_2 = \frac{n(\{3,5\})}{n(\{\ 1,\ 3,\ 5\})} = \frac{2}{3}$$

மேற்கண்ட இரண்டு நிலைகளிலும் நிகழக்கூடிய நிகழ்ச்சிகள் ஒன்றாக இருந்தாலும், அவற்றின் யாவுமளாவிய நிகழ்ச்சியின் முடிவுகள் வெவ்வேறாக இருக்கின்றன. நிலை இரண்டில் கூறுவெளி ஒரு குறிப்பிட்ட நிபந்தனைக்கு உட்படுத்தப்பட்ட பிறகு நிகழ்தகவினைக் கண்டறிகிறோம் . இத்தகைய நிகழ்தகவானது சார்பு நிலை நிகழ்தகவு எனப்படும்.

. இச் சார்பு நிலை நிகழ்தகவானது கூறுவெளிளைப் பயன்படுத்தி

$$P_2 = \frac{\dfrac{n(\{1,2,3,4,5,6\})}{}\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!}{} $$

$$P_2 = \frac{\;\frac{n(\{3,5\})}{n(\{1,2,3,4,5,6\})}\;}{\;\frac{n(\{1,3,5\})}{n(\{1,2,3,4,5,6\})}\;} = \frac{\;\frac{2}{6}\;}{\;\frac{3}{6}\;} = \frac{2}{3} \text{ எனக் காணலாம்.}$$

முக்கிய குறிப்பு: நிகழ்தகவிற்கும் சார்புநிலை நிகழ்தகவிற்கும் கூறுவெளி ஒன்றேயாகும்.

06_12 Probability New.indd 264 25-03-2019 14:03:18

வரையறை 12.14

நிகழ்ச்சி A ஏற்கனவே நிகழ்ந்துள்ள நிலையில் A-ன் நிபந்தனையில் B-ன் சார்புநிலை $P(B/A)$ எனக் குறிக்கப்படுகிறது மற்றும்

$$\boxed{P(B/A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)},\ P(A)\neq 0}$$ என வரையறுக்கப்படுகிறது.

இதேபோல் $$\boxed{P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)},\ P(B)\neq 0}$$ என வரையறுக்கப்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 12.16

$P(A)=0.6,\quad P(B)=0.5$ மற்றும் $P(A\cap B)=0.2$ எனில்

(i) $P(A/B)$ (ii) $P(\bar{A}/B)$ (iii) $P(A/\bar{B})$ காண்க.

தீர்வு

கொடுக்கப்பட்டுள்ளது $P(A)=0.6,\quad P(B)=0.5,$ மற்றும் $P(A\cap B)=0.2$

(i) $$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{0.2}{0.5}=\frac{2}{5}$$

(ii) $$P(\bar{A}/B)=\frac{P(\bar{A}\cap B)}{P(B)}$$

$$=\frac{P(B)-P(A\cap B)}{P(B)}$$

$$=\frac{0.5-0.2}{0.5}=\frac{0.3}{0.5}=\frac{3}{5}.$$

(iii) $$P(A/\bar{B})=\frac{P(A\cap\bar{B})}{P(\bar{B})}$$

$$=\frac{P(A)-P(A\cap B)}{1-P(B)}$$

$$=\frac{0.6-0.2}{1-0.5}=\frac{0.4}{0.5}=\frac{4}{5}.$$

குறிப்பு 12.5

$$P(A/B)+P(\bar{A}/B)=1$$

எடுத்துக்காட்டு 12.17

ஒரு பகடையை ஒரு முறை உருட்டும்போது ஒரு ஒற்றைப்படை எண் கிடைக்கும் எனில் 5 கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு என்ன?

தீர்வு

கூறுவெளி $S=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

A என்பது ஒற்றைப்படை எண் கிடைக்கும் நிகழ்ச்சி என்க.

B என்பது 5 கிடைக்கும் நிகழ்ச்சி என்க.

$A=\{1, 3, 5\}$, $B=\{5\}$, மற்றும் $A\cap B=\{5\}$.

06_12 Probability New.indd 265 25-03-2019 14:03:25

எனவே $P(A)=\frac{3}{6}$ மற்றும் $P(A\cap B)=\frac{1}{6}$

P (5 கிடைக்க / ஒற்றைப்படை எண் கிடைக்க) $= P(B/A)$

$$=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}}$$

$$P(B/A)=\frac{1}{3}.$$

சார்புநிலை நிகழ்தகவினை மாற்றி எழுத நிகழ்தகவின் பெருக்கல் தேற்றம் கிடைக்கிறது.

தேற்றம் 12.7

(நிகழ்தகவின் பெருக்கல் தேற்றம்)

உடனிகழ்வுகளாக ஏற்படும் A, B என்னும் இரு நிகழ்ச்சிகளின் நிகழ்தகவு

$$P(A\cap B)=P(A/B)P(B)$$

அல்லது

$$P(A\cap B)=P(B/A)P(A)$$

12.6.1. சார்பிலா நிகழ்ச்சிகள் (Independent events)

நடைபெறுவதும் அல்லது நடைபெறாததுமான ஒரு நிகழ்ச்சியானது, நடைபெறும் அல்லது நடைபெறாததுமான மற்ற நிகழ்ச்சிகளின் நிகழ்தகவினைப் பாதிக்காது எனில் இந்நிகழ்ச்சிகள் சார்பிலா நிகழ்ச்சிகள் ஆகும்.

வரையறை 12.15

$P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$ எனில் A, B என்ற இரு நிகழ்ச்சிகள் சார்பிலா நிகழ்ச்சிகளாகும்.

இதன் மறுதலையும் உண்மையாகும்.

குறிப்பு 12.6

(i) இந்த வரையறைக்குச் சமானமாகக் கீழ்க்காண்பனவற்றை கூறலாம்

$$P(A/B) = P(A)\ ,\ P(B)>0$$
$$P(B/A) = P(B),\ P(A)>0$$

(1) $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ என்பவை ஒன்றுக்கொன்று சார்பிலா நிகழ்ச்சிகள் எனில்

$$P(A_1\cap A_2\cap A_3\cap\cdots\cap A_n) = P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot\cdots\cdot P(A_n).$$

தேற்றம் 12.8

A மற்றும் B சார்பிலா நிகழ்ச்சிகள் எனில்

(i) $\overline{A}$ மற்றும் $\overline{B}$ சார்பிலா நிகழ்ச்சிகள் ஆகும் .

(ii) A மற்றும் $\overline{B}$ சார்பிலா நிகழ்ச்சிகள் ஆகும் .

(iii) $\overline{A}$ மற்றும் B சார்பிலா நிகழ்ச்சிகள் ஆகும் .

நிரூபணம்

(i) $\overline{A}$ மற்றும் $\overline{B}$ சார்பிலா நிகழ்ச்சிகள் ஆகும் என நிறுவுதல்.

A மற்றும் B சார்பிலா நிகழ்ச்சிகள் என்பதால்

$$P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B)$$

$\overline{A}$ மற்றும் $\overline{B}$ சார்பிலா நிகழ்ச்சிகள் என நிரூபிக்க, கீழ்க்காணும் கூற்றை நிரூபிக்க வேண்டும்.

$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B}).$$

டி மார்கன் விதிப்படி

$$\begin{aligned} P(\overline{A} \cap \overline{B}) &= P\left(\overline{A \cup B}\right) \\ &= 1 - P\left(A \cup B\right) \\ &= 1 - \left\{P(A) + P(B) - P(A \cap B)\right\} \\ &= 1 - P(A) - P(B) + P(A) \cdot P\left(B\right) \\ &= \left(1 - P(A)\right)\left(1 - P(B)\right) \\ &= P(\overline{A}) \cdot P(\overline{B}) \end{aligned}$$

எனவே $\overline{A}$ மற்றும் $\overline{B}$ சார்பிலா நிகழ்ச்சிகள் ஆகும்.

இதேபோல் (ii) மற்றும் (iii) ஆகியவற்றையும் நிரூபிக்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 12.18

52 சீட்டுகள் கொண்ட ஒரு சீட்டுக்கட்டிலிருந்து இரண்டு சீட்டுகள் ஒன்றன்பின் ஒன்றாக எடுக்கப்படுகின்றன. எடுக்கப்படும் இரு சீட்டுகளும் ஜாக் (Jack)–ஆக இருக்க நிகழ்தகவினை பின்வரும் நிபந்தனைகள் படிக் காண்க.

(i) முதலில் எடுக்கப்பட்ட சீட்டு மீண்டும் சீட்டுக் கட்டில் வைக்கப்படுகிறது.

(ii) முதலில் எடுக்கப்பட்ட சீட்டு மீண்டும் சீட்டுக் கட்டில் வைக்கப்படவில்லை.

தீர்வு

A என்பது முதல் முறை எடுக்கப்படும்போது ஜாக் (Jack) கிடைக்கப்பெறும் நிகழ்ச்சி என்க.

B என்பது இரண்டாம் முறை எடுக்கப்படும்போது ஜாக் (Jack) கிடைக்கப்பெறும் நிகழ்ச்சி என்க.

நிலை (i)

எடுக்கப்பட்ட சீட்டு மீண்டும் சீட்டுக்கட்டில் வைக்கப்படுகிறது.

$$n(A) = 4 \text{ (Jack)}$$

$$n(B) = 4 \text{ (Jack)}$$

மற்றும் $n(S) = 52$

நிகழ்ச்சி A ஆனது B –ன் நிகழ்தகவினைப் பாதிக்காது.

ஆதலால் A –ம் B –ம் சார்பிலா நிகழ்ச்சிகளாகும்.

$$P(A \cap B) = P(A) \, . \, P(B)$$

$$P(A) = \frac{4}{52}, \; P(B) = \frac{4}{52}$$

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A) \;\; P(B) \\ &= \frac{4}{52} \cdot \frac{4}{52} \\ &= \frac{1}{169}. \end{aligned}$$

06_12 Probability New.indd 267 25-03-2019 14:03:40

நிலை (ii)

எடுக்கப்பட்ட சீட்டு மீண்டும் சீட்டுக்கட்டில் வைக்கப்படவில்லை.

முதல் முறை எடுக்கும்போது மொத்தம் 52 சீட்டுகளும் அதில் 4 ஜாக் (Jack) சீட்டுகளும் இருக்கும். முதல் சீட்டை மீண்டும் வைக்காமல் இரண்டாம் முறை எடுக்கும்போது மொத்தம் 51 சீட்டுகளில் 3 ஜாக் (Jack) சீட்டுகள் இருக்கும். எனவே முதலில் நடந்த நிகழ்ச்சி A ஆனது, பின் நடக்கும் நிகழ்ச்சி B-ன் நிகழ்தகவினைப் பாதிக்கின்றது. ஆதலால் A, B நிகழ்ச்சிகள் சார்பிலா நிகழ்ச்சிகள் அல்ல. அவை ஒன்றுக்கொன்று சார்ந்த நிகழ்ச்சிகளாகும்.

எனவே, $P(A\cap B) = P(A)P(B/A)$

$$P(A) = \frac{4}{52}$$

$$P(B/A) = \frac{3}{51}$$

$$P(A\cap B) = P(A)P(B/A)$$

$$= \frac{4}{52}\cdot\frac{3}{51}$$

$$= \frac{1}{221}\ .$$

எடுத்துக்காட்டு 12.19

ஒரு நாணயம் இருமுறை சுண்டிவிடப்படுகிறது. E என்பது முதல் முறை சுண்டும்போது தலை விழுதல், F என்பது இரண்டாம் முறை சுண்டும்போது தலை விழுதல் என வரையறுக்கப்பட்டால் பின்வரும் நிகழ்தகவினைக் காண்க.

(i) $P(E\cup F)$ (ii) $P(E/F)$

(iii) $P(\overline{E}/F)$ (iv) E மற்றும் F சார்பிலா நிகழ்ச்சிகளா?

தீர்வு

கூறுவெளி $S=\{H,T\}\times\{H,T\}$

$$S = \{(H,H),(H,T),(T,H),(T,T)\}$$

மற்றும் $E = \{(H,H),(H,T)\}$

$$F = \{(H,H),(T,H)\}$$

$$E\cup F = \{(H,H),(H,T),(T,H)\}$$

$$E\cap F = \{(H,H)\}$$

(i) $P(E\cup F) = P(E)+P(F)-P(E\cap F)$ அல்லது $\left(=\dfrac{n(E\cup F)}{n(S)}\right)$

$$= \frac{2}{4}+\frac{2}{4}-\frac{1}{4} = \frac{3}{4}\ .$$

(ii) $P(E/F) = \dfrac{P(E\cap F)}{P(F)} = \dfrac{(1/4)}{(2/4)} = \dfrac{1}{2}$

(iii) $P(\overline{E}/F) = \dfrac{P(\overline{E}\cap F)}{P(F)}$

06_12 Probability New.indd 268 25-03-2019 14:03:50

$$= \frac{P(F) - P(E \cap F)}{P(F)}$$

$$= \frac{(2/4) - (1/4)}{(2/4)}$$

$$= \frac{1}{2}$$

(iv) *E மற்றும் F சார்பிலா நிகழ்ச்சிகளாகுமா?*

$$P(E \cap F) = \frac{1}{4}$$

$$P(E) = \frac{2}{4}, \quad P(F) = \frac{2}{4}$$

$$P(E)\,P(F) = \frac{2}{4}.\frac{2}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow P(E \cap F) = P(E)\,.\,P(F)$$

எனவே *E* மற்றும் *F* சார்பிலா நிகழ்ச்சிகளாகும்.

குறிப்பு 12.7

நிகழ்ச்சிகளின் சார்பிலாத் தன்மை நிகழ்தகவின் பண்புகளைக் கொண்டது. ஆனால் ஒன்றையொன்று விலக்கிய நிகழ்ச்சிகள் கணங்களின் பண்புகளைக் கொண்டது. ஆகையால் சார்பிலா நிகழ்ச்சிகளை அவற்றின் நிகழ்தகவுகளின் மூலமும், ஒன்றையொன்று விலக்கிய நிகழ்ச்சிகளை அவற்றின் கணங்களாகக் கொண்டும் கண்டறியலாம்.

தேற்றம் 12.9

A மற்றும் *B* என்ற இரு நிகழ்ச்சிகளானவை $P(A) \neq 0, P(B) \neq 0$ என இருப்பின்

(1) *A* மற்றும் *B* ஒன்றையொன்று விலக்கிய நிகழ்ச்சிகள் எனில் அவை சார்பிலா நிகழ்ச்சிகளாக இருக்க இயலாது.

(2) *A* மற்றும் *B* சார்பிலா நிகழ்ச்சிகள் எனில் அவை ஒன்றையொன்று விலக்கிய நிகழ்ச்சிகளாக இருக்க இயலாது (நிரூபணம் தேவையில்லை).

எடுத்துக்காட்டு 12.20

A மற்றும் *B* சார்பிலா நிகழ்ச்சிகள் எனில் $P(A) = 0.4$ மற்றும் $P(A \cup B) = 0.9$. $P(B)$ காண்க

தீர்வு

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A).P(B) \text{ (A மற்றும் B சார்பிலா நிகழ்ச்சிகள்)}$$

அதாவது, $0.9 = 0.4 + P(B) - (0.4)\,P(B)$

$$0.9 - 0.4 = (1 - 0.4)\,P(B)$$

$$P(B) = \frac{5}{6}.$$

06_12 Probability New.indd 269 25-03-2019 14:03:56

எடுத்துக்காட்டு 12.21

வேகமாக ஊடுருவும் ஓர் எதிரி நாட்டு விமானத்தை ஒரு விமான எதிர்ப்பு துப்பாக்கியின் உதவியால் அதிகபட்சமாக நான்கு முறை மட்டுமே சுட (பயன்படுத்த) முடியும். அந்த விமானத்தை முதல், இரண்டாவது, மூன்றாவது மற்றும் நான்காவது முறையில் சுட்டு வீழ்த்துவதற்கான நிகழ்தகவுகள் முறையே 0.2, 0.4, 0.2 மற்றும் 0.1 எனில் அந்த விமானத்தைச் சுட்டு வீழ்த்துதலுக்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

தீர்வு

H_1, H_2, H_3, H_4 என்பன முறையே விமானத்தை முதல், இரண்டாவது, மூன்றாவது மற்றும் நான்காவது முறையில் துப்பாக்கியால் சுட்டு வீழ்த்தும் நிகழ்ச்சி என்க. $\bar{H}$ என்பது விமானத்தை துப்பாக்கியால் சுட்டு வீழ்த்தாத நிகழ்ச்சியாகும்.

$$P(H_1)=0.2 \quad \Rightarrow P(\bar{H}_1)=1-P(H_1)=0.8$$

$$P(H_2)=0.4 \quad \Rightarrow P(\bar{H}_2)=1-P(H_2)=0.6$$

$$P(H_3)=0.2 \quad \Rightarrow P(\bar{H}_3)=1-P(H_3)=0.8$$

$$P(H_4)=0.1 \quad \Rightarrow P(\bar{H}_4)=1-P(H_4)=0.9$$

விமானம் துப்பாக்கியால் சுட்டுவீழ்த்தப்பட்டதற்கான நிகழ்தகவு

$$P(H)=1-P(\bar{H})=1-P(\overline{H_1\cup H_2\cup H_3\cup H_4})$$

$$=1-P\left(\bar{H}_1\cap\bar{H}_2\cap\bar{H}_3\cap\bar{H}_4\right)$$

$$=1-P(\bar{H}_1)P(\bar{H}_2)P(\bar{H}_3)P(\bar{H}_4)$$

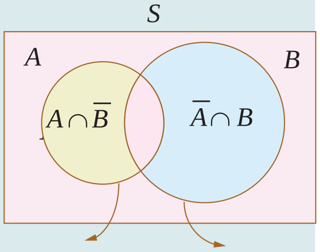
$$=1-(0.8)(0.6)(0.8)(0.9)=1-0.3456$$

$$P(H)=0.6544$$

எடுத்துக்காட்டு 12.22

X என்பவர் 70% தருணங்களில் உண்மையே பேசுவர். Y என்பவர் 90% தருணங்களில் உண்மையே பேசுவர் எனில் ஒரே கருத்தை இருவரும் கூறுகையில் ஒருவருக்கொருவர் முரண்பட்ட கருத்தினைத் தெரிவிப்பதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

தீர்வு



A என்பது X என்பவர் உண்மை பேசும் நிகழ்ச்சி என்க. B என்பது Y என்பவர் உண்மை பேசும் நிகழ்ச்சி என்க. C என்பது ஒருவருக்கொருவர் முரண்பட்ட கருத்தினைக் கூறும் நிகழ்ச்சி என்க.

$\bar{A}$ என்பது X என்பவர் உண்மை பேசாமல் இருக்கும் நிகழ்ச்சி என்க. $\bar{B}$ என்பது Y என்பவர் உண்மை பேசாமலிருக்கும் நிகழ்ச்சி என்க. C = (A உண்மை பேசுவது மற்றும் B உண்மை பேசாதிருப்பது அல்லது B உண்மை பேசுவது மற்றும் A உண்மை பேசாதிருப்பது என்க.)

கொடுக்கப்பட்டவற்றிலிருந்து,

$$P(A) = 0.70 \quad \Rightarrow P(\bar{A}) = 1-P(A) = 0.30$$

$$P(B) = 0.90 \quad \Rightarrow P(\bar{B}) = 1-P(B) = 0.10$$

06_12 Probability New.indd 270 25-03-2019 14:04:04

$C = [(A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)]$ (படத்தைக் காண்க)

$(A \cap \overline{B})$ மற்றும் $(\overline{A} \cap B)$ ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சி,

$$P(C) = P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap B)$$
$$= P(A)\, P(\overline{B}) + P(\overline{A})\, P(B)$$

(A, B சார்பிலா நிகழ்ச்சிகள், மேலும் $A, \overline{B}$ –ம் சார்பிலா நிகழ்ச்சிகள்)

$$= (0.70)\ (0.10) + (0.30)\ (0.90)$$
$$= 0.070 + 0.270 = 0.34$$
$$P(C) = 0.34.$$

எடுத்துக்காட்டு 12.23

ஒரு நகரத்தில் உள்ள பிரதான சாலையில் 4 குறுக்குச் சாலையுடன் போக்குவரத்து சமிக்கைகள் உள்ளன. ஒவ்வொரு போக்குவரத்துச் சமிக்ஞை திறப்பதற்கு அல்லது மூடுவதற்கான நிகழ்தகவு முறையே 0.4 மற்றும் 0.6 ஆகும்.

(i) முதல் குறுக்குச்சாலையில் ஒரு மகிழுந்தானது நிற்காமல் செல்வதற்கான நிகழ்தகவு.

(ii) முதல் இரண்டு குறுக்குச் சாலையில் ஒரு மகிழுந்தானது நிற்காமல் செல்வதற்கான நிகழ்தகவு.

(iii) மூன்றாவது குறுக்குச் சாலையில் நின்று மற்ற குறுக்குச் சாலைகளில் நிற்காமல் செல்வதற்கான நிகழ்தகவு.

(iv) ஒரு குறுக்குச் சாலையில் நின்று மற்ற குறுக்குச் சாலைகளில் நிற்காமல் செல்வதற்கான நிகழ்தகவு காண்க.

தீர்வு

A_i என்பது போக்குவரத்துச் சமிக்ஞை i வது குறுக்குச் சாலையில் நிற்காமல் செல்வதற்கான நிகழ்ச்சி என்க. இங்கு i= 1, 2, 3, 4.

B_i என்பது போக்குவரத்துச் சமிக்ஞை i வது குறுக்குச் சாலையில் நின்று செல்வதற்கான நிகழ்ச்சி என்க. இங்கு i= 1, 2, 3, 4.

போக்குவரத்துச் சமிக்ஞைகள் சார்பிலா நிகழ்ச்சிகள். எனவே A_i மற்றும் B_i சார்பிலா நிகழ்ச்சிகள், இங்கு i = 1, 2, 3, 4.

கொடுக்கப்பட்டவற்றிலிருந்து

$$P(A_i) = 0.4,\ i = 1,\ 2,\ 3,\ 4$$
$$P(B_i) = 0.6,\ i = 1,\ 2,\ 3,\ 4$$

(i) முதல் குறுக்குச் சாலையில் ஒரு மகிழுந்து நிற்காமல் செல்வதற்கான நிகழ்தகவு ,
$P(A_1) = 0.4.$

(ii) முதல் இரண்டு குறுக்குச் சாலைகளில் ஒரு மகிழுந்து நிற்காமல் செல்வதற்கான நிகழ்தகவு
$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1 A_2) = (0.4)(0.4) = 0.16$

(iii) மூன்றாவது குறுக்குச் சாலையில் நின்று மற்ற குறுக்குச் சாலைகளில் ஒரு மகிழுந்து நிற்காமல் செல்வதற்கான நிகழ்தகவு
$P(A_1 \cap A_2 \cap B_3 \cap A_4) = P(A_1 A_2 B_3 A_4) = (0.4)(0.4)(0.6)(0.4) = 0.0384$

(iv) ஒரு குறுக்குச் சாலையில் நின்று மற்ற குறுக்குச் சாலைகளில் ஒரு மகிழுந்து நிற்காமல் செல்வதற்கான நிகழ்தகவு $P(B_1 A_2 A_3 A_4 \cup A_1 B_2 A_3 A_4 \cup A_1 A_2 B_3 A_4 \cup A_1 A_2 A_3 B_4)$

$$= P(B_1 A_2 A_3 A_4) + P(A_1 B_2 A_3 A_4) + P(A_1 A_2 B_3 A_4) + P(A_1 A_2 A_3 B_4)$$
$$= 4(0.4)(0.4)(0.6)(0.4) = 4(0.0384) = 0.1536$$

06_12 Probability New.indd 271 25-03-2019 14:04:11

பயிற்சி 12.3

(1) இரு நிகழ்ச்சிகள் ஒரே சமயத்தில் ஒன்றையொன்று விலக்கிய நிகழ்ச்சிகள் மற்றும் சார்பிலா நிகழ்ச்சிகளாக இருக்க இயலுமா?

(2) A மற்றும் B என்ற இரு நிகழ்ச்சிகளுக்கு $P(A\cup B)=0.7, P(A\cap B)=0.2$ மற்றும் $P(B)=0.5$ எனில் A மற்றும் B சார்பிலா நிகழ்ச்சிகள் எனக்காட்டுக.

(3) A மற்றும் B சார்பிலா நிகழ்ச்சிகளாகவும் $P(A\cup B)=0.6$, $P(A)=0.2$ எனில் $P(B)$ காண்க.

(4) $P(A)=0.5$, $P(B)=0.8$ மற்றும் $P(B/A)=0.8$, எனில் $P(A/B)$ மற்றும் $P(A\cup B)$.காண்க.

(5) A, B என்ற நிகழ்ச்சிகளுக்கு $P(A)=\frac{3}{4}$, $P(B)=\frac{2}{5}$ மற்றும் $A\cup B=S$ (கூறுவெளி) எனில் சார்பு நிலை நிகழ்தகவு காண்க.

(6) கணிதவியலில் ஒரு வினாவானது மூன்று மாணவர்களிடம் தீர்வு காண்பதற்காக கொடுக்கப்படுகிறது. அவர்கள் தனித் தனியே தீர்ப்பதற்கான நிகழ்தகவு $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ மற்றும் $\frac{1}{5}$

(i) அந்த வினா தீர்வு கண்டதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

(ii) சரியாக ஒருவர் மட்டுமே அந்த வினாவிற்குத் தீர்வு காண்பதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

(7) பெட்ரோல் நிரப்பப்பட்ட ஒரு மகிழ்வுந்துக்கு எண்ணெய் மாற்ற நிகழ்தகவு 0.30, எண்ணெய் வடிப்பான் மாற்ற நிகழ்தகவு 0.4 , எண்ணெய் மற்றும் எண்ணெய் வடிப்பான் இரண்டையும் மாற்ற நிகழ்தகவு 0.15.

(i) எண்ணெய் மாற்றப் படவேண்டும் என்றால் ஒரு புதிய எண்ணெய் வடிப்பான் தேவைப்படுவதற்கான நிகழ்தகவு என்ன?

(ii) புதிய எண்ணெய் வடிப்பான் தேவைப்பட்டால்,எண்ணெய் மாற்றப்பட வேண்டியதற்கான நிகழ்தகவு என்ன?

(8) ஒரு பையில் 5 வெள்ளை மற்றும் 3 கருப்பு நிறப்பந்துகள் உள்ளன. மற்றொரு பையில் 4 வெள்ளை மற்றும் 6 கருப்பு நிறப் பந்துகள் உள்ளன. ஒவ்வொரு பையிலிருந்தும் ஒரு பந்து எடுக்கப்படுகிறது எனில்

(i) இரண்டும் வெள்ளை நிறப்பந்துகள்.

(ii) இரண்டும் கருப்பு நிறப்பந்துகள்.

(iii) ஒரு வெள்ளை மற்றும் ஒரு கருப்புப் பந்து கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவுகள் காண்க.

(9) ஒரு வகுப்பில் $\frac{2}{3}$ பங்கு மாணவர்களும், மீதம் மாணவியர்களும் உள்ளனர். ஒரு மாணவி முதல் தரத்தில் தேர்ச்சிப் பெற நிகழ்தகவு 0.85 மற்றும் மாணவர் முதல் தரத்தில் தேர்ச்சிப் பெற நிகழ்தகவு 0.70. சமவாய்ப்பு முறையில் ஒருவர் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டால் அவரின் முதல் தரத்தில் தேர்ச்சி பெறுவதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

(10) $P(A)=0.4$ மற்றும் $P(A\cup B)=0.7$.எனில் $P(B)$-ஐ கீழ்க்காணும் நிபந்தனைகளுக்கு உட்பட்டுக் காண்க.

(i) A மற்றும் B ஒன்றையொன்று விலக்கிய நிகழ்ச்சிகள்.

(ii) A மற்றும் B சார்பிலா நிகழ்ச்சிகள்.

(iii) $P(A/B)=0.4$ (iv) $P(B/A)=0.5$

(11) சமவாய்ப்பு முறையில் ஒரு வருடம் தேர்ந்தெடுக்கப்படுகிறது. அது

(i) 53 ஞாயிற்றுகளைக் கொண்டதாக இருப்பதன் நிகழ்தகவு யாது?

(ii) 53 ஞாயிறுகளைக் கொண்ட ஒரு லீப் வருடமாக கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

(12) ஒரு இலக்கை குறிபார்த்து சுடும் போது 4 ல் 3 முறை X-ம், 5 இல் 4 முறை Y-ம், 3 ல் 2 முறை Z-ம் சரியாக இலக்கைச் சுடுகின்றனர். மூவரும் அந்த இலக்கைச் சுடும்போது சரியாக இருவர் மட்டுமே சுடுவதற்கான நிகழ்தகவு யாது ?

06_12 Probability New.indd 272 25-03-2019 14:04:17

12.7 ஒரு நிகழ்ச்சியின் கூட்டு நிகழ்தகவு (Total Probability of an event)

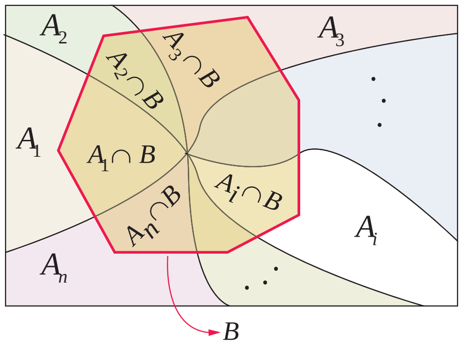
தேற்றம் 12.10 (ஒரு நிகழ்ச்சியின் கூட்டு நிகழ்தகவு)

$A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ என்பன ஒன்றையொன்று விலக்கிய மற்றும் யாவுமளாவிய நிகழ்ச்சிகள் மற்றும் B என்பது கூறுவெளி S-ல் உள்ள ஒரு நிகழ்ச்சி எனில் $P(B)$ என்பது B நிகழ்ச்சியின் கூட்டு நிகழ்வு ஆகும்.

$$P(B) = P(A_1).P(B/A_1) + P(A_2).P(B/A_2) + \cdots + P(A_n).P(B/A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).P(B/A_i)$$

நிரூபணம்

B என்பது கூறுவெளி S -ல் உள்ள ஒரு நிகழ்ச்சி.
படத்திலிருந்து



$$B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup (A_3 \cap B) \cup \cdots (A_n \cap B).$$

$A_1, A_2, A_3 \ldots A_n$ என்பன ஒன்றையொன்று விலக்கிய நிகழ்ச்சிகள் எனவே

$(A_1 \cap B), (A_2 \cap B), (A_3 \cap B), \cdots, (A_n \cap B)$ என்பன ஒன்றையொன்று விலக்கிய நிகழ்ச்சிகளாகும்.

$$P(B) = P\left[(A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup (A_3 \cap B) \cup \cdots \cup (A_n \cap B)\right]$$

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + P(A_3 \cap B) + \cdots + P(A_n \cap B)$$

$$P(B) = P(A_1).P(B/A_1) + P(A_2).P(B/A_2) + \cdots + P(A_n).P(B/A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).P(B/A_i)$$ ■

பின்வரும் கணக்குகள் நிகழ்ச்சியின் கூட்டு நிகழ்தகவைப் பயன்படுத்தி தீர்க்கப்படுகின்றன.

எடுத்துக்காட்டு 12.24

ஒரு ஜாடியில் 8 சிவப்பு மற்றும் 4 நீல நிறப்பந்துகள் உள்ளன. மற்றொரு ஜாடியில் 5 சிவப்பு மற்றும் 10 நீல நிறப்பந்துகள் உள்ளன. சமவாய்ப்பு முறையில் ஒரு ஜாடி தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டு அதிலிருந்து இரண்டு பந்துகள் எடுக்கப்படுகின்றன. இரு பந்துகளும் சிவப்பு நிறப்பந்துகளாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

தீர்வு

A_1 என்பது ஜாடி $-I$ ஐ தேர்ந்தெடுக்கும் நிகழ்ச்சி என்க. மற்றும் A_2 என்பது ஜாடி$-II-$ ஐத் தேர்ந்தெடுக்கும் நிகழ்ச்சி என்க.

	சிவப்பு பந்து	நீல பந்து	மொத்தம்
ஜாடி - I	8	4	12
ஜாடி - II	5	10	15
மொத்தம்	13	14	27

B என்பது இரண்டு சிவப்பு நிறப்பந்துகளைத் தேர்ந்தெடுக்கும் நிகழ்ச்சி என்க. B-ன் கூட்டு நிகழ்தகவினை நாம் காண வேண்டும். அதாவது $P(B)$.

A_1 மற்றும் A_2 என்பன ஒன்றையொன்று விலக்கிய, யாவுமளாவிய நிகழ்ச்சிகள் என்பது தெளிவாகத் தெரிகிறது.

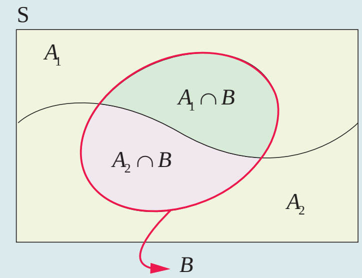
$$P(A_1) = \frac{1}{2}, \quad P(B/A_1) = \frac{8c_2}{12c_2} = \frac{14}{33}$$

06_12 Probability New.indd 273 25-03-2019 14:04:23

$$P(A_2) = \frac{1}{2}, \quad P(B/A_2) = \frac{5c_2}{15c_2} = \frac{2}{21}$$

$$P(B) = P(A_1)\,.\,P(B/A_1) + P(A_2)\,.\,P(B/A_2)$$

$$P(B) = \frac{1}{2}.\frac{14}{33} + \frac{1}{2}.\frac{2}{21} = \frac{20}{77}.$$

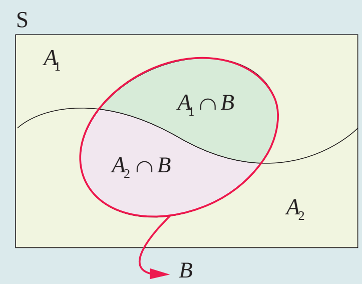


எடுத்துக்காட்டு 12.25

ஒரு தொழிற்சாலையில் இயந்திரங்கள் *I* மற்றும் *II* என இருவகைகள் உள்ளன. இயந்திரம்–*I* தொழிற்சாலையின் உற்பத்தியில் 40% தயாரிக்கிறது மற்றும் இயந்திரம்–*II* உற்பத்தியில் *60%* தயாரிக்கிறது. மேலும் இயந்திரம்–*I* –ன் மூலம் உற்பத்தி செய்யப்பட்ட பொருள்களில் 4% குறைபாடுள்ளதாகவும் இயந்திரம்–*II*–ன் மூலம் உற்பத்தி செய்யப்பட்ட பொருள்களில் 5% குறைபாடுள்ளதாகவும் இருக்கின்றன. உற்பத்தி செய்யப்பட்ட பொருள்களிலிருந்து, சமவாய்ப்பு முறையில் ஒரு பொருள் தேர்ந்தெடுக்கப்படுகிறது. அப்பொருள் குறைபாடுடன் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

தீர்வு

A_1 என்பது இயந்திரம்–*I* ன் உற்பத்தி பொருள்களின் நிகழ்ச்சி என்க. A_2 என்பது இயந்திரம்–*II*ன் உற்பத்தி பொருள்களின் நிகழ்ச்சி என்க. *B*என்பது குறைபாடுள்ள பொருள்களைத் தேர்ந்தெடுக்கப்படும் நிகழ்ச்சி என்க.



நிகழ்ச்சி *B*-ன் கூட்டு நிகழ்தகவினை நாம் காணவேண்டும். அதாவது, *P*(*B*).

A_1 மற்றும் A_2 என்பன ஒன்றையொன்று விலக்கிய மற்றும் யாவுமளாவிய நிகழ்ச்சிகளாகும். ஆதலால்

$$P(B) = P(A_1)\,.\,P(B/A_1) + P(A_2)\,.\,P(B/A_2)$$

$$P(A_1) = 0.40, \quad P(B/A_1) = 0.04$$

$$P(A_2) = 0.60, \quad P(B/A_2) = 0.05$$

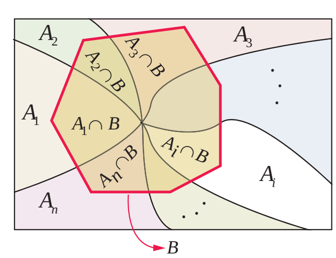
$$P(B) = P(A_1)\,.\,P(B/A_1) + P(A_2)\,.\,P(B/A_2)$$

$$= (0.40)(0.04) + (0.60)(0.05)$$

$$= 0.046.$$

12.8 பேயீஸ்-ன் தேற்றம் (Bayes' Theorem)

1702-1761



இங்கிலாந்து நாட்டைச் சேர்ந்த தாமஸ் பேயீஸ் என்பவர் புள்ளியியலாளர் மற்றும் தத்துவ ஞானி ஆவார். பேயீஸின் தேற்றமானது, சோதனை நிகழ்வதற்கு முன்பான நிகழ்தகவு மற்றும் நிபந்தனை நிகழ்தகவினைச் சோதனைக்குப்பின் காணவேண்டிய நிபந்தனை நிகழ்தகவுடன் இணைக்கப் பயன்படுகிறது. பல நிகழ்தகவுகளின் புரிதலுக்கு பேயீசியன் நிகழ்தகவு பயன்படுத்தப்படுகிறது.

06_12 Probability New.indd 274 25-03-2019 14:04:28

தேற்றம் 12.11 (பேயீசியன் தேற்றம்)

$A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ என்ற ஒன்றையொன்று விலக்கிய மற்றும் யாவுமளாவிய நிகழ்ச்சிகளாகவும் மேலும் $P(Ai) > 0$, $i = 1,2,3,\ldots.n$ மற்றும் B என்பது

ஏதேனும் ஒரு நிகழ்ச்சியாகவும் மேலும் $P(B) > 0$, எனில்

$$P(A_i / B) = \frac{P(A_i)\, P(B / A_i)}{P(A_1)\, P(B / A_1) + P(A_2)\, P(B / A_2) + \cdots + P(A_n)\, P(B / A_n)}$$

நிரூபணம்

B –ன் நிகழ்ச்சியின் கூட்டு நிகழ்தகவு விதிப்படி,

$$P(B) = P(A_1)\cdot P(B / A_1) + P(A_2)\cdot P(B / A_2) + \cdots + P(A_n)\cdot P(B / A_n)$$

பெருக்கல் தேற்றத்தின்படி $P\left(A_i \cap B\right) = P\left(B/A_i\right) P\left(A_i\right)$

சார்பு நிலை நிகழ்தகவின் வரையறைப்படி,

$$P(A_i / B) = \frac{P\left(A_i \cap B\right)}{P(B)}$$

$$P(A_i / B) = \frac{P\left(B/A_i\right) P\left(A_i\right)}{P(A_1)\cdot P(B / A_1) + P(A_2)\cdot P(B / A_2) + \cdots + P(A_n)\cdot P(B / A_n)}$$ (சூத்திரங்களைப் பயன்படுத்தி)

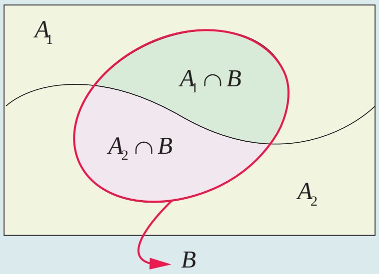
மேலே உள்ள சூத்திரமானது $P(A_i / B)$ மற்றும் $P(B / A_i)$ க்கும் இடையான தொடர்பை வழங்குகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 12.26

ஒருதொழிற்சாலையில் இயந்திரங்கள் I மற்றும் II என இருவகைகள் உள்ளன. இயந்திரம்–I தொழிற்சாலையின் உற்பத்தியில் 40% தயாரிக்கிறது மற்றும் இயந்திரம்–II உற்பத்தியில் 60% தயாரிக்கிறது. மேலும் இயந்திரம்–I –ன் மூலம் உற்பத்தி செய்யப்பட்ட பொருள்களில் 4% குறைபாடுள்ளதாகவும் இயந்திரம்–II–ன் மூலம் உற்பத்தி செய்யப்பட்ட பொருள்களில் 5% குறைபாடுள்ளதாகவும் இருக்கின்றன. உற்பத்தி செய்யப்பட்ட பொருள்களிலிருந்து, சமவாய்ப்பு முறையில் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட ஒரு பொருள் குறைபாடுள்ளதாக இருப்பின், அப்பொருள் இயந்திரம் II–ல் உற்பத்தி செய்ததற்கான நிகழ்தகவு யாது? (முந்தைய எடுத்துக்காட்டு வினாவுடன் ஒப்பிட்டுப் பார்க்கவும்.)

தீர்வு

S



A_1 மற்றும் A_2 முறையே இயந்திரங்கள்–I மற்றும் II மூலம் உற்பத்தி செய்யப்பட்ட பொருள்களின் நிகழ்ச்சி என்க. B என்பது குறைபாடுள்ள ஒரு பொருளை தேர்ந்தெடுப்பதற்கான நிகழ்ச்சி என்க. $P(A_2/B)$ எனும் நிகழ்தகவைக் காணவேண்டும். A_1, A_2 என்பவை ஒன்றையொன்று விலக்கிய மற்றும் யாவுமளாவிய நிகழ்ச்சிகள் ஆகும்.

பேயீஸின் விதிப்படி $$P(A_2 / B) = \frac{P(A_2)\, P(B / A_2)}{P(A_1)\, P(B / A_1) + P(A_2)\, P(B / A_2)}$$

$$P(A_1) = 0.40, \quad P(B / A_1) = 0.04$$

$$P(A_2) = 0.60, \quad P(B / A_2) = 0.05$$

06_12 Probability New.indd 275 25-03-2019 14:04:36

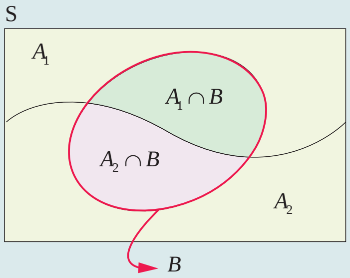
$$P(A_2/B) = \frac{P(A_2)\,P(B/A_2)}{P(A_1)\,P(B/A_1)\; + P(A_2)\,P(B/A_2)}$$

$$P(A_2/B) = \frac{(0.60\;)(0.05)}{(0.40)(\,0.04)+(0.60\;)(0.05)} = \frac{15}{23}\,.$$

எடுத்துக்காட்டு 12.27

கட்டிடம் கட்டும் நிறுவனத்தில் 2 செயற்பொறியாளர்கள் பணியில் அமர்த்தப்பட்டுள்ளனர். நிறுவனத்தின் 60% மற்றும் 40% வேலைகளை முறையே செயற்பொறியாளர்-1 மற்றும் செயற்பொறியாளர்-2 செய்கிறார்கள். முன் அனுபவத்தைப் பொறுத்து செயற்பொறியாளர்-1 மற்றும் செயற்பொறியாளர்-2 வேலை செய்வதில் தவறிழைக்க நிகழ்தகவு முறையே 0.03 மற்றும் 0.04 ஆகும். தற்போது நடைபெறும் கட்டுமானப் பணியில் ஒரு மோசமான (விளைவு) தவறு நிகழ்வதாக கொண்டால் எந்த செயற்பொறியாளர் தவறு இழைத்திருக்கக்கூடும் என்பதை யூகிக்கவும்.

தீர்வு



A_1 என்பது செயற்பொறியாளர்-1-ன் வேலையை குறிக்கும் நிகழ்ச்சி என்க.

A_2 என்பது செயற்பொறியாளர்-2-ன் வேலையை குறிக்கும் நிகழ்ச்சி என்க.

B என்பது வேலையில் தவறு ஏற்படும் நிகழ்ச்சி என்க.

சார்பு நிலை நிகழ் தகவு $P(A_1/B)$ மற்றும் $P(A_2/B)$ கண்டறிவதன் மூலம் தவறிழைப்பவர்களை ஒப்பிட இயலும்.

கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களின்படி $P(A_1) = 0.60,\quad P(B/A_1) = 0.03$

$P(A_2) = 0.40,\quad P(B/A_2) = 0.04$

A_1, A_2 ஆகிய இரு நிகழ்ச்சிகள் ஒன்றையொன்று விலக்கிய மற்றும் யாவுமளாவிய நிகழ்ச்சிகளாதலால், பேயீஸ்-ன் தேற்றப்படி,

$$P(A_1/B) = \frac{P(A_1)\,P(B/A_1)}{P(A_1)\,P(B/A_1)\; + P(A_2)\,P(B/A_2)}$$

$$= \frac{(0.60\;)(0.03)}{(0.60)(\,0.03)+(0.40\;)(0.04)}$$

$$P(A_1/B) = \frac{9}{17}\,.$$

$$P(A_2/B) = \frac{P(A_2)\,P(B/A_2)}{P(A_1)\,P(B/A_1)\; + P(A_2)\,P(B/A_2)}$$

$$P(A_2/B) = \frac{(0.40\;)(0.04)}{(0.60)(\,0.03)+(0.40\;)(0.04)}$$

$$P(A_2/B) = \frac{8}{17}\,.$$

$P(A_1/B) > P(A_2/B)$, என்பதால் செயற்பொறியாளர்-1 தவறிழைத்ததற்கான நிகழ்தகவு செயற்பொறியாளர்-2 தவறிழைத்ததற்கான நிகழ்தகைவ விட அதிகமாக இருப்பதால் வேலையில் ஏற்பட்ட தவறை செயற்பொறியாளர்-1 இழைத்திருக்கக் கூடும்.

06_12 Probability New.indd 276
25-03-2019 14:04:45

எடுத்துக்காட்டு 12.28

ஓர் அலுவலகத்தில் X, Y மற்றும் Z ஆகியோர் அலுவலகத்தின் தலைமையதிகாரியாக பொறுப்பேற்பதற்கானவாய்ப்புகள் முறையே $4:2:3$ என்றவிகிதத்தில் அமைந்துள்ளன. X, Y மற்றும் Z தலைமையதிகாரிகளாக பொறுப்பேற்பின் போனஸ் திட்டத்தை அமல்படுத்துவதற்கான நிகழ்தகவுகள் முறையே 0.3, 0.5 மற்றும் 0.4 ஆகும். அலுவலகத்தில் போனஸ் திட்டம் அறிமுகப்படுத்தப்பட்டிருப்பின் Z தலைமையதிகாரியாக நியமனம் செய்யப்படுவதற்கான நிகழ்தகவினைக் காண்க.

தீர்வு

A_1, A_2 மற்றும் A_3 என்பவை முறையே X, Y மற்றும் Z ஆகியோர் தலைமையதிகாரியாக நியமனம்பெறுவதற்கான நிகழ்ச்சிகள் என்க. B என்பது போனஸ்திட்டத்தைஅமல்படுத்துவதற்கான நிகழ்ச்சி என்க.

இங்கு நாம் சார்புநிலை நிகழ்தகவு $P(A_3/B)$ –யினைக் காணவேண்டும்.

A_1, A_2 மற்றும் A_3 நிகழ்ச்சிகள் ஒன்றையொன்று விலக்கிய மற்றும் யாவுமளாவிய நிகழ்ச்சிகளாதலால் பேயீஸ்–ன் தேற்றப்படி

$$P(A_3/B) = \frac{P(A_3)\,P(B/A_3)}{P(A_1)\,P(B/A_1) + P(A_2)\,P(B/A_2) + P(A_3)\,P(B/A_3)}$$

$$P(A_1) = \frac{4}{9},\quad P(B/A_1) = 0.3$$

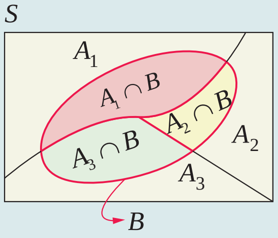
$$P(A_2) = \frac{2}{9},\quad P(B/A_2) = 0.5$$

$$P(A_3) = \frac{3}{9},\quad P(B/A_3) = 0.4$$

$$P(A_3/B) = \frac{P(A_3)\,P(B/A_3)}{P(A_1)\,P(B/A_1) + P(A_2)\,P(B/A_2) + P(A_3)\,P(B/A_3)}$$

$$P(A_3/B) = \frac{\left(\frac{3}{9}\right)(0.4)}{\left(\frac{4}{9}\right)(0.3) + \left(\frac{2}{9}\right)(0.5) + \frac{3}{9}(0.4)}$$

$$= \frac{12}{34} = \frac{6}{17}.$$



எடுத்துக்காட்டு 12.29

மூன்று வாடகை மகிழுந்து நிறுவனங்களிடமிருந்து, ஆலோசனை தரும் ஒரு நிறுவனம் மகிழுந்துகளை வாடகைக்கு வாங்குகிறது. 50% மகிழுந்துகளை L நிறுவனத்திடமிருந்தும், 30%-ஐ M-யிடமும் மற்றும் 20%-ஐ N நிறுவனங்களிடமிருந்தும் வாங்குகிறது. L நிறுவனத்திடமிருந்து வாங்கிய மகிழுந்துகளில் 90% –ம், M நிறுவனத்திடமிருந்து வாங்கிய மகிழுந்துகளில் 70% –ம் N நிறுவனத்திடமிருந்து வாங்கிய மகிழுந்துகளில் 60% –ம் நல்ல நிலைமையில் உள்ளன எனில்

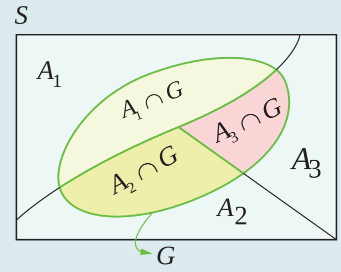
(i) ஆலோசனை நிறுவனம் வாங்கிய வாடகை மகிழுந்து நல்ல நிலைமையில் உள்ளதற்கான நிகழ்தகவு யாது? (ii) வாடகைக்கு வாங்கிய மகிழுந்து நல்ல நிலைமையில் உள்ளது எனில் N நிறுவனத்திடமிடமிருந்து பெறப்பட்டதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

06_12 Probability New.indd 277 25-03-2019 14:04:51

தீர்வு

L, M மற்றும் N நிறுவனங்களிடமிருந்து மகிழுந்துகளை வாங்கும் நிகழ்ச்சிகள் முறையே A_1, A_2 மற்றும் A_3 என்க.

G என்பது நல்ல நிலைமையில் வாங்கும் வாடகைக் மகிழுந்துக்கான நிகழ்ச்சி என்க.



G-ன் மொத்த நிகழ்தகவு, $P(G)$ மற்றும்

A_3-ன் நிபந்தனை நிகழ்தகவு G தரப்பட்டால் $P(A_3 / G)$ ஆகியவற்றைக் காண வேண்டும்.

$$P(A_1) = 0.50, \quad P(G / A_1) = 0.90$$

$$P(A_2) = 0.30, \quad P(G / A_2) = 0.70$$

$$P(A_3) = 0.20, \quad P(G / A_3) = 0.60.$$

(i) A_1, A_2, A_3 ஒன்றையொன்று விலக்கிய மற்றும் யாவுமளாவிய நிகழ்ச்சிகளாதலால் G-னி மொத்த நிகழ்தகவு

$$P(G) = P(A_1)\,P(G / A_1) + P(A_2)\,P(G / A_2) + P(A_3)\,P(G / A_3)$$

$$P(G) = (0.50)(0.90) + (0.30)(0.70) + (0.20)(0.60)$$

$$P(G) = 0.78.$$

(ii) A_3-ன் நிபந்தனை நிகழ்தகவு G தரப்பட்டால் $P(A_3 / G)$ காணவேண்டும்.

பேயீஸ்–ன் விதிப்படி

$$P(A_3 / G) = \frac{P(A_3)\,P(G / A_3)}{P(A_1)\,P(G / A_1) + P(A_2)\,P(G / A_2) + P(A_3)\,P(G / A_3)}$$

$$P(A_3 / G) = \frac{(0.20)(0.60)}{(0.50)(0.90) + (0.30)(0.70) + (0.20)(0.60)}$$

$$= \frac{2}{13}.$$

பயிற்சி 12.4

(1) ஒரு தொழிற்சாலையில் இயந்திரங்கள் I மற்றும் II என இருவகை உள்ளன. இயந்திரம்-I தொழிற்சாலையின்உற்பத்தியில் 60% தயாரிக்கிறது மற்றும் இயந்திரம்-II உற்பத்தியில் 40% தயாரிக்கிறது. மேலும் இயந்திரம்-I -ன் மூலம்உற்பத்தி செய்யப்பட்ட பொருட்களில் 2% குறைபாடுள்ளதாகவும் இயந்திரம்-II-ன் மூலம் உற்பத்தி செய்யப்பட்ட பொருட்களில் 4% குறைபாடு உள்ளதாகவும் இருக்கின்றன. உற்பத்தி செய்யப்பட்ட பொருட்களிலிருந்து, சமவாய்ப்பு முறையில் ஒரு பொருள் தேர்ந்தெடுக்கப்படுகிறது. அப்பொருள் குறைபாடுடன் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

06_12 Probability New.indd 278
25-03-2019 14:04:58

(2) ஒத்த இரு ஜாடிகளில், ஒன்றில் 6 கருப்பு மற்றும் 4 சிவப்பு நிறப்பந்துகள் உள்ளன. மற்றொரு ஜாடியில் 2 கருப்பு மற்றும் 2 சிவப்பு நிறப்பந்துகள் உள்ளன. சமவாய்ப்பு முறையில் ஒரு ஜாடி தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டு அதிலிருந்து ஒரு பந்து எடுக்கப்படுகிறது.

(i) அப்பந்து கருப்பாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

(ii) எடுக்கப்பட்ட பந்து கருப்பு எனில் முதல் ஜாடியிலிருந்து எடுக்கப்பட்டதற்கான நிகழ்தகவு யாது?

(3) ஒரு PVC பைப் தயாரிக்கும் நிறுவனம் X, Y மற்றும் Z என்ற மூன்று தொழிற்சாலைகள் மூலம் உற்பத்தி செய்கிறது. X, Y மற்றும் Z களின் தினந்தோறும் உற்பத்தி செய்யும் பைப்களின் அளவுகள் முறையே 2000 அலகுகள், 3000 அலகுகள் மற்றும் 5000 அலகுகள் ஆகும். முந்தைய திறனைப் பொறுத்து X, Y மற்றும் Z தொழிற்சாலைகளில் உற்பத்தியாகும் பைப்களின் குறைபாடுகள் முறையே 3%, 4% மற்றும் 2% ஆகும். சமவாய்ப்பு முறையில் ஒரு நாள் உற்பத்தியான பைப்களிலிருந்து ஒரு பைப் தேர்ந்தெடுக்கப் படுகிறது.

(i) தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட பைப் குறைபாடுள்ளதாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவைக் காண்க.

(ii) தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட பைப் குறைபாடுள்ளதாக இருப்பின் அது தொழிற்சாலை Y-யில் உற்பத்தியானதற்கான நிகழ்தகவு என்ன?

(4) ஒரு குறிப்பிட்ட நிறுவனத்தில் A, B மற்றும் C ஆகியோர் மேலாளர் ஆவதற்கான வாய்ப்புகள் முறையே 5 : 3 : 2 என்ற விகிதத்தில் உள்ளனர். A, B மற்றும் C ஆகியோர் மேலாளர்களாக இருந்தால் அலுவலக உணவகத்தினை மேம்படுத்துவதற்கான நிகழ்தகவுகள் முறையே 0.4, 0.5 மற்றும் 0.3 ஆகும். அலுவலக உணவகம் மேம்பட வேண்டுமெனில் B என்பவரை மேலாளராக நியமிப்பதற்கான நிகழ்தகவு என்ன?

(5) திருமணமான ஆண்கள் மற்றும் பெண்கள் பிரதான நேரத்தில் காணும் தொலைக்காட்சி நிகழ்ச்சிகளைப் பற்றி ஒரு விளம்பர நிறுவனத்தின் நிர்வாகி ஆராய்ந்தபொழுது கடந்த காலப் பதிவுகளின்படி பிரதான நேரத்தில் தொலைக்காட்சி நிகழ்ச்சிகளைக் காணும் மனைவியர் 60 சதவீதத்தினர் ஆவர். மனைவியர் தொலைக்காட்சி நிகழ்ச்சிகளைக் காணும் நேரத்தில் 40% கணவர்களும் தொலைக்காட்சி நிகழ்ச்சிகளைக் காண்கின்றனர். மனைவியர் தொலைக்காட்சி நிகழ்ச்சிகளைக் காணாத நேரங்களில் 30% கணவர்கள் தொலைக்காட்சி நிகழ்ச்சிகளைக் காண்கின்றனர் எனில்

(i) பிரதான நேரத்தில் கணவர் தொலைக்காட்சி காணும் நிகழ்தகவு

(ii) கணவர் தொலைக்காட்சி காணும் நேரங்களில் மனைவியும் தொலைக்காட்சி காணும் நிகழ்தகவு ஆகியவற்றைக் காண்க.

பயிற்சி 12.5

சரியான அல்லது மிகவும் ஏற்புடைய விடையினை கொடுக்கப்பட்ட நான்கு மாற்று விடைகளிலிருந்து தேர்ந்தெடுக்கவும்.

(1) மூன்று ஆண்கள், இரு பெண்கள் மற்றும் நான்கு குழந்தைகள் உள்ள ஒரு குழுவிலிருந்து சமவாய்ப்பு முறையில் நான்கு நபர்கள் தேர்ந்தெடுக்கப்படுகின்றனர். அவர்களில் சரியாக இருவர் மட்டும் குழந்தைகளாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு

(1) $\frac{3}{4}$ (2) $\frac{10}{23}$ (3) $\frac{1}{2}$ (4) $\frac{10}{21}$

(2) $\{1, 2, 3, \ldots, 20\}$ என்ற கணத்திலிருந்து ஒரு எண் தேர்ந்தெடுக்கப்படுகிறது. அந்த எண் 3 அல்லது 4 ஆல் வகுபடுவதற்கான நிகழ்தகவு

(1) $\frac{2}{5}$ (2) $\frac{1}{8}$ (3) $\frac{1}{2}$ (4) $\frac{2}{3}$

06_12 Probability New.indd 279 25-03-2019 14:05:00

(3) $A, B,$ மற்றும் C தனித்தனியாக ஒரே சமயத்தில் ஒரு இலக்கை நோக்கிச் சுடுகின்றனர். அவர்கள் அந்த இலக்கைச் சுடுவதற்கான நிகழ்தகவுகள் முறையே $\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{5}{8}$ எனில் A அல்லது B அந்த இலக்கைச் சரியாகச் சுடவும் ஆனால் அந்த இலக்கை C சரியாகச் சுடாமல் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவானது

(1) $\frac{21}{64}$ (2) $\frac{7}{32}$ (3) $\frac{9}{64}$ (4) $\frac{7}{8}$

(4) A மற்றும் B என்பன இரு நிகழ்ச்சிகள் எனில் சரியாக ஒரு நிகழ்ச்சி நிகழ்வதற்கான நிகழ்தகவானது

(1) $P(A\cup\overline{B})+P(\overline{A}\cup B)$ (2) $P(A\cap\overline{B})+P(\overline{A}\cap B)$

(3) $P(A)+P(B)-P(A\cap B)$ (4) $P(A)+P(B)+2P(A\cap B)$

K2FNUE

(5) A மற்றும் B என்பன இரு நிகழ்ச்சிகளுக்கு $P\left(\overline{A\cup B}\right)=\frac{1}{6},\ P\left(A\cap B\right)=\frac{1}{4}$ மற்றும் $P\left(\overline{A}\right)=\frac{1}{4}$ எனில் நிகழ்ச்சிகள் A –யும் B –யும்

(1) சமவாய்ப்பு நிகழ்ச்சிகள் ஆனால் சார்பிலா நிகழ்ச்சிகள் அல்ல

(2) சார்பிலா நிகழ்ச்சிகள் ஆனால் சமவாய்ப்பு நிகழ்ச்சிகள் அல்ல

(3) சார்பிலா நிகழ்ச்சிகள் மற்றும் சமவாய்ப்பு நிகழ்ச்சிகள்

(4) ஒன்றையொன்று விலக்கா நிகழ்ச்சிகள் மற்றும் சார்புள்ள நிகழ்ச்சிகள்

(6) நான்கு குறைபாடுள்ள பொருள்களைக் கொண்ட மொத்தம் 12 பொருள்களிலிருந்து இரு பொருள்களைத் தேர்ந்தெடுக்கும்போது அதில் குறைந்தது ஒரு பொருள் குறைபாடு உடையதாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவானது

(1) $\frac{19}{33}$ (2) $\frac{17}{33}$ (3) $\frac{23}{33}$ (4) $\frac{13}{33}$

(7) ஒரு நபரின் கைப்பையில் 3 ஐம்பது ரூபாய் நோட்டுகளும், 4 நூறு ரூபாய் நோட்டுகளும் மற்றும் 6 ஐநூறு ரூபாய் நோட்டுகளும் உள்ளன. அவற்றிலிருந்து எடுக்கப்படும் இரு நோட்டுகளும் நூறு ரூபாய் நோட்டுகளாகக் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவின் சாதக விகிதமானது.

(1) 1:12 (2) 12:1 (3) 13:1 (4) 1:13

(8) 'ASSISTANT' என்ற சொல்லிலிருந்து சமவாய்ப்பு முறையில் ஒரு எழுத்தும் 'STATISTICS'. என்ற சொல்லிலிருந்து சமவாய்ப்பில் ஒரு எழுத்தும் தேர்ந்தெடுக்கப்படும்பொழுது அவ்விரு எழுத்துக்களும் ஒரே எழுத்தாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவானது

(1) $\frac{7}{45}$ (2) $\frac{17}{90}$ (3) $\frac{29}{90}$ (4) $\frac{19}{90}$

(9) வரிசை 2 உடைய அணிகள் கணத்தில் அணியின் உறுப்புகள் 0 அல்லது 1 மட்டுமே உள்ளது எனில் தேர்ந்தெடுக்கப்படும் அணியின் அணிக்கோவை மதிப்பு பூச்சியமற்றதாகக் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு

(1) $\frac{3}{16}$ (2) $\frac{3}{8}$ (3) $\frac{1}{4}$ (4) $\frac{5}{8}$

(10) ஒரு பையில் 5 வெள்ளை மற்றும் 3 கருப்பு நிறப் பந்துகள் உள்ளன. பையிலிருந்து தொடர்ச்சியாக 5 பந்துகளை மீண்டும் வைக்கப்படாமல் எடுக்கும்போது பந்துக்களின் நிறம் மாறி மாறிக் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவானது

(1) $\frac{3}{14}$ (2) $\frac{5}{14}$ (3) $\frac{1}{14}$ (4) $\frac{9}{14}$

(11) A மற்றும் B ஆகிய இரு நிகழ்ச்சிகள் $A \subset B$ மற்றும் $P(B) \neq 0$, என இருப்பின் பின்வருவனவற்றுள் எது மெய்யானது?

(1) $P(A/B) = \frac{P(A)}{P(B)}$ (2) $P(A/B) < P(A)$

(3) $P(A/B) \geq P(A)$ (4) $P(A/B) > P(B)$

(12) ஒரு பையில் 6 பச்சை,2 வெள்ளை மற்றும் 7கருப்பு நிற பந்துகள் உள்ளன. இரு பந்துகள் ஒரே சமயத்தில் எடுக்கும்போது அவை வெவ்வேறு நிறமாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவானது

(1) $\frac{68}{105}$ (2) $\frac{71}{105}$ (3) $\frac{64}{105}$ (4) $\frac{73}{105}$

(13) X மற்றும் Y என்ற இரு நிகழ்ச்சிகளுக்கு $P(X/Y) = \frac{1}{2}$, $P(Y/X) = \frac{1}{3}$, $P(X \cap Y) = \frac{1}{6}$ எனில் $P(X \cup Y)$ -ன் மதிப்பு

(1) $\frac{1}{3}$ (2) $\frac{2}{5}$ (3) $\frac{1}{6}$ (4) $\frac{2}{3}$

(14) ஒரு ஜாடியில் 5 சிவப்பு மற்றும் 5 கருப்பு நிற பந்துகள் உள்ளன. ஜாடியிலிருந்து சமவாய்ப்பு முறையில் ஒரு பந்து எடுக்கப்படுகிறது. அதனையும் அதன் நிறமுள்ள மேலும் இரு பந்துகளும் ஜாடியில் மீண்டும் வைக்கப்படுகின்றன. பின்னர் ஜாடியிலிருந்து ஒரு பந்து எடுக்கப்படும்போது அது சிவப்பு நிறப் பந்தாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவானது

(1) $\frac{5}{12}$ (2) $\frac{1}{2}$ (3) $\frac{7}{12}$ (4) $\frac{1}{4}$

(15) ஒன்று முதல் நூறு வரையுள்ள இயல் எண்களிலிருந்து சமவாய்ப்பு முறையில் ஒரு எண் x தேர்ந்தெடுக்கப்படுகிறது. $\frac{(x-10)(x-50)}{x-30} \geq 0$ என்பதனைப் பூர்த்தி செய்யும் எண்ணைத் தேர்வு செய்யும் நிகழ்ச்சி A எனில், $P(A)$ ஆனது

(1) 0.20 (2) 0.51 (3) 0.71 (4) 0.70

(16) A மற்றும் B என்ற சார்பிலா நிகழ்ச்சிகளுக்கு $P(A) = 0.35$ மற்றும் $P(A \cup B) = 0.6$, எனில் $P(B)$ ஆனது

(1) $\frac{5}{13}$ (2) $\frac{1}{13}$ (3) $\frac{4}{13}$ (4) $\frac{7}{13}$

(17) A மற்றும் B என்ற இரு நிகழ்ச்சிகளுக்கு $P(\overline{A}) = \frac{3}{10}$ மற்றும் $P(A \cap \overline{B}) = \frac{1}{2}$, எனில் $P(A \cap B)$ –ன் மதிப்பு

(1) $\frac{1}{2}$ (2) $\frac{1}{3}$ (3) $\frac{1}{4}$ (4) $\frac{1}{5}$

(18) A மற்றும் B என்ற இரு நிகழ்ச்சிகளுக்கு $P(A) = 0.4, P(B) = 0.8$ மற்றும் $P(B/A) = 0.6$, எனில் $P(\overline{A} \cap B)$ –ன் மதிப்பு

(1) 0.96 (2) 0.24 (3) 0.56 (4) 0.66

(19) A, B மற்றும் C என்ற மூன்று நிகழ்ச்சிகளில் ஒன்று மட்டுமே நிகழக்கூடும். A–க்கு சாதகமற்ற விகிதம் 7 –க்கு 4 மற்றும் B –க்கு சாதகமற்ற விகிதம் 5 –க்கு 3 எனில் C –க்குச் சாதகமற்ற விகிதம்

(1) 23: 65 (2) 65: 23 (3) 23: 88 (4) 88: 23

06_12 Probability New.indd 281 25-03-2019 14:05:21

(20) a மற்றும் b –ன் மதிப்புகள் $\{1,2,3,4\}$ என்ற கணத்தில் திரும்பத் திரும்ப வரும் என்ற வகையில் சமவாய்ப்பு முறையில் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டால் $x^2+ax+b=0$ என்ற சமன்பாட்டின் மூலங்கள் மெய்யெண்களாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு

(1) $\frac{3}{16}$ (2) $\frac{5}{16}$ (3) $\frac{7}{16}$ (4) $\frac{11}{16}$

(21) A மற்றும் B என்ற இரு நிகழ்ச்சிகளுக்கு $P(A)=\frac{1}{4}$, $P(A/B)=\frac{1}{2}$ மற்றும் $P(B/A)=\frac{2}{3}$ எனில் $P(B)$ –ன் மதிப்பு

(1) $\frac{1}{6}$ (2) $\frac{1}{3}$ (3) $\frac{2}{3}$ (4) $\frac{1}{2}$

(22) ஒரு குறிப்பிட்ட கல்லூரியில் 4% மாணவர்கள் மற்றும் 1% மாணவியர்கள் 1.8 மீட்டர் உயரத்திற்கு மேல் உள்ளனர். மேலும் கல்லூரியில் மொத்த எண்ணிக்கையில் 60% மாணவியர்கள் உள்ளனர். சமவாய்ப்பு முறையில் 1.8 மீ உயரத்திற்கு மேல் ஒருவரைத் தேர்ந்தெடுக்கும்போது அவர் மாணவியாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு

(1) $\frac{2}{11}$ (2) $\frac{3}{11}$ (3) $\frac{5}{11}$ (4) $\frac{7}{11}$

(23) பத்து நாணயங்களைச் சுண்டும்போது குறைந்தது 8 தலைகள் கிடைப்பதற்கான நிகழ்வு

(1) $\frac{7}{64}$ (2) $\frac{7}{32}$ (3) $\frac{7}{16}$ (4) $\frac{7}{128}$

(24) A மற்றும் B என்ற இரு நிகழ்ச்சிகள் நிகழ்வதற்கான நிகழ்தகவு முறையே 0.3 மற்றும் 0.6 ஆகும். A மற்றும் B ஒரே சமயத்தில் நிகழ்வதற்கான நிகழ்தகவு 0.18 எனில் A அல்லது B நிகழாமல் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு

(1) 0.1 (2) 0.72 (3) 0.42 (4) 0.28

(25) ஒரு எண் m ஆனது $m \le 5$, எனில் இருபடிச் சமன்பாடு $2x^2+2mx+m+1=0$ -ன் மூலங்கள் மெய்யெண்களாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு

(1) $\frac{1}{5}$ (2) $\frac{2}{5}$ (3) $\frac{3}{5}$ (4) $\frac{4}{5}$

பாடத் தொகுப்பு

இப்பாடப்பகுதியில் நாம் கற்றுத் தெளிந்தவை

ஒரு சம வாய்ப்புச் சோதனையின் கூறுவெளி S எனவும் அதன் ஏதேனும் ஒரு நிகழ்ச்சி A எனவும் கொள்க.

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{A\text{-க்கு சாதகமான முடிவுகளின் எண்ணிக்கை}}{S\text{-ல் உள்ள யாவுமளாவிய முடிவுகளின் எண்ணிக்கை}}$$

நிகழ்தகவின் கோட்பாடுகள்

S என்பது ஒரு சமவாய்ப்புச் சோதனையின் முடிவுற்ற கூறுவெளி. A என்பது S–ன் யாதேனும் ஒரு நிகழ்ச்சி. $P(A)$ என்பது A–ன் நிகழ்தகவு எனில் $P(A)$ கீழ்க்காணும் அடிப்படைக் கொள்கைகளை நிறைவு செய்யும்.

(1) $P(A)\ge 0$

(2) A மற்றும் B ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகள் எனில்,

06_12 Probability New.indd 282 25-03-2019 14:05:29

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

(3) $P(S) = 1$

இயலா நிகழ்ச்சியின் நிகழ்தகவு பூஜ்ஜியம் ஆகும். $P(\varnothing) = 0$

A மற்றும் B என்பன இரு நிகழ்ச்சிகள் மற்றும் B -ன் நிரப்பி $\overline{B}$ எனில்

$$P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B)$$

A மற்றும் B என்பன இரு நிகழ்ச்சிகள் எனில்

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

நிகழ்ச்சி A ஏற்கனவே நிகழ்ந்துள்ள நிலையில் A யின் நிபந்தனையில் B -ன் சார்புநிலை நிகழ்தகவு $P\left(B/A\right)$ எனக் குறிக்கப்படின்

$$P(B / A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}, \quad P(A) \neq 0$$

$$P(A / B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad P(B) \neq 0$$

உடனிகழ்வுகளாக ஏற்படும் A மற்றும் B எனும் இரு நிகழ்ச்சிகளின் நிகழ்தகவு

$$P(A \cap B) = P(A / B)P(B) \text{ or } P(A \cap B) = P(B / A)P(A)$$

$P(A \cap B) = P(A) \,.\, P(B)$ எனில் A மற்றும் B எனும் இரு நிகழ்ச்சிகளும் சார்பிலா நிகழ்ச்சிகளாகும்.

கூட்டு நிகழ்தகவு

$A_1, A_2, A_3, \ldots A_n$ என்பன ஒன்றை ஒன்று விலக்கிய யாவுமளாவிய நிகழ்ச்சிகள் மற்றும் B என்பது S எனும் கூறுவெளியில் உள்ள ஏதேனும் ஒரு நிகழ்ச்சி எனில்

$$P(B) = P(A_1).P(B / A_1) + P(A_2).P(B / A_2) + \cdots + P(A_n).P(B / A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).P(B / A_i)$$

$P(B)$ என்பது நிகழ்ச்சி B -யின் கூட்டு நிகழ் தகவு ஆகும்.

பேயீஸ்-ன் தேற்றம்

$A_1, A_2, A_3, \ldots A_n$ என்ற ஒன்றை ஒன்று விலக்கிய மற்றும் யாவுமளாவிய நிகழ்ச்சிகளாகவும் மேலும் $P(A_i) > 0$, $i = 1, 2, 3, \ldots. n$ எனில் $P(B) > 0$, இருக்கும்படி B என்ற எந்த ஒரு நிகழ்ச்சிக்கும்

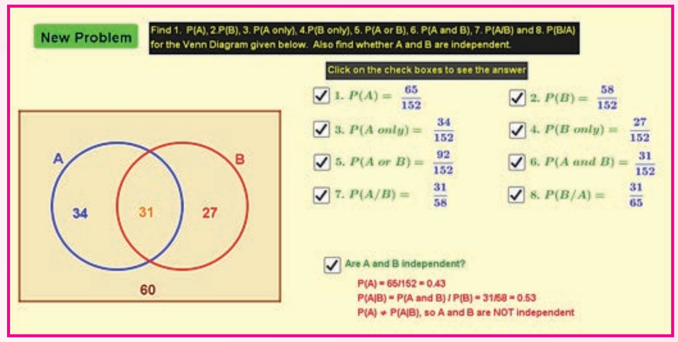
$$P(A_i / B) = \frac{P(A_i)\, P(B / A_i)}{P(A_1)\, P(B / A_1) + P(A_2)\, P(B / A_2) + \ldots + P(A_n)\, P(B / A_n)}$$

06_12 Probability New.indd 283 25-03-2019 14:05:35

இணையச் செயல்பாடு 12 (a)

நிகழ்தகவு கோட்பாடு-ஓர் அறிமுகம்

செயல்பாட்டின் இறுதியில்
கிடைக்கப் பெறுவது

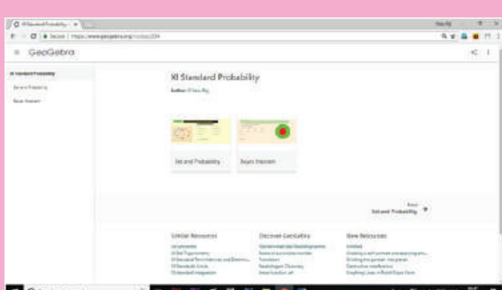


படி – 1

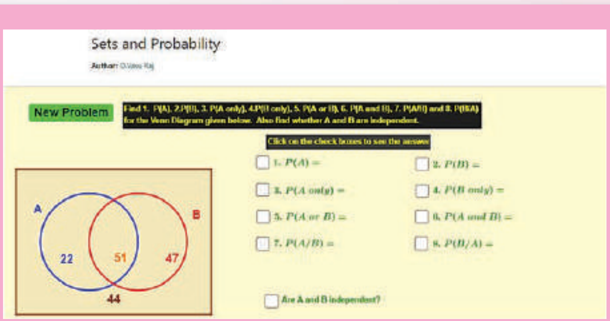
கீழ்க்காணும் உரலி / விரைவுக் குறியீட்டைப் பயன்படுத்தி GeoGebra–வின் "XI standard Probability" பக்கத்திற்குச் செல்க. உங்கள் பாடம் சார்ந்த பல பணித்தாள்கள் இப்பக்கத்தில் கொடுக்கப்பட்டிருக்கும்.

படி – 2

"Sets and Probability" என்பதைத் தேர்ந்தெடுக்கவும். அதில் "New Problem" என்பதைத் தேர்வு செய்து,வினாக்களைமாற்ற முடியும். நிகழ்தகவு கணக்குகளைச் செய்து, அதற்கென கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் கட்டங்களைச் சொடுக்குக.



படி – 1



படி – 2

உரலி :

https://ggbm.at/zbpcj934

*படங்கள் அடையாளத்திற்கு மட்டும்.

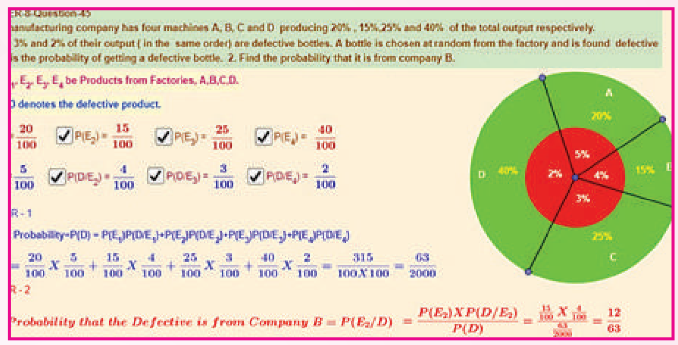
B125_11_MAT_TM

06_12 Probability New.indd 284 25-03-2019 14:05:36

இணையச் செயல்பாடு 12 (b)

நிகழ்தகவு கோட்பாடு-ஓர் அறிமுகம்

செயல்பாட்டின் இறுதியில்
கிடைக்கப் பெறுவது

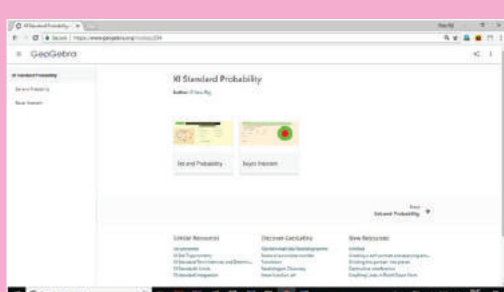


படி – 1

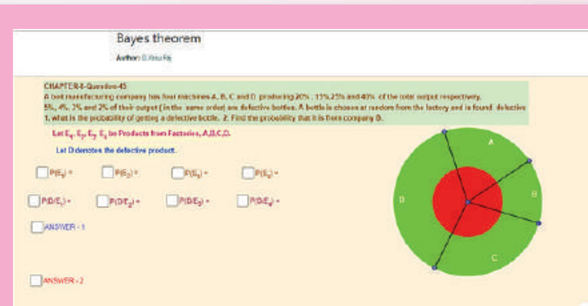
கீழ்க்காணும் உரலி / விரைவுக் குறியீட்டைப் பயன்படுத்தி GeoGebra--வின் "XI standard Probability" பக்கத்திற்குச் செல்க. உங்கள் பாடம் சார்ந்த பல பணித்தாள்கள் இப்பக்கத்தில் கொடுக்கப்பட்டிருக்கும்.

படி – 2

"Bayes Theorem" என்பதைத் தேர்ந்தெடுக்கவும். அதில் ஒரு எடுத்துக்காட்டுகள் கொடுக்கப்பட்டிருக்கும். கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் படிகளின் படி நிகழ்தகவுகளைச் செய்க. உங்கள் விடைகளைச் சரி பார்க்க, அதற்கென கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் கட்டங்களைச் சொடுக்குக.



படி – 1



படி – 2

உரலி :

https://ggbm.at/zbpcj934

*படங்கள் அடையாளத்திற்கு மட்டும்.

B125_11_MAT_TM

06_12 Probability New.indd 285 25-03-2019 14:05:37

விடைகள்

பயிற்சி 7.1

(1) (i) $\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 9 & 25\\ 0 & 4 & 16\end{bmatrix}$ (ii) $\frac{1}{4}\begin{bmatrix}1 & 5 & 9 & 13\\ 2 & 2 & 6 & 10\\ 5 & 1 & 3 & 7\end{bmatrix}$ (2) $\pm\sqrt{2}, -3, \frac{1}{2}, 1-\pi$

(3) 5 (4) $A = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}-15 & 10 & -8\\ 10 & -5 & 5\end{bmatrix}$, $B = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}-12 & 2 & -16\\ 8 & -4 & 13\end{bmatrix}$

(5) $A^4 = \begin{bmatrix}1 & 4a\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ (6) (ii) $\alpha = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}, n \in \mathbb{Z}$ (7) $x = 1$

(9) $k = 2$ (12) $-I$ (14) $A = \begin{bmatrix}1 & -2\\ 2 & 0\end{bmatrix}$ (16) 3×4

(18) $A = \begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 12\\ -5 & 0\end{bmatrix}$ (19) $x = -2,\ y = -1$ (20) (i) $x = 3^{\frac{1}{3}}$ (ii) $p = -2, q = 0, r = -3$

(21) $A = \begin{bmatrix}0 & -1 & -2\\ 1 & 0 & -1\\ 2 & 1 & 0\end{bmatrix}$, எதிர் சமச்சீர் (24) பை I - ₹ 180, பை II - ₹ 340, பை III - ₹ 480

பயிற்சி 7.2

(10) 0 (13) 0 (15) (i) 0 (ii) 0 (16) 4

(17) -81 (18) 0 (19) $x = -1, 2$ (21) 7

பயிற்சி 7.3

(3) $x = 0$ (இருமுறை), $x = -(a+b+c)$ (5) $x = 0$ (இருமுறை), $x = -12$

பயிற்சி 7.4

(1) 2.5 ச.அ. (2) $k = -1, 7$

(3) (i) பூஜ்ஜியக்கோவை (ii) பூஜ்ஜியமற்ற கோவை (iii) பூஜ்ஜியக் கோவை

(4) (i) $a = -\frac{6}{7}$ (ii) $b = \frac{49}{8}$ (5) $\frac{1}{2}$ (6) 6

பயிற்சி 7.5

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)	(14)	(15)
2	1	1	2	2	2	4	4	2	4	2	4	3	2	4
(16)	(17)	(18)	(19)	(20)	(21)	(22)	(23)	(24)	(25)					
3	3	4	1	3	2	3	3	1	2					

பயிற்சி 8.1

(7) மற்ற பக்கங்கள் $\vec{b}-\vec{a}, -\vec{a}, \vec{a}-\vec{b}$, மற்றொரு மூலை விட்டம் $\vec{b}-2\vec{a}$

07_Answers.indd 286
25-03-2019 14:07:22

பயிற்சி 8.2

(1) (i) திசைக் கொசைன்கள் அல்ல (ii) திசைக் கொசைன்கள் (iii) திசைக்கொசைன்கள் அல்ல

(2) (i) $\left(\frac{1}{\sqrt{14}},\frac{2}{\sqrt{14}},\frac{3}{\sqrt{14}}\right)$ (ii) $\left(\frac{3}{\sqrt{19}},\frac{-1}{\sqrt{19}},\frac{3}{\sqrt{19}}\right)$ (iii) (0, 0, 1)

(3) (i) $\left(\frac{3}{\sqrt{89}},\frac{-4}{\sqrt{89}},\frac{8}{\sqrt{89}}\right)$, $(3,-4,8)$ (ii) $\left(\frac{3}{\sqrt{11}},\frac{1}{\sqrt{11}},\frac{1}{\sqrt{11}}\right)$, $(3,1,1)$

(iii) (0, 1, 0), (0, 1, 0) (iv) $\left(\frac{5}{\sqrt{2338}},\frac{-3}{\sqrt{2338}},\frac{-48}{\sqrt{2338}}\right)$, $(5,-3-48)$

(v) $\left(\frac{3}{\sqrt{34}},\frac{4}{\sqrt{34}},\frac{-3}{\sqrt{34}}\right)$, $(3,4,-3)$ (vi) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$, $(1,0,-1)$

(4) $\left(\frac{-2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{-2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{-2}{\sqrt{6}}\right)$

(5) $a=\pm\frac{1}{2}$ (6) $a=-1,b=2,c=-1$ அல்லது $a=1,b=-2,c=1$ (8) $\lambda=\frac{2}{3}$

(11) (i) $\sqrt{41}$, $\left(\frac{2}{\sqrt{41}},\frac{1}{\sqrt{41}},\frac{-6}{\sqrt{41}}\right)$ (ii) $\sqrt{1123}$, $\left(\frac{-15}{\sqrt{1123}},\frac{27}{\sqrt{1123}},\frac{13}{\sqrt{1123}}\right)$

(12) $\sqrt{44}+\sqrt{218}+\sqrt{110}$ (13) $\frac{1}{\sqrt{398}}(17\hat{i}-3\hat{j}-10\hat{k})$

(14) ஆம் (16) $m=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

பயிற்சி 8.3

(1) (i) 9 (ii) 4 (2) (i) $\lambda=\frac{5}{2}$ (ii) $\lambda=-2$ (3) $\theta=\frac{\pi}{4}$

(4) (i) $\theta=\cos^{-1}\left(\frac{-9}{49}\right)$ (ii) $\theta=\frac{2\pi}{3}$ (5) $\theta=\frac{2\pi}{3}$ (8) -55

(11) $5\sqrt{2}$ (12) $\frac{41}{7}$ (13) 5 (14) -42

பயிற்சி 8.4

(1) $\sqrt{507}$ (3) $\frac{\pm 10\sqrt{3}}{\sqrt{35}}(5\hat{i}-3\hat{j}+\hat{k})$ (4) $\pm\frac{-\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}}{\sqrt{6}}$

(5) $8\sqrt{3}$ ச.அ. (6) $\frac{1}{2}\sqrt{165}$ ச.அ. (10) $\frac{\pi}{3}$

பயிற்சி 8.5

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)	(14)	(15)
3	3	4	2	2	3	4	4	2	3	2	1	1	1	3
(16)	(17)	(18)	(19)	(20)	(21)	(22)	(23)	(24)	(25)					
4	1	4	4	1	3	2	4	3	2					

பயிற்சி 9.1

(1) $\simeq 0.\overline{3}$ (2) $\simeq 0.25$ (3) $\frac{1}{2\sqrt{3}} \simeq 0.288$ (4) $\simeq -0.25$

(5) $\simeq 1$ (6) $\simeq 0$ (7) 1 (8) 3

(9) 2 (10) 3 (11) எல்லை இல்லை (12) எல்லை இல்லை

(13) 0 (14) 1 (15) எல்லை இல்லை

(16) $x_0 = 4$ தவிர (17) $x_0 = \pi$ தவிர (19) $f(8^-) = f(8^+) = 25$ (20) இயலாது

(21) $f(2)$ பற்றி முடிவு செய்ய இயலாது (22) 6, 6 (23) எல்லை இல்லை

பயிற்சி 9.2

(1) 32 (2) $\frac{m}{n}$ (3) 108 (4) $\frac{1}{2\sqrt{x}}$

(5) $\frac{1}{6}$ (6) $-\frac{1}{4}$ (7) 3 (8) 4

(9) $\frac{1}{2}$ (10) $-\frac{1}{4}$ (11) $-\frac{3}{4}\sqrt[3]{4}$ (12) 0

(13) $x \to 0$ எனில் $f(x) \to -\infty$ (எல்லை இல்லை) (14) $\frac{1}{4}$ (15) $\frac{1}{4a\sqrt{a-b}}$

பயிற்சி 9.3

(1) (i) $x \to -2^-$ எனில் $f(-2) \to \infty$, $x \to -2^+$ எனில் $f(-2) \to -\infty$

(ii) $x \to \frac{\pi}{2}^-$ எனில் $f\left(\frac{\pi}{2}\right) \to \infty$, $x \to \frac{\pi}{2}^+$ எனில் $f\left(\frac{\pi}{2}\right) \to -\infty$

(2) $x \to 3^-$ எனில் $f(3) \to -\infty$, $x \to 3^+$ எனில் $f(3) \to \infty$

(3) $x \to \infty$ எனில் $f(x) \to 0$ (4) 0

(5) $x \to \infty$ எனில் $f(x) \to \infty$ (6) -1 (7) $\frac{1}{4}$

(9) $\frac{1}{\alpha}$ (10) 30

பயிற்சி 9.4

(1) e^7 (2) $e^{\frac{1}{3}}$ (3) 1 (4) $\frac{1}{e^8}$ (5) e^3

(6) $\frac{1}{8}$ (7) $\frac{\alpha}{\beta}$ (8) $\frac{2}{5}$ (9) $\begin{cases} 1, & m = n \\ 0, & m > n \\ \alpha \to 0 \text{ எனில் } f(\alpha) \to \infty, & m < n \end{cases}$

(10) $2\cos a$ (11) $\frac{b}{a}$ (12) $\frac{2}{3}$ (13) $\frac{1}{2}$ (14) 2

(15) $\log\frac{2}{3}$ (16) $\log 9$ (17) $\frac{1}{2}$ (18) $\log 3-1$ (19) a

(20 $-\frac{3}{2}$ (21) e^2 (22) $\frac{1}{4\sqrt{2}}$ (23) 1 (24) e^2

(25) 2 (26) $\log\frac{a}{b}$ (27) $\frac{1}{2}$ (28) $\frac{1}{2}$

பயிற்சி 9.5

(2) (i) $x \in \mathbb{R}$ –ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் தொடர்ச்சியானது

(ii) $\mathbb{R}$ –ல் தொடர்ச்சியானது

(iii) $x \in \mathbb{R}-(2n+1)\frac{\pi}{2}, n \in Z$ –ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் தொடர்ச்சியானது

(iv) $x \in \mathbb{R}$ –ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் தொடர்ச்சியானது

(v) $(0,\infty)$ –ல் தொடர்ச்சியானது

(vi) $x \in \mathbb{R}-\{0\}$ –ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் தொடர்ச்சியானது

(vii) $x \in \mathbb{R}-\{-4\}$ –ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் தொடர்ச்சியானது

(viii) $x \in \mathbb{R}$ –ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் தொடர்ச்சியானது

(ix) $x \in \mathbb{R}-\{-1\}$ –ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் தொடர்ச்சியானது

(x) $x \in \mathbb{R}-\frac{n\pi}{2}, n \in Z$ –ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் தொடர்ச்சியானது

(3) (i) $x=3$ –ல் தொடர்ச்சியற்றது

(ii) $x \in \mathbb{R}$ –ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் தொடர்ச்சியானது

(iii) $x \in \mathbb{R}$ –ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் தொடர்ச்சியானது

(iv) $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ –ன் எல்லா மதிப்புகளுக்கும் தொடர்ச்சியானது

(4) (i) $x_0 = 1$ –ல் தொடர்ச்சியானது

(ii) $x_0 = 3$ –ல் தொடர்ச்சியற்றது

(6) $\alpha = 4$ (8) 6

(9) (i) $x=1$ –ல் தொடர்ச்சியற்றது (ii) $x=0$ –ல் தொடர்ச்சியற்றது

(10) $x=0,1,3$ ஆகிய மதிப்புகளுக்கு தொடர்ச்சியானது

(11) (i) $x=-2$ -ல் நீக்கக்கூடிய தொடர்ச்சியின்மை, $g(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-2x-8}{x+2} & , x\neq -2\\ -6 & , x=-2\end{cases}$

(ii) $x=-4$ -ல் நீக்கக்கூடிய தொடர்ச்சியின்மை, $g(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3+64}{x+4} & , x\neq -4\\ 48 & , x=-4\end{cases}$

(iii) $x=9$ -ல் நீக்கக்கூடிய தொடர்ச்சியின்மை, $g(x)=\begin{cases}\dfrac{3-\sqrt{x}}{9-x} & , x\neq 9\\ \dfrac{1}{6} & , x=9\end{cases}$

(12) -2 (13) $f(0)=0$ (14) $f(1)=\dfrac{2}{3}$

பயிற்சி 9.6

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)	(14)	(15)
2	3	4	1	1	4	2	2	2	3	4	3	4	3	1
(16)	(17)	(18)	(19)	(20)	(21)	(22)	(23)	(24)	(25)					
1	1	1	4	2	2	2	2	2	4					

பயிற்சி 10.1

(1) (i) 0 (ii) -4 (iii) $-2x$

(2) (i) $f'(1^-)=-1, f'(1^+)=1,$ வகைமையற்றது

(ii) $x\to 1^-$ எனில் $f'(x)\to -\infty$, வகைமையற்றது

(iii) $f'(1^-)=1, f'(1^+)=2,$ வகைமையற்றது

(3) (i) வகைமையானது (ii) வகைமையற்றது

(iii) வகைமையற்றது (i) வகைமையற்றது

(5) $x=-1$, $x=8$ ஆகியவை கூர்முனைகள்

$x=4$ -ல் தொடர்ச்சியற்றது,

$x=11$ -ல் செங்குத்துத் தொடுகோடு

(6) மதிப்பு இல்லை

(7) (i) $x=n\pi, n\in Z$ -க்கு வகைமை இல்லை (ii) $x=(2n+1)\dfrac{\pi}{2}, n\in Z$ -க்கு வகைமை இல்லை

பயிற்சி 10.2

(1) $1-3\cos x$ (2) $\cos x-\sin x$ (3) $x\cos x+\sin x$

07_Answers.indd 290 25-03-2019 14:07:57

(4) $-\sin x - 2\sec^2 x$ (5) $3t^2\cos t - t^3\sin t$ (6) $4\sec t\tan t + \sec^2 t$

(7) $e^x(\cos x + \sin x)$ (8) $\dfrac{x\sec^2 x - \tan x}{x^2}$ (9) $\dfrac{1}{1+\cos x}$

(10) $\dfrac{(1-x)\cos x + (1+x)\sin x}{(\sin x + \cos x)^2}$ (11) $\cos x + \sin x$ (12) $\dfrac{x\cos x - 2\sin x}{x^3}$

(13) $\tan\theta\sec\theta + \cos\theta + \sin\theta$ (14) $-\dfrac{(1+\cos^2 x)}{\sin^3 x}$ (15) $x\cos 2x + \sin x\cos x$

(16) $e^{-x}\left[\dfrac{1}{x} - \log x\right]$ (17) $e^{-3x}\left[-3(x^2+5)\log(1+x) + \dfrac{x^2+5}{1+x} + 2x\log(1+x)\right]$

(18) $\dfrac{\pi}{180}\cos\dfrac{\pi}{180}x$ (19) $\dfrac{\log_{10} e}{x}$

பயிற்சி 10.3

(1) $5(2x+4)(x^2+4x+6)^4$ (2) $3\sec^2 3x$ (3) $-\sec^2 x\sin(\tan x)$

(4) $x^2(1+x^3)^{-\frac{2}{3}}$ (5) $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}$ (6) $e^x\cos(e^x)$

(7) $7(3x^2+4)(x^3+4x)^6$ (8) $\dfrac{3}{2}\left(t-\dfrac{1}{t}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1+\dfrac{1}{t^2}\right)$ (9) $\dfrac{1}{3}\sec^2 t(1+\tan t)^{-\frac{2}{3}}$

(10) $-3x^2\sin(a^3+x^3)$ (11) $-my$ (12) $20\sec 5x\tan 5x$

(13) $\dfrac{8(2x-5)^3}{(8x^2-5)^4}[-4x^2+30x-5]$ (14) $\dfrac{8x^3+14x}{3(x^2+2)^{\frac{2}{3}}}$ (15) $e^{-x^2}[1-2x^2]$

(16) $-\dfrac{3t^2}{2(t^3+1)^{\frac{3}{4}}(t^3-1)^{\frac{5}{4}}}$ (17) $\dfrac{14-3x}{2(7-3x)\sqrt{7-3x}}$ (18) $-\sin x\sec^2(\cos x)$

(19) $\sin x(1+\sec^2 x)$ (20) $\dfrac{5^{-\frac{1}{x}}(\log 5)}{x^2}$ (21) $\dfrac{\sec^2 x}{\sqrt{1+2\tan x}}$

(22) $3\sin x\cos x(\sin x - \cos x)$ (23) $-k\sin kx\sin(2\cos kx)$ (24) $-6\sin 2x(1+\cos^2 x)^5$

(25) $\dfrac{3e^{3x}+2e^{4x}}{(1+e^x)^2}$ (26) $\dfrac{2\sqrt{x}+1}{4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}}$ (27) $e^{x\cos x}[\cos x - x\sin x]$

(28) $\dfrac{4\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}+2\sqrt{x}+1}{8\sqrt{x}\sqrt{x+\sqrt{x}}\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$ (29) $\dfrac{\cos\left(\tan\sqrt{\sin x}\right)\sec^2\left(\sqrt{\sin x}\right)\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$ (30) $\dfrac{-2}{1+x^2}$

பயிற்சி 10.4

(1) $x^{\cos x}\left(-\sin x\log x+\frac{\cos x}{x}\right)$ (2) $x^{\log x}\left(\frac{2\log x}{x}\right)+(\log x)^{x}\left[\frac{1}{\log x}+\log(\log x)\right]$

(3) $\frac{y(2x-1)}{x(1+2y)}$ (4) $\frac{y(x\log y-y)}{x(y\log x-x)}$ (5) $(\cos x)^{\log x}\left[\frac{\log(\cos x)}{x}-\tan x\log x\right]$

(6) $-\frac{b^2x}{a^2y}$ (7) $\frac{x\sqrt{x^2+y^2}+y}{x-y\sqrt{x^2+y^2}}$ (8) $\frac{1-\sec^2(x+y)-\sec^2(x-y)}{\sec^2(x+y)-\sec^2(x-y)}$

(10) $\frac{1}{2}$ (11) $\frac{6}{1+9x^2}$ (12) 1 (13) $-\tan t$

(14) $\tan t$ (15) $\frac{t^2-1}{2t}$ (16) $\frac{2}{1+x^2}$ (17) $\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}$

(18) 1 (19) $\cos x^2$ (20) 2 (21) $\frac{1}{2}$

(22) -1 (23) $\frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$

பயிற்சி 10.5

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)	(14)	(15)
2	4	3	3	1	4	3	2	1	4	3	3	2	2	4
(16)	(17)	(18)	(19)	(20)	(21)	(22)	(23)	(24)	(25)					
2	3	1	4	2	4	1	1	3	2					

பயிற்சி 11.1

(1) (i) $\frac{x^{12}}{12}+c$ (ii) $-\frac{1}{6x^6}+c$ (iii) $\frac{3}{7}x^{\frac{7}{3}}+c$ (iv) $\frac{8}{13}x^{\frac{13}{8}}+c$

(2) (i) $-\cot x+c$ (ii) $\sec x+c$ (iii) $-\operatorname{cosec}x+c$ (iv) $\tan x+c$

(3) (i) 12^3x+c (ii) $\log|x|+c$ (iii) e^x+c

(4) (i) $\tan^{-1}x+c$ (ii) $\sin^{-1}x+c$

பயிற்சி 11.2

(1) (i) $\frac{(x+5)^7}{7}+c$ (ii) $\frac{1}{9(2-3x)^3}+c$ (iii) $\frac{2}{9}(3x+2)^{\frac{3}{2}}+c$

(2) (i) $\frac{-\cos 3x}{3}+c$ (ii) $-\frac{\sin(5-11x)+c}{11}$ (iii) $-\frac{\cot(5x-7)}{5}+c$

(3) (i) $\frac{1}{3}e^{3x-6}+c$ (ii) $-\frac{e^{8-7x}}{7}+c$ (iii) $-\frac{1}{4}\log|6-4x|+c$

(4) (i) $5\tan\frac{x}{5}+c$ (ii) $-\frac{1}{5}\text{cosec}(5x+3)+c$ (iii) $-\frac{1}{15}\sec(2-15x)+c$

(5) (i) $\frac{1}{4}\sin^{-1}(4x)+c$ (ii) $\frac{1}{9}\sin^{-1}(9x)+c$ (iii) $\frac{1}{6}\tan^{-1}(6x)+c$

பயிற்சி 11.3

(1) $\frac{(x+4)^6}{6}+\frac{1}{3(2-5x)^3}+\frac{\cot(3x-1)}{3}+c$ (2) $-2\sin(5-2x)+3e^{3x-6}-6\log|6-4x|+c$

(3) $5\tan\frac{x}{5}+9\sin 2x+2\sec(5x+3)+c$ (4) $2\sin^{-1}(4x)+9\sin^{-1}(3x)-3\tan^{-1}(5x)+c$

(5) $2\tan^{-1}(3x+2)+3\sin^{-1}(3-4x)+c$ (6) $\sin\left(\frac{x}{3}-4\right)+\log|7x+9|+5e^{\frac{x}{5}+3}+c$

பயிற்சி 11.4

(1) $2x^2-5x+3$ (2) $3(x^3-x^2-1)$ (3) $2x^3-3x^2+5x+26$

(4) (i) 8 வினாடிகள் (ii) 39.2 மீ/வினாடி (iii) 78.4 மீ/வினாடி

(5) (i) 2.4 ச.செமீ (ii) 0.4 ச.செமீ

பயிற்சி 11.5

(1) $\frac{x^2}{2}+4x-3\log|x|-\frac{2}{x}+c$ (2) $\frac{x^2}{2}+\log|x|+2x+c$ (3) $\frac{8x^3}{3}+26x^2-180x+c$

(4) $\tan x-\cot x-2x+c$ (5) $2[\sin x+x\cos\alpha]+c$ (6) $-2\text{cosec}2x+c$

(7) $-3\cot x-4\text{cosec}x+c$ (8) $x-\sin x+c$ (9) $2\left[\frac{\sin 3x}{3}+\sin x\right]+c$

(10) $\frac{1}{2}\left[\frac{\sin 5x}{5}+\sin x\right]+c$ (11) $\frac{1}{2}\left[x-\frac{\sin 10x}{10}\right]+c$ (12) $-\frac{1}{8}\cos 4x+c$

(13) $\frac{(ae)^x}{\log(ae)}+c$ (14) $\frac{2}{15}(3x+7)^{\frac{5}{2}}-\frac{2}{3}(3x+7)^{\frac{3}{2}}+c$

(15) $\frac{2^{2x+2}}{\log 2}-\frac{2^{2-3x}}{3\log 2}+c$ (16) $\frac{2}{21}[(x+3)^{\frac{3}{2}}+(x-4)^{\frac{3}{2}}]+c$

(17) $2\log|x+3|-\log|x+2|+c$ (18) $\frac{1}{9}\log|(x-1)|-\frac{1}{9}\log|(x+2)|+\frac{1}{3(x+2)}+c$

(19) $\log\left|\frac{x+2}{x-1}\right|+3\tan^{-1}x+c$ (20) $\frac{x^2}{2}+3x-\log|x-1|+8\log|x-2|+c$

07_Answers.indd 293 25-03-2019 14:08:44

பயிற்சி 11.6

(1) $\sqrt{1+x^2}+c$ (2) $\frac{1}{3}\tan^{-1}(x^3)+c$ (3) $\log|e^x+e^{-x}|+c$

(4) $\log|10^x+x^{10}|+c$ (5) $-2\cos\sqrt{x}+c$ (6) $\log|\log(\sin x)|+c$

(7) $\log\left|\log\left(\tan\frac{x}{2}\right)\right|+c$ (8) $\frac{1}{b^2}\log|a^2+b^2\sin^2 x|+c$ (9) $\frac{(\sin^{-1}x)^2}{2}+c$

(10) $(1+\sqrt{x})^2-4(1+\sqrt{x})+2\log|1+\sqrt{x}|+c$ (11) $\log|\log(\log x)|+c$

(12) $-e^{-\beta x^{\alpha}}+c$ (13) $2\sqrt{\sec x}+c$ (14) $\frac{(1-x)^{19}}{19}-\frac{(1-x)^{18}}{18}+c$

(15) $\frac{\sin^6 x}{6}-\frac{\sin^8 x}{8}+c$ (16) $(x-a)\cos a-\sin a\log|\sec(x-a)|+c$

பயிற்சி 11.7

(1) (i) $e^{3x}[3x-1]+c$ (ii) $-\frac{x\cos 3x}{3}+\frac{\sin 3x}{9}+c$

(iii) $-e^{-5x}[5x+1]+c$ (iv) $x\sec x-\log|\sec x+\tan x|+c$

(2) (i) $\frac{x^2\log|x|}{2}-\frac{x^2}{4}+c$ (ii) $e^{3x}[9x^2-6x+2]+c$

(iii) $x^2\sin x+2x\cos x-2\sin x+c$ (iv) $-x^3\cos x+3x^2\sin x+6x\cos x-6\sin x+c$

(3) (i) $-\sin^{-1}x\sqrt{1-x^2}+x+c$ (ii) $\frac{1}{2}e^{x^2}[x^4-2x^2+2]+c$

(iii) $\frac{1}{2}\left[4x\tan^{-1}4x-\log\left|\sqrt{1+16x^2}\right|\right]+c$ (iv) $2\left[x\tan^{-1}x-\log\left|\sqrt{1+x^2}\right|\right]+c$

பயிற்சி 11.8

(1) (i) $\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}[a\cos bx+b\sin bx]+c$ (ii) $\frac{e^{2x}}{5}[2\sin x-\cos x]+c$

(iii) $\frac{e^{-x}}{5}[2\sin 2x-\cos 2x]+c$

(2) (i) $-\frac{e^{-3x}}{13}[3\sin 2x+2\cos 2x]+c$ (ii) $-\frac{e^{-4x}}{10}[2\sin 2x+\cos 2x]+c$

(iii) $\frac{e^{-3x}}{10}[\sin x-3\cos x]+c$

பயிற்சி 11.9

(1) $e^x\log|\sec x|+c$ (2) $\frac{e^x}{2x}+c$ (3) $e^x\sec x+c$

(4) $e^x\tan x+c$ (5) $xe^{\tan^{-1}x}+c$ (6) $\frac{x}{1+\log|x|}+c$

07_Answers.indd 294 25-03-2019 14:09:01

பயிற்சி 11.10

(1) (i) $\frac{1}{4}\log\left|\frac{2+x}{2-x}\right|+c$ (ii) $\frac{1}{20}\log\left|\frac{5+2x}{5-2x}\right|+c$ (iii) $\frac{1}{12}\log\left|\frac{3x-2}{3x+2}\right|+c$

(2) (i) $\frac{1}{2\sqrt{2}}\log\left|\frac{\sqrt{2}-3+x}{\sqrt{2}+3-x}\right|+c$ (ii) $\frac{1}{10}\log\left|\frac{x-4}{x+6}\right|+c$ (iii) $\log\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+2}\right|+c$

(3) (i) $\log\left|x+2+\sqrt{(x+2)^2-1}\right|+c$ (ii) $\log\left|x-2+\sqrt{x^2-4x+5}\right|+c$ (iii) $\sin^{-1}\left(\frac{x-4}{5}\right)+c$

பயிற்சி 11.11

(1) (i) $\log|x^2+4x-12|-\frac{7}{8}\log\left|\frac{x-2}{x+6}\right|+c$ (ii) $\frac{5}{2}\log|x^2+2x+2|-7\tan^{-1}(x+1)+c$

(iii) $\frac{3}{4}\log|2x^3-2x+3|+\frac{\sqrt{5}}{2}\tan^{-1}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{5}}\right)+c$

(2) (i) $5\sin^{-1}\frac{x-2}{\sqrt{13}}-2\sqrt{9+4x-x^2}+c$ (ii) $\sqrt{x^2-1}+2\log\left|x+\sqrt{x^2-1}\right|+c$

(iii) $2\sqrt{x^2+4x+1}-\log\left|x+2+\sqrt{x^2+4x+1}\right|+c$

பயிற்சி 11.12

(1) (i) $\frac{x+1}{2}\sqrt{x^2+2x+10}+\frac{9}{2}\log\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+10}\right|+c$

(ii) $\frac{x-1}{2}\sqrt{x^2-2x-3}-2\log\left|x-1+\sqrt{x^2-2x-3}\right|+c$

(iii) $\frac{x-5}{2}\sqrt{10x-x^2-24}+\frac{1}{2}\sin^{-1}(x-5)+c$

(2) (i) $\frac{1}{4}\left[(2x+5)\sqrt{9-(2x+5)^2}+9\sin^{-1}\left(\frac{2x+5}{3}\right)\right]+c$

(ii) $\frac{1}{4}\left[(2x+1)\sqrt{81+(2x+1)^2}+81\log\left|2x+1+\sqrt{81+(2x+1)^2}\right|\right]+c$

(iii) $\frac{x+1}{2}\sqrt{(x+1)^2-4}+2\log\left|x+1+\sqrt{(x+1)^2-4}\right|+c$

பயிற்சி 11.13

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)	(14)	(15)
1	3	4	1	3	1	3	2	4	3	4	2	4	4	1
(16)	(17)	(18)	(19)	(20)	(21)	(22)	(23)	(24)	(25)					
1	3	2	4	1	3	4	3	1	4					

07_Answers.indd 295 25-03-2019 14:09:10

பயிற்சி 12.1

(1) (i) *சாத்தியமானது* (ii) *சாத்தியமற்றது* (iii) *சாத்தியமற்றது*

(2) (i) $\frac{1}{2}$ (ii) 1 (3) (i) $\frac{5}{9}$ (ii) $\frac{4}{9}$ (4) (i) $\frac{1}{7}$ (ii) $\frac{2}{7}$ (5) (i) $\frac{7}{64}$ (ii) $\frac{247}{256}$ (iii) $\frac{37}{256}$

(6) $\frac{37}{100}$ (7) (i) $\frac{7}{33}$ (ii) $\frac{14}{55}$ (8) (i) $\frac{2}{13}$ (ii) $\frac{5}{13}$ (iii) $\frac{2}{13}$

(9) $\frac{627}{728}$ (10) (i) $\frac{5}{12}$ (ii) 2 to 3

பயிற்சி 12.2

(1) (i) $\frac{5}{8}$ (ii) $\frac{1}{2}$ (iii)) $\frac{1}{8}$ (iv) 1 (2) (i) 0.50 (ii) 0.35 (iii) 0.20

(3) $\frac{11}{36}$ (4) (i) 0.8 (ii) 0.5 (iii) 0.3

(5) (i) 0.9984 (ii) 0.0016 (6) (i) 0.64 (ii) 0.44

பயிற்சி 12.3

(1) *இயலாது* (3) 0.5 (4) (i) 0.5 (ii) 0.9

(5) $\frac{3}{8}$ (6) (i) $\frac{3}{5}$ (ii) $\frac{13}{30}$ (7) (i) 0.5 (ii) 0.375

(8) (i) $\frac{1}{4}$ (ii) $\frac{9}{40}$ (iii) $\frac{21}{40}$ (9) 0.75

(10) (i) 0.3 (ii) 0.5 (iii) 0.5 (iv) 0.5 (11) (i) $\frac{5}{28}$ (ii) $\frac{1}{14}$ (12) $\frac{13}{30}$

பயிற்சி 12.4

(1) 0.028 (2) (i) $\frac{11}{20}$ (ii) $\frac{6}{11}$

(3) (i) $\frac{7}{250}$ (ii) $\frac{3}{7}$ (4) $\frac{15}{41}$ (5) (i) $\frac{9}{25}$ (ii) $\frac{2}{3}$

பயிற்சி 12.5

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)	(13)	(14)	(15)
4	3	1	2	2	1	1	4	2	3	3	1	4	2	3
(16)	(17)	(18)	(19)	(20)	(21)	(22)	(23)	(24)	(25)					
1	4	3	2	3	2	2	4	4	3					

07_Answers.indd 296 25-03-2019 14:09:19

கலைச்சொற்கள்

அத்தியாயம் 7
அணிகளும் அணிக்கோவைகளும்

அணி	matrix
வரிசை	order
நிரை அணி	row matrix
நிரல் அணி	column matrix
பூஜ்ஜிய அணி	zero matrix
வெற்று அணி	null matrix
சதுர அணி	square matrix
மூலைவிட்ட அணி	diagonal matrix
அலகு அணி	unit matrix
முக்கோண வடிவ அணி	triangular matrix
மேல் முக்கோண வடிவ அணி	upper triangular matrix
கீழ் முக்கோண வடிவ அணி	lower triangular matrix
முதன்மை மூல விட்டம்	principal diagonal
திசையிலி அணி	scalar matrix
உகந்த	conformable
பரிமாற்றுப் பண்பு	commutative property
சேர்ப்புப் பண்பு	associative property
சமனிப் பண்பு	identity property
எதிர்மறைப் பண்பு	inverse property
பங்கீட்டுப் பண்பு	distributive property
சமச்சீர்	symmetric
எதிர் சமச்சீர்	skew-symmetric
அணிக்கோவை	determinant
பூஜ்ஜியக் கோவை அணி	singular matrix
பூஜ்ஜியமற்ற கோவை அணி	non-singular matrix

அத்தியாயம் 8
வெக்டர் இயற்கணிதம்

வெக்டர்	vector
தொடக்கப் புள்ளி	initial point
முடிவுப் புள்ளி	terminal point
வெக்டரின் தாங்கி	support of the vector
கட்டிலா வெக்டர்	free vector
அறுதியிட்ட வெக்டர்	localised vector
ஒரே தொடக்கப்புள்ளி வெக்டர்கள்	co-initial vectors
ஒரே முடிவுப்புள்ளி வெக்டர்கள்	co-terminal vectors
ஒரே கோடமை வெக்டர்கள்	collinear vectors
இணை வெக்டர்கள்	parallel vectors
ஒரு தள வெக்டர்கள்	coplanar vectors
சம வெக்டர்கள்	equal vectors
பூஜ்ஜிய வெக்டர்	zero vector
அலகு வெக்டர்	unit vector
ஒரே திசை வெக்டர்கள்	like vectors
எதிர் திசை வெக்டர்கள்	unlike vectors
திசையிலிப் பெருக்கம்	scalar multiplication
நிலை வெக்டர்	position vector
பிரிவு சூத்திரம்	section formula
வெக்டரைக் கூறுகளாகப் பிரித்தல்	resolution of vector
திசைக் கொசைன்கள்	direction cosines
திசை விகிதங்கள்	direction ratios
திசையிலிப் பெருக்கம்	scalar product
வெக்டர் பெருக்கம்	vector product

அத்தியாயம் 9
வகை நுண்கணிதம்
எல்லைகள் மற்றும் தொடர்ச்சித் தன்மை

நுண் கணிதம்	calculus
எல்லை	limit
ஒருபுற எல்லை	one sided limit
இடப்புற எல்லை	left hand limit
வலப்புற எல்லை	right hand limit
முடிவிலா எல்லை	infinite limit
முடிவிலியில் எல்லை	limit at infinity

செங்குத்துத் தொலைத் தொடுகோடு	vertical asymptote
கிடைமட்டத் தொலைத் தொடுகோடு	horizontal asymptote
இடையீட்டுத் தேற்றம்	Sandwich theorem
தொடர்ச்சித் தன்மை	continuity
தொடர்ச்சியின்மைத் தன்மை	discontinuity
நீக்கக் கூடிய தொடர்ச்சியின்மை	removable discontinuity
துள்ளல் தொடர்ச்சியின்மை	jump discontinuity

அத்தியாயம் 10
வகை நுண்கணிதம் வகைமை மற்றும் வகையிடல் முறைகள்

பகுமுறை சமன்பாடு	analytic equation
வகைக்கெழு	derivative
திசைவேகம்	velocity
முடுக்கம்	acceleration
குலுக்கம்	jerk
தொடுகோட்டுப் பண்பு	tangency
வித்தியாசங்களின் விகிதம்	difference quotient
வெட்டுக்கோடு	secant line
தொடுகோடு	tangent line
வளைவரை சாய்வு	slope of the curve
நேர்கோட்டியக்கம்	rectilinear motion
நிலைச்சார்பு	position function
வகைமை / வகையிடத்தக்க	differentiable
வகையிடல்	differentiation
இடப்புற வகையிடல்	left hand derivative
வலப்புற வகையிடல்	right hand derivative
வகையிடத் தக்கதல்லாத	non-differentiability
வகுத்தல் விதி	quotient rule
பிணைப்பு விதி	chain rule
சார்புகளின் சேர்ப்பு விதி	composite functions rule
சார்பின் சார்பு விதி	function of a function rule
இடைநிலை மாறி	intermediate argument
உள்ளார்ந்த சார்பு வகையிடல்	implicit differentiation
வெளிப்படைச் சார்பு வகையிடல்	explicit differentiation
துணையலகு சார்பு வகையிடல்	parametric differentiation
உயர்வரிசை வகையிடல்	higher order derivative

அத்தியாயம் 11
தொகை நுண்கணிதம்

தொகைச் சார்பு	integrand
தொகை மாறி	integrator
எதிர்மறை வகையிடல்	anti-derivative
எல்லை வரையறுக்கப்படாத தொகை	indefinite integral

அத்தியாயம் 12
நிகழ்தகவு கோட்பாடு - ஓர் அறிமுகம்

சோதனை	experiment
நிர்ணயிக்கப்பட்ட சோதனை	deterministic experiment
சமவாய்ப்பு சோதனை	random experiment
நிகழ்ச்சி	event
நிச்சய நிகழ்ச்சி	sure event or certain event
இயலா நிகழ்ச்சி	impossible event
யாவுமளாவிய நிகழ்ச்சி	exhaustive event
கூறுவெளி	sample space
ஒன்றையொன்று விலக்கும் நிகழ்ச்சிகள்	mutually exclusive events
சமவாய்ப்பு நிகழ்ச்சிகள்	equally likely events
சார்புநிலை நிகழ்தகவு	conditional probability
சார்பிலா நிகழ்ச்சிகள்	independent events

மேற்கோள் நூல்கள்

(1) Elements of Linear Algebra– P.M.Cohn , Springer

(2) Theory and Problems of Matrices – Frank Ayres, Schaum's Outline series

(3) Topics in Algebra, I.N. Herstein, Vikas Publishing Company.

(4) Vector Algebra, Schaum's Outline series.

(5) Differential and Integral Calculus, N. Piskunov, Mir Publsihers, Moscow.

(6) Elementary Treatise on the Calculus, George A. Gibson, Macmillan & Co. New York.

(7) Elementary Calculus, Vol. I, V.I. Smirnov, Addison – Wesley Publish Company, Inc.

(8) Calculus (Volume 1 and II), Tom. M. Apostol, John Wiley Publications.

(9) Calculus and Analytical Geometry,

George B.Thomas and Ross L. Finney (Ninth edition) Addison-Wesley.

(10) Calculus Early Transcendentals – George B.Thomas JR., Joel Hass, Christopher Heil, Maurice D.Weir, Pearson

(11) Advanced Engineering Mathematics- Erwin Kreyszig – Wiley India(P) Ltd.

(12) Calculus, Robert T.Smith, Roland B.Minton, McGraw Hill Education(India) Private Limited.

(13) Mathematical Analysis, S.C. Malik, Wiley Eastern Ltd.

(14) Methods of Real Analysis, Richard R. Goldberg, Oxford and IBH Publishing Company, New Delhi.

(15) Theory and Problems of Probability, Random Variables and Random Processes, Hwei P. Hsu, Schaum's Outline series

(16) Mathematical Statistics, John E. Freund and Ronald D. Walpole, Prentice Hall of India.

(17) Mathematical Statistics, Saxena and Kapoor

கணிதவியல் – மேல்நிலை முதலாமாண்டு, தொகுதி–II
பாடநூல் உருவாக்கக் குழு

பாட வல்லுநர்கள்

முனைவர் S. பொன்னுசாமி
பேராசிரியர், கணிதத்துறை,
இந்திய தொழில்நுட்ப நிறுவனம், சென்னை.

முனைவர் K. ஸ்ரீனிவாசன்,
இணை பேராசிரியர் மற்றும் துறைத்தலைவர் (ஓய்வு),
கணிதத் துறை,
மாநிலக் கல்லூரி (தன்னாட்சி), சென்னை.

முனைவர் E. சந்திரசேகரன்,
பேராசிரியர், கணிதத் துறை,
வேல் டெக் இரங்கராஜன் முனைவர் சகுந்தலா அறிவியல் மற்றும் தொழில்நுட்ப ஆராய்ச்சி மற்றும் மேம்பாட்டு நிறுவனம்,
ஆவடி, சென்னை.

முனைவர் C. செல்வராஜ்,
இணைப் பேராசிரியர், கணிதத் துறை,
மாநிலக் கல்லூரி, சென்னை.

முனைவர் ஃபெல்பின் C. கென்னடி,
இணைப் பேராசிரியர் மற்றும் துறைத் தலைவர்,
கணிதத் துறை, ஸ்டெல்லா மேரிஸ் கல்லூரி,
சென்னை.

முனைவர் G. பழனி,
உதவிப் பேராசிரியர், கணிதத் துறை,
டாக்டர் அம்பேத்கார் அரசு கலைக் கல்லூரி,
வியாசர்பாடி, சென்னை.

பாட துணை வல்லுநர்கள்

முனைவர் R. வேம்பு,
இணைப் பேராசிரியர், கணிதத் துறை,
SBK கல்லூரி, அருப்புக்கோட்டை.

முனைவர் D.J. பிரபாகரன்,
உதவிப் பேராசிரியர்
கணிதத் துறை, MIT வளாகம்,
அண்ணா பல்கலைக் கழகம், சென்னை.

ஆலோசகர்கள்

முனைவர் V. தங்கராஜ்,
முன்னாள் இயக்குநர்,
RIASM, சென்னை பல்கலைக்கழகம்,

முனைவர் M. சந்திரசேகர்,
பேராசிரியர் மற்றும் துறைத் தலைவர்,
கணிதத் துறை,
அண்ணா பல்கலைக் கழகம்,
சென்னை.

முனைவர் K.C. சிவக்குமார்,
பேராசிரியர், கணிதத் துறை,
இந்திய தொழில்நுட்ப நிறுவனம்,
சென்னை

முனைவர் L. ஜோன்ஸ் டார்ஷியஸ் தாஸ்,
பேராசிரியர், கணிதத் துறை,
அண்ணா பல்கலைக் கழகம்,
சென்னை.

முனைவர் J.R.V. எட்வர்ட்,
முதல்வர்(பொ), கணிதத் துறை,
SCOTT கிறித்துவக் கல்லூரி,
நாகர்கோவில், கன்னியாகுமரி மாவட்டம்.

முனைவர் R. ரூப்குமார்
இணைப் பேராசிரியர், கணிதத்துறை,
தமிழ்நாடு மத்திய பல்கலைக் கழகம்
திருவாரூர்.

பாட ஒருங்கிணைப்பாளர்

B. தமிழ்ச்செல்வி,
துணை இயக்குநர், மாநிலக் கல்வியியல் ஆராய்ச்சி மற்றும் பயிற்சி நிறுவனம், சென்னை.

பாடநூலாசிரியர்கள்

M. மதிவாணன்,
தலைமையாசிரியர்,
அரசு மாதிரி மேல்நிலைப் பள்ளி,
காரிமங்கலம், தர்மபுரி.

N. கலைச்செல்வம்
முதுகலை ஆசிரியர்
சென்னை பெண்கள் மேல்நிலைப் பள்ளி,
நுங்கம்பாக்கம், சென்னை.

A. பாலமுருகன்
முதுகலை ஆசிரியர்
அதியமான் அரசினர் ஆண்கள் மேல்நிலைப் பள்ளி,
தருமபுரி.

கோ. சு. வீரராகவன்,
முதுகலை ஆசிரியர்,
ஸ்ரீகிருஷ்ணா மெட்ரிக் மேல்நிலைப் பள்ளி,
TVS நகர், கோயம்புத்தூர்.

S. பன்னீர்செல்வம்,
முதுகலை ஆசிரியர் (ஓய்வு),
அரசினர் மேல்நிலைப் பள்ளி,
G.K.M. காலனி, சென்னை.

R.M. மீனாட்சி
முதுகலை ஆசிரியர்
அண்ணா ஆதர்ஷ் மெட்ரிக் மேல்நிலைப் பள்ளி,
அண்ணாநகர், சென்னை.

முனைவர் R. சுவாமிநாதன்
முதல்வர், வித்யாகிரி மேல்நிலைப் பள்ளி
புதுவயல், காரைக்குடி.

ஒருங்கிணைப்பாளர்

K.P. சுஜாதா,
பட்டதாரி ஆசிரியர்,
அரசினர் பெண்கள் மேல்நிலைப் பள்ளி,
K.V. குப்பம், வேலூர் மாவட்டம்.

பாட ஆய்வாளர்கள்

முனைவர் M. அல்போன்ஸ்,
தலைமையாசிரியர் (ஓய்வு),
அரசினர் மேல்நிலைப் பள்ளி,
சதுரங்கப்பட்டினம், காஞ்சிபுரம் மாவட்டம்.

G. ராஜேந்திரன்,
தலைமையாசிரியர் (ஓய்வு),
தந்தை பெரியார் அரசினர் மேல்நிலைப் பள்ளி,
புழுதிவாக்கம், காஞ்சிபுரம் மாவட்டம்.

இணையச் செயல்பாடு ஒருங்கிணைப்பாளர்

D. வாசுராஜ்,
பட்டதாரி ஆசிரியர் (ஓய்வு),
கொசப்பூர், புழல் பிளாக், திருவள்ளூர் மாவட்டம்.

QR Code மேலாண்மைக் குழு

R. ஜெகன்நாதன்
ஊராட்சி ஒன்றிய நடுநிலைப் பள்ளி
கணேசபுரம், போளூர்.

N. ஜெகன்
அரசினர் ஆண்கள் மேல்நிலைப் பள்ளி,
உத்திரமேரூர், காஞ்சிபுரம் மாவட்டம்.

J.F. பால் எட்வின் ராய்,
ஊராட்சி ஒன்றிய நடுநிலைப் பள்ளி,
ராசிப்பட்டி, சேலம்.

கலை மற்றும் வடிவமைப்புக் குழு

தட்டச்சு, கலை மற்றும் வடிவமைப்பு
S. மனோகரன்
V.V. கிராபிக்ஸ்
பழவந்தாங்கல், சென்னை–114.

தரக் கட்டுப்பாடு
கோப்பு ராசுவேல்
ராஜேஷ் தங்கப்பன்
ப. அருண் காமராஜ்
ஜெரால்டு வில்சன்
யோகேஷ்

அட்டை வடிவமைப்பு
கதிர் ஆறுமுகம்

ஒருங்கிணைப்பு
ரமேஷ் முனிசாமி

இந்நூல் 80 ஜி.எஸ்.எம். எலிகண்ட் மேப்லித்தோ தாளில் அச்சிடப்பட்டுள்ளது.
ஆப்செட் முறையில் அச்சிட்டோர்: