05

व्युत्क्रम आव्यूह एवं रैखिक समीकरण
(Inverse of a Matrix and Linear Equations)

5.01 व्युत्क्रमणीय आव्यूह (Non-singular Matirx)

यदि किसी वर्ग आव्यूह A की सारणिक $|A| \neq 0$ हो, तो आव्यूह A व्युत्क्रमणीय आव्यूह कहलाता है।

उदाहरणार्थ $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ एक व्युत्क्रमणीय आव्यूह है

क्योंकि $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 10 - 12 = -2 \neq 0$

5.2 अव्युत्क्रमणीय आव्यूह (Singular matrix)

यदि किसी वर्ग आव्यूह A की सारणिक $|A| = 0$ हो, तो आव्यूह A अव्युत्क्रमणीय आव्यूह कहलाता है।

जैसे– $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ एक अव्युत्क्रमणीय आव्यूह है क्योंकि $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 6 - 6 = 0$

5.3 वर्ग आव्यूह का सहखण्डज आव्यूह (Adjoint of a square matrix)

यदि किसी वर्ग आव्यूह $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ की सारणिक $|A|$ के अवयव a_{ij} का सहखण्ड F_{ij} हो, तो वर्ग आव्यूह $[F_{ij}]$ का परिवर्त आव्यूह को A का सहखण्डज आव्यूह कहते हैं तथा इसे $adjA$ से व्यक्त करते हैं।

अर्थात् यदि $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ तो आव्यूह A की सारणिक $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

तथा $|A|$ के अवयवों के सहखण्डों का आव्यूह

$$[F_{ij}] = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad [F_{ij}]^T = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{21} & F_{31} \\ F_{12} & F_{22} & F_{32} \\ F_{13} & F_{23} & F_{33} \end{bmatrix} = AdjA$$

जैसे– (i) आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}_{2\times 2} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}_{2\times 2}$

$\therefore$ सारणिक $|A|$ के अवयव $a_{11}(=2)$ का सहखण्ड $=|5|=5$

$a_{12}(=3)$ का सहखण्ड $=-|4|=-4$

$a_{21}(=4)$ का सहखण्ड $=-|3|=-3$

$a_{22}(=5)$ का सहखण्ड $=|2|=2$

$\therefore$ सारणिक $|A|$ के सहखण्डों का आव्यूह $B=\begin{bmatrix}5 & -4\\ -3 & 2\end{bmatrix}_{2\times 2}$

अतः आव्यूह A की सहखण्डज आव्यूह $adjA=B^T=\begin{bmatrix}5 & -3\\ -4 & 2\end{bmatrix}$

टिप्पणीः लघुविधि द्वितीय क्रम के आव्यूह A का सहखण्डज आव्यूह A के अग्रग विकर्ण के अवयवों का स्थान परिवर्तन तथा पिछले विकर्ण के अवयवों का चिह्न बदलकर प्राप्त कर सकते हैं।

(ii) आव्यूह $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 3 & -1 & 1\\ 4 & 6 & 4\end{bmatrix}\Rightarrow |A|=\begin{vmatrix}1 & 2 & 0\\ 3 & -1 & 1\\ 4 & 6 & 4\end{vmatrix}$

$\therefore$ सारणिक A के अवयव $a_{11}(=1)$ का सहखण्ड $=\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 6 & 4\end{vmatrix}=-10$

$a_{12}(=2)$ का सहखण्ड $=-\begin{vmatrix}3 & 1\\ 4 & 4\end{vmatrix}=-8$

$a_{13}(=0)$ का सहखण्ड $=\begin{vmatrix}3 & -1\\ 4 & 6\end{vmatrix}=22$

$a_{21}(=3)$ का सहखण्ड $=-\begin{vmatrix}2 & 0\\ 6 & 4\end{vmatrix}=-8$

$a_{22}(=-1)$ का सहखण्ड $=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 4 & 4\end{vmatrix}=4$

$a_{23}(=1)$ का सहखण्ड $=-\begin{vmatrix}1 & 2\\ 4 & 6\end{vmatrix}=2$

$a_{31}(=4)$ का सहखण्ड $=\begin{vmatrix}2 & 0\\ -1 & 1\end{vmatrix}=2$

$a_{32}(=6)$ का सहखण्ड $=-\begin{vmatrix}1 & 0\\ 3 & 1\end{vmatrix}=-1$

$a_{33}(=4)$ का सहखण्ड $=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & -1\end{vmatrix}=-7$

$\therefore$ सहखण्डों का आव्यूह $B = \begin{bmatrix} -10 & -8 & 22 \\ -8 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & -7 \end{bmatrix}$

अतः आव्यूह A का सहखण्डज आव्यूह $adjA = B^T = \begin{bmatrix} -10 & -8 & 2 \\ -8 & 4 & -1 \\ 22 & 2 & -7 \end{bmatrix}$

5.04 आव्यूह का व्युत्क्रम (Inverse of a matrix)

यदि A किसी भी क्रम का एक वर्ग आव्यूह है तथा B भी उसी क्रम का एक अन्य वर्ग आव्यूह इस प्रकार हो कि $AB = I = BA$, जहाँ I इसी क्रम का इकाई आव्यूह है, तो आव्यूह B, आव्यूह A का व्युत्क्रम आव्यूह कहलाता है तथा इसे A^{-1} से व्यक्त करते हैं। अतः $B = A^{-1} \Rightarrow AA^{-1} = I = A^{-1}A$ सममित सम्बन्ध $AB = BA$ से स्पष्ट है कि आव्यूह A को भी B का व्युत्क्रम आव्यूह कह सकते हैं। अर्थात् यदि दो आव्यूह A तथा B इस प्रकार हो कि $AB = I = BA$ तो आव्यूह A तथा B परस्पर व्युत्क्रम कहलाते हैं।

5.05 कुछ महत्वपूर्ण प्रमेय (Some important theorems)

प्रमेय–1 एक वर्ग आव्यूह A के व्युत्क्रमणीय होने के लिए आवश्यक एवं पर्याप्त शर्त है कि $|A| \neq 0$

प्रमाणः आवश्यक शर्तः माना B, वर्ग आव्यूह A का व्यूत्क्रम आव्यूह है अतः परिभाषा से $AB = BA = I$

$\Rightarrow \quad |AB| = |I|$

$\Rightarrow \quad |A|.|B| = 1 \qquad [\because |I| = 1]$

$\Rightarrow \quad |A| \neq 0$

अतः शर्त आवश्यक है।

पर्याप्त शर्तः माना $|A| \neq 0$ तब

$$A \cdot (adjA) = |A| I = (adjA).A$$

$|A|$ का भाग देने पर

$$A.\frac{adjA}{|A|} = I = \frac{(adjA)}{|A|}.A \qquad [\because |A| \neq O]$$

जो $\quad A.B = I = B.A$ रूप का ही है।

अतः $\quad A^{-1} = B = \frac{adjA}{|A|}$

$\Rightarrow \quad A^{-1} = \frac{adjA}{|A|}$

अतः A एक व्युत्क्रमणीय आव्यूह है।

प्रमेय–2 यदि A तृतीय क्रम का वर्ग आव्यूह हो, तो

$$A \cdot (adjA) = |A| I_3 = (adjA) \cdot A,$$ जहाँ I_3 तृतीय क्रम का इकाई आव्यूह है।

प्रमाणः माना $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ एक तृतीय क्रम का वर्ग आव्यूह है।

$$\therefore \qquad adjA=\begin{bmatrix} F_{11} & F_{21} & F_{31} \\ F_{12} & F_{22} & F_{32} \\ F_{13} & F_{23} & F_{33} \end{bmatrix}$$

अतः $$A.(adjA)=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} F_{11} & F_{21} & F_{31} \\ F_{12} & F_{22} & F_{32} \\ F_{13} & F_{23} & F_{33} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} |A| & 0 & 0 \\ 0 & |A| & 0 \\ 0 & 0 & |A| \end{bmatrix}$$ (आव्यूह गुणन सिद्धान्त से)

$$=|A|\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=|A|I_3 \qquad (1)$$

इसी प्रकार सिद्ध कर सकते हैं कि

$$(adjA)\cdot A=|A|I_3 \qquad (2)$$

अतः (1) व (2) से

$$A\cdot(adjA)=|A|I_3=(adjA)\cdot A$$ इति सिद्धम्

टिप्पणीः यदि A तथा B, n क्रम का वर्ग आव्यूह है, तो

(i) $A.(adjA)=|A|I_n=(adjA).A$

(ii) $adj(adjA)=|A|^{n-2}A$

(iii) $adjA^T=(adjA)^T$

(iv) $adj(AB)=adjB.adjA$

प्रमेय–3 प्रत्येक व्युत्क्रमणीय आव्यूह का व्युत्क्रम आव्यूह अद्वितीय (unique) होता है।

प्रमाणः माना A एक व्युत्क्रमणीय आव्यूह है तथा B व C इसके दो व्युत्क्रम आव्यूह है, तब

$AB=BA=I$ (1)

तथा $AC=CA=I$ (2)

अब $AB=I \Rightarrow C(AB)=CI \Rightarrow (CA)B=CI$ (साहचर्यता से)

$\Rightarrow I\,B=CI$ [(2) के प्रयोग से]

$\Rightarrow B=C$

अतः व्युत्क्रमणीय आव्यूह का व्युत्क्रम आव्यूह अद्वितीय होता है।

प्रमेय–4 यदि A तथा B एक ही क्रम के व्युत्क्रमणीय वर्ग आव्यूह है तो $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$.

प्रमाणः $\because$ A तथा B एक ही क्रम के वर्ग आव्यूह है।

$\therefore$ गुणन AB सम्भव है।

$\because$ A तथा B व्युत्क्रमणीय आव्यूह है।

$\therefore \quad |A| \neq 0$ तथा $|B| \neq 0$

$\Rightarrow \quad |AB| = |A||B| \neq 0$

$\Rightarrow \quad AB$ व्यूत्क्रमणीय वर्ग आव्यूह है।

अब एक आव्यूह C इस प्रकार लें कि $C = B^{-1}A^{-1}$

अतः $\quad (AB)C = (AB)(B^{-1}A^{-1})$

$= A.(BB^{-1})A^{-1}$ (साहचर्यता से)

$= A.I.A^{-1}$ $[\because BB^{-1} = I]$

$= AA^{-1} = I$

इसी प्रकार $\quad C(AB) = (B^{-1}A^{-1})(AB)$

$= B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB$ $[\because A^{-1}A = I]$

$= B^{-1}B = I$

$\therefore \quad (AB)C = C(AB)$

अतः आव्यूह AB का एक मात्र व्युत्क्रम आव्यूह C है।

$\therefore \quad (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

व्यापकताः $\quad (ABC...XYZ)^{-1} = Z^{-1}Y^{-1}X^{-1}...B^{-1}A^{-1}$

प्रमेय–5 यदि A एक व्युत्क्रमणीय आव्यूह है तो आव्यूह A^T भी व्युत्क्रमणीय होगा तथा $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

प्रमाणः $\because \quad |A| = |A^T| \qquad |A| \neq 0$ $(\because A$ व्युत्क्रमणीय है)

$\therefore \quad |A^T| \neq 0$

अतः आव्यूह A^T भी व्युत्क्रमणीय है।

$\because \quad A$ व्युत्क्रमणीय है $\Rightarrow A^{-1}$ का अस्तित्व इस प्रकार है कि

$AA^{-1} = I = A^{-1}A$

$\Rightarrow \quad (AA^{-1})^T = I^T = (A^{-1}A)^T$

$\Rightarrow \quad (A^{-1})^T A^T = I = A^T(A^{-1})^T$ $[\because (AB)^T = B^T A^T]$

$\Rightarrow \quad A^T$ का एक मात्र व्यूत्क्रम $(A^{-1})^T$ है।

$\Rightarrow \quad (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-1. यदि आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ हो, तो

(i) A का सहखण्डज आव्यूह $(adjA)$ ज्ञात कीजिए।

(ii) सिद्ध कीजिए कि $A.(adjA) = |A|I_2 = (adjA).A$

(iii) A^{-1} ज्ञात कीजिए।

(iv) सिद्ध कीजिए कि $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$

हलः (i) $\because$ दिया आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

$\therefore$ $a_{11}(=1)$ का सहखण्ड $= 4$

$a_{12}(=3)$ का सहखण्ड $= -2$

$a_{21}(=2)$ का सहखण्ड $= -3$

$a_{22}(=4)$ का सहखण्ड $= 1$

अतः $adjA = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ (1)

(ii) $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2$.

अतः $A \cdot (adjA) = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4-6 & -3+3 \\ 8-8 & -6+4 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = -2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = |A| I_2$ (2)

तथा $(adjA).A = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4-6 & 12-12 \\ -2+2 & -6+4 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = -2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = |A| I_2$. (3)

(2) व (3) से $A \cdot (adjA) = |A| I_2 = (adjA) \cdot A$ इति सिद्धम्।

(iii) $A^{-1} = \frac{adjA}{|A|} = \frac{-1}{2}\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 3/2 \\ 1 & -1/2 \end{bmatrix}$ (4)

(iv) $\because$ $A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 3/2 \\ 1 & -1/2 \end{bmatrix}$

$\therefore$ $(A^{-1})^T = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{bmatrix}$ (5)

तथा $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow |A^T| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2 \neq 0$

$\therefore$ $(A^T)^{-1}$ का अस्तित्व है।

$adj(A^T) = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$

$\because \quad (A^T)^{-1} = \dfrac{adj(A^T)}{|A^T|} = -\dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{bmatrix} \qquad (6)$$

(5) व (6) से $\quad (A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$. इति सिद्धम्।

उदाहरण-2. यदि आव्यूह $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ हो, तो A^{-1} ज्ञात कीजिए।

हल: $\because \quad A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

$\therefore \quad |A| = \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix} = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$.

अतः $|A| \neq 0$ अर्थात् A^{-1} का अस्तित्व है।

$$adjA = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$\therefore \quad A^{-1} = \dfrac{adjA}{|A|} = \dfrac{\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}}{1} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$.

उदाहरण-3. यदि आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ हो, तो A^{-1} ज्ञात कीजिए तथा सिद्ध कीजिए कि $A^{-1}A = I_3$

हल: दिया है आव्यूह $\quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

$\therefore \quad |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1(6-1) - 2(4-3) + 3(2-9) = 5 - 2 - 21 = -18 \neq 0$.

अतः A^{-1} का अस्तित्व है।

अब $\quad adjA = \begin{bmatrix} 5 & -1 & -7 \\ -1 & -7 & 5 \\ -7 & 5 & -1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 5 & -1 & -7 \\ -1 & -7 & 5 \\ -7 & 5 & -1 \end{bmatrix}$

अतः $\therefore$ $$A^{-1}=\frac{adjA}{|A|}=-\frac{1}{18}\begin{bmatrix}5 & -1 & -7\\ -1 & -7 & 5\\ -7 & 5 & -1\end{bmatrix}$$

अतः $$A^{-1}A=-\frac{1}{18}\begin{bmatrix}5 & -1 & -7\\ -1 & -7 & 5\\ -7 & 5 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\\ 3 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

$$=-\frac{1}{18}\begin{bmatrix}5-2-21 & 10-3-7 & 15-1-14\\ -1-14+15 & -2-21+5 & -3-7+10\\ -7+10-3 & -14+15-1 & -21+5-2\end{bmatrix}$$

$$=-\frac{1}{18}\begin{bmatrix}-18 & 0 & 0\\ 0 & -18 & 0\\ 0 & 0 & -18\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=I_3.$$ इति सिद्धम्।

उदाहरण-4. यदि आव्यूह $A=\begin{bmatrix}3 & 7\\ 2 & 5\end{bmatrix}$ तथा $B=\begin{bmatrix}6 & 8\\ 7 & 9\end{bmatrix}$ हो, तो सिद्ध कीजिए: $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

हल: यहाँ $$|A|=\begin{vmatrix}3 & 7\\ 2 & 5\end{vmatrix}=1\neq 0 \qquad (1)$$

$\therefore$ A^{-1} का अस्तित्व है।

तथा $$|B|=\begin{vmatrix}6 & 8\\ 7 & 9\end{vmatrix}=-2\neq 0 \qquad (2)$$

$\therefore$ B^{-1} का अस्तित्व है।

अतः $$AB=\begin{bmatrix}3 & 7\\ 2 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6 & 8\\ 7 & 9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}18+49 & 24+63\\ 12+35 & 16+45\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}67 & 87\\ 47 & 61\end{bmatrix} \qquad (3)$$

$\therefore$ $$(AB)^{-1}=-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}61 & -87\\ -47 & 67\end{bmatrix} \qquad (4)$$

$$A^{-1}=\frac{1}{1}\begin{bmatrix}5 & -7\\ -2 & 3\end{bmatrix} \qquad (5)$$

तथा $$B^{-1}=-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}9 & -8\\ -7 & 6\end{bmatrix} \qquad (6)$$

$$\because \qquad B^{-1}A^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 9 & -8 \\ -7 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & -7 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 45+16 & -63-24 \\ -35-12 & 49+18 \end{bmatrix}$$

$$= -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 61 & -87 \\ -47 & 67 \end{bmatrix} \qquad (7)$$

अतः (4) व (7) से $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. इति सिद्धम्।

उदाहरण-5. यदि आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि: $A^2 - 4A + I = 0$, जहाँ $O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ एवं $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ तथा A^{-1} भी ज्ञात कीजिए।

हल: $\because \qquad A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

$$\therefore \qquad A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+3 & 6+6 \\ 2+2 & 3+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 12 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$$

अतः $A^2 - 4A + I = \begin{bmatrix} 7 & 12 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} - 4\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 7 & 12 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -8 & -12 \\ -4 & -8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 7-8+1 & 12-12+0 \\ 4-4+0 & 7-8+1 \end{bmatrix}$$

$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$, यहाँ $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 3 = 1 \neq 0$.

$\therefore \qquad A^{-1}$ का अस्तित्व है।

अब $\quad A^2 - 4A + I = 0 \qquad \Rightarrow A^2 - 4A = -I \qquad \Rightarrow A(A - 4I) = -I$

$\Rightarrow A^{-1}A(A - 4I) = -A^{-1}I \qquad \Rightarrow (A^{-1}A)(A - 4I) = -A^{-1} \qquad \Rightarrow I(A - 4I) = -A^{-1}$

$\Rightarrow A - 4I = -A^{-1} \qquad \Rightarrow A^{-1} = 4I - A$

$$\Rightarrow A^{-1} = 4\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

प्रश्नमाला 5.1

1. x के किस मान के लिए आव्यूह $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ x & 2 & -3 \end{bmatrix}$ अव्युत्क्रमणीय है।

2. यदि आव्यूह $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ हो, तो $adjA$ ज्ञात कीजिए तथा सिद्ध कीजिए कि $A\cdot(adjA) = |A| I_3 = (adjA)\cdot A$

3. निम्नलिखित आव्यूह के व्युत्क्रमणीय आव्यूह ज्ञात कीजिए

(i) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 4 \\ 3 & -3 & 4 \end{bmatrix}$

4. यदि आव्यूह $A = F(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos\propto & -\sin\propto & 0 \\ \sin\propto & \cos\propto & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ हो, तो A^{-1} ज्ञात कीजिए तथा सिद्ध कीजिए कि

(i) $A^{-1}A = I_3$ (ii) $A^{-1} = F(-\alpha)$ (iii) $A\cdot(adjA) = |A| I = (adjA)\cdot A$

5. यदि $A = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} -8 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & 7 \\ 1 & -8 & 4 \end{bmatrix}$ तो सिद्ध कीजिए कि $A^{-1} = A^T$

6. यदि आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि $A^{-1} = A^3$

7. यदि $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ तथा $B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ हो, तो $(AB)^{-1}$ ज्ञात कीजिए।

8. यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & \tan\alpha \\ -\tan\alpha & 1 \end{bmatrix}$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि $A^T A^{-1} = \begin{bmatrix} \cos 2\alpha & -\sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & \cos 2\alpha \end{bmatrix}$

9. सिद्ध कीजिए कि आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ समीकरण $x^2 - 6A + 7 = 0$ को सन्तुष्ट करता है तथा A^{-1} भी ज्ञात कीजिए।

10. यदि आव्यूह $A = \begin{bmatrix} -8 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि $A^2 + 4A - 42I = 0$ तत्पश्चात A^{-1} ज्ञात कीजिए।

5.06 सारणिकों के अनुप्रयोग (Applications of daterminants)

1. त्रिभुज का क्षेत्रफल (Area of a triangle)

यदि एक त्रिभुज के शीर्ष $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ तथा (x_3, y_3) हो, तो हम जानते हैं

त्रिभुज का क्षेत्रफल $\Delta = \frac{1}{2}\left[x_1(y_2 - y_1) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\right]$ (1)

तथा $\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = x_1\begin{vmatrix} y_2 & 1 \\ y_3 & 1 \end{vmatrix} - x_2\begin{vmatrix} y_1 & 1 \\ y_3 & 1 \end{vmatrix} + x_3\begin{vmatrix} y_1 & 1 \\ y_2 & 1 \end{vmatrix}$ (प्रथम स्तम्भ से प्रसार करने पर)

$= x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)$ (2)

(1) व (2) से $\Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$

अतः शीर्ष $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ तथा (x_3, y_3) वाले त्रिभुज का क्षेत्रफल होता है $\Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$.

टिप्पणीः चूंकि क्षेत्रफल हमेशा एक धनात्मक राशि होती है, इसलिए क्षेत्रफल ज्ञात करते समय सारणिक का धनात्मक मान (positive value) ही लिया जाता है।

उदाहरणार्थः त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जबकि त्रिभुज के शीर्ष $A(-3, 3), B(2, 3)$ तथा $C(2, -2)$ हैं।

हलः $\Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -3 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$

$$= \frac{1}{2}\left\{-3\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\{-3(3+2) - 3(2-2) + 1(-4-6)\}$$

$$= \frac{1}{2}(-15 + 0 - 10)$$

$$= \frac{-25}{2} = -12.5 \text{ वर्ग इकाई}$$

$\because$ त्रिभुज का क्षेत्रफल एक धनात्मक राशि होती है अतः $\Delta = 12.5$ वर्ग इकाई।

2. तीन बिन्दुओं के संरेखीय होने की शर्त (Condition of collinearity of three points)

यदि तीन बिन्दु $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ तथा $C(x_3, y_3)$ संरेखीय है, तो त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल शून्य होगा।

$$\Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

उदाहरणार्थः बिन्दु $A(3, -2), B(5, 2)$ तथा $C(8, 8)$ संरेखीय हैं अतः

$$\Delta = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \\ 8 & 8 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\{3(2-8) + 2(5-8) + 1(40-16)\}$$

$$= \frac{1}{2}(-18 - 6 + 24) = 0$$

3. दो बिन्दुओं से गुजरने वाली रेखा का समीकरण (Equation of a line passing through two points)

यदि दो बिन्दु $A(x_1, y_1)$ तथा $B(x_2, y_2)$ है तथा माना $P(x, y)$, AB से गुजरने वाली रेखा पर स्थित है, तो बिन्दु P, A तथा B संरेखीय होंगे। अतः

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

जो कि रेखा का अभीष्ट समीकरण है।

उदाहरणार्थः बिन्दु $A(3, 1)$ तथा $B(9, 3)$ से गुजरने वाली रेखा का समीकरण $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$

$$\Rightarrow \quad x(1-3) - y(3-9) + 1(9-9) = 0$$

$$\Rightarrow \quad -2x + 6y = 0$$

$$\Rightarrow \quad x - 3y = 0$$

5.07 रैखिक समीकरण निकाय का हल (Solution of system of linear equations)

यदि समीकरण निकाय

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1$$
$$a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2$$
$$a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3$$

में $b_1 = b_2 = b_3 = 0$ हो, तो निकाय समघाती (Homogeneous) कहलाता है अन्यथा विषमघाती (Non-Homogeneous) कहलाता है।

यहाँ हम विषमघाती रैखिक समीकरण निकाय का हल ज्ञात करेंगे।

1. सारणिकों के प्रयोग से: क्रेमर नियम (Cramer's rule)

(i) दो चरों वाले रैखिक समीकरण निकाय के हल (Solution of system of linear equations of two variables)

दो चरों वाले रैखिक समीकरण निकाय

$$a_1x + b_1y = c_1 \qquad (1)$$
$$a_2x + b_2y = c_2 \qquad (2)$$

के हल क्रेमर नियम से

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \qquad y = \frac{\Delta_2}{\Delta}$$

या $$\frac{x}{\Delta_1} = \frac{y}{\Delta_2} = \frac{1}{\Delta},\ \Delta \neq 0 \qquad \text{(समममित रूप में)}$$

जहाँ $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$, $\Delta_1 = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$ तथा $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$

प्रमाण: $\because$ $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$

$\therefore$ $x\Delta = x\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1x & b_1 \\ a_2x & b_2 \end{vmatrix}$

$\Rightarrow$ $x\Delta = \begin{vmatrix} a_1x + b_1y & b_1 \\ a_2x + b_2y & b_2 \end{vmatrix} = \Delta_1$ (संक्रिया $C_1 \to C_1 + yC_2$ से)

$\Rightarrow$ $x\Delta = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = \Delta_1$ (समीकरण (1) व (2) के प्रयोग से)

इसी प्रकार $y\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = \Delta_2$

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} \text{ तथा } y = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \text{ जहाँ } \Delta \neq 0$$

विशेष स्थितिः यह समीकरण निकाय वास्तव में दो सरल रेखाओं को निरूपित करता हैः

(क) यदि $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ हो, तो निकाय का हल अद्वितीय है तथा निकाय संगत एवं स्वतंत्र है।

(ख) यदि $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ हो, तो निकाय का हल संभव नहीं है तथा निकाय अंसगत है।

(ग) यदि $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ हो, तो निकाय के अनन्त हल हैं तथा निकाय संगत तो है परन्तु स्वतंत्र नहीं है।

(ii) तीन चरों वाले रैखिक निकाय के हल (Solution of system of linear equation for three variables)

तीन चरों वाले रैखिक समीकरण निकाय

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \quad (1)$$

$$a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \quad (2)$$

$$a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \quad (3)$$

के हल क्रेमर नियम से $x = \frac{\Delta_1}{\Delta}, y = \frac{\Delta_2}{\Delta}, z = \frac{\Delta_3}{\Delta}$

या $\frac{x}{\Delta_1} = \frac{y}{\Delta_2} = \frac{z}{\Delta_3} = \frac{1}{\Delta}$;$\Delta \neq 0$ (सममित रूप)

जहाँ $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$, $\Delta_1 = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}$ तथा $\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$

प्रमाणः $\because$ $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

$\therefore$ $x\Delta = x\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

या $x\Delta = \begin{vmatrix} a_1x + b_1y + c_1z & b_1 & c_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z & b_2 & c_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ (संक्रिया $C_1 \to C_1 + yC_2 + zC_3$)

या $x\Delta = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \Delta_1$ (समीकरण (1), (2) तथा (3) के प्रयोग से)

इसी प्रकार $y\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix} = \Delta_2$ तथा $z\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix} = \Delta_3$

$\therefore$ $x = \frac{\Delta_1}{\Delta}, y = \frac{\Delta_2}{\Delta}$ तथा $z = \frac{\Delta_3}{\Delta}$ बशर्ते $\Delta \neq 0$

विशेष स्थिति: (i) यदि $\Delta \neq 0$ हो, तो समीकरण निकाय संगत होता है तथा निकाय का हल अद्वितीय होगा।

(ii) यदि $\Delta = 0$ तथा $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$ हो, तो समीकरण निकाय संगत या असंगत हो सकता है। यदि निकाय संगत है तो उसके अनन्त हल होंगे।

(iii) यदि $\Delta = 0$ तथा $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ में से कोई एक अशून्य हो, तो समीकरण निकाय अंसगत होगा तथा निकाय का हल सम्भव नहीं होगा।

2. आव्यूह सिद्धान्त की सहायता से:

माना हमें निम्नलिखित समीकरण निकाय को हल करना है:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

इसी समीकरण निकाय को हम आव्यूह रूप में निम्न प्रकार लिख सकते हैं

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \quad (2)$$

या $AX = B$ (3)

जहाँ $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$

यहाँ आव्यूह A को चरों x, y, z का गुणांक आव्यूह कहते हैं तथा X समीकरण निकाय में उपस्थित चरों का आव्यूह है जिनके मान हमें ज्ञात करने हैं।

अब यदि $|A| \neq 0$ तो समीकरण (3) से

$$AX = B$$

$\Rightarrow$ $A^{-1}(AX) = A^{-1}B$

$\Rightarrow$ $(A^{-1}A)X = A^{-1}B$

$\Rightarrow$ $I\,X = A^{-1}B$

$\Rightarrow$ $X = A^{-1}B$

टिप्पणी: (i) $|A| \neq 0$, तो A^{-1} का अस्तित्व होगा।

(ii) $|A| = 0$, तो A^{-1} का अस्तित्व नहीं होगा। इसका तात्पर्य यह नहीं है कि समीकरण निकाय का हल नहीं होगा।

जैसे– $x+3y=5$

$2x+6y=10,$

यहाँ $|A|=\begin{vmatrix}1 & 3\\2 & 6\end{vmatrix}=0$ परन्तु इस निकाय के अनन्त हल होंगे।

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण-6. त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जबकि त्रिभुज के शीर्ष $A(2,3), B(-5,4)$ तथा $C(4,3)$ हैं।

हल: त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल

$$\Delta=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}2 & 3 & 1\\-5 & 4 & 1\\4 & 3 & 1\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\{2(4-3)+5(3-3)+4(3-4)\}$$

$$=\frac{1}{2}(2+0-4)$$

$$=-1$$

$=1$ (संख्यात्मक मान) वर्ग इकाई।

उदाहरण-7. यदि बिन्दु $(x,-2), (5,2), (8,8)$ संरेख हैं, तो x का मान ज्ञात कीजिए।

हल: $\because$ दिए बिन्दु $(x,-2), (5,2)$ तथा $(8,8)$ संरेख हैं

$\therefore$ $$\begin{vmatrix}x & -2 & 1\\5 & 2 & 1\\8 & 8 & 1\end{vmatrix}=0$$

या $x(2-8)+2(5-8)+1(40-16)=0$

या $-6x-6+24=0$

या $-6x+18=0$

या $x=3.$

उदाहरण-8. सिद्ध कीजिए बिन्दु $[bc, a(b+c)]$, $[ca, b(c+a)]$ तथा $[ab, c(a+b)]$ संरेख हैं।

हल: तीन बिन्दु संरेख होने के प्रतिबन्ध से

$\therefore$ $$\begin{vmatrix}bc & a(b+c) & 1\\ca & b(c+a) & 1\\ab & c(a+b) & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}bc+ab+ca & a(b+c) & 1\\ca+bc+ab & b(c+a) & 1\\ab+ca+bc & c(a+b) & 1\end{vmatrix}$$ (संक्रिया $C_1\to C_1+C_2$ से)

$$=(ab+bc+ca)\begin{vmatrix}1 & a(b+c) & 1\\1 & b(c+a) & 1\\1 & c(a+b) & 1\end{vmatrix}$$

$$=(ab+bc+ca).0$$ ($\because$ दो समान स्तम्भ)

$$=0$$

अतः दिए गए बिन्दु संरेख हैं। इतिसिद्धम्।

उदाहरण-9. दो बिन्दुओं $A(4, 3)$ तथा $B(-5, 2)$ को मिलाने वाली रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए तथा k का मान ज्ञात कीजिए, यदि त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल 2 वर्ग इकाई, जबकि $C(k, 0)$ है।

हल: माना रेखा AB पर स्थित कोई बिन्दु $P(x, y)$ है, तब ΔABC का क्षेत्रफल $= 0$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ -5 & 2 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}\left[4(2-y)-3(-5-x)+1(-5y-2x)\right]=0$$

$$\Rightarrow \quad 8-4y+15+3x-5y-2x=0$$

$$\Rightarrow \quad x-9y+23=0.$$

जो कि रेखा AB का अभीष्ट समीकरण है।

अब ΔABC का क्षेत्रफल $= 2$ वर्ग इकाई

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 \\ -5 & 2 & 1 \\ k & 0 & 1 \end{vmatrix} = \pm 2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}\left[4(2-0)-3(-5-k)+1(0-2k)\right]=\pm 2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}[8+15+3k-2k]=\pm 2$$

$$\Rightarrow \quad 23+k=\pm 4$$

$$\Rightarrow \quad k=\pm 4-23$$

$$\Rightarrow \quad k=-19, -27$$

उदाहरण-10. निम्न समीकरण निकाय कैसे हैं? यदि हल सम्भव हो, तो क्रेमर नियम से हल कीजिए।

(i) $2x-3y=3$
$2x+3y=9$

(ii) $x+2y=5$
$2x+4y=10$

हल: (i)

$$2x-3y=3$$
$$2x+3y=9$$

यहाँ $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 6+6=12 \neq 0$, $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 9 & 3 \end{vmatrix} = 9+27=36 \neq 0$ तथा $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 9 \end{vmatrix} = 18-6=12 \neq 0$

$\because \quad \Delta \neq 0, \ \Delta_1 \neq 0, \ \Delta_2 \neq 0$

$\therefore$ समीकरण निकाय संगत व स्वतंत्र है तथा इसका हल अद्वितीय है।

अतः क्रेमर नियम से

$$x=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{36}{12}=3, \qquad y=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{12}{12}=1$$

अतः समीकरण निकाय का हल $x=3, \ y=1$.

(ii) $\begin{aligned} x+2y&=5 \\ 2x+4y&=10 \end{aligned}$

यहाँ $\Delta=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{vmatrix}=4-4=0$, $\Delta_1=\begin{vmatrix}5 & 2\\ 10 & 4\end{vmatrix}=20-20=0$ तथा $\Delta_2=\begin{vmatrix}1 & 5\\ 2 & 10\end{vmatrix}=10-10=0$

$\because$ $\Delta=0,\ \Delta_1=0,\ \Delta_2=0$

$\therefore$ समीकरण निकाय अंसगत है तथा इसके हल अनन्त होंगे।

माना $y=k$ तब $x+2k=5 \Rightarrow x=5-2k$ अतः $x=5-2k,\ y=k$ समीकरण निकाय के हल है जहाँ k स्वेच्छ वास्तविक संख्या है।

उदाहरण-11. सिद्ध कीजिए कि निम्नलिखित समीकरण निकाय असंगत है तथा इसका हल सम्भव नहीं है।

$$x+y+z=2$$
$$x+2y+3z=5$$
$$2x+3y+4z=11.$$

हलः यहाँ $\Delta=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 4\end{vmatrix}=1(8-9)-1(4-6)+1(3-4)=-1+2-1=0.$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}2 & 1 & 1\\ 5 & 2 & 3\\ 11 & 3 & 4\end{vmatrix}=2(8-9)-1(20-33)+1(15-22)=-2+13-7=4\neq 0.$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & 5 & 3\\ 2 & 11 & 4\end{vmatrix}=1(20-23)-2(4-6)+1(11-10)=-13+4-1=-8\neq 0.$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 5\\ 2 & 3 & 11\end{vmatrix}=1(22-15)-1(11-10)+2(3-4)=7-1-2=4\neq 0.$$

$\because$ $\Delta=0$ तथा $\Delta_1\neq 0, \Delta_2\neq 0, \Delta_3\neq 0$.

$\therefore$ समीकरण निकाय असंगत है तथा इसका हल सम्भव नहीं है।

उदाहरण-12. निम्नलिखित समीकरण निकाय का क्रेमर नियम से हल ज्ञात कीजिए

$$x+y+z=9$$
$$2x+5y+7z=52$$
$$2x+y-z=0$$

हलः यहाँ $\Delta=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 5 & 7\\ 2 & 1 & -1\end{vmatrix}=1(-5-7)-1(-2-14)+1(2-10)=-12+16-8=-4\neq 0.$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 9 & 1 & 1 \\ 52 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 9(-5-7)-1(-52-0)+1(52-0) = -108+52+52 = -4 \neq 0.$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 9 & 1 \\ 2 & 52 & 7 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1(-52-0)-9(-2-14)+(0-104) = -52+144-104 = -12 \neq 0.$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 9 \\ 2 & 5 & 52 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1(0-52)-1(0-104)+9(2-10) = -52+104-72 = -20 \neq 0.$$

अतः क्रेमर नियम से

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-4}{-4} = 1, \qquad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-12}{-4} = 3, \qquad z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-20}{-4} = 5$$

अतः $x = 1, y = 3, z = 5$.

उदाहरण-13. आव्यूह सिद्धान्त का प्रयोग कर, निम्नलिखित रैखिक समीकरण निकाय को हल कीजिएः

$$5x - 3y = 2$$
$$x + 2y = 3.$$

हलः दिए गए समीकरण निकाय का आव्यूह रूप

$$\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

अर्थात् $AX = B$

जहाँ $A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, x = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

$\because$ $|A| = \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 10 + 3 = 13 \neq 0$

$\therefore$ A^{-1} का अस्तित्व है।

$$A^{-1} = \frac{adjA}{|A|} = \frac{1}{13}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$$

अब $X = A^{-1}B = \frac{1}{13}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

$$= \frac{1}{13}\begin{bmatrix} 4+9 \\ -2+15 \end{bmatrix} = \frac{1}{13}\begin{bmatrix} 13 \\ 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow$ $x = 1, y = 1.$

उदाहरण-14. निम्नलिखित रैखिक समीकरण निकाय को आव्यूह रूप में लिखिए

$$2x - y + 3z = 9$$
$$x + y + z = 6$$
$$x - y + z = 2.$$

यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ हो, तो A^{-1} ज्ञात कीजिए तथा समीकरण निकाय का हल ज्ञात कीजिए।

हल: $\because AX = B$, जहाँ $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$

अतः रैखिक समीकरण निकाय का आव्यूह रूप

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$$

यहाँ $$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2(1+1) + 1(1-1) + 3(-1-1) = 4 + 0 - 6 = -2 \neq 0$$

$\therefore$ A^{-1} का अस्तित्व है।

$$\therefore \quad A^{-1} = \frac{adjA}{|A|} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1/2 & -1/2 \\ 1 & 1/2 & -3/2 \end{bmatrix}$$

$\because \quad X = A^{-1}B$

$$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & -2 & -4 \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 18 - 12 - 8 \\ 0 - 6 + 2 \\ -18 + 6 + 6 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -2 \\ -4 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow \quad x = 1, y = 2, z = 3.$

उदाहरण-15. यदि $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 2 & 3 & 4\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix}$ तथा $B=\begin{bmatrix}2 & 2 & -4\\ -4 & 2 & -4\\ 2 & -1 & 5\end{bmatrix}$ हो, तो AB ज्ञात कीजिए तथा इसकी सहायता से निम्नलिखित रैखिक समीकरण निकाय को हल कीजिए

$$x-y=3;\quad 2x+3y+4z=17,\quad y+2z=7.$$

हल:

$$AB=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 2 & 3 & 4\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 2 & -4\\ -4 & 2 & -4\\ 2 & -1 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & 0 & 0\\ 0 & 6 & 0\\ 0 & 0 & 6\end{bmatrix}$$

$$=6\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=6I_3$$

$$\Rightarrow \qquad A\cdot\left(\frac{1}{6}B\right)=I_3$$

$$\Rightarrow \qquad A^{-1}=\frac{1}{6}B=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}2 & 2 & -4\\ -4 & 2 & -4\\ 2 & -1 & 5\end{bmatrix} \qquad (1)$$

अब दिए गए समीकरण निकाय का आव्यूह रूप

$$\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 2 & 3 & 4\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\ 17\\ 7\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \qquad AX=C$$

$$\Rightarrow \qquad X=A^{-1}C$$

$$\Rightarrow \qquad X=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}2 & 2 & -4\\ -4 & 2 & -4\\ 2 & -1 & 5\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}3\\ 17\\ 7\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \qquad \begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}6+34-28\\ -12+34-28\\ 6-17+35\end{bmatrix}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix}12\\ -6\\ 24\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\ -1\\ 4\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \qquad x=2,\ y=-1,\ z=4.$$

उदाहरण-16. निम्नलिखित समीकरण निकाय को हल कीजिए

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2y \\ z \\ 3y \end{bmatrix}$$

हल: दिया गया समीकरण निकाय

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2y \\ z \\ 3y \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \qquad \begin{bmatrix} 3x+3z \\ 2x+y \\ 4x+2z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8+2y \\ 1+z \\ 4+3y \end{bmatrix}$$

अत:

$$\left.\begin{aligned} 3x+3z=8+2y &\Rightarrow 3x-2y+3z=8 \\ 2x+y=1+z &\Rightarrow 2x+y-z=1 \\ 4x+2z=4+3y &\Rightarrow 4x-3y+2z=4 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

समीकरण निकाय (1) का आव्यूह रूप

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

अर्थात् $\qquad AX = B$

$\Rightarrow \qquad X = A^{-1}B$

$$= -\frac{1}{17}\begin{bmatrix} -1 & -5 & -1 \\ -8 & -6 & 9 \\ -10 & 1 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad \left[\because A^{-1} = \frac{adjA}{|A|}\right]$$

$$= -\frac{1}{17}\begin{bmatrix} -8-5-4 \\ -64-6+36 \\ -80+1+28 \end{bmatrix} = -\frac{1}{17}\begin{bmatrix} -17 \\ -34 \\ -51 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \qquad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow \qquad x = 1, y = 2, z = 3$.

प्रश्नमाला 5.2

1. सारणिक का प्रयोग कर त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके शीर्ष निम्न हैं
   (i) $(2, 5), (-2, -3)$ तथा $(6, 0)$ (ii) $(3, 8), (2, 7)$ तथा $(5, -1)$
   (iii) $(0, 0), (5, 0)$ तथा $(3, 4)$
2. सारणिक का प्रयोग कर शीर्ष $(1, 4), (2, 3)$ तथा $(-5, -3)$ वाले त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। क्या दिए गए बिन्दु संरेख है?
3. k का मान ज्ञात कीजिए यदि त्रिभुज का क्षेत्रफल 35 वर्ग इकाई है जबकि शीर्ष $(k, 4)$ $(2, -6)$ तथा $(5, 4)$ हैं।
4. सारणिक का प्रयोग कर k का मान ज्ञात कीजिए यदि बिन्दु $(k, 2-2k), (-k+1, 2k)$ तथा $(-4-k, 6-2k)$ संरेख हों।
5. यदि बिन्दु $(3, -2), (x, 2)$ तथा $(8, 8)$ संरेख हैं तो x का मान सारणिक का प्रयोग कर ज्ञात कीजिए।
6. सारणिक प्रयोग से दो बिन्दुओं $(3, 1)$ तथा $(9, 3)$ से गुजरने वाली रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए तथा त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए यदि तीसरा बिन्दु $(-2, -4)$ हो।
7. क्रेमर नियम से निम्नलिखित समीकरण निकायों को हल कीजिए।
   (i) $2x+3y=9$, $3x-2y=7$ (ii) $2x-7y-13=0$, $5x+6y-9=0$
8. सिद्ध कीजिए कि निम्नलिखित समीकरण निकाय अंसगत है।
   (i) $3x+y+2z=3$, $2x+y+3z=5$, $x-2y-z=1$ (ii) $x+6y+11=0$, $3x+20y-6z+3=0$, $6y-18z+1=0$
9. क्रेमर नियम से निम्नलिखित समीकरण निकायों को हल कीजिए।
   (i) $x+2y+4z=16$, $4x+3y-2z=5$, $3x-5y+z=4$ (ii) $2x+y-z=0$, $x-y+z=6$, $x+2y+z=3$
10. सारणिकों की सहायता से निम्नलिखित समीकरण निकायों को हल कीजिए।
   (i) $6x+y-3z=5$, $x+3y-2z=5$, $2x+y+4z=8$
   (ii) $\frac{2}{x}+\frac{3}{y}+\frac{10}{z}=4$, $\frac{4}{x}-\frac{6}{y}+\frac{5}{z}=1$, $\frac{6}{x}+\frac{9}{y}-\frac{20}{z}=2$
11. आव्यूह सिद्धान्त का प्रयोग कर निम्नलिखित समीकरण निकायों को हल कीजिए।
   (i) $2x-y=-2$, $3x+4y=3$ (ii) $5x+7y+2=0$, $4x+6y+3=0$ (iii) $x+y-z=1$, $3x+y-2z=3$, $x-y-z=-1$ (iv) $6x-12y+25z=4$, $4x+15y-20z=3$, $2x+18y+15z=10$
12. यदि $A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 0\\ 2 & 1 & 3\\ 0 & -2 & 1\end{bmatrix}$ हो, तो A^{-1} ज्ञात कीजिए तथा निम्नलिखित रैखिक समीकरण निकाय को हल कीजिए।
   $x-2y=10, \quad 2x+y+3z=8, \quad -2y+z=7.$

13. आव्यूहों $\begin{bmatrix} -4 & 4 & 4 \\ -7 & 1 & 3 \\ 5 & -3 & -1 \end{bmatrix}$ तथा $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ का गुणन ज्ञात कीजिए तथा इसकी सहायता से निम्नलिखित समीकरण निकाय को हल कीजिए

$$\begin{aligned} x - y + z &= 4 \\ x - 2y - 2z &= 9 \\ 2x + y + 3z &= 1 \cdot \end{aligned}$$

14. आव्यूह $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ का व्युत्क्रम आव्यूह ज्ञात कीजिए तथा इसकी सहायता से निम्नलिखित समीकरण निकाय को हल कीजिए

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2y \\ 6z \\ -2x \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

15. यदि समबाहु त्रिभुज की भुजा a तथा शीर्ष (x_1, y_1), (x_2, y_2) तथा (x_3, y_3) हो, तो सिद्ध कीजिए कि

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 2 \\ x_2 & y_2 & 2 \\ x_3 & y_3 & 2 \end{vmatrix}^2 = 3a^4$$

विविध प्रश्नमाला–5

1. यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ हो, तो A^{-1} ज्ञात कीजिए।

2. यदि $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ हो, तो A^{-1} ज्ञात कीजिए।

3. यदि आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ x & 2 & -3 \end{bmatrix}$ एक अव्यूत्क्रमणीय आव्यूह हो, तो x का मान ज्ञात कीजिए।

4. क्रेमर नियम का प्रयोग कर निम्नलिखत समीकरण निकाय हल कीजिए:

(i) $2x - y = 17$
$3x + 5y = 6.$

(ii) $3x + ay = 4$
$2x + ay = 2, \quad a \neq 0$

(iii) $x + 2y + 3z = 6$
$2x + 4y + z = 7$
$3x + 2y + 9z = 14.$

5. क्रेमर नियम का प्रयोग कर सिद्ध कीजिए कि निम्नलिखत समीकरण निकाय असंगत है:

(i) $2x - y = 5$
$4x - 2y = 7$

(ii) $x + y + z = 1$
$x + 2y + 3z = 2$
$3x + 4y + 5z = 3$

6. एक द्वितीय क्रम का आव्यूह A ज्ञात कीजिए

जहाँ $A\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$

7. यदि $A = \begin{bmatrix} -8 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि $A^2 + 4A - 42I = 0$ तथा इसकी सहायता से A^{-1} भी ज्ञात कीजिए।

8. यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$ हो तो सिद्ध कीजिए कि $A^{-1} = \frac{1}{19}A$.

9. यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ हो, तो A^{-1} ज्ञात कीजिए तथा दर्शाइए कि $A^{-1}A = I_3$

10. यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ हो तो सिद्ध कीजिए कि $A^2 - 4A - 5I = 0$ तत्पश्चात् इसकी सहायता से A^{-1} भी ज्ञात कीजिए।

11. आव्यूह सिद्धान्त का प्रयोग कर निम्नलिखत रैखिक समीकरण निकाय के हल ज्ञात कीजिए:

(i) $5x - 7y = 2$
$7x - 5y = 3$

(ii) $3x + y + z = 3$
$2x - y - z = 2$
$-x - y + z = 1$

(iii) $x + 2y - 2z + 5 = 0$
$-x + 3y + 4 = 0$
$-2y + z - 4 = 0$

12. दिए शीर्षों के लिए त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

(i) $A(-3, 5), B(3, -6), C(7, 2)$

(ii) $A(2, 7)$ $B(2, 2)$ $C(10, 8)$

13. यदि बिन्दु $(2, -3), (\lambda, -2)$ तथा $(0, 5)$ संरेख हों तो λ का मान ज्ञात कीजिए।

14. आव्यूह A ज्ञात कीजिए जबकि

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

15. यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ हो, तो A^{-1} ज्ञात कीजिए। तत्पश्चात् इसकी सहायता से निम्नलिखित रैखिक समीकरण निकाय को हल कीजिए:

$$x + y + 2z = 0, \quad x + 2y - z = 9, \quad x - 3y + 3z = -14$$

16. यदि $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & \dfrac{1+bc}{a} \end{bmatrix}$ हो, तो A^{-1} ज्ञात कीजिए तथा दर्शाइए कि $aA^{-1}=\left(a^2+bc+1\right)I-aA$.

17. सारणिक की सहायता से निम्नलिखित समीकरण निकाय को हल कीजिए

$$x+y+z=1$$
$$ax+by+z=k$$
$$a^2x+b^2y+c^2z=k^2.$$

18. यदि $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & -3 & -4 \end{bmatrix}$ हो, तो A^{-1} ज्ञात कीजिए। तत्पश्चात् इसकी सहायता से निम्नलिखित समीकरण निकाय को हल कीजिए।

$$x+2y-3z=-4,\quad 2x+3y+2z=2,\quad 3x-3y-4z=11.$$

19. यदि $\begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}\mathrm{X}=\begin{bmatrix} -16 & -6 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$ हो, तो X का मान ज्ञात कीजिए।

20. निम्नलिखित समीकरण निकाय के अनन्त हल हो तो a तथा b का मान ज्ञात कीजिए

$$2x+y+az=4$$
$$bx-2y+z=-2$$
$$5x-5y+z=-2.$$

महत्वपूर्ण बिन्दु

1. **अव्युत्क्रमणीय आव्यूहः** एक वर्ग आव्यूह A, जिसके लिए $|A|=0$
2. **व्युत्क्रमणीय आव्यूहः** एक वर्ग आव्यूह A, जिसके लिए $|A|\neq 0$
3. **सहखण्डज आव्यूहः** किसी वर्ग आव्यूह A, के सारणिक $|A|$ के अवयवों के सहखण्डों से निर्मित आव्यूह का परिवर्त आव्यूह सहखण्डज आव्यूह होता है।
4. **आव्यूह का व्युत्क्रमः** यदि एक वर्ग आव्यूह A व्युत्क्रमणीय है अर्थात् $|A|\neq 0$ तो $A^{-1}=\dfrac{adjA}{|A|}$
5. **सहखण्डज आव्यूह एवं व्यूत्क्रम आव्यूह के महत्वपूर्ण प्रमेयः**
   (i) एक वर्ग आव्यूह A के व्युत्क्रमणीय होने के लिए आवश्यक एवं पर्याप्त शर्त है कि $|A|\neq 0$
   (ii) यदि A एक n क्रम को वर्ग आव्यूह है तो $A.(adjA)=|A|\,I_n=(adjA).A$
   (iii) यदि A तथा B एक ही क्रम की व्युत्क्रमणीय वर्ग आव्यूह है तो $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$
   (iv) यदि A एक व्युत्क्रमणीय आव्यूह है तो आव्यूह A^T भी व्युत्क्रमणीय होगा तथा $(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$
6. तीन अज्ञात राशियों x, y, z के रैखिक समीकरण निकाय

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=b_1 \\ a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=b_2 \\ a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z=b_3 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

का हल सारणिक एवं आव्यूह के व्युत्क्रम विधियों से ज्ञात किया जा सकता हैं।

(i) सारणिक विधि से हल: क्रेमर नियम

उपर्युक्त समीकरण निकाय (1) के लिए

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} \text{ तथा } \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix} \text{ तो}$$

स्थिति–I: जब $\Delta \neq 0$ हो समीकरण निकाय का हल अद्वितीय है तथा $\frac{x}{\Delta_1} = \frac{y}{\Delta_2} = \frac{z}{\Delta_3} = \frac{1}{\Delta}$

स्थिति–II: जब $\Delta = 0$ तथा $\Delta_1 \neq 0$ या $\Delta_2 \neq 0$ या $\Delta_3 \neq 0$ तो समीकरण निकाय असंगत है तथा ऐसे समीकरण निकाय का हल सम्भव नहीं है।

स्थिति–III: जब $\Delta = 0$ तथा $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$ तो समीकरण निकाय संगत या असंगत हो सकता है। यदि निकाय संगत है तो उसके अनन्त हल होंगे।

(ii) आव्यूह विधि से : उपर्युक्त समीकरण निकाय के लिए आव्यूह रूप $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$

अर्थात् $AX = B$

$\Rightarrow X = A^{-1}B$, जहाँ $A^{-1} = \frac{adjA}{|A|}$.

उत्तरमाला

प्रश्नमाला 5.1

1. $x = -1$ 2. $\begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -11 & 1 & 8 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ 3.(i) $\frac{1}{27}\begin{bmatrix} 4 & 17 & 3 \\ -1 & -11 & 6 \\ 5 & 1 & -3 \end{bmatrix}$; (ii) $\begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; (iii) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 4 \\ 3 & -3 & 4 \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 7. $\begin{bmatrix} -2 & 19 & -27 \\ -2 & 18 & -25 \\ -3 & 29 & -42 \end{bmatrix}$ 10. $\frac{1}{42}\begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$

प्रश्नमाला 5.2

1. (i) 26 वर्ग इकाई ; (ii) $11/2$ वर्ग इकाई ; (iii) 10 वर्ग इकाई
2. $13/2$ वर्ग इकाई, नहीं
3. $x = -2, 12$
4. $k = -1, 1/2$
5. $x = 5$
6. $3x - 6y = 0$, 10 वर्ग इकाई
7. (i) $x = 3, y = 1$ (ii) $x = 3, y = -1$
9. (i) $x = 2, y = 1, x = 3$; (ii) $x = 2, y = -1, z = 3$
10. (i) $x = 1, y = 2, z = 1$; (ii) $x = 2, y = 3, z = 5$
11. (i) $x = \frac{-5}{11}, y = \frac{12}{11}$; (ii) $x = \frac{9}{2}, y = \frac{-7}{2}$; (iii) $x = 2, y = 1, z = 2$; (iv) $x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{3}, z = \frac{1}{5}$

12. $A^{-1} = \frac{1}{11}\begin{bmatrix} 7 & 2 & -6 \\ -2 & 1 & -3 \\ -4 & 2 & 5 \end{bmatrix}; \quad x = 4, y = -3, z = 1$

13. $\begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}, x = 3, y = -2, z = -1$

14. $\frac{1}{10}\begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ -5 & 0 & 5 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}, x = 2, y = -1, z = 1$

विविध प्रश्नमाला–5

1. $\frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

2. $\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

3. $x = -1$

4. (i) $x = 7, y = -3$; (ii) $x = 2, y = \frac{-2}{a}$; (iii) $x = y = z = 1$

6. $\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

7. $\frac{1}{42}\begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$

9. $\begin{bmatrix} 7 & -3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

10. $A^{-1} = \frac{1}{5}2\begin{bmatrix} -3 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & 2 & -3 \end{bmatrix}$

11. (i) $x = \frac{11}{24}, y = \frac{1}{24}$; (ii) $x = 1, \; y = -1, \; z = 1$; (iii) $x = 1, \; y = -1, \; z = 2$

12. (i) 46 वर्ग इकाई ; (ii) 20 वर्ग इकाई

13. $\lambda = \frac{7}{4}$

14. $A = \begin{bmatrix} 21 & -29 \\ -13 & 18 \end{bmatrix}$

15. $A^{-1} = -\frac{1}{11}\begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 9 & -1 & -1 \\ 5 & -3 & -1 \end{bmatrix}, x = 1, \; y = 3, \; z = -2$

16. $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1+bc}{a} & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

17. $x = \frac{(c-k)(k-b)}{(c-a)(a-b)}, \; y = \frac{(k-c)(a-k)}{(b-c)(a-b)}, \; z = \frac{(b-k)(k-a)}{(b-c)(c-a)}$

18. $A^{-1} = \frac{1}{67}\begin{bmatrix} -6 & 17 & 13 \\ 14 & 5 & -8 \\ -15 & 9 & -1 \end{bmatrix}, x = 3, \; y = -2, \; z = 1$

19. $X = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 11/2 & 2 \end{bmatrix}$

20. $a = -2, \; b = 1$