தமிழ்நாடு அரசு

மேல்நிலை இரண்டாம் ஆண்டு

வணிகக் கணிதம் மற்றும் புள்ளியியல்

தொகுதி 2

தமிழ்நாடு அரசு விலையில்லாப் பாடநூல் வழங்கும் திட்டத்தின் கீழ் வெளியிடப்பட்டது

பள்ளிக் கல்வித்துறை

தீண்டாமை மனிதநேயமற்ற செயலும் பெருங்குற்றமும் ஆகும்

XII Std - Business Maths & Stat TM Introduction Pages.indd 1 09-05-2019 14:19:14

தமிழ்நாடு அரசு

முதல் பதிப்பு - *2019*

(புதிய பாடத்திட்டத்தின்கீழ்
வெளியிடப்பட்ட நூல்)

விற்பனைக்கு அன்று

பாடநூல் உருவாக்கமும்
தொகுப்பும்

மாநிலக் கல்வியியல் ஆராய்ச்சி மற்றும்
பயிற்சி நிறுவனம்
© SCERT 2019

நூல் அச்சாக்கம்

தமிழ்நாடு பாடநூல் மற்றும் கல்வியியல்
பணிகள் கழகம்
www.textbooksonline.tn.nic.in

XII Std - Business Maths & Stat TM Introduction Pages.indd 2 09-05-2019 14:19:14

இந்நூலைக் கையாள்வதற்கான வழிகாட்டி

வேலை மற்றும் உயர்கல்வி மேம்பாட்டிற்கான வாய்ப்புகள்	வணிகக் கணிதம் மற்றும் புள்ளியலை ஒரு பாடமாகக் கொண்ட மேல்நிலை வகுப்பு வணிகவியல் மாணவர்களுக்கான மேற்படிப்பு வாயப்புகளின் பட்டியல்.
கற்றலின் நோக்கங்கள்	மாணவர்கள் ஒவ்வொரு அத்தியாயம் , பாடம் அல்லது ஆண்டு இறுதியில் அடைந்திருக்கவேண்டிய கற்றல் இலக்குகளைக் குறிக்கிறது,
குறிப்பு	பாடத்தின் கூடுதல் கருத்துக்களை தருபவை.
உங்களுக்கு தெரியுமா?	மாணவர்களின் கணித சிந்தனைகளை வளர்க்கும் வியத்தகு உண்மைகள், கருத்துக்கள் போன்றவை.
பயிற்சி	மாணவர்களின் நினைவாற்றல் ,சிந்தித்தல் மற்றும் புரிதலை மேம்படுத்த பயிற்சி அளித்தல்.
இணையச் செயல்பாடு	மாணவர்களின் கணினி சார் அறிவுத்திறனை மேம்படுத்துதல்.
இணைய இணைப்புகள்	கணினி வழி மூலங்களுக்கான பட்டியல்.
உடனடி பதில் வினைக் குறியீடு	மாணவர்கள் பாடங்கள் தொடர்பான கருத்துக்களை மேலும் அறிந்துகொள்ள மெய்நிகர் கற்றல் உலகத்துக்கு அழைத்து செல்லும் வழி.
இதர கணக்குகள்	மாணவர்களுக்கான கற்றலை மேம்படுத்த கூடுதல் கணக்குகள்.
கலைச்சொற்கள்	கணித தமிழ் வழிச் சொற்களுக்கான ஆங்கில மொழியாக்கம்
பார்வை நூல்கள்	பாடத் தலைப்போடு தொடர்புடைய மேலும் விவரங்களை அறிந்து கொள்வதற்கான துணைநூற்களின் பட்டியல்

பாடநூலில் உள்ள விரைவுக் குறியீட்டைப் (QR Code) பயன்படுத்துவோம்! எப்படி?

- உங்கள் திறன் பேசியில் கூகுள் playstore கொண்டு DIKSHA செயலியை பதிவிறக்கம் செய்து நிறுவிக்கொள்க.
- செயலியை திறந்தவுடன், ஸ்கேன் செய்யும் பொத்தானை அழுத்தி பாடநூலில் உள்ள விரைவு குறியீடுகளை ஸ்கேன் செய்யவும்.
- திரையில் தோன்றும் கேமராவை பாடநூலின் QR Code அருகில் கொண்டு செல்லவும்.
- ஸ்கேன் செய்வதன் மூலம். அந்த QR Code உடன் இணைக்கப்பட்டுள்ள மின் பாட பகுதிகளை பயன்படுத்தலாம்.

குறிப்பு: இணையச்செயல்பாடுகள் மற்றும் இணைய வளங்களுக்கான QR code களை Scan செய்ய DIKSHA அல்லாத ஏதேனும் ஓர் QR code Scanner ஐ பயன்படுத்தவும்.

வணிகக் கணிதம் மற்றும் புள்ளியியல் பயிலும் மாணவர்களுக்கான வேலை மற்றும் உயர்கல்வி மேம்பாட்டிற்கான வாய்ப்புகள்

வணிகவியல் பாடத்திட்டத்தில் வணிகக் கணிதம் மற்றும் புள்ளியியலை ஒரு பாடமாக கொண்ட பிரிவில் பயிலும் மேல்நிலை வகுப்பு மாணவர்கள், தங்களது மேற்படிப்புக்கு, B.C.A., B.Com. மற்றும் B.Sc. புள்ளியியல் ஆகிய பிரிவுகளை தேர்வு செய்யலாம்.

வணிக பிரிவு மேல்நிலை வகுப்பு மாணவர்களுக்கு, வங்கி மற்றும், நிதி நிறுவனங்களிலும் வேலை வாய்ப்புகள் சிறப்பாக உள்ளன. கணினியை ஒரு சிறந்த பாடமாகக் கொண்ட B.Com., பிரிவை பெரும்பாலான மாணவர்கள் தேர்வு செய்கின்றனர்.

தொழில் முறை மேற்படிப்புக்களான C.A, I.C.A.I., முதலிய படிப்புகளை தேர்ந்தெடுத்து வெற்றி பெறுவதன் மூலம், பட்டயகணக்காளர் (Chartered Accountant) நிறுவனச் செயலர் (Company Secretary) போன்ற சிறந்த பதவிகளை பெற முடியும். மேலும் B.Com., பட்டதாரிகள், M.Com., P.h.D., மற்றும் M.Phil., போன்ற மேற்படிப்பு வகுப்புகளை தொடரலாம். B.Com., பட்டதாரிகளுக்கு பெருமளவில் வேலை வாய்ப்புகள் காத்திருக்கின்றன.

பட்டப்படிப்பு முடித்த பிறகு, M.B.A., M.A., பொருளியல் M.A., செயல்முறை மற்றும் புள்ளியியல் ஆராய்ச்சி பட்ட மேற்படிப்பு முதலிய பிரிவுகளை தேர்வு செய்யலாம். இவற்றை தவிர, எண்ணற்ற பட்டய படிப்பு, சான்றிதழ் படிப்பு மற்றும் தொழிற் பயிற்சிக் கல்விகள் முதலியனவற்றை மேற்கொள்வதன் மூலம் ஆரம்ப கால வேலை வாய்ப்புகளை பெறலாம்.

வணிகக் கணிதம் மற்றும் புள்ளியலை ஒரு பாடமாகக் கொண்ட மேல்நிலை வகுப்பு வணிகவியல் மாணவர்களுக்கான மேற்படிப்பு வாய்ப்புகளின் பட்டியல்.

XII Std - Business Maths & Stat TM Introduction Pages.indd 4 09-05-2019 14:19:14

படிப்புகள்	கல்வி நிறுவனங்கள்	மேற்படிப்பிற்கான வாய்ப்புகள்
இளைங்கலை வணிகவியல் (B.Com.) / B.Com. (Computer) **இளைங்கலை வியாபார நிர்வாகம்** (B.B.A.), **இளைங்கலை வணிக மேலாண்மை** (B.B.M.), **இளைங்கலை கணிணி பயன்பாடுகள்** (B.C.A.), **இளைங்கலை கலை** (B.A.)	• அனைத்து அரசினர் கலை மற்றும் அறிவியல் கல்லூரிகள், அரசு நிதி உதவிபெறும் கல்லூரிகள், சுயநிதி கல்லூரிகள் • ஸ்ரீராம் வணிகவியல் கல்லூரி (SRCC), புதுடெல்லி. • கூட்டுவாழ்வு சமுதாய கலை மற்றும் வணிகவியல் கல்லூரி, பூனே. (Symbiosis Society's College of Arts & Commerce, Pune). • புனித தூசையப்பர் கல்லூரி, பெங்களுரு	C.A., I.C.W.A., C.S. ,
இளைங்கலை அறிவியல் புள்ளியியல் (B.Sc Statistics)	• மாநில கல்லூரி சேப்பாக்கம், சென்னை. • டாக்டர் அம்பேத்கார் அரசினர் கலைக் கல்லூரி, வியாசர்பாடி, சென்னை. • அரசினர் கலைக் கல்லூரி, திண்டிவனம், விழுப்புரம் மற்றும் நாகர்கோவில். • சென்னை கிறித்தவ கல்லூரி, தாம்பரம், சென்னை. • லயோலா கல்லூரி, நுங்கம்பாக்கம், சென்னை. • D.R.B.C.C இந்து கல்லூரி, பட்டாபிராம், சென்னை.	M.Sc.
5 வருட ஒருங்கிணைந்த வியாபார நிர்வாகம், வணிகம் மற்றும் சட்ட படிப்புகள் (Five Years Integrated Course) B.B.A., LLB, B.A., LLB, B.Com., LL.B.	• அனைத்து அரசு சட்ட கல்லூரிகள். • டாக்டர் அம்பேத்கர் சட்ட பல்கலை கழகத்தின் கீழ் இணைக்கப்பட்ட சிறப்பு சட்டக் கல்வி நிறுவனங்கள்	M.L.
5 வருட ஒருங்கிணைந்த முதுகலை பொருளியல் படிப்புகள் M.A. Economics (Integrated Five Years Course) – Admission based on All India Entrance Examination	• சென்னை பொருளியல் கல்லூரி, கோட்டூர்புரம், சென்னை	Ph.D.,
இளங்கலை சமூகப்பணி (B.S.W.)	• சென்னை சமூகப்பணி கல்லூரி, எழும்பூர், சென்னை.	M.S.W

பொருளடக்கம்

அலகு எண்	பொருளடக்கம்	பக்க எண்
6	**சமவாய்ப்பு மாறி மற்றும் கணக்கியல் எதிர்பார்த்தல்**	**1-42**
6.1	சமவாய்ப்பு மாறி	2
6.2	கணக்கியல் எதிர்பார்த்தல்	19
7	**நிகழ்தகவு பரவல்கள்**	**43-82**
7.1	பரவல்கள்	43
8	**கூறெடுப்பு முறைகளும் புள்ளியியல் அனுமானித்தலும்**	**83-123**
8.1	கூறெடுத்தல்	84
8.2	மதிப்பீட்டு முறை	102
8.3	கருதுகோள் சோதனை	107
9	**பயன்பாட்டுப் புள்ளியியல்**	**124-179**
9.1	காலம் சார் தொடர் வரிசை	125
9.2	குறியீட்டு எண்கள்	141
9.3	புள்ளியியல் தரக் கட்டுப்பாடு	159
10	**செயல்முறைகள் ஆராய்ச்சி**	**180-227**
10.1	போக்குவரத்து கணக்குகள்	181
10.2	ஒதுக்கீட்டுக் கணக்குகள்	204
10.3	தீர்மானக் கோட்பாடு	216
	விடைகள்	228-236
	அட்டவணைகள்	237-243
	துணை நூற் பட்டியல்	244

இந்த புத்தகத்தில் உள்ள புள்ளியியல் பகுதிகளில் எண் சார்ந்த கணக்கீடுகளை கொண்டிருப்பதால், வணிகக் கணிதம் மற்றும் புள்ளியியல் மாணவர்கள் அக்கணக்குகளின் தீர்வுகளுக்கு கணிப்பானைப் (கால்குலேட்டரை) பயன்படுத்த அறிவுறுத்தப்படுகிறார்கள்.

ABBLZP
மின் நூல்

G9M2CM
மதிப்பீடு

B247_12_BUS_MAT_TM
இணைய வளங்கள்

XII Std - Business Maths & Stat TM Introduction Pages.indd 6 09-05-2019 14:19:14

பாடத்திட்டம்

6.	**சமவாய்ப்பு மாறி மற்றும் கணக்கியல் எதிர்பார்த்தல்**	(21 பிரிவு வேளைகள்)
	சமவாய்ப்பு மாறி: வரையறை – தனித்த சமவாய்ப்பு மாறி, நிகழ்தகவு நிறை சார்பு மற்றும் திரள் பரவல் சார்பு – தொடர்ச்சியான சமவாய்ப்பு மாறி, நிகழ்தகவு அடர்த்தி சார்பு மற்றும் திரள் பரவல் சார்பு. **கணக்கியல் எதிர்பார்த்தல்:** வரையறை, சராசரி மற்றும் மாறுபாட்டு அளவை – சராசரி மற்றும் மாறுபாட்டு அளவையின் பண்புகள் (நிரூபணமின்றி).	
7.	**நிகழ்தகவு பரவல்கள்**	(21 பிரிவு வேளைகள்)
	பரவல்கள்: ஈருறுப்புப் பரவல்: வரையறை, சராசரி மற்றும் மாறுபாட்டு அளவை – பாய்சான் பரவல்: வரையறை, சராசரி மற்றும் மாறுபாட்டு அளவை – இயல்நிலைப் பரவல்: வரையறை, பண்புகள் மற்றும் திட்ட இயல்நிலை பரவல்.	
8.	**கூறெடுப்பு முறைகளும் புள்ளியியல் அனுமானித்தலும்**	(21 பிரிவு வேளைகள்)
	கூறெடுத்தல்: அடிப்படை கருத்துருக்கள், கூறெடுத்தலின் வகைகள் – எளிய சமவாய்ப்பு கூறெடுப்பு முறை, படுகை சமவாய்ப்பு கூறெடுப்பு முறை மற்றும் முறைப்படுத்திய கூறெடுப்பு – கூறெடுப்பு முறை சார்ந்த மற்றும் சாரா பிழைகள் – கூறெடுப்பு பரவல்: கூறெடுப்பு பரவலுக்கான வரையறை மற்றும் திட்டப்பிழை – திட்டப்பிழை கணக்கிடுதல். **மதிப்பிடும் முறை:** புள்ளி நிலை மற்றும் இடைவெளி நிலையில் மதிப்பிடும் முறை (கருத்துரு மட்டும்). **கருதுகோள் சோதனை:** அடிப்படை கருத்துருக்கள், இன்மை கருதுகோள் மற்றும் மாற்று கருதுகோள், மிகைகான் நிலை மற்றும் பிழைகளின் வகைகள். சோதனைக்கான வழிமுறைகள், பெருங்கூறுக்கான கோட்பாடு மற்றும் சராசரிக்கான மிகைகாண் சோதனை.	

XII Std - Business Maths & Stat TM Introduction Pages.indd 7 09-05-2019 14:19:14

9.	**பயன்பாட்டுப் புள்ளியியல்**	(21 பிரிவு வேளைகள்)
	காலம் சார் தொடர் வரிசை : பொருள், பயன்கள் மற்றும் கூறுகள் – போக்கினை அளவிடுதல்: பகுதி சராசரிமுறை – நகரும் சராசரிமுறை (மூன்று ஆண்டு, நான்கு ஆண்டு) – மீச்சிறு வர்க்கமுறை – எளிய சராசரியின் மூலம் பருவகால மாறுபாடுகள். **குறியீட்டு எண்கள்:** பொருள், வகைப்பாடுகள் மற்றும் பயன்கள் – நிறையிட்ட குறியீட்டு எண், லாஸ்பியர், பாசி மற்றும் பிஷ ரின் உத்தம விலைக் குறியீட்டு எண்கள் – காலமாற்றுச் சோதனை மற்றும் காரணி மாற்றுச் சோதனை – வாழ்க்கைத்தர குறியீட்டு எண்ணை அமைக்கும் முறைகள். **புள்ளியியல் தரக் கட்டுப்பாடு:** பொருள் – மாறுபாட்டிற்கான காரணங்கள் – வாய்ப்பு காரணங்கள் மற்றும் குறிப்பட்ட காரணங்கள் – செயல்முறை கட்டுப்பாடு மற்றும் உற்பத்தி கட்டுப்பாடு – $\overline{X}$ மற்றும் R வரைபடங்கள் கட்டமைத்தல்.	
10.	**செயல்முறைகள் ஆராய்ச்சி**	(21 பிரிவு வேளைகள்)
	போக்குவரத்து கணக்குகள்: வரையறை மற்றும் கணக்குகளின் அமைப்பு – ஆரம்ப அடிப்படை ஏற்புடையத் தீர்வைக் காணும் முறைகள், வட மேற்கு மூலை முறை, மீச்சிறு செலவு முறை மற்றும் வோகலின் தோராய முறை. **ஒதுக்கீட்டுக் கணக்குகள்:** வரையறை மற்றும் கணக்குகளின் அமைப்பு – ஒதுக்கீடு கணக்கின் தீர்வைக் காணும் வழிமுறைகள். **தீர்மானக் கோட்பாடு:** பொருள் – சூழ்நிலைகள்: நிச்சயமான மற்றும் நிச்சமற்ற சூழ்நிலை – மீச்சிறுவின் மீப்பெரு மற்றும் மீப்பெருவின் மீச்சிறு உத்திகள்.	

XII Std - Business Maths & Stat TM Introduction Pages.indd 8 09-05-2019 14:19:15

6

சமவாய்ப்பு மாறி மற்றும் கணக்கியல் எதிர்பார்த்தல்

சைமன் டெனிஸ் பாய்சான்

(ஜுன் 21, 1781–ஏப்ரல்25, 1840)

அறிமுகம்

சில்வெஸ்ட்ரே பிரான்கோஸ் லாக்ரோய்ஸ் (1816) மற்றும் லூயிஸ் பேச்சிலியர் (1914) ஆகியோரின் காலங்களுக்கு இடைப்பட்ட காலத்தில் சமவாய்ப்பு மாறி மற்றும் சமவாய்ப்பு மாறிக்கான சராசரி எனும் கருத்துக்கள் உருவாக்கப்பட்டன. சில நூல் ஆசிரியர்கள் சைமன் டெனிஸ் பாய்சான் அவர்களால் சமவாய்ப்பு மாறி மற்றும் எதிர்பார்த்தலுக்கான மதிப்பு எனும் கருத்துக்கள் கண்டுபிடித்ததாக கூறுகின்றனர். சைமன் டெனிஸ் பாய்சான் ஒரு பிரஞ்சு கணிதவியலாளர் ஆவார். இவர் நிகழ்தகவு கருத்தியலின் பணிக்காக நன்கு அறியப்பட்டவர். பாய்சானின் மிகப்பெரிய ஆய்வானது நிகழ்தகவைப் பற்றியதாகும். 1838 ஆம் ஆண்டில் பாய்சான் தனது கருத்துக்களை நிகழ்தகவு கோட்பாட்டின் மூலம் வெளியிட்டார். இது தற்போது பாய்சான் பரவல் என அறியப்படுகிறது. இவர் மின்சாரம் மற்றும் காந்தவியல், மற்றும் வானியல் பயன்பாடு உள்ளிட்ட 300–க்கும் மேற்பட்ட கணிதபடைப்புகளை வெளியிட்டுள்ளார்.

கற்றல் நோக்கங்கள்

இந்த அத்தியாயத்தைப் படித்தப் பின்பு பின்வரும் பாடக்கருத்துகளை மாணவர்கள் புரிந்துகொள்ள இயலும்.

- சமவாய்ப்பு மாறியினை ஏன் பயன்படுத்துகிறோம்?
- சமவாய்ப்பு மாறியினை நாம் ஏன் வரையறுக்க வேண்டும்?
- சமவாய்ப்பு மாறியின் வகைகள்.
- நிகழ்தகவு சார்பு.
- பரவல் சார்பு.
- கணக்கின் இயல்பு (தன்மை).
- எண்ணியல் ரீதியாக விவரிக்கக்கூடிய வெளியீடுகளுடன் சமவாய்ப்பு சோதனைகளைப் படிப்பதற்கான முறைகளை மேம்படுத்துதல்.
- உண்மை நிகழ்தகவை கணக்கிடுதல்.
- தனித்த மற்றும் தொடர்ச்சியான சமவாய்ப்பு மாறியின் கணக்கியல் எதிர்பாத்தலின் கருத்துரு.
- தனித்த மற்றும் தொடர்ச்சியான சமவாய்ப்பு மாறியின் கணக்கியல் எதிர்பார்த்தலின் பண்புகள்.

M7XGPK

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 6.indd 1 09-05-2019 14:28:23

- தனித்த மற்றும் தொடர்ச்சியான சமவாய்ப்பு மாறியின் சராசரி மற்றும் மாறுபாடு ஆகியவற்றை கணக்கிடுதல்.
- தனித்த மற்றும் தொடர்ச்சியான சமவாய்ப்பு மாறியின் கணக்கியல் எதிர்பார்த்தலின் நடைமுறை பயன்பாடுகள்.

6.1 சமவாய்ப்பு மாறி (Random variable)

அறிமுகம்

ஒரு நாணயம் சுண்டுவதை சமவாய்ப்பு மாறியாக எடுத்துக் கொள்வோம். 'n' நாணயங்களை சுண்டும் பொழுது கிடைக்கக்கூடிய தலைகளின் எண்ணிக்கையைத் தெரிந்து கொள்ள ஒருவருக்கு ஆர்வம் இருக்கலாம். இதே போல, ஒரு ஜோடி பகடைகளை உருட்டும் பொழுது கிடைக்கக்கூடிய ஒவ்வொரு கூறு புள்ளிகளின் கூடுதல் பற்றிய தகவலைப் பெற ஆர்வம் காட்டலாம். இவ்வாறாக, ஒரு சோதனையின் ஒவ்வொரு வெளிப்பாட்டிற்கும், ஒரு மெய்யெண்ணை நாம் தொடர்பு படுத்துகிறோம். இதனை வேறுவகையில் கூறுவதனால், நாம் ஒரு சார்பைக் கருத்தில் கொண்டால் அவற்றின் சார்பகம் என்பது வெளிப்பாட்டின் தொகுப்பாகும். அவற்றின் வீச்சகம் என்பது மெய்யெண்கள் தொகுப்பின் உட்கணமாகும். அத்தகைய ஒரு சார்பு சமவாய்ப்பு மாறி என்று அழைக்கப்படுகிறது.

இயற்கணிதத்தில், X அல்லது Y அல்லது வேறு எதாவது எழுத்தை ஒரு குறிப்பிட்ட கணக்கில் நீங்கள் வெவ்வேறு மாறிகளாகப் பயன்படுத்திக் கற்றிருப்பீர்கள். எனவே, அடிப்படை கணிதத்தில், ஒரு மாறி என்பது ஒரு தெரியாத எண்ணை பிரதிபலிக்கும் ஒரு அகரவரிசை எழுத்தாகும். சமவாய்ப்பு மாறி என்பதும் ஒரு மாறி, அது மேலும் சமவாய்ப்பிற்கு உட்பட்டது என்பது அதன் பொருள். அதாவது இது வெவ்வேறான மதிப்புகளைப் பெற்றிருக்கும். புள்ளியியலில், X–ஐக் கொண்டு சமவாய்ப்பு மாறியைக் குறிப்பது மிகவும் பொதுவானது ஆகும். மேலும் அது சோதனைத் தன்மையைப் பொறுத்து வெவ்வேறு மதிப்புகளைப் பெற்றிருக்கும்.

சமவாய்ப்பு மாறிக்கான சில உதாரணங்கள்:

(i) ஒரு நாணயம் 8 முறை சுண்டப்படுவதால் கிடைக்கக்கூடிய தலைகளின் எண்ணிக்கை.

(ii) ஒரு வருடத்தில், ஒரு கால அளவில் ஒரு முதலீட்டில் இருந்து பெறப்படும் வருமானம்

(iii) உருட்டிய பகடையின் மீதுள்ள முகங்கள்.

(iv) திங்கள்கிழமை முதல் வெள்ளிக்கிழமை வரை காலை 9.00 மணி முதல் மாலை 4.30 மணி வரை வழக்கமான ஒவ்வொரு ஒரு மணி நேர இடைவெளியில் ஒரு வங்கிக்கு வருகை புரியும் வாடிக்கையாளர்களின் எண்ணிக்கை.

(v) ஒரு குறிப்பிட்ட நாளில் கடையில் நடைபெற்ற விற்பனை அளவு.

எடுத்துக்காட்டாக, சமவாய்ப்பு சோதனை 'E' என்பது ஒரு நாணயத்தை மூன்று முறை சுண்டுவதைக் குறிக்கட்டும். இந்த சோதனையின் வெளிப்பாடுகள் கூறுவெளி 'S'–ஐ உருவாக்கிறது. 'X' என்பது பெறப்பட்ட தலைகளின் எண்ணிக்கை குறிக்கட்டும். இங்கு X ஆனது ஒரு சமவாய்ப்பு

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 6.indd 2 09-05-2019 14:28:23

சோதனை ‘E’–இன் வெளிப்பாட்டுகளுடன் இணைக்கப்பட்ட மெய்யெண்கள் ஆகும். இதன் விவரங்கள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

வெளிப்பாடுகள் (ω) :	(HHH)	(HHT)	(HTH)	(THH)	(HTT)	(THT)	(TTH)	(TTT)
$X = x$ ன் மதிப்புகள் :	3	2	2	2	1	1	1	0

அதாவது, $R_X = \{0, 1, 2, 3\}$

மேற்குறிப்பிட்ட எடுத்துக்காட்டில், ஒவ்வொரு வெளிப்பாடும் அதனுடன் தொடர்புடைய மெய்யெண் $X(\omega)$ உடன் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. கூறுவெளி ‘S’ என்பதை சோதனை வெளிப்பாட்டிற்கு தொடர்புடைய ஒவ்வொரு புள்ளி $\omega \in S$ என வரையறுக்கலாம்.

நாணயம் சுண்டுதல்

படம் 6.1

6.1.1 சமவாய்ப்பு மாறியின் வரையறை (Definition of a random variable)

வரையறை 6.1

ஒரு சமவாய்ப்பு மாறி X என்பது ‘S’ என்ற கூறுவெளியின் மீது வரையறுக்கப்பட்ட ஒரு மெய்மதிப்பீட்டுச் சார்பு என வரையறுக்கப்படுகிறது. மேலும் இது $(-\infty, \infty)$ இல் மதிப்புகளைப் பெற்றிருக்கும் அல்லது இது ஒரு சமவாய்ப்பு சோதனையின் சாத்தியமுள்ள மதிப்புகளின் எண் வெளிப்பாடுகள் எனவும் கூறலாம்.

குறிப்பு

(i) x ஒரு மெய்யெண் எனில் , S இல் உள்ள அனைத்து ω தொகுப்புகளுடன் $X(\omega)=x$ எனுமாறு , $X = x$ என குறிக்கப்படுகிறது. எனவே $P(X = x) = P\{\omega : X(\omega) = x\}$.

(ii) $P(X \leq a) = P\{\omega : X(\omega) \in (-\infty, a]\}$ மற்றும் $P(a < X \leq b) = P\{\omega : X(\omega) \in (a, b]\}$.

(iii) ஒரு பரிமாண சமவாய்ப்பு மாறிகள், $X, Y, Z, \ldots$ என்ற பெரிய எழுத்துக்கள் மூலம் குறிக்கப்படும். பொதுவாக, ஒரு சோதனையின் வெளிப்பாடுகள் ω ஆல் குறிக்கப்படும். இவ்வாறாக, $b \in X(\omega)$ என்பது ஒரு மெய்யெண்ணை குறிக்கும் சமவாய்ப்பு மாறி X உடன் தொடர்புடைய வெளிப்பாடு ω ஆகும். $X, Y, Z, \ldots$ போன்றவைகள் கொண்டிருக்கும் மதிப்புகளைச் சிறிய எழுத்துக்களைக் கொண்டு, அதாவது $x, y, z, \ldots$ போன்றவற்றால் குறிக்கலாம்.

உங்களுக்கு தெரியுமா?

(i) X_1 மற்றும் X_2 ஆகியவை சமவாய்ப்பு மாறிகள் மற்றும் c என்பது மாறிலி எனில், $cX_1,\ X_1 + X_2,\ X_1X_2,\ X_1 - X_2$ என்பனவும் சமவாய்ப்பு மாறிகளாகும்.

(ii) X என்பது சமவாய்ப்பு மாறி எனில், $(i)\dfrac{1}{X}$ மற்றும் $(ii)|X|$ ஆகியவைகளும் சமவாய்ப்பு மாறிகளாகும்.

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 6.indd 3 09-05-2019 14:28:26

சமவாய்ப்பு மாறியின் வகைகள் (Types of Random Variable)

சமவாய்ப்பு மாறிகளை இரு வகைகளாக வகைப்படுத்தலாம், அவை தனித்த மற்றும் தொடர்ச்சியான சமவாய்ப்பு மாறிகள் ஆகும். இவை, கணிதம் மற்றும் புள்ளியியல் துறையில் நடைமுறைப் பயன்பாடுகளுக்கு முக்கியத்துவம் வாய்ந்தவையாக இருக்கின்றன. மேற்குறிப்பிட்ட சமவாய்ப்பு மாறிகளை எடுத்துக்காட்டுகளுடன் பின்வருமாறு வரையறுப்போம்.

6.1.2 தனித்த சமவாய்ப்பு மாறி (Discrete random variable)

வரையறை 6.2

சாத்தியமான மதிப்புகளால் வரையறுக்கப்பட்ட எண்களை ஏற்றுக்கொள்ளக் கூடிய ஒரு மாறி அல்லது ஒரு எண்ணத்தக்க மெய்யெண்களின் முடிவிலாத் தொடரானது தனித்த சமவாய்ப்பு மாறி என வரையறக்கப்படுகிறது.

தனித்த சமவாய்ப்பு மாறியின் எடுத்துக்காட்டுகள்:

- ஒரு தேர்வில் பெற்ற மதிப்பெண்கள்.
- ஒரு ஜாடியில் உள்ள சிவப்பு பளிங்குகளின் எண்ணிக்கை.
- ஒரு குறிப்பிட்ட நேரத்தில், தொலைபேசி அழைப்புகளின் எண்ணிக்கை.
- ஒரு மாதத்தில், ஒரு மகிழுந்து விற்பனையாளரால் விற்கப்படும் மகிழுந்துகளின் எண்ணிக்கை முதலியன.

எடுத்துக்காட்டாக P_1, P_2 மற்றும் P_3 ஆகியோர் ஒரு குறிப்பிட்ட மாவட்டத்தில் ஒரு மாதிரி பள்ளியை உருவாக்குவதற்காக சில நபர்களின் கருத்துக்களைப் பதிவு செய்கிறார்கள். ஒவ்வொரு நபரின் பதிவும் ஆம் (Y) அல்லது இல்லை (N) என பதிவு செய்யப்படுகிறது.

இது தொடர்பான தனித்த சமவாய்ப்பு மாறியைத் தீர்மானிக்கும் சாத்தியக்கூறுகள் பின்வருமாறு அமையலாம்.

அட்டவணை 6.1

சாத்திய கூறுகள்	P_1	P_2	P_3	சமவாய்ப்பு மாறியின் மதிப்புகள் (ஆம் என்று கொடுக்கப்பட்டவர்களின் எண்ணிக்கை)
1.	Y	Y	Y	3
2.	Y	Y	N	2
3.	Y	N	Y	2
4.	Y	N	N	1
5.	N	Y	Y	2
6.	N	Y	N	1
7.	N	N	Y	1
8.	N	N	N	0

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 6.indd 4 09-05-2019 14:28:26

மேலே உள்ள அட்டவணையிலிருந்து பெறக்கூடிய தனித்த சமவாய்ப்பு மாறியின் மதிப்புகள் 0, 1, 2 மற்றும் 3 ஆகும்.

நிகழ்தகவு நிறை சார்பு (Probability Mass function)

வரையறை 6.3

X என்ற தனித்த சமவாய்ப்பு மாறியின் தனித்த மதிப்புகள் $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ என்க. மேலும் இதன் நிகழ்தகவு சார்பு $P_X(x)$ எனக் குறியிடப்படுகிறது எனில்,

$$P_X(x) = \text{p}(x) = \begin{cases} \text{P}(X = x_i) = p_i = p(x_i)\ , & x = x_i\ , i = 1, 2, ..., n, ... \\ 0 & , \quad x \neq x_i \end{cases}$$ என வரையறுக்கப்படுகிறது.

இது, X இன் நிகழ்தகவு நிறை சார்பு அல்லது தனித்த நிகழ்தகவு சார்பு என்றும் அழைக்கப்படுகிறது.

இந்த நிகழ்தகவு நிறை சார்பு $P_X(x)$ ஆனது பின்வரும் நிபந்தனைகளை நிறைவு செய்யவேண்டும்.

(i) $p(x_i) \geq 0 \ \forall \ i$ மற்றும் (ii) $\sum_{i=1}^{\infty} p(x_i) = 1$

எடுத்துக்காட்டு 6.1

சில குடும்பங்களில் உள்ள மகிழுந்துகளின் எண்ணிக்கை கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

மகிழுந்துகளின் எண்ணிக்கை	0	1	2	3	4
குடும்பங்களின் எண்ணிக்கை	30	320	380	190	80

இவ் விவரங்களைக் கொண்டு நிகழ்தகவு நிறை சார்பை மதிப்பிடுக, மேலும் $p(x_i)$ ஒரு நிகழ்தகவு நிறை சார்பு என்பதையும் சரிபார்க்க.

தீர்வு:

மகிழுந்துகளின் எண்ணிக்கை X என்க.

அட்டவணை 6.2

$X = x_i$	குடும்பங்களின் எண்ணிக்கை	$p(x_i)$
0	30	0.03
1	320	0.32
2	380	0.38
3	190	0.19
4	80	0.08
மொத்தம்	1000	1.00

(i) $p(x_i) \geq 0 \ \forall \ i$ மற்றும்

(ii) $\sum_{i=1}^{\infty} p(x_i) = p(0)+p(1)+p(2)+p(3)+p(4)$

$= 0.03+0.32+0.38+0.19+0.08 = 1$

எனவே, $p(x_i)$ ஒரு நிகழ்தகவு நிறை சார்பு ஆகும்.

குறிப்பு

$X=0$ -க்கான நிகழ்தகவு 0.03 ஆனது 30/1000 -விருந்து பெறப்படுகிறது. மற்ற நிகழ்தகவுகளும் இதேபோல் மதிப்பிடப்படுகின்றன.

எடுத்துக்காட்டு 6.2

ஒரு சமவாய்ப்பு மாறி X ஆனது பின்வரும் நிகழ்தகவு சார்பை பெற்றுள்ளது எனில்,

X ன் மதிப்புகள்	0	1	2	3	4	5	6	7
$p(x)$	0	a	$2a$	$2a$	$3a$	a^2	$2a^2$	$7a^2+a$

(i) a வை கண்டுபிடிக்கவும், மேலும் (ii) $P(X<3)$,

(iii) $P(X>2)$ மற்றும் (iv) $P(2<X\leq 5)$ –ஐ மதிப்பிடவும்.

தீர்வு:

(i) நிகழ்தகவு நிறை சார்பின் நிபந்தனையிலிருந்து,

$$\sum_{i=1}^{\infty} p(x_i) = 1$$

$$\therefore \sum_{i=0}^{7} p(x_i) = 1$$

$$0+a+2a+2a+3a+a^2+2a^2+7a^2+a = 1$$

$$10a^2+9a-1 = 0$$

$$(10a-1)(a+1) = 0$$

$$a = \frac{1}{10} \text{ அல்லது } -1$$

ஆனால் $p(x)$ ஆனது குறை மதிப்பைக் கொண்டிருக்கமுடியாது என்பதால்,

$a = -1$ ஆனது பொருந்தாது எனவே, $a = \frac{1}{10}$ ஆகும்.

(ii) $P(X<3)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)$

$= 0+a+2a$

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 6.indd 6 09-05-2019 14:28:31

$$=3a$$

$$= \frac{3}{10} \quad \left(\because a = \frac{1}{10}\right)$$

(iii) $P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2)$

$$= 1 - \left[P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)\right]$$

$$= 1 - \frac{3}{10}$$

$$= \frac{7}{10}$$

(iv) $P(2 < X \leq 5) = P(X=3) + P(X=4) + P(X=5)$

$$= 2a + 3a + a^2$$

$$= 5a + a^2$$

$$= \frac{5}{10} + \frac{1}{100}$$

$$= \frac{51}{100}$$

எடுத்துக்காட்டு 6.3

$$p(x) = \begin{cases} \frac{x}{20}, & x = 0,1,2,3,4,5 \\ 0 & \text{மற்றெங்கிலும்} \end{cases}$$

எனில், (i) $P(X < 3)$ மற்றும் (ii) $P(2 < X \leq 4)$ ஆகியவற்றைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

தீர்வு:

(i) $P(X < 3) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)$

$$= 0 + \frac{1}{20} + \frac{2}{20}$$

$$= \frac{3}{20}$$

(ii) $P(2 < X \leq 4) = P(X=3) + P(X=4)$

$$= \frac{3}{20} + \frac{4}{20}$$

$$= \frac{7}{20}$$

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 6.indd 7 09-05-2019 14:28:35

எடுத்துக்காட்டு 6.4

நீங்கள் ஒரு பிழையற்ற நாணயத்தை மூன்று முறை சுண்டுவதாகக் கருதுவோம். இந்த சோதனையின் வெளிப்பாடு சமவாய்ப்பு மாறியாக கருதப்பட்டு, மேலே திருப்பப்பட்ட முகங்களில் உள்ள தலைகளின் எண்ணிக்கை கணக்கிடப்படுகிறது. இதன் நிகழ்தகவு நிறை சார்பை கண்டு பிடிக்கவும். மேலும் நிகழ்தகவு நிறை சார்பின் பண்புகளையும் சரிபார்.

தீர்வு:

மேலே திருப்பப்பட்ட முகங்களில் உள்ள தலைகளின் எண்ணிக்கையைக் கணக்கிடும் சமவாய்ப்பு மாறியை X என்க. இதன் வெளிப்பாடுகள் கீழே குறிப்பிடப்பட்டுள்ளது.

வெளிப்பாடுகள்	(HHH)	(HHT)	(HTH)	(THH)	(THT)	(TTH)	(HTT)	(TTT)
X இன் மதிப்புகள்	3	2	2	2	1	1	1	0

இதன் மதிப்பீடுகள் பின்வரும் நிகழ்தகவு அட்டவணை 6.3–இல் தரப்பட்டுள்ளன.

அட்டவணை 6.3

X ன் மதிப்புகள்	0	1	2	3	மொத்தம்
$p(x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\sum_{i=0}^{3} p(x_i)=1$

(i) $p(x_i) \geq 0 \ \forall \ i$ மற்றும் (ii) $\sum_{i=0}^{3} p(x_i)=1$

எனவே, $p(x_i)$ ஒரு நிகழ்தகவு நிறை சார்பாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 6.5

இரண்டு பகடைகள் ஒரே சமயத்தில் வீசப்படுகிறது. இதில் மேலே திருப்பப்பட்ட முகங்களின் கூடுதல் சமவாய்ப்பு மாறியாகக் கருதப்படுகிறது எனில், அதன் நிகழ்தகவு நிறை சார்பை உருவாக்கவும்.

தீர்வு:

$$\text{கூறுவெளி}\,(S)=\begin{Bmatrix} (1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6) \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6) \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & (3,5) & (3,6) \\ (4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & (4,5) & (4,6) \\ (5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4) & (5,5) & (5,6) \\ (6,1) & (6,2) & (6,3) & (6,4) & (6,5) & (6,6) \end{Bmatrix}$$

படம் 6.2

மொத்த வெளிப்பாடு : $n(S) = 36$

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 6.indd 8 09-05-2019 14:28:37

அட்டவணை 6.4

வெளிப்பாடுள்	(1,1)	(1,2) (2,1)	(1,3) (2,2) (3,1)	(1,4) (2,3) (3,2) (4,1)	(1,5) (2,4) (3,3) (4,2) (5,1)	(1,6) (2,5) (3,4) (4,3) (5,2) (6,1)	(2,6) (3,5) (4,4) (5,3) (6,2)	(3,6) (4,5) (5,4) (6,3)	(4,6) (5,5) (6,4)	(5,6) (6,5)	(6,6)
திருப்பிய முகங்களின் கூடுதல் (X)	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P_X(x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

தனித்த பரவல் சார்பு (Discrete distribution function)

வரையறை 6.4

$x_1, x_2, ..., x_n, ...$ என்ற எண்ணத்தக்க மெய்மதிப்புகளை உடைய தனித்த சமவாய்ப்பு மாறி X -இன் நிகழ்த்தகவுகள் $p(x_1), p(x_2), p(x_3), ..., p(x_n),...$ எனில், இதன் **தனித்த திரள் பரவல் சார்பு** அல்லது **பரவல் சார்பு** பின்வருமாறு வரையறுக்கப்படுகிறது.

அனைத்து $x \in R$ -க்கு, $F_X(x) = P(X \leq x)$. அதாவது, $F_X(x) = \sum_{x<x_i} P(x_i)$

எடுத்துக்காட்டாக, ஒரு குடும்பத்தில் இரண்டு குழந்தைகள் உள்ளனர் எனக் கருதுவோம். அவ்வாறாயின் அதன் கூறுவெளி $(S) = \{bb, bg, gb, gg\}$ ஆகும். இங்கு b = சிறுவன் (boy) மற்றும் g= சிறுமி (girl) என்பதனை குறிக்கிறது.

குழந்தைகளின் எண்ணிக்கையைக் கணக்கிடும் சமவாய்ப்பு மாறி X என்க.

$\therefore$ கூறுவெளிக்குத் தொடர்புடைய X இன் மதிப்புகள் 2,1,1 மற்றும் 0 ஆகும்.

எனவே, நிகழ்தகவு நிறை சார்பு $p(x)$ -ஐ பின்வருமாறு அமைக்கலாம்.

$X = x$	0	1	2
$p(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

மேலும் இந்த X இன் திரள் பரவல் சார்பானது பின்வருமாறு கணக்கிடப்படுகிறது.

$X = x$	0	1	2
$p(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
$F_X(x)=P(X\leq x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}+\frac{1}{4}=1$

எடுத்துக்காட்டு 6.6

ஒரு நாணயம் மூன்று முறை சுண்டப்படுகிறது. X என்பது கணக்கிடப்பட்ட தலைகளின் எண்ணிக்கை எனில், X இன் திரள் பரவல் சார்பைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

தீர்வு:

கூறுவெளி (S) ={ (HHH), (HHT), (HTH), (HTT),(THH),(THT),(TTH),(TTT)}

X ஏற்கும் மதிப்புகள் : 3, 2, 2, 1, 2, 1, 1 மற்றும் 0.

X–இன் வீச்சு(R_X)	0	1	2	3
$P_X(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$
$F_X(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{7}{8}$	1

இவ்வாறாக,

$$F_X(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ \frac{1}{8}, & 0\leq x<1 \\ \frac{4}{8}, & 1\leq x<2 \\ \frac{7}{8}, & 2\leq x<3 \\ 1, & x\leq 3 \end{cases}$$ என்பதைப் பெறலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 6.7

கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள தனித்த சமவாய்ப்பு மாறி X இன் நிகழ்தகவுப் பரவலுக்கான பரவல் சார்பை அமைக்கவும்.

$X = x$	1	2	3	4	5	6	7
$P(x)$	0.10	0.12	0.20	0.30	0.15	0.08	0.05

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 6.indd 10 09-05-2019 14:29:19

தீர்வு:

கொடுக்கப்பட்ட நிகழ்தகவு பரவல் $p(x)$ இன் மதிப்பிலிருந்து நாம் பெறுவது,

$F(1) = P(X \leq 1) = P(1) = 0.10$

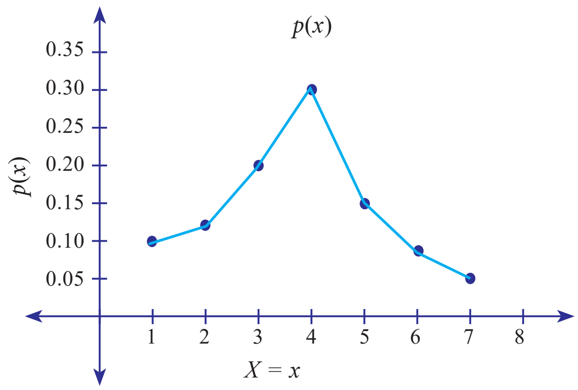
$F(2) = P(X \leq 2) = P(1) + P(2) = 0.10 + 0.12 = 0.22$

$F(3) = P(X \leq 3) = P(1) + P(2) + P(3)$

$= F(2) + P(3)$

$= 0.22 + 0.20$

$= 0.42$

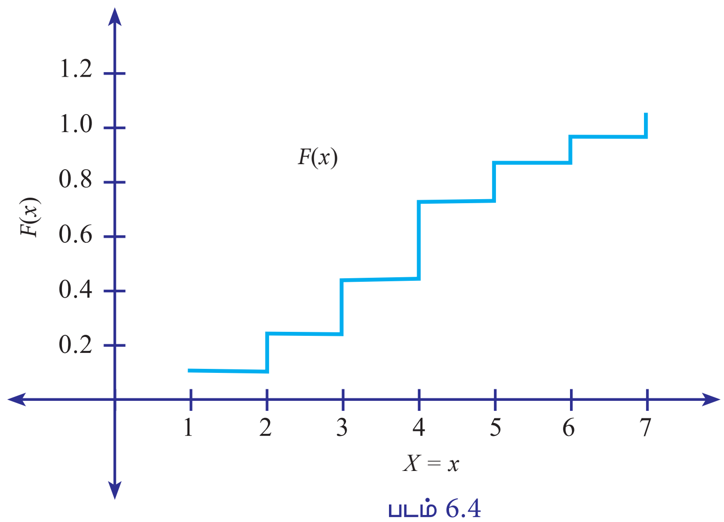


படம் 6.3

$F(4) = F(3) + P(4)$

$= 0.42 + 0.30$

$= 0.72$



படம் 6.4

$F(5) = F(4) + P(5)$

$= 0.72 + 0.15$

$= 0.87$

$F(6) = F(5) + P(6)$

$= 0.87 + 0.08$

$= 0.95$

$F(7) = F(6) + P(7)$

$= 0.95 + 0.05$

$= 1.00$

எனவே,

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ 0.10, & x \leq 1 \\ 0.22, & x \leq 2 \\ 0.42, & x \leq 3 \\ 0.72, & x \leq 4 \\ 0.87, & x \leq 5 \\ 0.95, & x \leq 6 \\ 1, & x \leq 7 \end{cases}$$ ஆகும்.

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 6.indd 11 09-05-2019 14:29:23

6.1.3 தொடர்ச்சியான சமவாய்ப்பு மாறி (Continuous random variable)

வரையறை 6.5

ஓர் இடைவெளியில் உள்ள அனைத்து மெய் மதிப்புகளையும் (முழுக்களாகவோ, பின்னங்களாகவோ) ஏற்கும் ஒரு சமவாய்ப்பு மாறி X ஆனது தொடர்ச்சியான சமவாய்ப்பு மாறி என்று அழைக்கப்படுகிறது.

தொடர்ச்சியான சமவாய்ப்பு மாறியின் எடுத்துக்காட்டுகள்:

- ஒரு 10 அவுன்ஸ் பாட்டிலில் உள்ள தண்ணீரின் அளவு.
- ஒரு மகிழுந்தின் வேகம்.
- மின் நுகர்வு கிலோவாட் மணி நேரத்தில்.
- மக்கள் தொகையில் மக்களின் உயரம்.
- ஒரு வகுப்பில் மாணவர்களின் எடை.
- சென்னையிலிருந்து மதுரைக்குச் செல்ல ஒரு சரக்குவண்டி ஒட்டுநர் எடுத்துக்கொள்ளும் நேரம்.

நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு (Probability density function)

வரையறை 6.6

தொகையிடக்கூடிய ஓர் இடைவெளி $[t_1, t_2]$ இல் (திறந்த அல்லது மூடிய) அமையும் ஒரு சமவாய்ப்பு மாறி X இன் நிகழ்தகவு $f_X(x)$ ஆனது நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு என்று வரையறுக்கப்படுகிறது.

$$P(t_1 \le X \le t_2) = \int_{t_1}^{t_2} f_X(x)\,dx$$

நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு $f_X(x)$ அல்லது சுருக்கமாக, $f(x)$ ஆனது பின்வரும் நிபந்தனைகளை நிறைவு செய்ய வேண்டும்.

(i) $f(x) \ge 0 \;\forall\; x$ மற்றும் (ii) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$.

நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பிற்குப் பதிலாகப் பயன்படுத்தப்படும் பிற பெயர்களாவன அடர்த்திச் சார்பு, தொடர்ச்சியான நிகழ்தகவு சார்பு, தொகை அடர்த்திச் சார்பு ஆகியவை ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 6.8

ஒரு தொடர்ச்சியான சமவாய்ப்பு மாறி X -இன் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு $f(x)$ பின்வருமாறு உள்ளது

$f(x) = ax \;,\; 0 \le x \le 1$ எனில்,

மாறிலி a வைக் கண்டுபிடிக்கவும். மேலும் $P\left[X \le \frac{1}{2}\right]$ இன் மதிப்பையும் காண்க.

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 6.indd 12 09-05-2019 14:29:25

தீர்வு:

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ என்பதை நாம் அறிவோம்.

$$\int_0^1 ax\ dx = 1 \Rightarrow a\int_0^1 xdx = 1$$

$$\Rightarrow a\left(\frac{x^2}{2}\right)_0^1 = 1$$

$$\Rightarrow \frac{a}{2}(1-0) = 1$$

$$\Rightarrow a = 2$$

$$P\left[x \le \frac{1}{2}\right] = \int_{-\infty}^{\frac{1}{2}} f(x)dx$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} axdx$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} 2xdx$$

$$= \frac{1}{4}$$

எடுத்துக்காட்டு 6.9

ஒரு தொடர்ச்சியான சமவாய்ப்பு மாறி X -இன் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு (p.d.f)

$f(x) = 5x^4, 0 \le x \le 1$ எனில், (i) $P[X \le a_1] = P[X > a_1]$ மற்றும் (ii) $P[X > a_2] = 0.05$ என்பவற்றைக் கொண்டு a_1 மற்றும் a_2 ஆகியவற்றைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

தீர்வு :

(i) $P[X \le a_1] = P[X > a_1]$ இதிலிருந்து,

$$P[X \le a_1] = \frac{1}{2}$$

$$\int_0^{a_1} f(x)dx = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \int_0^{a_1} 5x^4 dx = \frac{1}{2}$$

$$5\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^{a_1} = \frac{1}{2}$$

$$a_1 = (0.5)^{\frac{1}{5}}$$

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 6.indd 13 09-05-2019 14:29:28

(ii) $P[X > a_2] = 0.05$

$$\int_{a_2}^{1} f(x)dx = 0.05$$

$$\int_{a_2}^{1} 5x^4 dx = 0.05$$

$$5\left[\frac{x^5}{5}\right]_{a_2}^{1} = 0.05$$

$$a_2 = [0.95]^{\frac{1}{5}}$$

தொடர்ச்சியான பரவல் சார்பு (Continuous distribution function)

வரையறை 6.7

தொடர்ச்சியான சமவாய்ப்பு மாறி X இன் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு $f_X(x)$ எனில், சார்பு $F_X(x)$ பின்வருமாறு வரையறுக்கப்படுகிறது.

$$F_X(x) = P[X \le x] = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt, -\infty < x < \infty$$

இது தொடர்ச்சியான சமவாய்ப்பு மாறி X – இன் பரவல் சார்பு அல்லது (சில நேரங்கள்) திரள் பரவல் சார்பு என்று அழைக்கப்படுகிறது.

திரள் பரவல் சார்பின் பண்புகள் (Properties of cumulative distribution function)

சார்பு $F_X(x)$ அல்லது சுருக்கமாக $F(x)$ ஆனது பின்வரும் பண்புகளைப் பெற்றுள்ளது.

(i) $0 \le F(x) \le 1, -\infty < x < \infty$

(ii) $F(-\infty) = \lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$ மற்றும் $F(+\infty) = \lim\limits_{x \to \infty} F(x) = 1.$

(iii) $F(\cdot)$ என்பது ஓரியல்புத் தன்மைக் கொண்ட குறையாச் சார்பு.
அதாவது $a < b$ –க்கு $F(a) \le F(b)$

(iv) $F(\cdot)$ என்பது வலப்புறத்திலிருந்து தொடர்ச்சியானது, அதாவது $\lim\limits_{h \to 0} F(x+h) = F(x).$

(v) $F'(x) = \dfrac{d}{dx}F(x) = f(x) \ge 0$

(vi) $F'(x) = \dfrac{d}{dx}F(x) = f(x) \Rightarrow dF(x) = f(x)dx$

$dF(x)$ என்பது X–இன் நிகழ்தகவு வகையீடு என அறியப்படுகிறது.

(vii) $P(a \le x \le b) = \int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{-\infty}^{b} f(x)dx - \int_{-\infty}^{a} f(x)dx$

$$= P(X \le b) - P(X \le a)$$

$$= F(b) - F(a)$$

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 6.indd 14 09-05-2019 14:29:32

எடுத்துக்காட்டு 6.10

ஒரு வானொலிக் குழாயின் ஆயுட்காலமானது (மணி நேரங்களில்) பின்வரும் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பை கொண்டிருக்கிறது

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{100}{x^2}, & x\geq 100\\ 0, & x<100\end{cases}$$

எனில், அதன் பரவல் சார்பை காண்க.

தீர்வு:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

$$=\int_{100}^{x}\frac{100}{t^2}dt, x\geq 100$$

$$=\left[\frac{100}{-t}\right]_{100}^{x}, x\geq 100$$

$$F(x)=\left[1-\frac{100}{x}\right], x\geq 100$$

எடுத்துக்காட்டு 6.11

ஒரு குறிப்பிட்ட அடுமனையில் ஒரு நாளில் விற்று முடிந்த ரொட்டி X–இன் அளவுகள் (நூறு பவுண்டுகளில்) ஒரு எண் சார்ந்த சமவாய்ப்பு நிகழ்வாகக் கண்டறியப்பட்டது. அதன் நிகழ்தகவானது, $f(x)$ என்ற நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பின் மூலம் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது எனில்,

$$f(x)=\begin{cases}Ax, & 0\leq x<10\\ A(20-x), & 10\leq x<20\\ 0, & \text{மற்றெங்கிலும்}\end{cases}$$

(a) A -இன் மதிப்பை காண்க.

(b) மறுநாளைக்கு விற்கப்படவிருக்கும் ரொட்டிகளின் எண்ணிக்கைக்கான பவுண்டுகளின் நிகழ்தகவு என்ன ?

(i) 10 பவுண்டுகளுக்கு அதிகமாக.

(ii) 10 பவுண்டுகளுக்குக்குறைவாக.

(iii) 5 மற்றும் 15 பவுண்டுகளுக்கு இடையில்.

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 6.indd 15 09-05-2019 14:29:34

தீர்வு:

(a) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ என்பது நமக்குத் தெரியும்.

$$\int_0^{10} Axdx + \int_{10}^{20} A(20-x)dx = 1$$

$$A\left\{\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{10} + \left[20x - \frac{x^2}{2}\right]_{10}^{20}\right\} = 1$$

$$A\left[(50-0)+(400-200)-(200-50)\right]=1$$

$$A = \frac{1}{100}$$

(b) (i) மறுநாளைக்கு விற்கப்படவிருக்கும் ரொட்டிகளின் எண்ணிக்கை 10 பவுண்டுகளுக்கு அதிகமாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு:

$$P(10 \le X \le 20) = \int_{10}^{20} \frac{1}{100}\left(20-x\right)dx$$

$$= \frac{1}{100}\left[20x - \frac{x^2}{2}\right]_{10}^{20}$$

$$= \frac{1}{100}\left[\left(400-200\right)-(200-50)\right]$$

$$= 0.5$$

(ii) மறுநாளைக்கு விற்கப்படவிருக்கும் ரொட்டிகளின் எண்ணிக்கை10 பவுண்டுகளுக்கு குறைவாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு:

$$P(0 \le X < 10) = \int_0^{10} \frac{1}{100} xdx$$

$$= \frac{1}{100}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{10}$$

$$= \frac{1}{100}\left(50-0\right)$$

$$= 0.5$$

(iii) மறுநாளைக்கு விற்கப்படவிருக்கும் ரொட்டிகளின் எண்ணிக்கை 5 மற்றும் 15 பவுண்டுகளுக்கு இடையில் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு:

$$P(5 \le X \le 15) = \int_5^{10} \frac{1}{100} xdx + \int_{10}^{15} \frac{1}{100}(20-x)dx$$

$$= \frac{1}{100}\left[\frac{x^2}{2}\right]_5^{10} + \frac{1}{100}\left[20x - \frac{x^2}{2}\right]_{10}^{15}$$

$$= 0.75$$

பயிற்சி 6.1

1. கொடுக்கப்பட்டுள்ள நிகழ்தகவுப் பரவலுக்கான திரள் பரவல் சார்பை அமைக்கவும்.

X	0	1	2	3
$P(X=x)$	0.3	0.2	0.4	0.1

2. X என்ற தனித்த சமவாய்ப்பு மாறியின் நிகழ்தகவு நிறை சார்பு ஆனது

$$p(x)=\begin{cases}0.3 & , \ x=3\\ 0.2 & , \ x=5\\ 0.3 & , \ x=8\\ 0.2 & , \ x=10\\ 0 & , \ \text{மற்றெங்கிலும்}\end{cases}$$

எனில், X -இன் திரள் பரவல் சார்பைக் கண்டுபிடிக்கவும். மேலும் வரைபடம் வரையவும்.

3. தனித்த சமவாய்ப்பு மாறி X ஆனது பின்வரும் நிகழ்தகவு சார்பை பெற்றுள்ளது

$$P(X=x)=\begin{cases}kx & , \ x=2,4,6\\ k(x-2) & , \ x=8\\ 0 & , \ \text{மற்றெங்கிலும்}\end{cases}$$

இங்கு ஒரு k மாறிலி எனில், $k=\frac{1}{18}$ என நிறுவுக.

4. தனித்த சமவாய்ப்பு மாறி X ஆனது பின்வரும் நிகழ்தகவுச் சார்பைப் பெற்றுள்ளது எனில், $k=0.1$ என காண்பிக்கவும்.

X	1	2	3	4
$P(X=x)$	k	$2k$	$3k$	$4k$

5. இரண்டு நாணயங்கள் ஒரே சமயத்தில் சுண்டப்படுகிறது. தலை பெறுவது வெற்றியாகக் கருதப்படுகிறது எனில், வெற்றிகளின் எண்ணிக்கைக்கான நிகழ்தகவுப் பரவலை கண்டுபிடிக்கவும்.

6. ஒரு தொடர்ச்சியான சமவாய்ப்பு மாறி X ஆனது பின்வரும் நிகழ்தகவுச் சார்பைப் பெற்றுள்ளது எனில்,

$X=x$	0	1	2	3	4	5	6	7
$P(x)$	0	k	$2k$	$2k$	$3k$	k^2	$2k^2$	$7k^2+k$

(i) k ன் மதிப்பைக் காண்க.

(ii) $p(x<6)$, $p(x\geq 6)$ மற்றும் $p(0<x<5)$ ஐக் காண்க.

(iii) $P(X\leq x)>\frac{1}{2}$ க்கான x இன் குறைந்தபட்ச மதிப்பைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 6.indd 17 09-05-2019 14:29:38

7. ஒரு தொடர்ச்சியான சமவாய்ப்பு மாறி X ஆனது வீச்சு $[-3, 3]$ உடைய நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பாகக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{16}(3+x)^2, & -3\leq x\leq -1\\ \frac{1}{16}(6-2x^2), & -1\leq x\leq 1\\ \frac{1}{16}(3-x)^2, & 1\leq x\leq 3\end{cases}$$ எனில்,

வளைவரையின் பரப்பு ஒன்று என்பதை சரிபார்க்கவும்.

8. ஒரு தொடர்ச்சியான சமவாய்ப்பு மாறி Xஆனது பின்வரும் பரவல் சார்பை பெற்றுள்ளது

$$F(x)=\begin{cases}0 & , x\leq 1\\ k(x-1)^4, & 1<x\leq 3\\ 1 & , x>3\end{cases}$$

எனில், (i) k மற்றும் (ii) நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பைக் காண்க.

9. ஒரு குறிப்பிட்ட நபர் தொலைபேசியில் பேசும் நேரம் (நிமிடங்களில்) சமவாய்ப்பு நிகழ்வாகக் கண்டறியப்பட்டது, அதன் நிகழ்தகவுச் சார்பு, நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு $f(x)$ ஆல் குறிப்பிடப்படுகிறது. மேலும், $f(x)=\begin{cases}Ae^{-x/5}, & x\geq 0\\ 0 & , \text{மற்றெங்கிலும்}\end{cases}$

எனில், (a) $f(x)$ ஒரு நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பை உருவாக்கும் எனில் A- இன் மதிப்பைக் காண்க.

(b) ஒரு நபர் தொலைபேசியில் (i)10 நிமிடங்களுக்கு மேல் (ii) 5 நிமிடங்களுக்குக்குறைவாக (iii) 5 மற்றும் 10 நிமிடங்களுக்கு இடையில் பேசும் நிமிடங்களில் எண்ணிக்கைகளின் நிகழ்தகவு என்ன ?

10. ஒரு நபர் ஒரு குறிப்பிட்ட தொடர்வண்டி நிலையத்தில் காத்திருக்க வேண்டிய நேரம் நிமிடங்களில் கண்டறியப்பட்டு அதை ஒரு சமவாய்ப்பு நிகழ்வாக வைத்துக் கொள்வோம். அதன் நிகழ்தகவுச் சார்பின் பரவல் சார்பால் குறிப்பிடப்பட்டுள்ளது

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\leq 0\\ \frac{x}{2}, & 0\leq x<1\\ \frac{1}{2}, & 1\leq x<2\\ \frac{x}{4}, & 2\leq x<4\\ 1, & x\geq 4\end{cases}$$ எனில்,

(a) பரவல் சார்பு தொடர்ச்சியாக இருக்குமா? அப்படியானால், அதன் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பை எழுதுக.

(b) ஒரு நபர் (i) 3 நிமிடங்களுக்கு மேல் (ii) 3 நிமிடங்களுக்குக் குறைவாக (iii) 1 மற்றும் 3 நிமிடங்களுக்கு இடையில் காத்திருப்பதற்கான நிகழ்தகவு என்ன?

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 6.indd 18 09-05-2019 14:29:39

11. சமவாய்ப்பு மாறி வரையறுக்கவும்.

12. சமவாய்ப்பு மாறியின் வகைகள் யாவை? அவற்றை விளக்கவும்.

13. தனித்த சமவாய்ப்பு மாறியை வரையறுக்கவும்.

14. தொடர்ச்சியான சமவாய்ப்பு மாறி பற்றி நீங்கள் என்ன புரிந்து கொள்கிறீர்கள்?

15. சமவாய்ப்பு மாறியின் பொருள் என்ன என்பதனை விவரிக்கவும்.

16. தனித்த மற்றும் தொடர்ச்சியான சமவாய்ப்பு மாறிகளை வேறுபடுத்தவும்.

17. சமவாய்ப்பு மாறியின் பரவல் சார்பை விளக்கவும்.

18. சொற்றொடர்கள், (i) நிகழ்தகவு நிறை சார்பு (ii) நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு மற்றும் (iii) நிகழ்தகவு பரவல் சார்பு ஆகியவற்றை விளக்கவும்.

19. (i) தனித்த சமவாய்ப்பு மாறி மற்றும் (ii) தொடர்ச்சியான சமவாய்ப்பு மாறி ஆகியவற்றின் பண்புகள் யாவை?

20. பரவல் சார்பின் பண்புகளைக் கூறவும்.

6.2 கணக்கியல் எதிர்பார்த்தல் (Mathematical Expectation)

அறிமுகம்

சமவாய்ப்பு மாறிகள் அல்லது பரவல்கள் சம்பந்தப்பட்ட கணக்குகளில் மிகவும் பயனுள்ள கருத்தை எதிர்பார்த்தல் கொண்டுள்ளது. அளவீடுகளைக் கருத்தில் கொண்டு நடைமுறை நோக்கங்களுக்காகச் சமவாய்ப்பு மாறிப்பண்புகள் உருவாக்கப்பட்டு திறம்பட கையாளுவதையே அவற்றின் எதிர்பார்த்தல் என்றழைக்கப்படுகிறது. விளையாட்டுகள் தொடர்பான வெற்றி வாய்ப்புகளில் கணக்கியல் எதிர்பார்த்தலின் கருத்து எழுந்தது. எடுத்துக்காட்டாக, ஒரு விளையாட்டு வீரர், ஒரு போட்டியில் அவரின் சராசரி வெற்றியைக் காண, ஒரு தொழிலதிபர் ஒரு உற்பத்தியில் அவரின் சராசரி இலாபம் காண ஆர்வமாக இருக்கலாம். ஒரு சமவாய்ப்பு நிகழ்வின் சராசரி மதிப்பானது அதன் கணக்கியல் எதிர்பார்த்தல் அல்லது எதிர்பார்க்கும் மதிப்பாக குறிப்பிடப்படுகிறது. பின்வரும் பிரிவுகளில், தனித்த மற்றும் தொடர்ச்சியான சமவாய்ப்பு மாறிகளுக்கான கணக்கியல் எதிர்பார்த்தலின் கருத்தை நாம் வரையறுத்துப் படிப்போம்.

6.2.1 எதிர்பார்க்கும் மதிப்பு மற்றும் மாறுபாட்டு அளவை (Expected value and Variance)

எதிர்பார்க்கும் மதிப்பு

எதிர்பார்க்கும் மதிப்பு என்பது ஒரு சமவாய்ப்பு மாறி மதிப்பின் எடையிட்ட சராசரி என கருதப்படுகிறது. இங்கு நிகழ்தகவுகள் எடைகளாக இருக்கின்றன.

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 6.indd 19 09-05-2019 14:29:39

வரையறை 6.8

ஒரு தனித்த சமவாய்ப்பு மாறி X இன் நிகழ்தகவு நிறை சார்பு $p(x)$ எனில், அதன் எதிர்பார்க்கும் மதிப்பு

$$E(X)=\sum_{x} x\,p(x) \qquad \ldots (1)$$

ஒரு தொடர்ச்சியான சமவாய்ப்பு மாறி X இன் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு $f(x)$ எனில், அதன் எதிர்பார்க்கும் மதிப்பு

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x\,f(x)\,dx \qquad \ldots (2)$$ என வரையறுக்கப்படுகிறது.

குறிப்பு

- (1) இல், $E(X)$ என்பது குறிப்பிடப்பட்ட தொடர் முழுவதிலும் குவிதலியல்புடைய (absolutely convergent) தொடராக இருக்க வேண்டும் என்ற நிபந்தனைக்கு உட்பட்டு வரையறுக்கப்படுகிறது. இல்லையெனில், சராசரி காணத்தக்கது அல்ல என்று கூறுகிறோம்.
- (1) இல், $E(X)$ என்பது சமவாய்ப்பு மாறி பெறும் மதிப்புகளின் "சராசரி " ஆகும். ஒவ்வொரு சமவாய்ப்பு மாறி மதிப்பும், அம்மதிப்பின் நிகழ்தகவு மூலம் நிறையிடப்படுகிறது. சாத்தியமான நிகழ்தகவு மதிப்புகள் அதிக நிறையைப் பெறும்.
- (2) இல், குறிப்பிடப்பட்ட தொகுப்பு தொகையிடத்தக்கது எனில், $E(X)$ என்பது அமைவுறு தொகுப்பாக வரையறுக்கப்படுகிறது இல்லையெனில், சராசரி காணத்தக்கது அல்ல என்று கூறுகிறோம்.
- (2) இல், $E(X)$ என்பது சமவாய்ப்புமாறி பெறும் மதிப்புகளின் "சராசரி" ஆகும். ஒவ்வொரு x மதிப்பும் X –இன் தோராய நிகழ்தகவு $f_X(x)$ மூலம் பெருக்கப்படுகிறது, பின்னர் அனைத்து மதிப்புகளுக்கும் தொகுப்பாக்கப்படுகிறது.

உங்களுக்குத் தெரியுமா?

- $E(X)$ என்பது அலகு நிறை புவி ஈர்ப்பு விசையின் மையம் அல்லது நடுமம் (centroid) ஆகும். இது X–இன் அடர்த்தி சார்பின் மூலம் தீர்மானிக்கப்படுகிறது. எனவே X -இன் சராசரி என்பது சமவாய்ப்பு மாறி X க்கான மதிப்புகளின் "மையப்படுத்தப்பட்ட" அளவாகும்.
- X –இன் சராசரி μ_x அல்லது $E(X)$ ஆல் குறிக்கப்படுகிறது.

மாறுபாட்டு அளவை (Variance)

மாறுபாட்டு அளவை என்பது ஒரு சமவாய்ப்பு மாறியிலிருந்து அதன் சராசரியின் வர்க்க விலக்கங்களின் எடையிட்ட சராசரி ஆகும். இங்கு நிகழ்தகவுகள் எடைகளாக இருக்கும். ஒரு சமவாய்ப்பு மாறி X -இன் சராசரி (1) மற்றும் (2) -இல் வரையறுக்கப்பட்ட X -இன் அடர்த்தி மையநிலை அளவு ஆகும். ஒரு சமவாய்ப்பு மாறி X -இன் மாறுபாடானது X -இன் அடர்த்தியின் சிதறல் அல்லது பரவல் அளவையாக இருக்கும் அல்லது சுருக்கமாக, ஒரு சீரற்ற மாறி மதிப்புகளின் மாறுபாடு ஆகும்.

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 6.indd 20 09-05-2019 14:29:40

வரையறை 6.9

X–இன் மாறுபாட்டு அளவை பின்வருமாறு வரையறுக்கப்படுகிறது.

தனித்த சமவாய்ப்பு மாறி X–இன் நிகழ்தகவு நிறை சார்பு $p(x)$ எனில்,

$$Var(X)=\sum\left[x-E(X)\right]^2 p(x) \qquad \ldots (3)$$

தொடர்ச்சியான சமவாய்ப்பு மாறி X–இன் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு $f_X(x)$ எனில்,

$$Var(X)=\int_{-\infty}^{\infty}\left[x-E(X)\right]^2 f_X(x)\,dx \qquad \ldots (4)$$ ஆகும்.

வரையறை 6.10

$[X-E(X)]^2$ இன் எதிர்பார்க்கும் மதிப்பானது சமவாய்ப்பு மாறியின் மாறுபாட்டு அளவை என்று அழைக்கப்படுகிறது.

அதாவது, $Var(X)=E\left[X-E(X)\right]^2=E\left(X^2\right)-\left[E(X)\right]^2 \qquad \ldots (5)$

இங்கு $E\left(X^2\right)=\begin{cases}\sum_x x^2\,p(x), & X \text{ ஒரு தனித்த சமவாய்ப்பு மாறி எனில்}\\ \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx, & X \text{ ஒரு தொடர்ச்சியான சமவாய்ப்பு மாறி எனில்}\end{cases}$

குறிப்பு

- பின்வரும் எடுத்துக்காட்டுகளில், மாறுபாட்டு அளவையானது வரையறை 6.10 –ஐ பயன்படுத்திக் கண்டறியப்பட்டிக்கும்.
- (3)–இல் தொடரானது குவிதலியல்புடையதாகவும் அல்லது (4)–இல் தொகுப்புடையன வாகவும் இருந்தால் மட்டுமே மாறுபாடுகள் வரையறுக்கப்படுகின்றன.
- X ஒரு சமவாய்ப்பு மாறி எனில், X –இன் திட்டவிலக்கம் σ_X என்று குறியிடப்பட்டு $+\sqrt{Var[X]}$ என்று வரையறுக்கப்படுகிறது.
- X இன் மாறுபாடு, $\sigma_X^{\,2}$ அல்லது $Var(X)$ அல்லது $V(X)$ என்றும் குறிக்கப்படுகிறது.

உங்களுக்கு தெரியுமா?

சராசரி என்பது ஒரு அடர்த்தி புவிஈர்ப்பு விசையின் மையம் ஆகும். இதேபோல், மாறுபாட்டு அளவையானது புவிஈர்ப்பு விசை மையத்தின் செங்குத்து அச்சைப் பொறுத்து அதே அடர்த்தி கொண்ட திருப்புத்திறனை பிரதிபலிக்கிறது.

6.2.2 கணக்கியல் எதிர்பார்த்தலின் பண்புகள் (Properties of Mathematical expectation)

(i) $E(a)=a$, 'a' என்பது ஒரு மாறிலி.

(ii) $E(aX)=aE(X)$

(iii) $E(aX+b)=aE(X)+b$, 'a' மற்றும 'b' ஆகியவை மாறிலிகள்.

(iv) $X\geq 0$ எனில், $E(X)\geq 0$ ஆகும்.

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 6.indd 21 09-05-2019 14:30:02

(v) $V(a)=0$, a ஒரு மாறிலி.

(vi) X என்பது ஒரு சமவாய்ப்பு மாறி எனில், $V(aX+b)=a^2V(X)$

விலக்கப் பெருக்குத்தொகையின் கருத்தாக்கம் (Concept of moments)

ஒரு சமவாய்ப்பு மாறியின் அல்லது ஒரு பரவலின் விலக்கப்பெருக்குத்தொகை (அல்லது சீர்படா விலக்கப்பெருக்குத்தொகை) என்பது கொடுக்கப்பட்ட பரவலுக்குரிய சமவாய்ப்பு மாறியின் அடுக்குகளின் எதிர்பார்த்தலாகும்.

வரையறை 6.11

ஒரு சமவாய்ப்பு மாறி X–ஆக இருந்தால் X –இன் r–வது விலக்கப்பெருக்குத்தொகை, பொதுவாக μ'_r மூலம் குறிக்கப்பட்டு பின்வருமாறு வரையறுக்கப்படுகிறது.

$$\mu'_r = E\left(X^r\right) = \begin{cases} \sum_x x^r p(x) \quad , & X \text{ ஒரு தனித்த சமவாய்ப்பு மாறி எனில்} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x^r f(x)dx, & X \text{ ஒரு தொடர்ச்சியான சமவாய்ப்பு மாறி எனில்} \end{cases}$$

இங்கு எதிர்பார்த்தல் காணத்தக்கதாக இருத்தல் வேண்டும்.

வரையறை 6.12

X ஒரு சமவாய்ப்பு மாறி எனில் a–ஐ பொருத்த X–இன் r–வது சீர்படா விலக்கபெருக்குத்தொகை $E\left[(X-a)^r\right]$ என வரையறுக்கப்படுகிறது. $a=\mu_X$ எனில், μ_x –ஐ பொருத்த X–இன் r–வது மைய விலக்கபெருக்குத்தொகையை μ_r மூலம் குறிக்கப்பட்டு, பின்வருமாறு வரையறுக்கப்படுகிறது.

$$\mu_r = E[(X-\mu_X)^r]$$

குறிப்பு

- $\mu'_1 = E(X) = \mu_X$, X –இன் சராசரி.
- $\mu_1 = E[X-\mu_X] = 0$.
- $\mu_2 = E[(X-\mu_X)^2]$, X –இன் மாறுபாடு
- X இன் விலக்கபெருக்குத்தொகை காணத்தக்கது மற்றும் அதன் அடர்த்தி சார்பு μ_X ஐ பொருத்து சமச்சீராக இருந்தால், μ_X–ஐ பொருத்த X–இன் அனைத்து ஒற்றை விலக்கபெருக்குத்தொகைகளும் பூஜ்ஜியமாக இருக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 6.12

பின்வரும் நிகழ்தகவுப் பரவலைக் கொண்ட சமவாய்ப்பு மாறியின் சராசரி மற்றும் மாறுபாட்டைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

$X = x$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(x)$	0.15	0.10	0.10	0.01	0.08	0.01	0.05	0.02	0.28	0.20

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 6.indd 22 09-05-2019 14:30:29

தீர்வு:

சமவாய்ப்பு மாறி X–இன் சராசரி : $E(X)=\sum_{x} x\,P_X(x)$

$= (1 \times 0.15) + (2 \times 0.10) + (3 \times 0.10) + (4 \times 0.01) + (5 \times 0.08) + (6 \times 0.01) + (7 \times 0.05) + (8 \times 0.02) + (9 \times 0.28) + (10 \times 0.20)$

$$E(X)=6.56$$

$$E\left(X^2\right)=\sum_{x} x^2\,P_X(x)$$

$$= (1^2 \times 0.15) + (2^2 \times 0.10) + (3^2 \times 0.10) + (4^2 \times 0.01) + (5^2 \times 0.08) + (6^2 \times 0.01) + (7^2 \times 0.05) + (8^2 \times 0.02) + (9^2 \times 0.28) + (10^2 \times 0.20)$$

$$= 50.38$$

சமவாய்ப்பு மாறியின் மாறுபாட்டளவு : $V(X) = E\left(X^2\right)-\left[E(X)\right]^2$

$$= 50.38 - (6.56)^2$$

$$= 7.35$$

எனவே, கொடுக்கப்பட்ட தனித்த பரவலின் சராசரி மற்றும் மாறுபாட்டு அளவை முறையே 6.56 மற்றும் 7.35 ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 6.13

ஆறு ஆண்கள் மற்றும் ஐந்து பெண்கள், ஒரு சிறிய நிறுவனத்தில் ஒரு நிர்வாக நிலைக்கு விண்ணப்பிக்கின்றனர். இரண்டு விண்ணப்பதாரர்கள் நேர்காணலுக்குத் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டனர். நேர்க்காணல் குழுவில் உள்ள பெண்களின் எண்ணிக்கை X எனக் குறிக்கப்பட்டு. X இன் நிகழ்தகவு நிறை சார்பு பின்வருமாறு கண்டறியப்பட்டுள்ளது.

$X = x$	0	1	2
$P(x)$	$\frac{2}{11}$	$\frac{5}{11}$	$\frac{4}{11}$

நேர்காணல் குழுவில் எத்தனை பெண்களை நீங்கள் எதிர்பார்க்கிறீர்கள்?

தீர்வு:

நேர்காணல் குழுவில் உள்ள பெண்களின் எதிர்பார்ப்பு எண்ணிக்கை :

$$E(X)=\sum_{x} x\,P_X(x)$$

$$=\left[\left(0\times\frac{2}{11}\right)+\left(1\times\frac{5}{11}\right)+\left(2\times\frac{4}{11}\right)\right]$$

$=\frac{13}{11}$ (தோராயமாக ஒரு பெண்)

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 6.indd 23 09-05-2019 14:30:31

எடுத்துக்காட்டு 6.14

ஒரு தனித்த சமவாய்ப்பு மாறியின் சராசரி மற்றும் மாறுபாட்டு அளவையைக் கண்டுபிடிக்கவும். இதன் பரவல் சார்பானது பின்வருமாறு பெறப்பட்டுள்ளது.

$X = x$	1	2	3	4	5	6
$F_x(x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{5}{6}$	1

தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்ட விவரத்திலிருந்து, நீங்கள் முதலில் சமவாய்ப்பு மாறியின் நிகழ்தகவு பரவலைக் கணக்கிடவும். அதைப் பயன்படுத்தி சராசரி மற்றும் மாறுபாட்டளவையைக் கணக்கிடவேண்டும்.

X	$p(x)$
1	$F(1) = \frac{1}{6}$
2	$F(2) - F(1) = \frac{2}{6} - \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$
3	$F(3) - F(2) = \frac{3}{6} - \frac{2}{6} = \frac{1}{6}$
4	$F(4) - F(3) = \frac{4}{6} - \frac{3}{6} = \frac{1}{6}$
5	$F(5) - F(4) = \frac{5}{6} - \frac{4}{6} = \frac{1}{6}$
6	$F(6) - F(5) = 1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$

நிகழ்தகவு நிறை சார்பு :

$X = x$	1	2	3	4	5	6
$P(x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

சமவாய்ப்பு மாறி X–இன் சராசரி: $E(X) = \sum_x x\, P_X(x)$

$$= \left(1\times\frac{1}{6}\right)+\left(2\times\frac{1}{6}\right)+\left(3\times\frac{1}{6}\right)+\left(4\times\frac{1}{6}\right)+\left(5\times\frac{1}{6}\right)+\left(6\times\frac{1}{6}\right)$$

$$= \frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6)$$

$$= \frac{7}{2}$$

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 6.indd 24 09-05-2019 14:30:33

$$E\left(X^2\right)=\sum_x x^2\, P_X(x)$$

$$= \left(1^2\times\frac{1}{6}\right)+\left(2^2\times\frac{1}{6}\right)+\left(3^2\times\frac{1}{6}\right)+\left(4^2\times\frac{1}{6}\right)+\left(5^2\times\frac{1}{6}\right)+\left(6^2\times\frac{1}{6}\right)$$

$$= \frac{1}{6}\left(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2\right)$$

$$= \frac{91}{6}$$

சமவாய்ப்பு மாறியின் மாறுபாட்டளவு : $V(X) = E\left(X^2\right)-\left[E(X)\right]^2$

$$=\frac{91}{6}-\left(\frac{7}{2}\right)^2$$

$$=\frac{35}{12}$$

எடுத்துக்காட்டு 6.15

பின்வரும் தகவல் வெற்றிகளின் நிகழ்தகவு பரவலைக் குறிக்கிறது எனில், வெற்றியின் எதிர்பார்த்தல் எண்ணிக்கையைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

வெற்றிகளின் எண்ணிக்கை $X=x$	0	1	2
நிகழ்தகவு $p(x)$	$\frac{6}{11}$	$\frac{9}{22}$	$\frac{1}{22}$

தீர்வு:

வெற்றியின் எதிர்பார்த்தல் எண்ணிக்கை :

$$E(X)=\sum_x x\, P_X(x)$$

$$=\left(0\times\frac{6}{11}\right)+\left(1\times\frac{9}{22}\right)+\left(2\times\frac{1}{22}\right)$$

$$=\frac{11}{22}$$

$$= 0.5$$

எனவே, வெற்றியின் எதிர்பார்த்தல் எண்ணிக்கை 0.5 ஆகும். (தோராயமாக ஒரு வெற்றி)

எடுத்துக்காட்டு 6.16

ஒரு குடுவையில் சிவப்பு, கருப்பு, பச்சை, மற்றும் நீலம் ஆகிய நான்கு நிற பந்துகள் உள்ளன. எந்த நிற பந்தையும் பெற சமமான நிகழ்தகவு வழங்கப்பட்டுள்ளது. முப்பது சோதனைகளில் பந்துகள் திரும்பி வைக்கும் முறையில், நீலநிற பந்து பெறுவதற்கான எதிர்பார்க்கத்தக்க மதிப்பு என்ன?

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 6.indd 25 09-05-2019 14:30:35

தீர்வு:

நீலபந்து பெறுவதற்கான நிகழ்தகவு : $p = \frac{1}{4} = 0.25$

மொத்த சோதனைகள் : N $= 30$

சோதனைகளின் மதிப்பு = சோதனைகளின் எண்ணிக்கை X நிகழ்தகவு

$= N \times p$

$= 30 \times 0.25$

$= 7.50$

எனவே, நீலப்பந்தைப் பெறுவதற்கான எதிர்பார்க்கத்தக்க மதிப்பு தோரயமாக 8 ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 6.17

ஒரு நடுநிலையான பகடை உருட்டப்படுகிறது எனில், அதன் விளைவுகளில் எதிர்பார்க்கப்பட்ட மதிப்பைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

தீர்வு:

உருட்டப்பட்ட ஒரு நடுநிலையான ஆறு முகங்கள் உள்ள பகடையின் (மேல்பக்கம்) சமவாய்ப்பு மாறி X இன் நிகழ்தகவு நிறை சார்பு

$P_X(x) = \frac{1}{6}$, $x = 1,2,3,4,5$ மற்றும் 6 எனில்

உருட்டப்பட்டதின் சராசரி, அதாவது X -இன் எதிர்பார்த்தல் :

$$E(X) = \sum_x x P_X(x)$$

$$E(X) = \left(1\times\frac{1}{6}\right)+\left(2\times\frac{1}{6}\right)+\left(3\times\frac{1}{6}\right)+\left(4\times\frac{1}{6}\right)+\left(5\times\frac{1}{6}\right)+\left(6\times\frac{1}{6}\right)$$

$$= \frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6)$$

$$= \frac{7}{2}$$

$$= 3.5$$

எனவே ஒரு நடுநிலையான ஆறு பக்கமுள்ள பகடையின் எதிர்பார்த்தல் 3.5 ஆகும்

எடுத்துக்காட்டு 6.18

தனித்த சமவாய்ப்பு மாறியின் நிகழ்தகவு நிறை சார்பானது,

$X = x$	0	1	2	3
$p(x)$	0.2	0.1	0.4	0.3

எனில், $E(3X + 2X^2)$ இன் மதிப்பைக் காண்க?

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 6.indd 26 09-05-2019 14:30:37

தீர்வு:

$$E(X) = \sum_x x\,P_X(x)$$

$$= (0 \times 0.2) + (1 \times 0.1) + (2 \times 0.4) + (3 \times 0.3)$$

$$= 1.8$$

$$E\left(X^2\right) = \sum_x x^2\,P_X(x)$$

$$= (0^2 \times 0.2) + (1^2 \times 0.1) + (2^2 \times 0.4) + (3^2 \times 0.3)$$

$$= 4.4$$

$$E(3X + 2X^2) = 3E(X) + 2E(X^2)$$

$$= (3 \times 1.8) + (2 \times 4.4)$$

$$= 14.2$$

எடுத்துக்காட்டு 6.19

ஒரு சமவாய்ப்பு மாறி X–க்கான நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பானது

$$f(x) = \begin{cases} 4x^3, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{மற்றெங்கிலும்} \end{cases}$$ எனில், $E(X)$ மற்றும் $V(X)$ கண்டுபிடிக்கவும்.

தீர்வு:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\,f(x)\,dx$$ என்பது நமக்குத் தெரியும்.

$$= \int_0^1 x\,4x^3\,dx$$

$$= 4\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1$$

$$E(X) = \frac{4}{5}$$

$$E\left(X^2\right) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx$$

$$= \int_0^1 x^2\,4x^3\,dx$$

$$= 4\left[\frac{x^6}{6}\right]_0^1$$

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 6.indd 27 09-05-2019 14:30:38

$$= \frac{4}{6}$$

$$V(X) = E\left(X^2\right) - \left[E\left(X\right)\right]^2$$

$$= \frac{4}{6} - \left[\frac{4}{5}\right]^2$$

$$= \frac{2}{75}$$

எடுத்துக்காட்டு 6.20

$f\ (x)$ மூலம் வரையறுக்கப்படும் சார்பு $f(x) = ke^{-2x}, 0 \le x < \infty$ ஆனது ஒரு அடர்த்திச் சார்பு எனில், மாறிலி k மற்றும் சராசரி ஆகியவற்றைக் கண்டு பிடிக்கவும்.

தீர்வு:

$f(x)$ என்பது ஒரு அடர்த்திச் சார்பு எனில்,

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$ என்பது நமக்குத் தெரியும்.

$$\int_{0}^{\infty} k e^{-2x}\, dx = 1$$

$$k\int_{0}^{\infty} e^{-2x}\, dx = 1$$

$$k\left[\frac{e^{-2x}}{-2}\right]_0^{\infty} = 1$$

$$\Rightarrow k = 2$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx$$

$$= \int_{0}^{\infty} xk\, e^{-2x}\, dx$$

$$= 2\int_{0}^{\infty} xe^{-2x}\, dx$$

$$= 2\left\{\left[\frac{xe^{-2x}}{-2}\right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \frac{e^{-2x}}{-2} dx\right\} \quad \left(\because \int udv = uv - \int vdu\right)$$

$$= \int_{0}^{\infty} e^{-2x}\, dx$$

$$= \frac{1}{2}$$

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 6.indd 28 09-05-2019 14:30:39

எடுத்துக்காட்டு 6.21

தயாரிக்கப்பட்ட DVD இயக்கியில் பயன்படுத்தப்படும் மின்னணு உபகரணங்களின் முக்கிய பகுதியின் செயலிழப்பிற்கான நேரம் (ஆயிரத்தில்) அடர்த்திச் சார்பாக கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

$$f(x)=\begin{cases}3e^{-3x}, & x>0\\ 0, & \text{மற்றெங்கிலும்}\end{cases}$$

இந்த உபகரண பகுதியின் எதிர்பார்க்கத்தக்க செயல் வாழ்வை கண்டுபிடிக்கவும்.

தீர்வு:

$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x\,f(x)\,dx$ என்பது நமக்குத் தெரியும்.

$$=\int_{0}^{\infty} x\,3e^{-3x}dx$$

$$=3\int_{0}^{\infty} x\,e^{-3x}dx$$

$$=3\left\{\left[x\frac{e^{-3x}}{-3}\right]_0^{\infty}-\int_0^{\infty}\left(\frac{e^{-3x}}{-3}\right)dx\right\}\left(\because\int u\,dv=uv-\int v\,du\right)$$

$$=\int_{0}^{\infty} e^{-3x}dx$$

$$=\frac{1}{3}$$

எனவே, உபகரணபகுதியின் எதிர்பார்க்கத்தக்க செயல் வாழ்வு $\frac{1}{3}$ மணி நேரம் (ஆயிரத்தில்) ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 6.22

ஒரு பயணிகள் இரயில் ஒவ்வொரு 25 நிமிடங்களுக்கும், ஒரு இரயில் நிலையத்திற்கு வந்து செல்கிறது. ஒரு பயணி ஒவ்வொரு காலையும் அவரது வீட்டைவிட்டு வெளியேறி சாதாரணமாக நடந்து இரயில் நிலையத்திற்கு செல்கிறார். அவர் இரயில் நிலையத்தை அடைந்த நேரத்திலிருந்து இரயிலுக்குக் காத்திருக்கும் நேரஅளவு (நிமிடங்களில்) X எனக் குறிக்கப்பட்டு அது X-இன் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பாக அறியப்படுகிறது

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{25}, & 0<x<25\\ 0, & \text{மற்றெங்கிலும்}\end{cases}$$ எனில்,

சமவாய்ப்பு மாறி X –இன் எதிர்பார்க்கத்தக்க மதிப்பை பெறவும் மற்றும் விளக்கவும்.

தீர்வு:

சமவாய்ப்பு மாறியின் எதிர்பார்க்கத்தக்க மதிப்பு:

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x\,f(x)\,dx$$

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 6.indd 29 09-05-2019 14:30:41

$$= \int_0^{25} x \frac{1}{25} dx$$

$$= \frac{1}{25} \int_0^{25} x\, dx$$

$$= \frac{1}{25} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{25}$$

$$= 12.5$$

எனவே, பயணி எதிர்ப்பார்க்கத்தக்க காத்திருப்பு நேரம் 12.5 நிமிடங்கள் ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 6.23

ஒரு வானொலி குழாயின் வாழ்நாள் (மணி நேரங்களில்) பின்வரும் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பைக் கொண்டிருப்பதாக வைத்துக்கொள்ளுங்கள்

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{x}{100}}, & x \geq 100 \\ 0, & x < 100 \end{cases}$$ எனில்,

வானொலி குழாயின் வாழ்நாளின் சராசரியை கண்டுபிடிக்கவும்.

தீர்வு:

சமவாய்ப்பு மாறியின் எதிர்பார்த்தல் :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx$$

$$= \int_{100}^{\infty} x\, e^{-\frac{x}{100}}\, dx$$

$$= \left\{ \left[x \left(\frac{e^{-\frac{x}{100}}}{-\frac{1}{100}} \right) \right]_{100}^{\infty} - \int_{100}^{\infty} \left(\frac{e^{-\frac{x}{100}}}{-\frac{1}{100}} \right) dx \right\} \qquad \left(\because \int u\, dv = uv - \int v\, du \right)$$

$$= \left[(10000)\left(e^{-1}\right) + (10000)\left(e^{-1}\right) \right]$$

$$= \left[(10000)(0.3679) + (10000)(0.3679) \right]$$

$= 7358$ மணிகள்

எனவே, வானொலி குழாயின் சராசரி வாழ்நாள் $7,358$ மணிகள் ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 6.24

ஒரு சமவாய்ப்பு மாறி X –இன் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு

$f(x) = ke^{-|x|}, -\infty < x < \infty$ எனில், k–இன் மதிப்பைக் கண்டுபிடிக்கவும் மற்றும் சமவாய்ப்பு மாறியின் சராசரி மற்றும் மாறுபாட்டு அளவையைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 6.indd 30 09-05-2019 14:31:40

தீர்வு

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$ என்பது நமக்குத் தெரியும்

$$\int_{-\infty}^{\infty} k e^{-|x|} dx = 1$$

$$k\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|} dx = 1$$

$$2k\int_{0}^{\infty} e^{-x} dx = 1 \qquad (\because\ e^{-|x|} \text{ ஒரு இரட்டை சார்பு})$$

$$2k\left[\frac{e^{-x}}{-1}\right]_0^{\infty} = 1$$

$$\therefore \quad k = \frac{1}{2}$$

சமவாய்ப்பு மாறியின் சராசரி :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, k\, e^{-|x|} dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} x\, e^{-|x|} dx \qquad (\because\ xe^{-|x|} \text{ ஒரு ஒற்றைச் சார்பு})$$

$$= 0$$

$$E\left(X^2\right) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 k\, e^{-|x|} dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-|x|} dx$$

$$= \int_{0}^{\infty} x^2 e^{-x} dx \qquad (\because\ x^2 e^{-|x|} \text{ ஒரு இரட்டைச் சார்பு})$$

$$= \Gamma(3) \qquad \left(\because \Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx, \alpha > 0; \Gamma(n) = (n-1)!\right)$$

$$= 2$$

$$V(X) = E\left(X^2\right) - \left[E(X)\right]^2$$

$$= 2 - [0]^2$$

$$= 2$$

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 6.indd 31 09-05-2019 14:31:44

பயிற்சி 6.2

1. ஒரு நடுநிலையான பகடையின் சமவாய்ப்பு மாறிகளுக்கான எதிர்பார்த்தல் மதிப்பைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

2. மாணவர்கள் A தரநிலையை பெறுவதற்கான எண்ணிக்கையை வரையறுக்கும் சமவாய்ப்பு மாறியாக X இருக்கட்டும். கொடுக்கப்பட்ட அட்டவணையிலிருந்து X–இன் எதிர்பார்த்தல் மதிப்பைக் கண்டறியவும்.

$X = x$	0	1	2	3
$P(X = x)$	0.2	0.1	0.4	0.3

3. பின்வரும் அட்டவணை சமவாய்ப்பு மாறி X–இன் நிகழ்தகவு நிறை சார்பை பற்றி விவரிக்கிறது எனில்,

x	3	4	5
$P(x)$	0.1	0.1	0.2

x–இன் திட்ட விலக்கத்தைக் கண்டு பிடிக்கவும்.

4. X என்பது ஒரு தொடர்ச்சியான சமவாய்ப்பு மாறி என்க. அதன் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பானது

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \le x \le 1 \\ 0, & \text{மற்றெங்கிலும்} \end{cases}$$

எனில், X –இன் எதிர்பார்த்தல் மதிப்பை கண்டுபிடிக்கவும்.

5. X என்பது ஒரு தொடர்ச்சியான சமவாய்ப்பு மாறி என்க. அதன் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பானது

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{x^4}, & x \ge 1 \\ 0, & \text{மற்றெங்கிலும்} \end{cases}$$

எனில், X –இன் சராசரி மற்றும் மாறுபாட்டை கண்டுபிடிக்கவும்.

6. ஒருவர், ஒரு முதலீட்டில் ₹ 5,000 இலாபம் ஈட்டுவதற்கான நிகழ்தகவு 0.62 அல்லது ₹ 8,000 இழப்பு வருவதற்கான நிகழ்தகவு 0.38 எனில், இதில் எதிர்பார்க்கப்பட்ட ஆதாயத்தைக் கண்டறியவும்.

7. கணக்கியல் எதிர்பார்த்தலின் பண்புகள் யாவை?

8. கணக்கியல் எதிர்பார்த்தலில் மூலம் நீங்கள் என்ன புரிந்து கொண்டீர்கள்?

9. கணக்கியல் எதிர்பார்த்தலில் அடிப்படையில் மாறுபாட்டு அளவையை நீங்கள் எவ்வாறு வரையறுக்கவேண்டும்?

10. தனித்த சமவாய்ப்பு மாறியின் கணக்கியல் எதிர்பார்த்தலை வரையறுக்கவும்.

11. தொடர்ச்சியான சமவாய்ப்பு மாறியைப் பயன்படுத்தி கணக்கியல் எதிர்பார்த்தலின் வரையறையைக் கூறவும்.

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 6.indd 32 09-05-2019 14:31:45

12. ஒரு வியாபார முயற்சியில் ஒருவர் ₹ 2,000 இலாபம் ஈட்டுவதற்கான நிகழ்தகவு 0.4 அல்லது ₹ 1,000 இழப்பை பெறுவதற்கான நிகழ்தகவு 0.6 எனில், அவரது எதிர்பார்த்தல், மாறுபாடு மற்றும் திட்டவிலக்கம் இலாபம் என்ன?

13. ஒரு மோட்டார் வண்டிச்சக்கர டயரின் (Motor cycle tyre) இறுதி அடிப்பகுதி தேய்மானத்தை எதிர்த்து தாங்கும் திறனானது ஒரு நெருக்கடியான தருவாயை அடையும்வரை கடந்த மைல்களின் எண்ணிக்கை ஒரு நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பின் மூலம் குறிக்கப்படுகிறது

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{30}e^{-\frac{x}{30}}, & x>0\\ 0, & x\leq 0\end{cases}$$

எனில், வண்டிச்சக்கர டயரின் இறுதி அடிப்பகுதி தேய்மானத்தை எதிர்த்து தாங்குத் திறனானது ஒரு நெருக்கடியான தருவாயை அடையும் வரைக்கான எதிர்பார்க்கத்தக்க மைல்கள் (ஆயிரத்தில்) எண்ணிக்கையைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

14. ஒரு நபர் ஒரு நாணயத்தைச் சுண்டுகிறார், தலை எனில், ₹ 4 -ஐப் பெறுகிறார் மற்றும் பூ எனில், ₹ 2 -ஐ செலுத்துகிறார். அவரது இலாபத்தின் எதிர்பார்ப்பு மற்றும் மாறுபாட்டளவையைக் கண்டறியவும்.

15. ஒரு சமவாய்ப்பு மாறி X ஆக இருக்கட்டும் மற்றும் $Y = 2X + 1$. சமவாய்ப்பு மாறி X -இன் மாறுபாட்டளவு 5 என்றால் Y -இன் மாறுபாட்டளவு என்ன?

T68W2I

பயிற்சி 6.3

ஏற்புடைய விடையைத் தெரிவு செய்க:

1. நிகழ்வின் நிகழ்தகவு கொண்ட சமவாய்ப்பு மாறியின் சாத்தியமுள்ள மதிப்புகளைப் பெருக்குவதன் மூலம் பெறப்பட்ட எந்த மதிப்பு எடையிட்ட சராசரிக்கு சமம் என அழைக்கப்படுகிறது.

   (a) தனித்த மதிப்பு (b) எடையிட்ட மதிப்பு

   (c) எதிர்பார்த்தல் மதிப்பு (d) திரள் மதிப்பு

2. நாள் ஒன்றுக்கு பொருள்களின் தேவையானது, மூன்று நாள்களுக்கு முறையே 21, 19, 22 அலகுகள் ஆகும். அவற்றின் நிகழ்தகவுகள் முறையே 0.29, 0.40, 0.35 ஆகும். அலகு ஒன்றுக்கு இலாபம் 0.50 பைசாக்கள் எனில், மூன்று நாள்களுக்கான எதிர்பார்க்கப்பட்ட இலாபம்.

   (a) 21, 19, 22 (b) 21.5, 19.5, 22.5 (c) 0.29, 0.40, 0.35 (d) 3.045, 3.8, 3.85

3. x-ஐ விவரிக்கும் நிகழ்தகவு குறிப்பிட்ட மதிப்பை விட சமமாகவோ அல்லது குறைவாகவோ உள்ள நிகழ்தகவு

   (a) தனித்த நிகழ்தகவு (b) திரள் நிகழ்தகவு

   (c) விளிம்பு நிகழ்தகவு (d) தொடர்ச்சியான நிகழ்தகவு

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 6.indd 33 09-05-2019 14:31:45

4. $E(X) = 5$ மற்றும் $E(Y) = -2$ எனில், $E(X - Y)$ –ன் மதிப்பானது

(a) 3 (b) 5 (c) 7 (d) –2

5. இரண்டு புள்ளிகளுக்கு இடையில் எந்த விதமான மதிப்பும் அனுமானிக்கலாம் எனும் மாறியானது

(a) தனித்த சமவாய்ப்பு மாறி (b) தொடர்ச்சியான சமவாய்ப்பு மாறி

(c) தனித்த கூறுவெளி (d) சமவாய்ப்பு மாறி

6. ஒரு தொடர்ச்சியான சமவாய்ப்பு மாறியின் நிகழ்தகவு பரவலைப் குறிக்கும் ஒரு சூத்திரம் அல்லது சமன்பாடு

(a) நிகழ்தகவு பரவல் (b) பரவல் சார்பு

(c) நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு (d) கணக்கியல் எதிர்பார்த்தல்

7. ஒரு தனித்த சமவாய்ப்பு மாறி X மற்றும் X -இன் நிகழ்தகவு $p(x)$ எனில், சமவாய்ப்பு மாறியின் எதிர்பார்த்தல் மதிப்பானது

(a) $\sum f(x)$ (b) $\sum[x+f(x)]$ (c) $\sum f(x)+x$ (d) $\sum xp(x)$

8. நிகழ்தகவு பரவலில் பின்வரும் எந்த ஒன்று சாத்தியமில்லை

(a) $\sum p(x) \geq 0$ (b) $\sum p(x)=1$ (c) $\sum x\, p(x)=2$ (d) $p(x)=-0.5$

9. c ஒரு மாறிலி எனில், $E(c)$ இன் மதிப்பு

(a) 0 (b) 1 (c) $c\, f(c)$ (d) c

10. ஒரு தனித்த நிகழ்தகவுப் பரவல் இதன் மூலமும் குறிப்பிடப்படலாம்.

(a) அட்டவணை (b) வரைபடம்

(c) கணிதவியல் சமன்பாடு (d) இவை அனைத்தும்

11. ஒரு நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு இதன் மூலமும் குறிப்பிடப்படலாம்.

(a) அட்டவணை (b) வரைபடம்

(c) கணிதவியல் சமன்பாடு (d) (b) மற்றும் (c)

12. ஒரு தொடர்ச்சியான நிகழ்தகவு பரவலில் c என்பது ஒரு மாறிலி என்றால் $P(X = c)$ எப்போதும் எதற்கு சமமாக இருக்கும்

(a) பூஜ்ஜியம் (b) ஒன்று (c) எதிர்மறை (d) காணஇயலாது.

13. $E[X - E(X)]$ என்பது

(a) $E(X)$ (b) $V(X)$ (c) 0 (d) $E(X)-X$

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 6.indd 34 09-05-2019 14:31:49

14. $E\left[X-E(X)\right]^2$ என்பது

(a) $E(X)$ (b) $E(X^2)$ (c) $V(X)$ (d) $S.D(X)$

15. சமவாய்ப்பு மாறியானது குறை மதிப்புகளை பெறும் எனில், அந்த குறை மதிப்புகள் பெறுவது

(a) நேர்மறை நிகழ்தகவுகள் (b) எதிர்மறை நிகழ்தகவுகள்

(c) நிலையான நிகழ்தகவுகள் (d) சொல்வது கடினம்

16. $f(x)=2x, 0\le x\le 1$ எனில், $f(x)$ ஒரு

(a) நிகழ்தகவு பரவல் (b) நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு

(c) பரவல் சார்பு (d) தொடர்ச்சியான சமவாய்ப்பு மாறி.

17. $f(x)$ ஆனது ஒரு அடர்த்திச் சார்பு எனில், $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ ஆனது எப்போதும் இதற்கு சமமாக இருக்கும்

(a) பூஜ்யம் (b) ஒன்று (c) $E(X)$ (d) $f(x)+1$

18. ஒரு சோதனையின் அனைத்து வெளிப்பாடுகளின் பட்டியல் மற்றும் ஒவ்வொரு வெளிப்பாட்டிற்கும் தொடர்புடைய நிகழ்தகவானது இவ்வாறு அழைக்கப்படுகிறது.

(a) நிகழ்தகவு பரவல் (b) நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு

(c) பண்புக் கூறுகள் (d) பரவல் சார்பு

19. எந்த ஒன்று சமவாய்ப்பு சோதனைக்கான உதாரணம் அல்ல?

(a) ஒரு நாணயம் சுண்டப்பட்டது மற்றும் வெளிப்பாடு ஒரு தலை அல்லது ஒரு பூ ஆகும்.

(b) ஆறு பக்கமுள்ள பகடை உருட்டப்பட்டது.

(c) ஒரு மருத்துவமனையின் அவசர அறையில் அனுமதிக்கப்பட்ட சில நபர்களின் எண்ணிக்கை.

(d) குறிப்பிட்ட வருடத்திற்கு ஒரு நிறுவனத்தால் பெறப்பட்ட அனைத்து மருத்துவகாப்பீட்டு உரிமைக் கோரிக்கைகள்.

20. கூறுவெளிக்கு ஒதுக்கப்பட்டுள்ள எண்ணியல் மதிப்புகளின் தொகுப்பு

(a) சமவாய்ப்பு கூறு (b) சமவாய்ப்பு மாறி

(c) சமவாய்ப்பு எண்கள் (d) சமவாய்ப்பு சோதனை

21. முடிவுறு அல்லது கணக்கிடத்தக்க முடிவுறா எண் மதிப்புகளை பெறும் ஒரு மாறி

(a) தொடர்ச்சியானது (b) தனித்தது (c) பண்பார்ந்தது (d)இதில் எதுவும் இல்லை

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 6.indd 35 09-05-2019 14:31:51

22. ஒரு சமவாய்ப்பு மாறியின் நிகழ்தகவு சார்பு பின்வருமாறு வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது

$X=x$	-1	-2	0	1	2
$P(x)$	k	$2k$	$3k$	$4k$	$5k$

எனில், k-இன் மதிப்பானது

(a) பூஜ்யம் (b) $\frac{1}{4}$ (c) $\frac{1}{15}$ (d) ஒன்று

23. $p(x)=\frac{1}{10}$, $x = 10$ எனில், $E(X)$ மதிப்பானது.

(a) பூஜ்யம் (b) $\frac{6}{8}$ (c) 1 (d) -1

24. ஒரு தனித்த நிகழ்தகவுச் சார்பு $p(x)$ ஆனது எப்போதும்

(a) எதிர்மறை அல்லாதது (b) எதிர்மறையானது (c) ஒன்று (d) பூஜ்யம்

25. ஒரு தனித்த பரவல் சார்பில் அனைத்து நிகழ்தகவுகளின் கூட்டுத்தொகையானது

(a) பூஜ்யம் (b) ஒன்று (c) மீச்சிறுமம் (d) மீப்பெருமம்

26. ஒரு சமவாய்ப்பு மாறியின் எதிர்பார்க்கத்தக்க மதிப்பு என்பது

(a) மாறுபாடு (b) திட்டவிலக்கம் (c) சராசரி (d) இணை மாறுபாடு

27. ஒரு தனித்த நிகழ்தகவுச் சார்பு $p(x)$ எப்போதும் குறையற்றது மற்றும் அது அமையும் இடைவெளியானது

(a) 0 மற்றும் ∞ (b) 0 மற்றும் 1 (c) -1 மற்றும் $+1$ (d) $-\infty$ மற்றும் $+\infty$

28. நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு $p(x)$ –ன் மீப்பெருமதிப்பானது

(a) பூஜ்ஜியம் (b) ஒன்று (c) சராசரி (d) முடிவற்றநிலை

29. ஒரு நாட்டில் உள்ள நபர்களின் உயரத்தை கொண்டு அமையும் சமவாய்ப்பு மாறியின் வகையானது

(a) தனித்த சமவாய்ப்பு மாறி (b) தொடர்ச்சியான சமவாய்ப்பு மாறி

(c) (a) மற்றும் (b) (d) (a) யும் அல்ல (b) யும் அல்ல

30. பரவல் சார்பு $F(x)$ ஆனது

(a) $P(X=x)$ (b) $P(X\leq x)$ (c) $P(X\geq x)$ (d) இவையனைத்தும்

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 6.indd 36 09-05-2019 14:31:53

இதர கணக்குகள்

1. ஒரு சமவாய்ப்பு மாறி X - இன் நிகழ்தகவு சார்பு கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது

$$p(x)=\begin{cases}\frac{1}{4}, & x=-2\\ \frac{1}{4}, & x=0\\ \frac{1}{2}, & x=10\\ 0, & \text{மற்றெங்கிலும்}\end{cases}$$

எனில், பின்வரும் நிகழ்தகவுகளை மதிப்பிடவும்

(i) $P(X\leq 0)$ (ii) $P(X<0)$ (iii) $P(|X|\leq 2)$ மற்றும் (iv) $P(0\leq X\leq 10)$

2. ஒரு சமவாய்ப்பு மாறி X - ஆக இருக்கட்டும் அதன் திரள் பரவல் சார்பானது.

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \frac{x}{8}, & 0\leq x<1\\ \frac{1}{4}+\frac{x}{8}, & 1\leq x<2\\ \frac{3}{4}+\frac{x}{12}, & 2\leq x<3\\ 1, & 3\leq x.\end{cases}$$

எனில், (a) (i) $P(1\leq X\leq 2)$ மற்றும் (ii) $P(X=3)$ கணக்கிடவும்

(b) X ஒரு சமவாய்ப்பு மாறியா? உங்கள் பதிலை நியாயப்படுத்தவும்.

3. X இன் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு பின்வருமாறு வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது எனில்,

$$f(x)=\begin{cases}k, & 0<x\leq 4\\ 0, & \text{மற்றெங்கிலும்}\end{cases}$$

k இன் மதிப்பைக் கண்டுபிடிக்கவும், மேலும் $P(2\leq X\leq 4)$ -ஐ கண்டுபிடிக்கவும்.

4. ஒரு தனித்த சமவாய்ப்பு மாறி X இன் நிகழ்தகவு பரவல் சார்பு

$$f(x)=\begin{cases}2k, & x=1\\ 3k, & x=3\\ 4k, & x=5\\ 0, & \text{மற்றெங்கிலும்}\end{cases}$$

இங்கு k ஒரு மாறிலி எனில், (a) k –ன் மதிப்பு யாது ? மற்றும் (b) $P(X>2)$ -ஐ காண்க.

5. ஒரு தொடர்ச்சியான சமவாய்ப்பு மாறி X - இன் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 6.indd 37 09-05-2019 14:31:56

$$f(x)=\begin{cases} a+bx^2, & 0\le x\le 1 \\ 0, & \text{மற்றெங்கிலும்} \end{cases}$$

இதில் a மற்றும் b ஆகியவை மாறிலிகள் எனில்,

(i) $E(X)=\frac{3}{5}$ எனக்கொண்டு a மற்றும் b– ஐ காண்க. (ii) $Var(X)$ ஐ காண்க.

6. $E(X)=0$ எனில், $V(X)=E\left(X^2\right)$ என நிரூபிக்கவும்.

7. பின்வருமாறு செயலாற்றும் ஒரு விளையாட்டுக்கான எதிர்பார்த்தல் மதிப்பு என்ன? நான் ஒரு நாணயத்தை சுண்டுகிறேன், பூ என்றால் ₹ 2 -ஐ நீங்கள் செலுத்தவேண்டும். தலை என்றால் ₹ 1 -ஐ நீங்கள் செலுத்தவேண்டும். எந்த நிகழ்ச்சியாக இருந்தாலும் நான் உங்களுக்கு ₹ 50 -ஐ தருகிறேன்.

8. நிரூபிக்கவும்: (i) $V(aX)=a^2V(X)$ மற்றும் (ii) $V(X+b)=V(X)$

9. ஒரு சமவாய்ப்பு மாறி X- இன் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு பின்வருமாறு

$$f(x)=\begin{cases} 3x^2, & 0<x<1 \\ 0, & \text{மற்றெங்கிலும்} \end{cases}$$

எனில், $E(X)$ மற்றும் $V(3X-2)$ –ஐ காண்க.

10. தயாரிக்கப்பட்ட DVD இயக்கியில் பயன்படுத்தப்படும் மின்னணு உபகரணங்களின் முக்கிய பகுதியின் செயலிழப்பிற்கான நேரம் (ஆயிரத்தில்) அடர்த்திச் சார்பாக பெறப்பட்டது

$$f(x)=\begin{cases} 2e^{-2x}, & x>0 \\ 0, & \text{மற்றெங்கிலும்} \end{cases}$$

எனில், உபகரணப் பகுதியின் எதிர்பார்க்கத்தக்க செயல் வாழ்வை கண்டுபிடிக்கவும்.

தொகுப்புரை

- **தனித்த சமவாய்ப்பு மாறி (Discrete random variable)** சாத்தியமான மதிப்புகளால் வரையறுக்கப்பட்ட எண்களை ஏற்றுக்கொள்ளக் கூடிய ஒரு மாறி அல்லது எண்ணத்தக்க மெய்யெண்களின் முடிவிலாத் தொடரை ஒரு தனித்த சமவாய்ப்பு மாறி என அழைக்கலாம்.

- நிகழ்தகவு நிறை சார்பு **(Probability mass function)** (p.m.f.)

$$P_X(x)=\mathrm{p}(x)=\begin{cases} \mathrm{P}(\mathrm{X}=x_i)=p_i=p(x_i); & x=x_i,\ i=1,2,\ldots,n,\ldots \\ 0 & ;\ x\ne x_i \end{cases}$$

நிபந்தனைகள்:

- $p(x_i)\ge 0\ \forall i$ மற்றும் • $\sum_{i=1}^{\infty} p(x_i)=1$

- **தனித்த பரவல் சார்பு** (Discrete distribution function) (d.f.):

அனைத்து $x\in R$ -க்கு, $F_X(x)=P\left(X\le x\right)$. அதாவது $F_X(x)=\sum_{x\le x_i} p(x_i)$

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 6.indd 38 09-05-2019 14:32:00

* ஓர் இடைவெளியில் உள்ள அனைத்து மெய் மதிப்புகளையும் (முழுக்களாகவோ, பின்னங்களாகவோ) ஏற்கும் ஒரு சமவாய்ப்பு மாறி X ஆனது தொடர்ச்சியான சமவாய்ப்பு மாறி என்று அழைக்கப்படுகிறது.

* **நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு** (Probability density function (p.d.f.))

  தொகையிடக்கூடிய ஓர் இடைவெளி $[t_1, t_2]$ இல் (திறந்த அல்லது மூடிய) அமையும் ஒரு சமவாய்ப்பு மாறி X இன் நிகழ்தகவு $f_X(x)$ ஆனது நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு என்று அழைக்கப்படும்.

  $$P\left(t_1 \le X \le t_2\right) = \int_{t_1}^{t_2} f_X(x)dx\,.$$

  நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு $f_X(x)$ அல்லது சுருக்கமாக $f(x)$ பின்வரும் நிபந்தனைகளை பூர்த்தி செய்ய வேண்டும்.

  நிபந்தனைகள்:

  * $f(x) \ge 0 \,\forall\, x$
  * $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

  நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பிற்கு பதிலாகப் பயன்படுத்தப்படும் பிற பெயர்களாவன அடர்த்திச் சார்பு, தொடர்ச்சியான நிகழ்தகவு சார்பு, தொகை அடர்த்திச் சார்பு ஆகியவை ஆகும்.

* **தொடர்ச்சியான பரவல் சார்பு** (Continuous distribution function)

  தொடர்ச்சியான சமவாய்ப்பு மாறி X இன் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு $f_X(x)$, எனில் சார்பு $F_X(x)$ பின்வருமாறு வரையறுக்கப்படுகிறது.

  $$F_X(x) = P[X \le x] = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt, -\infty < x < \infty$$

  இது தொடர்ச்சியான சமவாய்ப்பு மாறி X – இன் பரவல் சார்பு $F_X(x)$ அல்லது (சில நேரங்கள்) திரள் பரவல் சார்பு என்று அழைக்கப்படுகிறது.

* திரள் பரவல் சார்பின் பண்புகள் (Properties of cumulative distribution function)

  சார்பு $F_X(x)$ அல்லது சுருக்கமமாக $F(x)$ பின்வரும் பண்புகளைப் பெற்றுள்ளது.

  (i) $0 \le F(x) \le 1, -\infty < x < \infty$

  (ii) $F(-\infty) = \lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$ மற்றும் $F(+\infty) = \lim\limits_{x \to \infty} F(x) = 1.$

  (iii) $F(\cdot)$ என்பது ஓரியல்புத் தன்மைக் கொண்ட குறையா சார்பு
  அதாவது $a < b$ க்கு $F(a) \le F(b)$

  (iv) $F(\cdot)$ என்பது வலது புறத்திலிருந்து தொடர்ச்சியானது அதாவது $\lim\limits_{h \to 0} F(x+h) = F(x).$

  (v) $F'(x) = \dfrac{d}{dx}F(x) = f(x) \ge 0$

  (vi) $F'(x) = \dfrac{d}{dx}F(x) = f(x) \Rightarrow dF(x) = f(x)dx$

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 6.indd 39 09-05-2019 14:32:04

(vii) $dF(x)$ என்பது X இன் நிகழ்தகவு வகையீடு என அறியப்படுகிறது.

(viii) $$P(a \le x \le b) = \int_a^b f(x)dx = \int_{-\infty}^b f(x)dx - \int_{-\infty}^a f(x)dx$$

$$= P(X \le b) - P(X \le a)$$

$$= F(b) - F(a)$$

- **எதிர்பார்க்கும் மதிப்பு** (Expected value)

  எதிர்பார்க்கும் மதிப்பு என்பது ஒரு சமவாய்ப்பு மாறியின் மதிப்பின் எடையிட்ட சராசரி என கருதப்படுகிறது. இங்கு நிகழ்தகவுகள் எடைகளாக இருக்கிறது.

- ஒரு தனித்த சமவாய்ப்பு மாறியின் நிகழ்தகவு நிறை சார்பு X–எனில் அதன் எதிர்பார்க்கும் மதிப்பை பின்வருமாறு வரையறுக்கலாம்.

  $E(X) = \sum_x x\, p(x)$ ஆகும்.

- ஒரு தொடர்ச்சியான சமவாய்ப்பு மாறி X மற்றும் $f(x)$ என்பது அதன் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு எனில் X -இன் எதிர்பார்க்கும் மதிப்பு

  $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)dx$ ஆகும்.

- X இன் சராசரி அல்லது எதிர்பார்த்தல் என்பது μ_X அல்லது E(X) ஆல் குறிக்கப்படுகிறது.

- மாறுபாட்டளவை (Variance)

  மாறுபாட்டு அளவை என்பது ஒரு சமவாய்ப்பு மாறியிலிருந்து அதன் சராசரியின் வர்க்க விலக்கங்களின் எடையிட்ட சராசரி ஆகும்.

- தனித்த சமவாய்ப்பு மாறி X-இன் நிகழ்தகவு நிறை சார்பு $p(x)$ எனில், $Var(X) = \sum \left[x - E(X)\right]^2 p(x)$

- தொடர்ச்சியான சமவாய்ப்பு மாறி X-இன் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு $f_X(x)$ எனில்,

  $Var(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[X - E(X)\right]^2 f_X(x)dx$ ஆகும்.

- $[X - E(X)]^2$ இன் எதிர்பார்க்கும் மதிப்பானது சமவாய்ப்பு மாறியின் மாறுபாட்டளவை என்று அழைக்கப்படுகிறது. அதாவது, $Var(X) = E\left[X - E(X)\right]^2 = E\left(X^2\right) - \left[E(X)\right]^2$

  இங்கு $E\left(X^2\right) = \begin{cases} \sum_x x^2\, p(x), & X \text{ ஒரு தனித்த சமவாய்ப்பு மாறி எனில்} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx, & X \text{ ஒரு தொடர்ச்சியான சமவாய்ப்பு மாறி எனில்} \end{cases}$

- X ஒரு சமவாய்ப்பு மாறி எனில், X–இன் திட்டவிலக்கம் σ_X எனக் குறியிடப்பட்டு $+\sqrt{Var[X]}$ என்று வரையறுக்கப்படுகிறது.

- X –இன் மாறுபாடு, $\sigma_X^{\ 2}$ அல்லது $Var(X)$ அல்லது $V(X)$ ஆல் குறிக்கப்படுகிறது.

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 6.indd 40 09-05-2019 14:32:07

- **கணக்கியல் எதிர்பார்த்தலின் பண்புகள்:**

  (i) $E(a)=a$, 'a' என்பது ஒரு மாறிலி.

  (ii) $E(aX)=aE(X)$

  (iii) $E(aX+b)=aE(X)+b$, 'a' மற்றும் 'b' ஆகியவை மாறிலிகள்.

  (iv) $X\geq 0$ எனில், $E(X)\geq 0$

  (v) $V(a)=0$

  (vi) X என்பது ஒரு சமவாய்ப்பு மாறி எனில், $\mathrm{Var}(aX+b)=a^2\,\mathrm{Var}(X)$.

- விலக்கப் பெருக்குத்தொகையின் கருத்தாக்கம்

$$\mu'_r = E\left(X^r\right)=\begin{cases}\sum_x x^r p(x) , & X \text{ ஒரு தனித்த சமவாய்ப்பு மாறி எனில்}\\ \int_{-\infty}^{\infty} x^r f(x)dx, & X \text{ ஒரு தொடர்ச்சியான சமவாய்ப்பு மாறி எனில்}\end{cases}$$

- **விலக்கப் பெருக்குத்தொகை :**

  $\mu_r = E[(X-\mu_X)^r]$

  $\mu'_1 = E(X) = \mu_X$, X–இன் சராசரி

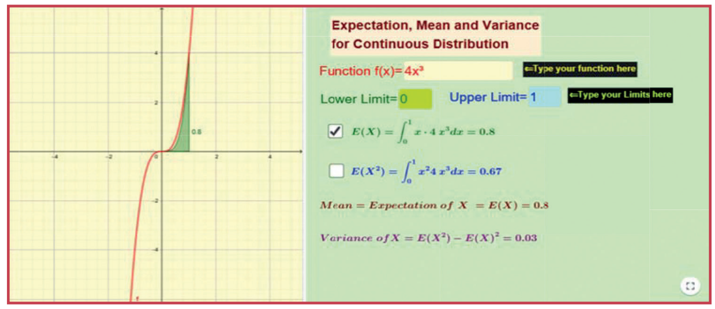
  $\mu_1 = E[X-\mu_X] = 0.$

  $\mu_2 = E[(X-\mu_X)^2]$, X–இன் மாறுபாட்டளவை

கலைச்சொற்கள் (Glossary)	
எதிர்பார்க்கத்தக்க மதிப்பு / எதிர்பார்த்தல் மதிப்பு	Expected value
எதிர்பார்த்தல்	Expectation
கணக்கியல் எதிர்பார்த்தல்	Mathematical expectation
குடுவை, கலசம்	Urn
சமவாய்ப்பு மாறி	Random variable
சராசரி	Mean
திட்ட விலக்கம், நியமச்சாய்வு	Standard deviation
திரள், குவிந்த	Cumulative
தொடர்ச்சியற்ற சமவாய்ப்பு மாறி	Discrete random variable
தொடர்ச்சியற்ற பரவல் சார்பு	Discrete distribution function
தொடர்ச்சியான சமவாய்ப்பு மாறி	Continuous random variable
தொடர்ச்சியான பரவல் சார்பு	Continuous distribution function
நடுநிலையற்ற	Biased
நடுநிலையான	Unbiased
நிகழ்தகவு நிறை சார்பு	Probability mass function
நிகழ்தகவுச் சார்பு	Probability function
நிகழ்வு, நிகழ்ச்சி	Event
நிறை சராசரி	Weighted average
பரவல் சார்பு	Distribution function
மாறுபாட்டு அளவை / பரவற்படி	Variance
முற்றிலும் குவிதல் இயல்புடைய	Absolutely Convergent
மையநிலை விலக்கப் பெருக்கம்	Central moments
விலக்கப் பெருக்கங்கள்	Moments

இணையச் செயல்பாடு

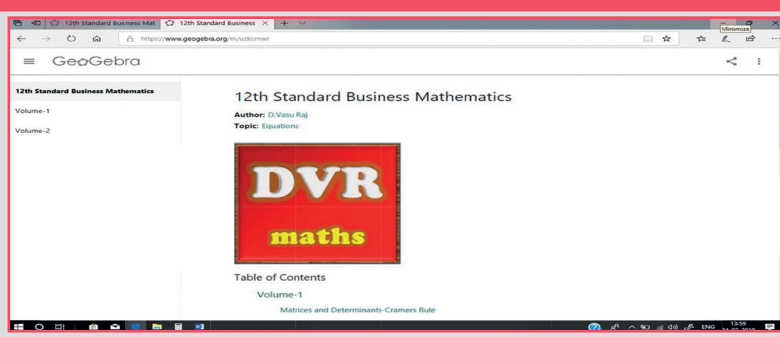
எதிர்பார்க்கப்படும்
விளைவு



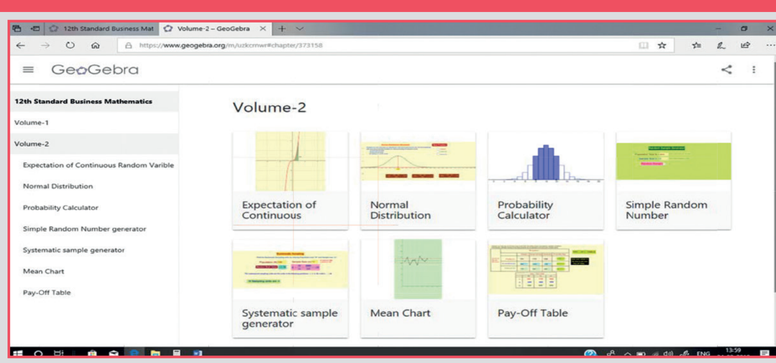
படி – 1 : கீழ்க்காணும் உரலி / விரைவுக் குறியீட்டைப் பயன்படுத்தி இச்செயல்பட்டிற்கான இணையப் பக்கத்திற்குச் செல்க. பின்பு "12th Standard Business Mathematics and Statistics" என்னும் திரையில் "Volume–2" யை தெரிவு செய்யவும்.

படி - 2 : "Expectation of continuous Random Variable" என்னும் பயிற்சித்தாளினை தெரிவு செய்துகொள்ளவும். பின்பு வலது பக்கத்தில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள பெட்டியில் Function f(X), Limits ஆகியவற்றின் மதிப்புகளை தட்டச்சு செய்தால் Mean , Variance மதிப்பினை பெறலாம்.

படி 1



படி 2



செயல்பாட்டிற்கான உரலி : **https://ggbm.at/uzkcrnwr**

அல்லது விரைவுக் குறியீடு (QR Code)

B247_12_BUS_MAT_TM

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 6.indd 42 09-05-2019 14:32:10

7 நிகழ்தகவு பரவல்கள்

ஜோகன் கார்ல் பிரெட்ரிச் காஸ்
(ஏப்ரல் 30, 1777 – பிப். 23, 1855)

அறிமுகம்

அலைவெண் பரவலானது இரண்டு வகைப்படும். அவை கண்டறிந்த அலைவெண் பரவல் மற்றும் அறிமுறை அலைவெண் பரவல் எனப்படும். சரியான தரவுகள் அல்லது பரிசோதனைகளை மையமாக கொண்ட பரவலாக இருப்பின் அதனைக் கண்டறிந்த அலைவெண் பரவல் என்று அழைக்கப்படும். மேலும் முந்தைய அனுபவம் ஏற்படுத்தும் எதிர்பார்ப்பினை சார்ந்த பரவலை அறிமுறை அலைவெண் பரவல் அல்லது நிகழ்தகவு பரவல் என அழைக்கப்படும்.இப்பகுதியில் தனித்த பரவலான ஈருறுப்புப் பரவல் பாய்சான் பரவல் மற்றும் தொடர்ச்சியான பரவலான இயல்நிலை பரவல் ஆகியவற்றை பற்றி விவாதிப்போம்.

ஜோகன் கார்ல் பிரெட்ரிச் காஸ் (1777–1855) என்பவர் ஜெர்மனியைச் சேர்ந்த கணிதவியலாளரும், இயற்பியலாளரும் ஆவார். கணிதத்திலும் அறிவியலிலும் அவர் குறிப்பிடத்தக்க கண்டுபிடிப்புகளைத் தந்துள்ளார். அவர் கணித வரலாற்றில் மிக உயர்ந்த இடத்தைப் பிடித்துள்ளார்.

கற்றல் நோக்கங்கள்

மாணவர்கள் இந்த அத்தியாத்தை கற்ற பிறகு கீழ்க்கண்ட பாடபகுதிகளை புரிந்துகொள்ள இயலும்.

- பெர்னோலி முயற்சியின் கருத்துரு.
- ஈருறுப்பு, பாய்சான் மற்றும் இயல்நிலை அடர்த்திச் சார்பு.
- ஈருறுப்பு மற்றும் பாய்சான் பரவலின் சராசரி மற்றும் மாறுபாடு.
- இயல்நிலை நிகழ்தகவு வளைவரையின் பண்புகள்.

Z4JBEG

7.1 பரவல் (Distribution)

அறிமுறைக்குறிய பரவல் இரண்டு வகைப்படும் அவை :

1. தனித்த பரவல் 2. தொடர்சியான பரவல் ஆகும்.

தனித்த பரவல்

ஈருறுப்பு மற்றும் பாய்சான் பரவல்கள், தொடர்ச்சியற்ற மாறிகளுக்கான மிகவும் பயனுள்ள அறிமுறை பரவல்களாகும்.

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 7.indd 43 09-05-2019 14:20:11

7.1.1 ஈருறுப்புப் பரவல் (Binomial distribution)

கி.பி. (பொ.ஆ.) 1700 ஆம் ஆண்டு ஜேம்ஸ் பெர்னோலி(1654 – 1705) என்பவர் ஈருறுப்புப் பரவலைக் கண்டுபிடித்தார். அவர் இறந்து 8 வருடங்கள் கழிந்த பின்பு, 1713இல் முதல் முறையாக ஈருறுப்புப் பரவல் வெளியிடப்பட்டது.

ஒரு சமவாய்ப்பு சோதனை இரண்டு விளைவுகளை ஏற்படுத்தும். அவ்விளைவானது இரு வகைப்படும் அவை வெற்றி (S) மற்றும் தோல்வி (F) ஆகும். அதனுடைய நிகழ்தகவுகள் முறையே p மற்றும் q எனக் குறிக்கப்படும். அது பெர்னோலி சோதனை (அல்லது முயற்சி) என்று அழைக்கப்படும்.

பெர்னோலி முயற்சிக்கான சில உதாரணங்கள்

(i) நாணயத்தினைச் சுண்டுதல் (தலை அல்லது பூ)

(ii) பகடை உருட்டுதல் (ஒற்றைப் படை எண் அல்லது இரட்டைப் படை எண்)

'n' சார்பற்ற பெர்னோலியின் முயற்சிகள் கொண்ட ஒரு கணத்தினைக் கொண்டு அதில் இருந்து கிடைக்கும் முடிவுகளில் p என்பது வெற்றிக்கான நிகழ்தகவு மற்றும் மாறிலியாக இருக்கும். மேலும் q என்பது தோல்வியின் நிகழ்தகவினைக் குறிப்பதாகும். சார்பற்ற சோதனையில் x என்பது வெற்றியின் நிகழ்தகவாகக் கொண்டால் அதனுடைய தொடர்சியாக $(n-x)$ எனும் தோல்வியின் நிகழ்தகவு கீழ்கண்டவாறு அமையும். ஒருங்கிணைக்கப்பட்ட தேற்றத்தின்படி ஒரு வரிசையில் SSFSFFFS….FSF என்று விவரிக்கமுடியும்

$$
\begin{aligned}
P(\text{SSFSFFFS.....FSF}) &= P(S)P(S)P(F)P(S) \ldots P(F)P(S)P(F) \\
&= p.p.q.p \ldots q.p.q \\
&= p.p.p.p \ldots q.q.q.q.q.q \ldots \\
&= \{x \text{ காரணிகள்}\} \{(n-x) \text{ காரணிகள்}\} \\
&= p^x q^{(n-x)}
\end{aligned}
$$

'n' முயற்சியில் x வெற்றி என்பது ^nC_x என்ற வழியில் கிடைக்கும் மற்றும் அதனுடைய நிகழ்தகவானது $p^x q^{n-x}$ ஆகும்.

வெற்றியின் எண்ணிக்கையினை இவ்வாறாக பெறப்படின் அதனை ஈருறுப்பு நிகழ்தகவு பரவல் மற்றும் ஈருறுப்பு பெருக்கம் $(q+p)^n$ எனப்படும்.

வரையறை 7.1

X என்ற சமவாய்ப்பு மாறி ஈருறுப்புப் பரவலைப் பின்பற்றி அதனுடைய பண்பளவைகளான n மற்றும் p ஆகியவை குறையற்ற மதிப்பினைக் கொண்டிருப்பின், அதன் நிகழ்தகவு நிறை சார்பு

$$
P(X=x) = p(x) = \begin{cases} ^nC_x p^x q^{n-x}, & x = 0,1,2,\ldots..n; q = 1-p \\ 0 & \text{மற்றபடி} \end{cases}
$$

குறிப்பு

ஈருறுப்புப் பரவலைக் கொண்டுள்ள X எனும் சமவாய்ப்பு மாறி ஈருறுப்பு மாறி எனப்படும். அதாவது $X \sim B(n,p)$ என்பது ஈருறுப்பு மாறி ஆகும்.

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 7.indd 44 09-05-2019 14:20:11

ஈருறுப்புப் பரவலைக் காணும் நிபந்தனைகளின்படி நாம் பயன்படுத்துகின்றோம் :

1. முயற்சிகளின் எண்ணிக்கை 'n' என்பது ஒரு முடிவுறு எண்ணாக இருத்தல் வேண்டும்.

2. முயற்சிகள் ஒன்றுக்கொன்று சார்பற்றவையாக இருத்தல் வேண்டும்.

3. வெற்றிக்கான நிகழ்தகவு p என்பது ஒவ்வொரு முயற்சியிலும் மாறிலியாக இருக்க வேண்டும்.

4. ஒவ்வொரு முயற்சிக்கும் இரண்டு விளைவுகளே சாத்தியமானது. அவை வெற்றி அல்லது தோல்வி மட்டுமே.

ஈருறுப்புப் பரவலின் சராசரி மற்றும் மாறுபாட்டின் நிரூபணம்:

ஈருறுப்புப் பரவலின் சராசரி $\mathrm{E(X)} = \sum_{x=0}^{n} x \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$

$$= p \sum_{x=1}^{n} x.\left(\frac{n}{x}\right)\binom{n-1}{x-1} p^{x-1} q^{n-x}$$

$$= np\,(q+p)^{n-1} \qquad [\because p+q=1]$$

$$= np$$

$$E(X) = np$$

$\therefore$ ஈருறுப்புப் பரவலின் சராசரி என்பது np ஆகும்

$$\mathrm{Var}\,(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

குறிப்பு

விலக்கப் பெருக்குத் தொகை மற்றும் சராசரியைப் பொருத்த விலக்கப் பெருக்குத் தொகை ஆகியவைகளின் மூலமாக சராசரி மற்றும் மாறுபாட்டளவையை முறையே μ_1 மற்றும் μ_2 என குறிக்கலாம்.

இங்கு, $E(X^2) = \sum_{x=0}^{n} x^2 \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$

$$= \sum_{x=0}^{n} \{x(x-1)+x\} \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

$$= \sum_{x=0}^{n} \{x(x-1)\} \binom{n}{x} p^x q^{n-x} + \sum x \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

$$= \sum_{x=2}^{n} \{x(x-1)\} \left(\frac{n(n-1)}{x(x-1)}\right) \binom{n-2}{x-2} p^{x-2+2} q^{n-x}\} + \sum x \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

$$= n(n-1)\,p^2 \left\{ \sum_{x=2}^{n} \binom{n-2}{x-2} p^{x-2} q^{n-x} \right\} + np$$

$$= n(n-1)p^2(q+p)^{n-2} + np$$

$$= n(n-1)p^2 + np$$

$\therefore$ மாறுபாடு $= E(X^2) - E(X)^2$

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 7.indd 45 09-05-2019 14:20:13

$$= n^2p^2 - np^2 + np - n^2p^2$$

$$= np(1-p) = npq$$

ஈருறுப்புப் பரவலின் சராசரி np மற்றும் மாறுபாடு npq ஆகும்.

ஈருறுப்புப் பரவலின் பண்புகள்

1. $p = q = 0.5$ என இருக்கும்பொழுது ஈருறுப்புப் பரவலானது சமச்சீரானது.
2. $p \neq q$ எனும்பொழுது சமச்சீர் அற்றதாக இருக்கும்.
3. $p < 0.5$ எனில், ஈருறுப்புப் பரவல் மிகை கோட்ட அளவையாக இருக்கும்.
4. $p > 0.5$ எனில், ஈருறுப்புப் பரவல் குறை கோட்ட அளவையாக இருக்கும்.
5. ஈருறுப்புப் பரவலில் மாறுபாட்டளவையின் மதிப்பு, சராசாரியின் மதிப்பைவிடக் குறைவானதாக இருக்கும். அதாவது குறியீட்டின்படி

   மாறுபாட்டளவை $npq = (np)q < np$

எடுத்துக்காட்டு 7.1

A என்ற விளையாட்டு வீரரும் B எனும் மற்றொரு விளையாட்டு வீரரும் கலந்து கொள்ளும் விளையாட்டில் வெற்றி பெறுவதற்கான வாய்ப்பு விகிதம் 3:2 ஆகும். ஐந்து முறை விளையாடும் விளையாட்டில் A எனும் விளையாட்டு வீரர் குறைந்த பட்சம் 3 முறை வெற்றி பெறுவதற்கான நிகழ்தகவினைக் காண்க.

தீர்வு:

p என்பது A என்பவர் வெற்றி பெறுவதற்கான நிகழ்தகவு ஆகும். ஈருறுப்புப் பரவலின் பண்பளவைகள் n மற்றும் p என்பனவாகும். இங்கு முயற்சிகளின் எண்ணிக்கை $n = 5$, $p = 3/5$, $q = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$ என்பதாகும். $(\because q = 1-p)$

5 முறை விளையாடும் விளையாட்டில் A எனும் வீரர் வெற்றி பெறுவதற்கான நிகழ்தகவு

$$P(X=x) = p(x) = 5Cx\left(\frac{3}{5}\right)^x\left(\frac{2}{5}\right)^{5-x}$$

A என்பவர் குறைந்தபட்சம் 3 முறை வெற்றி பெறுவதற்கான வாய்ப்பின் நிகழ்தகவு

$$P(X \geq 3) = P(X=3) + P(X=4) + P(X=5)$$

$$= 5C3\left(\frac{3}{5}\right)^3\left(\frac{2}{5}\right)^2 + 5C4\left(\frac{3}{5}\right)^4\left(\frac{2}{5}\right)^1 + 5C5\left(\frac{3}{5}\right)^5\left(\frac{2}{5}\right)^o$$

$$= 0.6826$$

எடுத்துக்காட்டு 7.2

பிழையற்ற ஒரு நாணயம் 6 முறை சுண்டப்படுகின்றது. அவற்றில் சரியாக 2 தலைகள் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு காண்க.

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 7.indd 46 09-05-2019 14:20:13

தீர்வு :

ஓர் ஈருறுப்புப் பரவல் சமச்சீர் பரவலாக இருப்பின் $p = q = 1/2$

சரியாக 2 தலைகள் மட்டும் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு

$$P(X = 2) = \binom{6}{x} p^x q^{n-x}$$

$$= \binom{6}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^{6-2}$$

$$= \frac{15}{64}$$

எடுத்துக்காட்டு 7.3

ஓர் ஈருறுப்புப் பரவலின் சராசரி 12 அதனுடைய திட்டவிலக்கம் 4 எனும் கூற்றினைப்பற்றி உன் கருத்தைத் தருக.

தீர்வு:

ஈருறுப்புப் பரவலின் பண்பளவைகள் n மற்றும் p ஆகும்.

ஈருறுப்புப் பரவலின் சராசரி $np = 12$

திட்டவிலக்கம் $\text{SD} = \sqrt{npq} = 4$

மாறுபாட்டளவை $= npq$

சராசரியின் மதிப்பு / மாறுபாட்டின் மதிப்பு $= \dfrac{np}{npq} = \dfrac{12}{16} = \dfrac{3}{4}$

$\Rightarrow q = 4/3 > 1$ என்பது சாத்தியமில்லை

எனவே கொடுக்கப்பட்ட கூற்று தவறானதாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 7.4

ஒரு மாணவன் பட்டம் பெறுவதற்கான நிகழ்தகவு 0.4 ஆகும். இவ்வாறாக இருப்பின் ஐந்து மாணவர்களுள் (அ) ஒருவர் மட்டும் பட்டதாரியாக (ஆ) குறைந்தபட்சம் ஒருவர் பட்டதாரியாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவை காண்க.

தீர்வு:

பட்டம் பெறுவதற்கான நிகழ்தகவு $p = 0.4$

$$\therefore \quad q = 1 - p$$

$$= 1 - 0.4$$

$$= 0.6$$

(i) ஒருவர் மட்டும் பட்டதாரியாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு $= P(X = 1) = 5C_1\,(0.4)(0.6)^4$

$$= 0.2592$$

(ii) குறைந்தபட்சம் ஒருவர் பட்டதாரியாக இருக்க நிகழ்தகவு = $P(x \geq 1)$

$= 1-P(x=0)$

$= 1-5C_0(0.4)^0(0.6)^5$

$= 1-1\times1\times0.0777$

$= 1 - 0.0777$

$= 0.92$

எடுத்துக்காட்டு 7.5

பிழையற்ற ஐந்து நாணயங்கள் ஒரே சமயத்தில் சுண்டப்படுகின்றன. அவற்றில் சரியாக 3 தலைகள் பெறுவதற்கான நிகழ்தகவு காண்க.

தீர்வு :

$n = 5$, தலை பெறுவதற்கான நிகழ்தகவு $p = q = 1/2$

X என்ற சமவாய்ப்பு மாறியானது , கிடைக்கும் தலைகளின் எண்ணிக்கையைக் குறிப்பதாகக் கொண்டால், n முயற்சியில் கிடைக்கும் வெற்றியின் நிகழ்தகவு சார்பானது $p = q = 1/2$

3 தலைகள் மட்டும் கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு $= 5C_x\left(\frac{1}{2}\right)^x\left(\frac{1}{2}\right)^{5-x}$

$= 5C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^{5-3}$

$= 5C_3\left(\frac{1}{2}\right)^5$

$= \frac{5}{16}$

எடுத்துக்காட்டு 7.6

ஈருறுப்புப் பரவலின் சராசரி மதிப்பு 20 எனவும், திட்டவிலக்கத்தின் மதிப்பானது 4 எனவும் கொண்டால், 'n' இன் மதிப்பினைக் காண்க.

தீர்வு

ஈருறுப்புப் பரவலின் பண்பளவைகள் n மற்றும் p ஆகும்.

ஈருறுப்புப் பரவலின் சராசரியின் மதிப்பு $np = 20$

திட்டவிலக்கம் $\sqrt{npq} = 4$

$\therefore \quad npq = 16$

$$\Rightarrow \frac{npq}{np} = \frac{16}{20} = \frac{4}{5}$$

$$q = \frac{4}{5}$$

$$\Rightarrow p = 1-q = 1-\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{1}{5}$$

$$np = 20$$

$$n = \frac{20}{p}$$

$$n = 100$$

எடுத்துக்காட்டு 7.7

சமவாய்ப்பு மாறி X என்பது ஈருறுப்புப் பரவலாகும். மேலும் அதன் சராசரி மதிப்பு $E(x) = 2$ மற்றும் மாறுபாட்டளவை மதிப்பு $\frac{4}{3}$ எனில் $P(x=5)$ இன் மதிப்பு காண்க.

தீர்வு:

ஈருறுப்புப் பரவலின் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு $p(x) = {}^{n}C_{x}\, p^{x}\, q^{n-x}$

ஈருறுப்புப் பரவலின் சராசரி np மற்றும் மாறுபாடு npq என்பதாகும்.

$$np = 2 \qquad \ldots (1)$$

$$npq = \frac{4}{3} \qquad \ldots (2)$$

$$\frac{(2)}{(1)} \Rightarrow \frac{\frac{4}{3}}{2} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$q = \frac{2}{3} \quad \text{மற்றும்} \quad p = 1-\frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$n = 6$$

$$P(X=5) = 6C_5 \left(\frac{1}{3}\right)^5 \left(\frac{2}{3}\right)^{6-5} = 0.0108$$

எடுத்துக்காட்டு 7.8

ஒவ்வொரு முப்பது நாள்களிலும் சராசரியாக ஒன்பது நாள்கள் மழை பொழிகின்றது. குறைந்த பட்சம் வாரத்தில் இரண்டு நாள்கள் மழை பொழிவதற்கான நிகழ்தகவினைக் காண்க.

தீர்வு :

மழை பொழிவதற்கான நிகழ்தகவு $p = \frac{9}{30} = \frac{3}{10}$ மற்றும் $q = 1-p = \frac{7}{10}$.

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 7.indd 49 09-05-2019 14:20:18

$$P(X = x) = {}^nC_x\, p^x\, q^{n-x}$$

ஒரு வாரத்திற்கு ஏழு நாள்கள் எனில் $P(X = x) = \binom{7}{x}\left(\frac{3}{10}\right)^x \left(\frac{7}{10}\right)^{7-x}$

குறைந்தபட்சம் இரண்டு நாள்கள் மழைபொழிவதற்கான நிகழ்தகவுகள்,

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2)$$

$$= 1 - [P(X = 0) + P(X = 1)]$$

$$P(X = 0) = \binom{7}{0}\left(\frac{3}{10}\right)^0 \left(\frac{7}{10}\right)^{7-0}$$

$$= 0.0823$$

மற்றும் $$P(X = 1) = \binom{7}{1}\left(\frac{3}{10}\right)\left(\frac{7}{10}\right)^{7-1}$$

$$= 0.2471$$

எனவே , தேவையான நிகழ்தகவு $= 1 - [P(x = 0) + P(x = 1)]$

$$= 1 - \{0.082 + 0.247]$$

$$= 0.6706$$

எடுத்துக்காட்டு 7.9

பலவாய்ப்பு வினாக்கள் கொண்ட தேர்வில் பத்து வினாக்களுக்கு ஆறு சரியான பதில்களைக் கணிப்பதற்கான நிகழ்தகவினைக் காண்க.

தீர்வு :

p என்பது சரியான பதிலைக் கணிப்பதாகும் $p = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad q = \frac{1}{2}$

பத்து வினாக்களில் சரியான பதிலைக் கணிப்பதற்கான நிகழ்தகவு

$$P(X = x) = p(x) = {}^nC_x\, p^x q^{n-x} \quad = \quad 10Cx\left(\frac{1}{2}\right)^x \left(\frac{1}{2}\right)^{10-x}$$

சரியான 6 பதில்களை கணிப்பதற்கான நிகழ்தகவு

$$P(X \geq 6) = P(6) + P(7) + P(8) + P(9) + P(10)$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \left[10C_6 + 10C_7 + 10C_8 + 10C_9 + 10C_{10}\right]$$

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 7.indd 50 09-05-2019 14:20:20

$$= \left[\frac{1}{1024}\right]\left[210+120+45+10+1\right]$$

$$= \frac{193}{512}$$

எடுத்துக்காட்டு 7.10

அட்டவணைப்படி பேருந்து சேவை இயக்கத்திற்கு உண்டான நிகழ்தகவு 0.8 ஆகும். அட்டவணைப்படி பத்து பேருந்து இயக்கப்படுமாயின் அதில் (அ) சரியாக ஒரு பேருந்து தாமதமாக (ஆ) குறைந்தபட்சம் ஒரு பேருந்து தாமதமாக இயக்கப்படுவதற்கான நிகழ்தகவினைக் காண்க.

தீர்வு :

பேருந்து தாமதமாக வருவதற்கான நிகழ்தகவு p எனக்குறிக்கப்படுகின்றது ,

அதன் மதிப்பு $p = 1-0.8 = 0.2$

பேருந்து சரியாக இயக்கப்படுவதற்கான நிகழ்தகவு $q = 0.8$

$n = 10$

ஈருறுப்புப் பரவல் $p(x) = 10C_x \left(0.2\right)^x \left(0.8\right)^{10-x}$

(i) சரியாக ஒரு பேருந்து தாமதமாக இயக்கப்படுவதற்கான நிகழ்தகவு

$$P(x=1) = 10C_1\, pq^9$$

$$= 10C_1 \left(0.2\right)\left(0.8\right)^9$$

(ii) குறைந்தபட்சம் ஒரு பேருந்து தாமதமாக இயக்கப்படுவதற்கான நிகழ்தகவு

= 1 – தாமதமாக எந்த ஒரு பேருந்தும் இயக்கப்படவில்லை

$$= 1 - p(x=0)$$

$$= 1- (0.8)^{10}$$

எடுத்துக்காட்டு 7.11

ஈருறுப்புப் பரவலின் சராசரி மற்றும் மாறுபாட்டளவையின் கூட்டுத் தொகை மற்றும் பெருக்குத் தொகையின் மதிப்பு முறையே $24,128$ எனில் பரவலைக் காண்க.

தீர்வு:

ஈருறுப்புப் பரவலின் சராசரி np மற்றும் மாறுபாடு npq ஆகும்.

$$np + npq = 24 \quad np(1 + q) = 24 \qquad \ldots (1)$$

$$np \times npq = 128 \quad n^2p^2q = 128 \qquad \ldots (2)$$

(1) லிருந்து $np = 24/(1+q) \Rightarrow n^2p^2 = (24/(1+q))^2$

(2) ல் பிரதியிட

$$\left(\frac{24}{1+q}\right)^2 q = 128 \qquad \Rightarrow 9q = 2(1+2q+q^2)$$

$(2q - 1)(q - 2) = 0$

இங்கு $q = \frac{1}{2}$ மற்றும் $p = \frac{1}{2}$

(1) ல் பிரதியிட, நாம் பெறுவது $n = 32$

ஈருறுப்புப் பரவல் $32C_x \left(\frac{1}{2}\right)^x \left(\frac{1}{2}\right)^{32-x}$

எடுத்துக்காட்டு 7.12

A என்ற விளையாட்டு வீரர் மற்றும் B எனும் விளையாட்டு வீரர் இருவரும் சரிசமமான மேசை பந்தாட்ட வீரர்களாவர்.

கீழ்வருவனவற்றுள் எந்த நிகழ்வுகளுக்கு அதிகமான சாத்தியக்கூறுகள் இருக்கிறது :

(a) A எனும் வீரர் B எனும் வீரரைத் தோற்கடிப்பதற்குச் சரியாக நான்கு முறை விளையாடும் விளையாட்டில் மூன்று முறை வெற்றி பெறவேண்டும் அல்லது

(b) A எனும் வீரர் B என்ற வீரரைத் தோற்கடிப்பதற்குச் சரியாக எட்டு முறை விளையாடும் விளையாட்டில் ஐந்து முறை வெற்றி பெறவேண்டும்.

தீர்வு :

$$p = q = \frac{1}{2}$$

(a) விளையாடும் விளையாட்டில் மூன்று முறை வெற்றி பெறுவதற்கான நிகழ்தகவு

$$\binom{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^{4-3}$$

$= ¼ = 25\%$

(b) A எனும் வீரர் B என்ற வீரரை தோற்கடிப்பதற்காக சரியாக எட்டு முறை விளையாடும் விளையாட்டில் ஐந்து முறை வெற்றி பெறுவதற்கான நிகழ்தகவு

$$\binom{8}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5 \left(\frac{1}{2}\right)^{8-5}$$

$= \frac{7}{32} = 21.875\%$

எனவே, முதல் நிகழ்ச்சி அதிக சாத்தியமுடையதாக உள்ளது.

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 7.indd 52 09-05-2019 14:20:22

எடுத்துக்காட்டு 7.13

ஒரு சோடி பகடை நான்கு முறை உருட்டப்படுகிறது. வெற்றி என்பது ஒரே எண்ணை குறிக்கின்றது எனில் இரண்டு முறை வெற்றி பெறுவதற்கான நிகழ்தகவினை கண்டுபிடி.

தீர்வு :

இரண்டு பகடைகள் உருட்டப்படும் போது கிடைக்கும் இரட்டைகளாவன

$$(1,1)\ (2,2)\ (3,3)\ (4,4)\ (5,5)\ (6,6)$$

இரட்டைகள் பெறுவதற்கான நிகழ்தகவு $p = 6/36 = 1/6$

ஆகையால் $q = 1 - p = 5/6$ மற்றும் $n = 4$

$$\mathrm{P}(X = x) = \binom{4}{x}\left(\frac{1}{6}\right)^{x}\left(\frac{5}{6}\right)^{4-x}$$

இரண்டு வெற்றிக்கான நிகழ்தகவு

$$\mathrm{P}(X = 2) = \binom{4}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^{2}\left(\frac{5}{6}\right)^{4-2}$$

$$= 6 \times \frac{1}{36} \times \frac{25}{36}$$

$$= \frac{25}{216}$$

பயிற்சி 7.1

1. ஈருறுப்புப் பரவல்: வரையறு.
2. பெர்னோலி முயற்சி : வரையறு
3. ஈருறுப்புப் பரவலின் விலக்கப்பெருக்குத் தொகைகளைத் தருவி
4. ஈருறுப்புப் பரவலில் பயன்படுத்தப்படும் கட்டுப்பாடுகளை எழுதுக.
5. ஈருறுப்புப் பரவலின் பண்புகளைக் குறிப்பிடுக.
6. தயாரிக்கப்படும் பொருள்களில் 5 சதவிகிதம் குறைபாடுள்ளவை. சமவாய்ப்பு முறையில் 10 பொருள்கள் தேர்ந்தெடுக்கும் பொழுது

   (i) மூன்று மட்டும் குறைபாடுள்ளதாக

   (ii) குறைந்தபட்சம் இரண்டு பொருள் குறைபாடுள்ளதாக

   (iii) நான்கு மட்டும் குறைபாடுள்ளதாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவினை காண்க.

   (iv) சராசரி மற்றும் மாறுபாட்டினைக் கண்டுபிடி.

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 7.indd 53 09-05-2019 14:20:23

7. பல்கலைக்கழகத்தில் 40 சதவீத மாணவர்கள் நூலகத்தைப் பயன்படுத்தும் பழக்கம் கொண்டவர்கள். நூலகத்தைப் பயன்படுத்தும் நோக்கத்தினை அறிய ஒன்பது மாணவர்கள் தேர்ந்தெடுக்கப்படுகிறார்கள் எனில் அதில்

   (i) ஒருவர் கூட படிக்கவில்லை

   (ii) அனைவரும் படிக்கின்றனர்

   (iii) மூன்றில் இரண்டு பங்கு மாணவர்கள் படிப்பதற்கான நிகழ்தகவினைக் காண்க.

8. மூன்று குழந்தைகள் கொண்ட ஒரு குடும்பத்தில் சரியாக இரண்டு பெண் குழந்தைகள் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவினைக் காண்க.

9. உள்ளூர் ஆலையில் உற்பத்தி செய்யப்படும் நூலில் சராசரியாக ஒவ்வொரு 6 மீட்டர் நூலிற்கும் 1.2 குறைபாடுகள் இருக்கும். இரண்டுக்கும் குறைவாக குறைபாடுகள் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவினை வரையறு.

10. ஒரு குறிப்பிட்ட இயந்திரம் வாயிலாக உற்பத்தி செய்யப்படும் திருகுமறையில் உள்ள குறைபாடுகள் 18 சதவிகிதம் எனில் சமவாய்ப்பு முறையில் தேர்ந்தெடுக்கப்படும் நான்கு திருகுமறையில்

   (i) சரியாக ஒரு குறைபாடுள்ள திருகுமறை

   (ii) குறைபாடு இல்லா திருகுமறை

   (iii) அதிகபட்சம் 2 குறைபாடுகள் உள்ள திருகுமறை இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு காண்க.

11. 28 பேராசிரியர்களைக் கொண்ட ஒரு துறையில் 18 பேராசிரியர்கள் வெளிநாட்டிலிருந்து தருவிக்கப்பட்ட மகிழுந்து (Car) மற்றும் 10 பேராசிரியர்கள் உள்ளூர் தயாரிப்பு மகிழுந்தை பயன்படுத்துகிறார்கள். சமவாய்ப்பு முறையில் தேர்ந்தெடுக்கப்படும் 5 பேராசிரியர்களில் குறைந்தபட்சம் 3 நபர்கள் வெளிநாட்டு மகிழுந்தை இயக்குவதற்கான நிகழ்தகவினை காண்க.

12. நான்கு குழந்தைகள் கொண்ட 750 குடும்பங்களில்

   (i) குறைந்தபட்சம் ஓர் ஆண் குழந்தை

   (ii) அதிகபட்சம் இரண்டு பெண் குழந்தைகள்

   (iii) மற்றும் இரு பாலின குழந்தைகளும் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவினை காண்க.

   (ஆண் மற்றும் பெண் குழந்தைகளின் பிறப்பு சமமான நிகழ்தகவாக எடுத்துக்கொள்க).

13. வியாபார நிமித்தமாக பயணிக்கும் 40 சதவீத பயணிகள் தங்களுடன் மடிக்கணினி எடுத்துச் செல்லும் பழக்கம் உடையவர்கள். அவர்களுள் 15 நபர்களை கூறு எடுத்தால்

   (i) 3 நபர்கள் மடிக்கணினி வைத்திருத்தல்

   (ii) 12 நபர்களிடத்தில் மடிக்கணினி இல்லை

   (iii) குறைந்தபட்சம் 3 நபர்களாவது மடிக்கணினி உபயோகப்படுத்துவதற்கான நிகழ்தகவினை கணக்கிடுக.

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 7.indd 54 09-05-2019 15:16:09

14. இரண்டு சீரான பகடைகள் ஒரே சமயத்தில் 4 முறை உருட்டப்படுகின்றன. அதன் விளைவு இரட்டைத் தன்மையாக இருப்பின் அதனை வெற்றி என்று கருத்தில் கொண்டு 2 வெற்றி வருவதற்கான நிகழ்தகவினை கண்டுபிடி.

15. ஈருறுப்புப் பரவலின் சராசரி 5 மற்றும் திட்டவிலக்கமானது 2 எனில், பரவலை தீர்மானிக்கவும்.

16. ஈருறுப்புப் பரவலின் சராசரி 4 மற்றும் திட்டவிலக்கமானது 2 ஆக இருப்பின் பரவலை தீர்மானித்து மேலும் $P(x=15)$ கண்டுபிடி.

17. ஒரு மருந்து 100 நோயாளிகளில் மூன்று நோயாளிகளுக்கு தீவிர பக்க விளைவுகளை ஏற்படுத்துகிறது என அனுமானம் செய்க. சமவாய்ப்பு முறையில் தேர்ந்தெடுக்கும் 10 நோயாளிகளில் அதிகபட்சம் ஒருவருக்கு பக்க விளைவினை ஏற்படுத்துவதற்கான நிகழ்தகவினை கணக்கிடுக.

18. வைட்டமின் A குறைபாடுள்ள 5 எலிகளை ஒரே கூண்டில் இருந்து எடுக்கப்பட்டு அதற்கு அளவாக கேரட் ஊட்டப்படுகிறது. நோயிலிருந்து மீண்டு வருவது என்பது நேர்மறை எதிர்வினையாகும். அதனுடைய நிகழ்தகவானது 0.73 ஆகும். அவ்வாறெனில் குறைந்தபட்சம் மூன்று எலிகள் குறைபாடுகளில் இருந்து மீண்டு வருவதற்கான நிகழ்தகவினை கூறுக.

19. ஒரு சோதனையில் வெற்றிக்காண வாய்ப்பு தோல்விக்கான வாய்ப்பைபோல் இருமடங்கு எனில் அடுத்து வரும் ஐந்து முயற்சிகளில் (i) சரியாக மூன்று வெற்றிகள் (ii) குறைந்தபட்சம் மூன்று வெற்றிகள் பெறுவதற்கான நிகழ்தகவு என்ன

7.1.2 பாய்சான் பரவல் (Poisson Distribution)

பிரெஞ்சு கணித மேதையான சைமன் டெனிஸ் பாய்சான் எனபவர் 1837 ஆம் வருடம் பாய்சான் பரவலை வரையறுத்தார். ஈருறுப்புப் பரவலில் வரும் 'n'இன் மதிப்பு பெரியதாக இருக்குமெனில் நிகழ்தகவு கணக்கீடு செய்வது மிகவும் சிக்கலாக இருக்கும். இம்மாதிரியான சூழலில் ஈருறுப்புப் பரவல் நிகழ்தகவுகளில் ஓர் எளிய உத்தேச கணக்கீட்டினைப் பயன்படுத்தலாம். அந்த ஈருறுப்புப் பரவலின் உத்தேசக் கணக்கீடு என்பது 'n' பெரிதாக மற்றும் p என்பது பூஜ்யத்திற்கு நெருக்கமாக இருப்பதாக நிறுவினார். அதனைப் பாய்சான் பரவல் என்று அழைக்கின்றோம்.

பாய்சான் பரவலின் நிகழ்வுகள் திட்டவட்டமான எண்ணிக்கையினைக் கொண்ட சோதனையில் நடைபெறாது. அரிதான சோதனையில் நிகழக்கூடியதாகும். மேலும், கீழ்க்காணும் எடுத்துக்காட்டுகள் சிலவற்றினை ஆய்வு செய்யலாம் :

(i) ஒரு கன செ.மீ இல் உள்ள நுண்ணுயிர்களின் எண்ணிக்கை.

(ii) தட்டச்சு செய்யப்பட்ட ஒரு பக்கத்தில் உள்ள தட்டச்சுப்பிழைகளின் எண்ணிக்கை.

(iii) ஒரு நொடிக்குள் கதிரியக்கப் பொருளிலிருந்து வெளிப்படுகின்ற ஆல்ஃபா துகள்களின் எண்ணிக்கை.

(iv) ஒரு நாளில் குறிப்பிட்ட இடைவெளி நேரத்தில் கடக்கும் பேருந்துகளின் எண்ணிக்கை.

(v) ஒரு வினாடியில் ஏற்படும் மின்னலின் எண்ணிக்கை.

பாய்சான் பரவல் ஈருறுப்புப் பரவலின் எல்லையாக இருப்பதற்கான நிபந்தனைகள்

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 7.indd 55 09-05-2019 14:20:23

(i) முயற்சிகளின் எண்ணிக்கை வரையறுக்க இயலாத நிலையில் அதிகமாக இருக்கும். அதாவது $n \to \infty$.

(ii) ஒவ்வொரு முயற்சியிலும் வெற்றிக்கான நிகழ்தகவு மிகவும் சிறியதாக இருக்கும். அதாவது $p \to 0$

(iii) $np = \lambda$ இது ஒரு முடிவுறு எண். $p = \frac{\lambda}{n}$, $q = 1 - \left(\frac{\lambda}{n}\right)$ மேலும் λ என்பது நேர்மறை மெய்யெண் ஆகும்.

வரையறை 7.2

X என்ற சமவாய்ப்பு மாறி பாய்சான் பரவலை பின்பற்றி அதனுடைய பண்பளவையான λ என்பது குறையற்ற மதிப்பினைப் பெற்றிருப்பின், அதன் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பினை பின்வருமாறு வரையறை செய்யலாம்.

$$P(x,\lambda) = P(X=x) = \begin{cases} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}, & x = 0,1,2\ldots\ldots;\lambda > 0 \\ 0 & \text{மற்றபடி} \end{cases}$$

பாய்சான் பரவலின் சராசரி மற்றும் மாறுபாட்டினை வருவித்தல்

சராசரி $E(X) = \sum_{x=0}^{\infty} x\, p(x,\lambda)$

$$= \sum_{x=0}^{\infty} x \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$$

$$= \lambda e^{-\lambda}\left\{\sum_{x=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!}\right)\right\}$$

$$= \lambda e^{-\lambda}(1 + \lambda + \lambda^2/2! + \ldots\ldots)$$

$$= \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda}$$

$$= \lambda$$

மாறுபாட்டளவை $(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$

$$E(X^2) = \sum_{x=0}^{\infty} x^2 p(x,\lambda)$$

$$= \sum_{x=0}^{\infty} x^2 p(x,\lambda)$$

$$= \sum_{x=0}^{\infty} \{x(x-1) + x\}\, p(x,\lambda)$$

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 7.indd 56 09-05-2019 14:20:25

$$= \sum_{x=0}^{\infty} \{x(x-1)+x\} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$$

$$= e^{-\lambda}\sum x(x-1) \frac{\lambda^x}{x!} + \sum x\, e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}$$

$$= \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{x=2}^{\infty} \frac{\lambda^{x-2}}{(x-2)!} + \lambda$$

$$= \lambda^2 e^{-\lambda} e^{\lambda} + \lambda = \lambda^2 + \lambda$$

மாறுபாட்டளவை $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$

$$= \lambda^2 + \lambda - (\lambda)^2$$

$$= \lambda$$

பாய்சான் பரவலின் பண்பு :

1. சராசரி மற்றும் மாறுபாட்டளவை சமமாக உள்ள ஒரே பரவல், பாய்சான் பரவல் மட்டுமே.

எடுத்துக்காட்டு 7.14

பாய்சான் பரவலின் முதல் நிகழ்தகவு மதிப்பு 0.2725 எனில் அதற்கு அடுத்த நிகழ்தகவு மதிப்பினைக் காண்க.

தீர்வு :

$p(0) = 0.2725$ என கொடுக்கப்பட்டுள்ளது

$$\frac{e^{-\lambda}\lambda^0}{0!} = 0.2725$$

$$\Rightarrow e^{-\lambda} = 0.2725$$

$\lambda = 1.3$ (அடுக்கு அட்டவணையை பயன்படுத்தி)

$$\therefore p(X=1) = e^{-1.3}(1.3)/1!$$

$$= e^{-1.3}(1.3)$$

$$= 0.2725 \text{ x } 1.3$$

$$= 0.3543$$

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 7.indd 57 09-05-2019 14:20:27

எடுத்துக்காட்டு 7.15

520 பக்கங்களைக் கொண்ட புத்தகத்தில், 390 தட்டச்சுப் பிழைகள் உள்ளன. பாய்சான் வழியினை அனுமானித்து சமவாய்ப்பு முறையில் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட 5 பக்கங்களில் பிழையே இல்லாமல் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு காண்க.

தீர்வு :

புத்தகத்தில் சராசரியாக ஒரு பக்கத்திற்கு ஏற்படும் தட்டச்சுப் பிழைகள்

$$\lambda = (390/520) = 0.75.$$

பாய்சான் நிகழ்தகவு விதிப்படி, பக்கத்திற்கு x பிழைக்கான நிகழ்தகவு

$$P(X=x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!} = e^{-0.75}\frac{(0.75)^{x}}{x!}, \; x = 0,1,2,3\ldots\ldots$$

5 பக்கங்களில் பிழையே இல்லாமல் இருப்பதற்குத் தேவையான நிகழ்தகவு :

$$[P(X=0)]^{5} = \left(e^{-0.75}\right)^{5} = e^{-3.75}$$

எடுத்துக்காட்டு 7.16

ஒரு காப்பீட்டு நிறுவனம், 0.1 சதவீத மக்கள் மட்டுமே ஒவ்வொரு வருடமும் விபத்துக்கு உட்படுகிறார்கள் என்பதைக் கணிக்கின்றனர். காப்பீடு செய்துள்ள 10,000 பாலிசிதாரர்களை சம வாய்ப்பு முறையில் தேர்ந்தெடுக்கும் பட்சத்தில் அடுத்து வரக்கூடிய ஆண்டில் 5–க்கு மிகாமல் வாடிக்கையாளர்கள் விபத்துக்குள்ளாவதற்கான நிகழ்தகவு என்ன? ($e^{-10} = .000045$)

தீர்வு :

p = வாடிக்கையாளர் ஒருவர் ஒரு வருடத்தில் விபத்துக்குள்ளாவதற்கான நிகழ்தகவு

$$= 0.1/100 = 1/1000$$

இங்கு $n = 10{,}000$

ஆகையால், $\lambda = np = 10000\left(\frac{1}{1000}\right) = 10$

5-க்கு மிகாமல் வாடிக்கையாளர்கள் விபத்துள்ளாவதற்கான நிகழ்தகவு

$$P(X \le 5) = P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)$$

$$= e^{-10}\left[\,1+\frac{10}{1!}+\frac{10^{2}}{2!}+\frac{10^{3}}{3!}+\frac{10^{4}}{4!}+\frac{10^{5}}{5!}\,\right]$$

$$= 0.06651$$

எடுத்துக்காட்டு 7.17

1/5 சதவீத பிளேடுகள் பழுதானவை என்று பிளேடுகளின் உற்பத்தியாளர் தெரிவிக்கிறார். ஒவ்வொரு அட்டை பெட்டியிலும் 10 பிளேடு அடைத்து விற்பனைக்கு வருகிறது. சரக்குப் பெட்டியில் இருக்கும் 1,00,000 பாக்கெட்டுகளை பாய்சான் பரவலைக் கொண்டு தோராயமாக எத்தனை பாக்கெட்டுகள்

(i) பழுதற்ற பிளேடுகள்

(ii) பழுதுள்ள ஒரு பிளேடு

(iii) பழுதுள்ள இரண்டு பிளேடுகள்

கொண்டிருக்கும் என்பதனை கணக்கிடுக.

$(e^{-0.2} = .9802)$

தீர்வு :

$P = 1/5/100 = 1/500 = 0.002 \quad n = 10 \quad . \quad \lambda = np = 0.02$

$$p(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} = \frac{e^{-0.02}(0.02)^x}{x!}$$

(i) பழுதற்ற பிளேடுகளைக் கொண்ட அட்டை பெட்டிகளின் எண்ணிக்கை

$= N \times p(o) = 1,00,000 \times e^{-0.02}$

$= 98020$

(ii) பழுதுள்ள ஒரு பிளேடு கொண்ட அட்டைப் பெட்டிகளின் எண்ணிக்கை

$= N \times p(1) = 1,00,000 \times 0.9802 \times 0.02$

$= 1960$

(iii) பழுதற்ற இரண்டு பிளேடுகள் கொண்ட பெட்டிகளின் எண்ணிக்கை

$= N \times p(2) = 1,00,0007 \text{ x } .0002$

$= 20$

எடுத்துக்காட்டு 7.18

ஒரு மனிதனுக்கு ஊசியின் மூலமாக செலுத்தப்படும் மருந்து எதிர் விளைவினை ஏற்படுத்துவதற்கான நிகழ்தகவு 0.001 ஆகும். 2000 நபர்களில் (அ) மூன்று நபருக்கு மட்டும் (ஆ) இரண்டு நபருக்குக் குறைவில்லாமல் மாறுபட்ட விளைவுகள் ஏற்படுவதற்கான நிகழ்தகவினைக் கணக்கிடுக.

தீர்வு :

ஊசிமூலம் மருந்து எடுத்துக்கொள்ளும் 2000 தனிநபர்களைக் கருத்தில் கொள்க. $n = 2000$

$x = 0,1,2,\ldots 2000$

தனிநபர் எதிர்விளைவால் பாதிக்கப்படுவதற்கான நிகழ்தகவு p என்க. $p = 0.001$

$$\therefore\ q = 1 - p = 1 - 0.001 = 0.999$$

இங்கு n பெரியதாகவும் p சிறியதாகவும் உள்ளதால் இது பாய்சான் பரவலுக்கு உட்பட்டுள்ளது.

$$\lambda = np = 2000 \times 0.001 = 2$$

(i) 2000, பேரில் சரியாக, 3 நபர்கள் எதிர்விளைவால் பாதிக்கப்படுவதற்கான நிகழ்தகவு

$$P(X=3) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!} = \frac{e^{-2}2^{3}}{3!} = 0.1804$$

(ii) 2000, பேரில் 2 தனி நபர்களுக்கு மேல் எதிர்விளைவால் பாதிக்கப்படுவதற்கான நிகழ்தகவு

$$= P(X > 2)$$

$$= 1 - [(P(X \leq 2)]$$

$$= 1 - [P(x=0) + P(x=1) + P(x=2)]$$

$$= 1 - \left[\frac{e^{-2}2^{0}}{0!} + \frac{e^{-2}2^{1}}{1!} + \frac{e^{-2}2^{2}}{2!}\right]$$

$$= 1 - e^{-2}\left(\frac{2^{0}}{0!} + \frac{2^{1}}{1!} + \frac{2^{2}}{2!}\right)$$

$$= 0.323$$

எடுத்துக்காட்டு 7.19

இரத்தத்தில் சிவப்பு அணுக்களின் எண்ணிக்கையினைக் கணக்கிடுவதற்கு ஒரு சதுர கட்டத்தில் ஒரு துளி இரத்த மாதிரி சீராக பரப்பப்படுகிறது. நுண்நோக்கியின் வழியாக கண்காணித்ததில் சராசரியாக 8 சிவப்பு அணுக்கள் ஒரு சதுரத்தில் இருப்பதாக உறுதி செய்யபபடுகிறது. அவ்வாறு இருப்பின் சரியாக 5 சிவப்பு அணுக்கள் ஒரு சதுரத்தில் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு என்ன?

தீர்வு :

இரத்த சிவப்பு அணுக்களின் எண்ணிக்கை சமவாய்ப்பு மாறி X என்க.

சராசரி $\lambda = 8$ சிவப்பு அணுக்கள் / ஒரு சதுரத்திற்கு

P (ஒரு சதுரத்தில் சரியாக 5 சிவப்பணுக்கள்) $= P(X=5) = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!} = \dfrac{e^{-8}8^{5}}{5!}$

$$= \frac{0.000335 \times 32768}{120}$$

$$= 0.0916$$

ஒரு சதுரத்தில் சரியாக 5 சிவப்பணுக்கள் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு 0.0916. அதாவது ஒரு சதுரத்தில் சரியாக 5 சிவப்பணுக்கள் இருப்பதற்கான வாய்ப்பு 9.16% ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 7.20

இரட்டை குழந்தைகள் பிறப்பதற்கான வாய்ப்பு 80 பிறப்புகளில் ஒன்று எனக்கொண்டால், ஒரு நாளில் பிறக்கும் 30 குழந்தைகளில் இரண்டு அல்லது அதற்கும் மேற்பட்ட இரட்டையர் பிறப்பதற்கான நிகழ்தகவினைக் கணக்கிடுக.

தீர்வு :

P (இரட்டை குழந்தைகள்) $= p = 1/80 = 0.0125$ மற்றும் $n = 30$

$$\lambda = np = 30 \times 0.0125 = 0.375$$

X ஆனது பாய்சான் பரவலை பின்பற்றுகிறது

$$p(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}$$

$$P(2 \text{ அல்லது அதற்கு மேல்}) = 1 - [p(x=0) + p(x=1)] = 1 - \left[\frac{e^{-0.375}(0.375)^{0}}{0!} + \frac{e^{-0.375}(0.375)^{1}}{1!}\right]$$

$$= 1 - e^{-0.375}\ [1+0.375]$$

$$= 1 - (0.6873 \times 1.375)$$

$$= 0.055$$

பயிற்சி 7.2

1. வரையறு: பாய்சான் பரவல்.
2. பாய்சான் பரவலுக்கான இரு எடுத்துக்காட்டுகளை எழுதுக.
3. பாய்சான் பரவலானது ஈருறுப்புப் பரவலின் எல்லையாக அமைவதற்கான கட்டுப்பாடுகளை எழுதுக.
4. பாய்சான் பரவலின் சராசரி மற்றும் மாறுபாட்டை வருவி.
5. பாய்சான் பரவலின் பண்புகளைக் குறிப்பிடுக.
6. நோய் தாக்கத்தினால் இறப்பின் விகிதம் 1000 பேருக்கு 7 நபர் வீதம் என்று இருக்குமானால் 400 நபருக்கு 2 நபர் வீதம் நோயின் தாக்கம் ஏற்படுத்தும் இறப்பிற்கான நிகழ்தகவினைக் காண்க ($e^{-2.8} = 0.06$)
7. ஒரு நிறுவன தயாரிப்புகளில் 5% குறைபாடுள்ள மின்விளக்குகள் தயாரிக்கப்படுவதாக அறிகிறார்கள். பாய்சான் பரவலை பயன்படுத்தி, 120 மின்விளக்குகள் கொண்ட கூறு தொகுதியில் குறைபாடற்ற மின்விளக்குகள் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவினைக் கணக்கிடுக.
8. மகிழுந்துகளை வாடகைக்கு அனுப்பும் ஒரு நிறுவனம், இரண்டு மகிழுந்துகளைக் கொண்டுள்ளது. ஒவ்வொரு நாள் வாடகைக்கும் தேவைப்படும் மகிழுந்து பாய்சான் பரவலைப் பின்பற்றுகின்றது. அதன் சராசரி 1.5 என்று கணக்கிடப்பட்டுள்ளது எனில்,

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 7.indd 61 09-05-2019 14:20:30

(i) இரண்டு மகிழுந்துகளும் தேவை இல்லை.

(ii) சில தேவைகள் ஏற்க்கப்படவில்லை என்ற நிலைகளில் நாள்களின் விகிதத்தை கணக்கிடுக.

9. ஒரு நிறுவனதிற்கு காலை 10.00 மணியில் இருந்து மதியம் 2.30 மணி வரை வரும் தொலைபேசி அழைப்புகளின் எண்ணிக்கை சராசரியாக ஒரு நிமிடத்திற்கு 2.5 ஆகும். ஒரு குறிப்பிட்ட நிமிடத்தில் (i) அழைப்புகள் இல்லை (ii) சரியாக 3 அழைப்புகள் மட்டும் (iii) குறைந்தபட்சம் 5 அழைப்புகள் வருவதற்கான நிகழ்தகவினை காண்க.

10. ஒரு நகரத்தில் நடக்கும் சாலை விபத்துகளின் எண்ணிக்கை பாய்சான் பரவலைக் கொண்டுள்ளது. விபத்துக்களின் சராசரி 4 ஆகும். நூறு நாள்களில் (i) விபத்து இல்லாத நாள்கள் (ii) குறைந்தபட்சம் 2 விபத்துக்கள் ஏற்படும் நாள்கள் (iii) அதிக பட்சம் 3 விபத்துக்கள் ஏற்படும் நாள்கள் ஆகியவற்றுக்கான நிகழ்தகவினைக் கணக்கிடுக.

11. ஒரு தொழிற்சாலையில் நடக்கும் அபாயகரமான விபத்துகளின் எண்ணிக்கை 1/1200 ஆகும். 300 தொழிலாளர்கள் வேலை செய்யும் தொழிற்சாலையில் குறைந்தபட்சம் 2 அபாயகரமான விபத்து ஒரு வருடத்தில் ஏற்படுவதற்கான நிகழ்தகவினைக் கூறுக.

12. வங்கிக்கு வரும் வாடிக்கையாளர்களின் எண்ணிக்கை சராசரியாக ஒரு நிமிடத்திற்கு இரண்டு ஆகும். ஒரு நிமிடத்தில் (i) வாடிக்கையாளர் எவரும் வரவில்லை (ii) 3 அல்லது அதற்கு மேல் வாடிக்கையாளர் வருவதற்கான நிகழ்தகவினைக் கண்டறிக.

தொடர்ச்சியான பரவல்

தனித்த மாறிப் பரவல்களான ஈருறுப்புப் பரவல் மற்றும் பாய்சான் பரவல் இரண்டையும் இதற்கு முந்தைய பகுதியில் நாம் விளக்கமாக அறிந்தோம். இப்பகுதியில் முக்கியமான தொடர் மாறிப் பரவலைப் பற்றி காண்போம். இத்தொடர் மாறிப்பரவலை இயல்நிலை நிகழ்தகவுப் பரவல் அல்லது இயல்நிலைப் பரவல் என்று அழைக்கிறோம். புள்ளியியல் கோட்பாடுகளில் முக்கியப்பங்கு வகிப்பதால் இப்பரவல் மிகவும் முக்கியத்துவம் வாய்ந்தது. முதன்முதலாக 1733 இல் ஆங்கில கணிதமேதை டி மாய்வர் என்பவர் ஈருறுப்புப் பரவலின் எல்லை நிலையாகக் கொண்ட இயல்நிலைப் பரவலைக் கண்டுபிடித்தார். பின்னர் பிரஞ்சுக் கணிதமேதை லாப்லாஸ் (1749 – 1827) எனபவரும் கார்ல் பிரிடெரிக் காஸியன் (1827 -1855) என்பவரும் சேர்ந்து உருவாக்கி இயல்நிலைப் பரவல் என்று அழைத்தனர்.

7.1.3 இயல்நிலைப் பரவல்

வரையறை 7.3

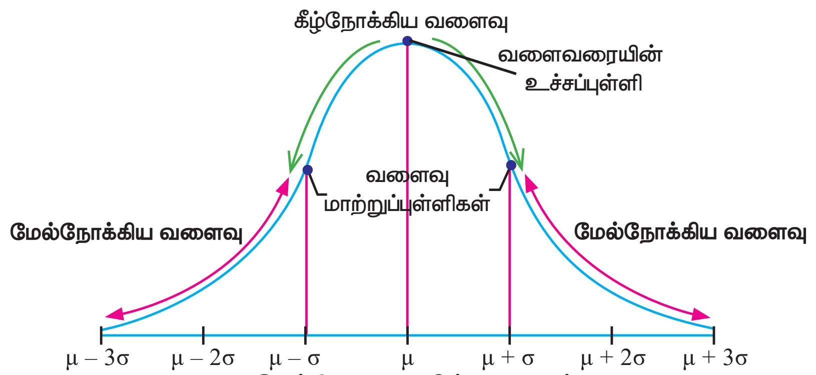
சராசரி μ மற்றும் மாறுபாட்டளவை σ^2 ஆகியவற்றைப் பண்பளவைகளாகக் கொண்ட x என்ற சமவாய்ப்பு மாறி இயல்நிலைப் பரவலைப் பெற்றிருக்கிறது எனில் அதன் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு

$$f(x:\mu,\sigma)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right\}\quad \begin{array}{c}-\infty<x<\infty,\\ -\infty<\mu<\infty,\\ \sigma>0\end{array}$$

என்று வரையறுக்கப்படுகிறது.

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 7.indd 62 09-05-2019 14:20:31

இயல்நிலைப் பரவலின் வரைபடம் பின்வருமாறு :



இயல்நிலை பரவலின் வரைபடம்

படம் 7.1

ஆகையால் இயல்நிலை வளைவரையானது மணிவடிவ வளைவரை என அழைக்கப்படுகிறது.

(i) முயற்சிகளின் எண்ணிக்கை 'n' ஆனது மிகப்பெரிய முடிவறா எண்ணாக $(n \to \infty)$ அமைகிறது.

(ii) p, q ஆகியவை மிகச்சிறியவை அல்ல.

வரைபடம் வாயிலாகக் குறிக்கப்படும் இயல்நிலைப் பரவலானது இருபுறமும் சமச்சீர் வடிவம் பெற்று இயல்நிலை நிகழ்தகவு வளைவரை என்றழைக்கப்படும். மேலும் X – அச்சில் வளைவரையானது தொலைத் தொடுகோடாக இருபுறமும் வலது மற்றும் இடது புறமாகச் செல்லும்.

இயல்நிலை நிகழ்தகவுப் பரவல் மற்றும் இயல்நிலை நிகழ்தகவு வளைவரை ஆகியவற்றின் முதன்மை சிறப்பியல்புகள் அல்லது பண்புகள்

இயல்நிலை நிகழ்தகவு வளைவரை அதன் சராசரி μ மற்றும் திட்டவிலக்கம் σ கீழ்க்காணும் பண்புகளைப் பெற்றிருக்கின்றது :

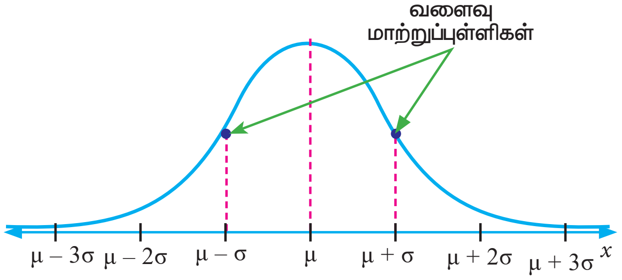
(i) இயல்நிலைப் பரவலின் வளைவரையானது மணி வடிவில் உள்ளது மேலும் $x=\mu$ என்பதனைப் பொருத்து சமச்சீரானது.

(ii) பரவலின் சராசரி, இடைநிலை மற்றும் முகடு மூன்றும் ஒன்றுகின்றன.

(iii) x – அச்சானது வளைவரைக்கு ஒரு தொலைத் தொடுகோடாக அமைகிறது. (வளைவரையானது X – அச்சினைத் தொடர்ந்து சென்றாலும் X – அச்சினைத் தொடாமல் இணையாகச் செல்லும்)

(iv) $f(x)$ என்பது நிகழ்தகவு சார்பாக உள்ளதால் வளைவரையின் எப்பகுதியும் x–அச்சின் கீழ்ப்புறம் அமையாது.

(v) வளைவரையின் வளைவு மாற்றுப் புள்ளிகள் $x = \mu \pm \sigma$ இல் அமையும்.



படம் 7.3

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 7.indd 63 09-05-2019 14:20:31

(vi) இயல்நிலைப் பரவலின் வளைவரைக்கு ஒற்றை உயரம், அதாவது அந்த புள்ளியில் ஒரு முகடு மட்டும் இருக்கும்.

(vii) x இன் மதிப்பு எண்ணளவில் அதிகரிக்கும்போது $f(x)$ ஆனது வேகமாகக் குறைந்து $x = \mu$ இல் மீப்பெரு நிகழ்தகவு நிகழ்ந்து நிலைத் தூரம் (உயரம்) $[p(x)]\max = 1/\sigma\sqrt{2\pi}$ கிடைக்கிறது.

(i) இயல்நிலை வளைவரையின் கீழ் அமையும் மொத்த பரப்பு ஒன்று மற்றும் இயல்நிலை வளைவரையின் கீழ் அமையும் சதவீத பங்கீடு கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

(a) $\mu - \sigma$ மற்றும் $\mu + \sigma$ –க்கு இடையில் அமையும் பரப்பு 68.27% (தோராயமாக)

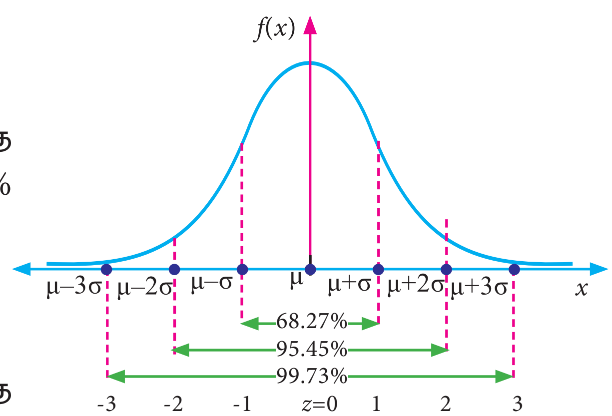
$$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) = 0.6826$$

(b) $\mu - 2\sigma$ மற்றும் $\mu + 2\sigma$ –க்கு இடையில் அமையும் பரப்பு 95.5% (தோராயமாக)

$$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) = 0.9544$$

(c) $\mu - 3\sigma$ மற்றும் $\mu + 3\sigma$ –க்கு இடையில் அமையும் பரப்பு 99.7% (தோராயமாக)

$$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) = 0.9973$$



படம் 7.4

திட்ட இயல்நிலை பரவல்

சமவாய்ப்பு மாறி $Z = (X-\mu)/\sigma$ என்பது திட்ட இயல்நிலை பரவலைப் பின்பற்றுமானால் Z என்பது திட்ட இயல்நிலை மாறி என அழைக்கப்படுகிறது. மேலும் அதனுடைய சராசரி 0 மற்றும் திட்டவிலக்கம் 1 ஆகும் அதாவது $Z \sim N(0,1)$ அதன் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு :

$$(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} \quad -\infty < z < \infty$$

1. திட்ட இயல்நிலை வளைவரையின் கீழ் அமையும் பரப்பு ஒன்று.

2. திட்ட இயல்நிலை வளைவரையின் கீழ் $z = -1$ இலிருந்து $z = 1$ வரை அமையும் பரப்பு 68.26% ஆகும்.

   $Z = -2$ இலிருந்து $Z = 2$ வரை அமையும் பரப்பு 95.44% ஆகும்.

   $Z = -3$ இலிருந்து $Z = 3$ வரை அமையும் பரப்பு 99.74% ஆகும்.

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 7.indd 64 09-05-2019 14:20:31

எடுத்துக்காட்டு 7.21

கீழ்க்காணும் இயல்நிலை மாறியின் நிகழ்தகவினைக் காண்க.

(i) $Z = 1.09$ க்கு வலப்புறம் அமையும் பரப்பு காண்க

(ii) $Z = -1.65$ க்கு இடப்புறம் அமையும் பரப்பைக் காண்க.

(iii) திட்ட இயல்நிலை மாறியின் மதிப்பு $Z = -1.00$ மற்றும் $Z = 1.96$ க்கு இடைப்பட்ட பரப்பைக் காண்க.

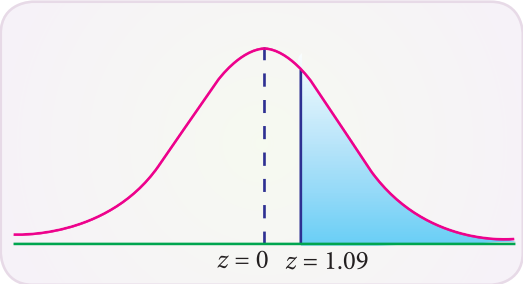
(iv) திட்ட இயல்நிலை மாறியின் மதிப்பு $Z = -1.00$ மற்றும் $Z = 1.96$ க்கு இடைப்பட்ட பரப்பைக் காண்க

(v) திட்ட இயல்நிலை மாறியின் மதிப்பு $Z = 1.25$ மற்றும் $Z = 2.75$ க்கு இடைப்பட்ட பரப்பைக் காண்க.

தீர்வு :

(i) 1.09 க்கு மேலாக

வளைவரையின் கீழ் அமையும் மொத்த பரப்பு 1 என்பதால் Z = 0 –க்கு வலது புறம் அமையும் பரப்பு 0.5 (வளைவரை சமச்சீரானது)



படம் 7.5

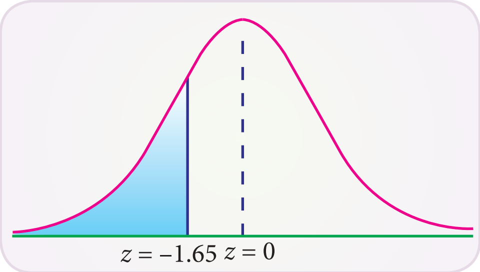
Z = 0 மற்றும் 1.09 –க்கு இடைப்பட்ட பரப்பு 0.3621 (அட்டவணையிலிருந்து)

$P(Z > 1.09) = 0.5000 - 0.3621 = 0.1379$

Z = 1.09–க்கு வலதுபுறமாக நிழலிடப்பட்ட பரப்பு என்பது $P(Z > 1.09)$

(ii) −1.65 –க்கு குறைவாக

-1.65 மற்றும் 0–க்கு இடைப்பட்ட பரப்பும் 0- மற்றும் 1.65 -க்கு இடைப்பட்ட பரப்பும் சமம். அட்டவணையில் 0 மற்றும் 1.65 இடைப்பட்டபரப்பு 0.4505 ஆகும்.



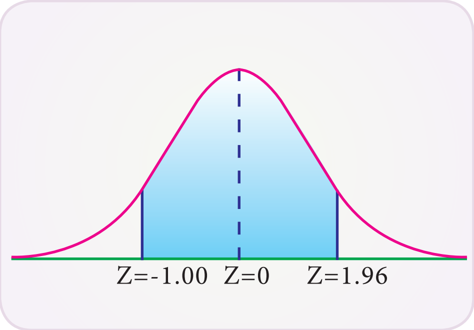
படம் 7.6

Z = 0–க்கு இடப்புறம் உள்ள பரப்பு 0.5 என்பதால்,

$P(Z<-1.65) = 0.5000 - 0.4505 = 0.0495.$

(iii) −1.00 மற்றும் 1.96–க்கு இடையே

Z =–1.00 மற்றும் 1.96–க்கு இடையே அமையும் சமவாய்ப்பு மாறி Z–ன் நிகழ்தகவை ஒத்த பரப்புகளைக் கூட்டுவதன் மூலம் காணலாம்.:



படம் 7.7

-1.00 மற்றும் 1.96–க்கு இடைப்பட்ட பரப்பு = -1.00 மற்றும் 0–க்கு இடைப்பட்ட பரப்பு + 0 மற்றும் 1.96-க்கு இடைப்பட்ட பரப்பு

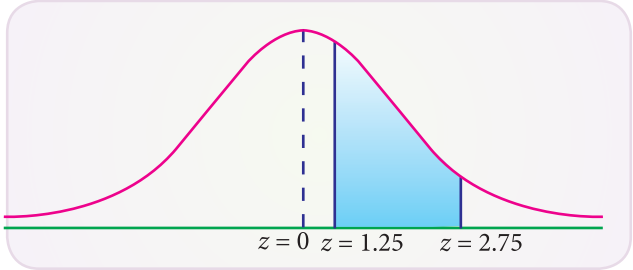
$P(-1.00 < Z < 1.96) = P(-1.00 < Z < 0) + P(0 < Z < 1.96)$

$= 0.3413 + 0.4750$ (அட்டவணையிலிருந்து)

$= 0.8163$

(iv) 1.25 மற்றும் 2.75 –க்கு இடையே

$Z = 1.25$ மற்றும் 2.75–க்கு இடைப்பட்ட பரப்பு = ($z = 0$ மற்றும் $z = 2.75$ –க்கு இடைப்பட்ட பரப்பு) – (z=0 மற்றும் $z = 1.25$) க்கு இடைப்பட்ட பரப்பு



படம் 7.8

$P(1.25 < Z < 2.75) = P(0 < Z < 2.75) - P(0 < Z < 1.25)$

$= 0.4970 - 0.3944 = 0.1026$

எடுத்துக்காட்டு 7.22

இயல்நிலைப் பரவலின் சராசரி 30 மற்றும் திட்டவிலக்கம் 5 எனில் (i) $26 \leq X \leq 40$ (ii) $X > 45$ ஆகிய பரப்பினை காண்க.

தீர்வு :

இங்கு சராசரி $\mu = 30$ மற்றும் திட்டவிலக்கம் $\sigma = 5$

(i) $X = 26$ எனில், $Z = (X - \mu)/\sigma = (26 - 30)/5 = -0.8$

மற்றும் $X = 40$ எனில், $Z = \dfrac{40 - 30}{5} = 2$

ஆகையால்,

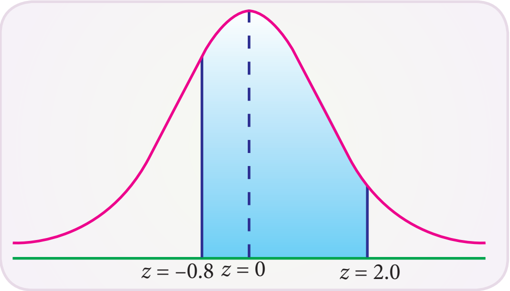
$P(26<X<40)\,) = P(-0.8 \leq Z < 2)$

$= P(-0.8 \leq Z \leq 0) + p(0 \leq Z \leq 2)$

$= P(0 \leq Z \leq 0.8) + P(0 \leq Z \leq 2)$

$= 0.2881 + 0.4772$ (அட்டவணையிலிருந்து)

$= 0.7653$



படம் 7.9

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 7.indd 66 09-05-2019 14:20:32

(ii) $X \geq 45$ எனும் போது நிகழ்தகவு

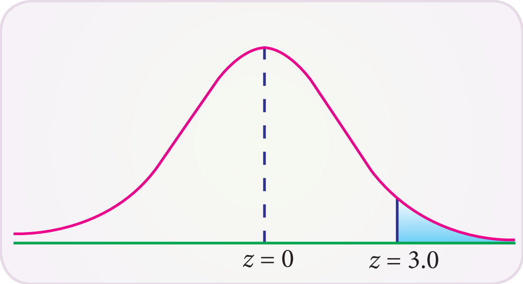
$X = 45$ எனில்,

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{45-30}{5} = 3$$

$$P(X \geq 45) = P(Z \geq 3)$$

$$= 0.5 - 0.49865$$

$$= 0.00135$$



படம் 7.10

எடுத்துக்காட்டு 7.23

ஒரு நிறுவனத்தின் 550 கிளை அலுவலகத்தின் சராசரி வியாபாரமானது தினமும் ₹150 ஆயிரம் மற்றும் திட்டவிலக்கம் ₹ 15 ஆயிரமாகும். இயல்நிலைப் பரவலைக் கொண்டு எத்தனை கிளைகளில் எவ்வளவு விற்பனை நடைபெற்றது என்பதனை அறிக.

(i) ₹ 1,25,000 மற்றும் ₹ 1,45,000

(ii) ₹ 1,40,000 மற்றும் ₹ 1,60,000

தீர்வு :

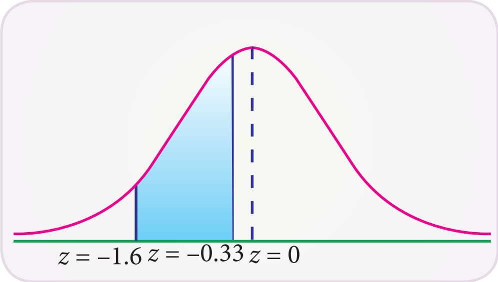
சராசரி μ= 150 மற்றும் திட்டவிலக்கம் σ = 15

(i) $X = 125$ ஆயிரம் எனில்

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{125-150}{15} = -1.667$$

$X = 145$ ஆயிரத்தில் எனில்

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{145-150}{15} = -0.33$$



படம் 7.11

$Z = 0$ மற்றும் $Z = -1.67$ –க்கு இடைப்பட்ட பரப்பளவு 0.4525

$Z = 0$ மற்றும் $Z = -0.33$ –க்கு இடைப்பட்ட பரப்பளவு 0.1293

$$P(-1.667 \leq Z \leq -0.33) = 0.4525 - 0.1293$$

$$= 0.3232$$

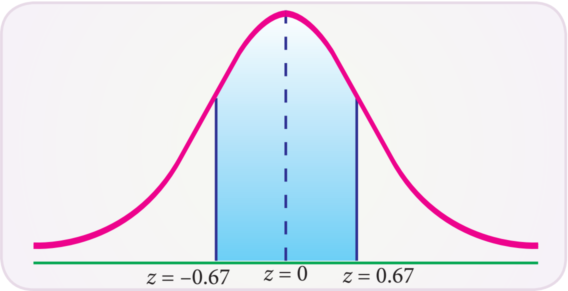
125 ஆயிரத்திற்கு மற்றும் 145 ஆயிரத்திற்கும் இடைப்பட்ட விற்பனையைப்பெற்ற கிளைகளின் எண்ணிக்கை $550 \times 0.3232 = 178$

(ii) $X = 140$ ஆயிரம் எனில்

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{140-150}{15} = -0.67$$

$X =$ 160 ஆயிரம் எனில்

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{160-150}{15} = 0.67$$



படம் 7.12

$$P(-0.67 < Z < 0.67) = P(-0.67 < Z < 0) + P(0 < Z < 0.67)$$
$$= P(0 < Z < 0.67) + P(0 < Z < 0.67)$$
$$= 2\,P(0 < Z < < 0.67)$$
$$= 2 \times 0.2486$$
$$= 0.4972$$

₹ 140 ஆயிரத்திற்கு மற்றும் ₹ 160 ஆயிரத்திற்கும் இடைப்பட்ட விற்பனையைப் பெற்ற கிளைகளின் எண்ணிக்க $= 550 \times 0.4972 = 273$

எடுத்துக்காட்டு 7.24

ஒரு பள்ளியில் பயிலும் குழந்தைகளின் சராசரி உயரமானது 69.25 செ.மீ மற்றும் மாறுபாட்டளவை 10.8 செ.மீ எனக் கொண்டால் 1200 குழந்தைகளில் 74 செ.மீ க்கும் அதிக உயரம் கொண்ட குழந்தைகள் எத்தனை பேர் இருப்பார்கள் என்பதனை கணக்கிடுக.

தீர்வு

உயரங்களின் பரவல் இயல்நிலைப்பரவலை ஒத்துள்ளது என்க. சராசரி 69.25 மற்றும் திட்டவிலக்கம் 3.286

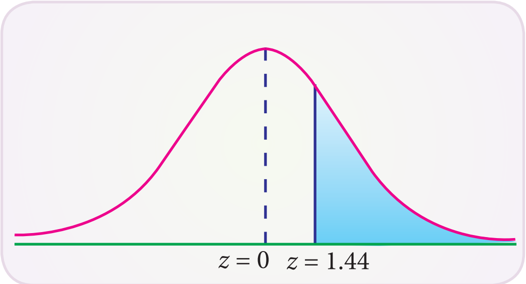
$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{X-69.25}{3.286}$$

எனில் , $X = 74$

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{74-69.25}{3.286} = 1.4455$$

இப்பொழுது $P(Z > 74) = \mathrm{P}(Z > 1.44)$

$$= 0.5 - 0.4251$$
$$= 0.0749$$



படம் 7.13

1200 குழந்தைகளில் 74 செ.மீட்டருக்கு மேலாக உள்ள குழந்தைகளில் எதிர்பார்க்கபடும் எண்ணிக்கை.

$= 1200 \times 0.0749 \approx 90$ குழந்தைகள் (தோராயமாக)

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 7.indd 68 09-05-2019 14:20:33

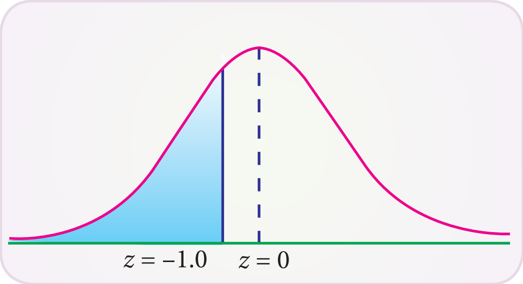
எடுத்துக்காட்டு 7.25

ஒரு தேர்வில் மதிப்பெண் பெறுதல் என்பதனை இயல்நிலை பரவல் கொண்டு பார்க்கபடுமானால் அதன் சராசரி 45 மற்றும் திட்டவிலக்கம் 10 ஆகும். 1300 மாணவர்கள் தேர்வு எழுதுகிறார்கள் எனில், எத்தனை மாணவர்கள் (i) 35 மதிப்பெண்ணிற்கும் குறைவாக (ii) 65 மதிப்பெண்ணிற்கும் அதிகமாக, தேர்ச்சி பெறுகிறார்கள் என்பதனைக் கணக்கிடுக.

தீர்வு :

X என்ற இயல்நிலைமாறி மாணவர்களின் மதிப்பெண்களின் சராசரி 45 மற்றும் திட்டவிலக்கம் 10 என காட்டுகிறது என்க.

(i) 35 மதிப்பெண்களுக்கும் குறைவாக



படம் 7.14

$X = 35$ எனும்போது

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{35-45}{10} = -1$$

$$P(X < 35) = P(Z < -1)$$

$$P(Z > 1) = 0.5 - P(0 < Z < 1)$$

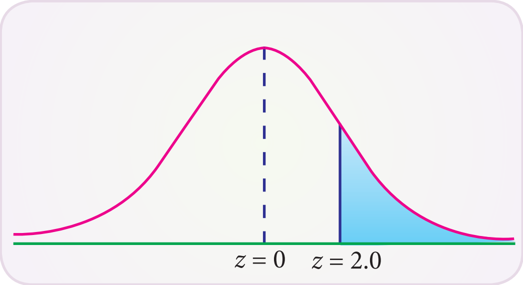
$$= 0.5 - 0.3413$$

$$= 0.1587$$

35 மதிப்பெண்களுக்கும் குறைவாக பெறும் மாணவர்களின் எதிர்பார்க்கப்படும் எண்ணிக்கை $0.1587 \times 1300 = 206.31$

$= 206$ மாணவர்கள் (தோராயமாக)

(ii) 65 மதிப்பெண்களுக்கும் மேலாக



படம் 7.15

$X = 65$ எனும்போது

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{65-45}{10} = 2.0$$

$$P(X > 65) = P(Z > 2.0)$$

$$0.5 - P(0 < Z < 2.0)$$

$$0.5 - 0.4772$$

$$= 0.0228$$

65 மதிப்பெண்களுக்கு மேலாக பெறும் மாணவர்களின் எதிர்பார்க்கப்படும் எண்ணிக்கை 0.0228 x 1300 = 30 மாணவர்கள் (தோராயமாக)

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 7.indd 69 09-05-2019 14:20:34

எடுத்துக்காட்டு 7.26

புதிய தொழிற்சாலையில் 900 மின்விளக்குகள் பொருத்தப்படுகிறது. இயல்நிலை பரவலை கொண்ட அதனுடைய் சராசரி வாழ்நாள் என்பது 125 நாள்களாகும் மற்றும் திட்டவிலக்கமானது 18 நாள்களாகும். 95க்கும் குறைவான நாள்களில் பயனற்று போகும் என்று எதிர்பார்க்கப்படும் விளக்குகள் எத்தனை?

தீர்வு :

சராசரி 125 மற்றும் திட்டவிலக்கம் 18 கொண்ட மின்விளக்குகளின் வாழ்நாள்.

(i) 95 நாள்களுக்கும் குறைவாக

$X = 95$ எனில்,

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{95-125}{18} = -1.667$$

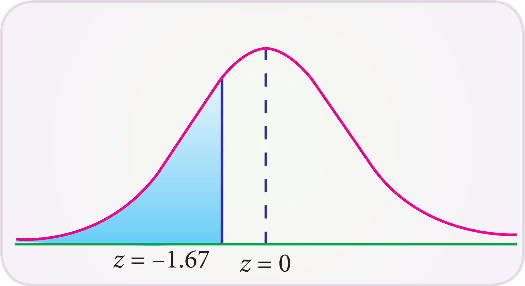
$$P(X < 95) = P(Z < -1.667)$$

$$= P(Z > 1.667)$$

$$= 0.5 - P(0 < Z < 1.67)$$

$$= 0.5 - 0.4525$$

$$= 0.0475$$



படம் 7.16

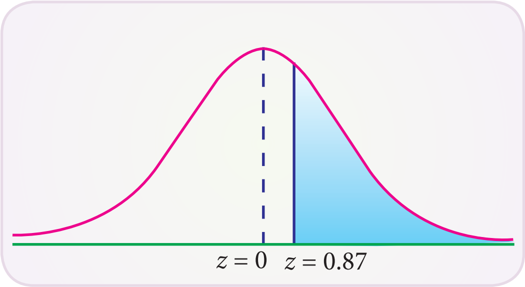
900 மின்விளக்குகளில் 95 நாள்களுக்குள்ளாகப் பயனற்றுப்போகும் மின் விளக்குகளின் எதிர்பார்க்கப்படும் எண்ணிக்கை $900 \times .0475 = 43$ விளக்குகள்

எடுத்துக்காட்டு 7.27

படை வீரர்களின் சராசரி உயரமானது 69.25 அங்குலம் மற்றும் மாறுபாடு 9.8 அங்குலமாகும். 6000 வீரர்கள் கொண்ட படைத்தளத்தில் 6 அடிக்கும் மேலாக உயரம் கொண்ட வீரர்களின் எதிர்ப்பார்க்கப்படும் எண்ணிக்கை யாது?

தீர்வு :

படைவீரர்களின் உயரத்தை இயல்நிலை மாறி X குறிக்கும். சராசரி = 69.25 அங்குலங்கள், திட்டவிலக்கம் = 3.13. அங்குலங்கள்



படம் 7.17

திட்ட இயல்நிலை மாறி

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{72-69.25}{3.13} = 0.8786$$

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 7.indd 70 09-05-2019 14:20:35

$P(X > 72) = P(Z > 0.8786) = 0.5 - P(0 < Z < 0.88) = 0.5 - 0.3106 = 0.1894$

= 6000 வீரர்களில் 6 அடிக்கு மேலாக உயரம் உள்ளவர்கள் எண்ணிக்கை

= 6000×0.1894 =1136 வீரர்கள் (தோராயமாக)

எடுத்துக்காட்டு 7.28

வங்கியின் மேலாளர் கண்காணித்ததில் வங்கியின் வாடிக்கையாளர்கள் காசாளரின் சேவையை பெறுவதற்குக் காத்திருக்கும் நேரமானது இயல்நிலை பரவலைக் கொண்டு சராசரியாக 5 நிமிடமும், அதன் திட்டவிலக்கமானது 0.6 நிமிடமாகும் என்று கணக்கிடப்படுகிறது. ஒரு வாடிக்கையாளர் சேவை பெறுவதற்கான (i) 6 நிமிடத்திற்கும் குறைவாக (ii) 3.5 நிமிடத்திற்கும் மற்றும் 6.5 நிமிடத்திற்கும் இடையே காத்திருப்பதற்கான நிகழ்தகவினைக் காண்க.

தீர்வு :

வாடிக்கையாளர்கள் வரிசையில் காத்திருக்கும் நேரத்தை X குறிக்கட்டும் இது இயல்நிலை பரவலை ஒத்த சராசரி 5 மற்றும் திட்டவிலக்கம் 0.7 என்க.

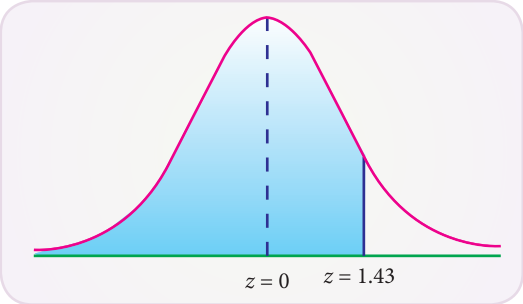
(i) 6 நிமிடங்களுக்குக் குறைவாக

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{6-5}{0.7} = 1.4285$$

$P(X < 6) = P(Z < 1.43)$

$= 0.5 + 0.4236$

$= 0.9236$



படம் 7.18

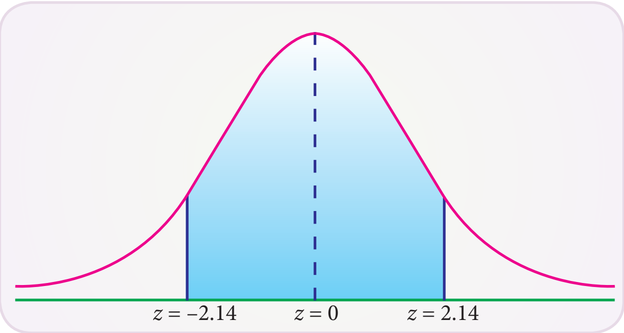
(ii) 3.5 மற்றும் 6.5 நிமிடங்களுக்கு இடையே

$X = 3.5$ எனில்

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{3.5-5}{0.7} = -2.1429$$

$X = 6.5$ எனில்

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{6.5-5}{0.7} = 2.1429$$



படம் 7.19

$P(3.5 < X < 6.5)$

$= P(-2.1429 < Z < 2.1429)$

$= P(0 < Z < 2.1429) + P(0 < Z < 2.1429)$

$= 2\,P(0 < Z < 2.1429)$

$= 2 \times .4838$

$= 0.9676$

எடுத்துக்காட்டு 7.29

ஒரு கூறில் இருந்து எடுத்த 125 உலர்ந்த மின்கலங்கள் அதனுடை ஆயுட்காலம் எத்தனை மணி நேரம் என்பதனை சோதனை முடிவுகளில் சராசரியாக 12 மணி நேரம் மற்றும் அதன் திட்ட விலக்கம் 3 மணி நேரம் என்று கணக்கிடப்பட்டுள்ளது. அதன் தரவுகள் இயல்நிலைப் பரவலைக் கொண்டது எனில், எத்தனை சதவீத மின்கலங்கள்

(i) 13 மணி நேரத்திற்கும் அதிகமாக

(ii) 5 மணி நேரத்திற்கும் குறைவாக

(iii) 9 மணி நேரத்திற்கும் 14 மணி நேரத்திற்கும் இடைப்பட்ட நேரத்தில் ஒளிரும் என்பதனைக் கணக்கிடுக.

தீர்வு :

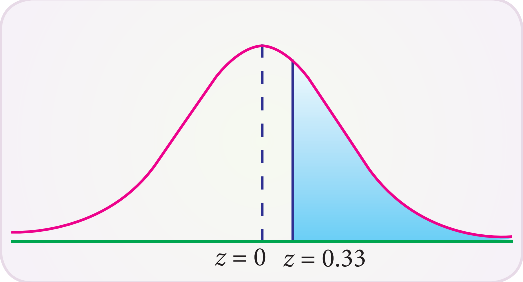
உலர் மின்கலங்களின் ஆயுட்காலம் X என்க. இது இயல்நிலைப் பரவலைப் பின்பற்றி சராசரி 12 மற்றும் திட்டவிலக்கம் 3 மணி என்க.

(i) 13 மணி நேரத்திற்கும் மேலாக

$P(X > 13)$

$X = 13$ எனில்

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{13-12}{3} = 0.333$$



படம் 7.20

$P(X > 13) = P(Z>0.333) = 0.5 - 0.1293 = 0.3707$

13 மணி நேரத்திற்கும் மேலாக ஆயுட்காலம் கொண்ட உலர்மின்கலங்களின் எதிர்பாக்காக்கப்படும் சதவீதம் $=125 \times 0.3707 = 46.34\%$

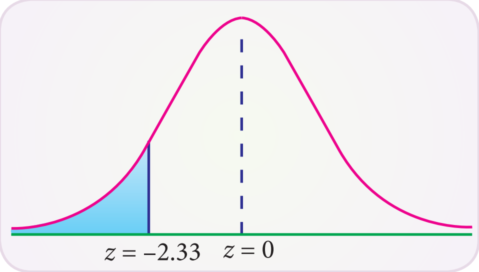
(ii) 5 மணி நேரத்திற்கும் குறைவாக

$P(X < 5)$

$X = 5$ எனில், $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{5-12}{3} = -2.333$

$P(X < 5) = P(Z < -2.333) = P(Z > 2.333)$

$= 0.5 - 0.4901 = 0.0099$



படம் 7.21

5 மணி நேரத்திற்கும் குறைவாக ஆயுட்காலம் கொண்ட உலர் மின்கலங்களின் எதிர்பார்க்கப்படும் சதவீதம் $125 \times 0.0099 = 1.23\%$

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 7.indd 72 09-05-2019 14:20:36

(iii) 9 மற்றும் 14 மணி நேரத்திற்கு இடையில்

$X = 9$ எனில்,

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{9-12}{3} = -1$$

$X = 14$ எனில்,

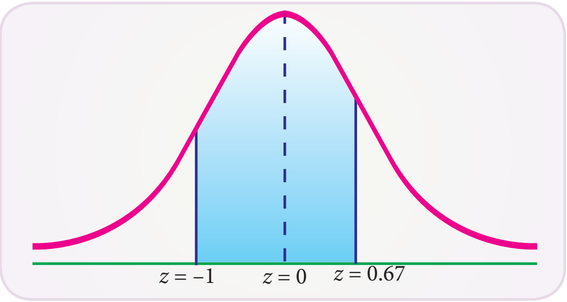
$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{14-12}{3} = 0.667$$

$$P(9 < X < 14) = P(-1 < Z < 0.667)$$

$$= P(0 < Z < 1) + P(0 < Z < 0.667)$$

$$= 0.3413 + 0.2486$$

$$= 0.5899$$



படம் 7.22

9 மற்றும் 14 மணி நேரத்திற்கிடையில் ஆயுட்காலம் கொண்ட உலர் மின்கலங்களின் எதிர்பார்க்கப்படும் சதவீதம் 125 x 0.5899 =73.73%

எடுத்துக்காட்டு 7.30

ஒரு வழிப்போக்கன் பிடித்த மீனின் எடையானது தோராயமாக இயல்நிலைப்பரவலைப் சார்ந்து சராசரியாக 2.25 கிலோ மற்றும் திட்டவிலக்கம் 0.25 கிலோ பெற்றுள்ளது. மீனின் எடையானது 2 கிலோவை விட குறைவாக இருப்பதற்கான சதவீதம் என்ன?

தீர்வு :

சராசரி $\mu = 2.25$ மற்றும் திட்டவிலக்கம் $\sigma = 0.25$. மீனின் எடை 2 கிலோக்கு குறைவாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு $P(X < 2.0)$

$x = 2.0$ எனில், $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} = \frac{2.0-2.25}{0.25} = -1.0$

$$P(Z < -1.0) = P(Z > 1.0) = 0.5 - 0.3413 = 0.1587$$

ஆகையால் 15.87% மீன்களின் எடை 2 கிலோவிற்கும் குறைவாக இருக்கும்

எடுத்துக்காட்டு 7.31

கிராம கூட்டுறவு சங்கத்தின் வாயிலாகக் கொள்முதல் செய்யப்படும் பாலின் அளவு 800 லிட்டர் மற்றும் திட்டவிலக்கம் 100 லிட்டர் ஆகும். ஒரு நாள் 800 லிட்டர் முதல் 1000 லிட்டர் வரை கூட்டுறவு சங்கத்தின் வாயிலாகக் கொள்முதல் செய்வதற்கான விகிதசாரத்தினைக் கணக்கிடுக.

தீர்வு :

சராசரி $\mu = 800$ மற்றும் திட்டவிலக்கம் $\sigma = 100$, நாள் ஒன்றுக்கு கொள்முதல் செய்யப்படும் பாலின் அளவு 800 லிட்டருக்கும், 1000 லிட்டருக்கும் இடையில் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 7.indd 73 09-05-2019 14:20:37

$$P(800 < X < 1000) = P\left(\frac{800-800}{100} < z < \frac{1000-800}{100}\right)$$

$$= P(0 < Z < 2) = 0.4772$$

எனவே பாலின் அளவு 800 லிட்டருக்கும், 1000 லிட்டருக்கும் இடையில் கொள்முதல் செய்யும் சங்கங்களின் சதவீதம் 47.72 ஆகும்.

பயிற்சி 7.3

1. வரையறு: இயல்நிலைப் பரவல்.

2. வரையறு: திட்ட இயல்நிலை மாறி.

3. இயல்நிலைப்பரவல் ஈருறுப்புப்பரவலின் எல்லையாக அமைவதற்கான கட்டுப்பாடுகளை எழுதுக.

4. இயல்நிலை நிகழ்தகவு வளைவரையின் ஏதேனும் ஐந்து முதன்மைப் பண்புகளை எழுதுக.

5. 2000 மின்விளக்குகள் சோதனைக்கு உட்படுத்தப்படுகிறது. சோதனையின் முடிவில் ஒரு குறிப்பிட்ட தயாரிப்புகள் சராசரியாக எரியும் நேரமானது இயல்நிலைப் பரவலில் 2040 மணி நேரமும் திட்டவிலக்கமானது 60 மணி நேரமும் உள்ளதாக கணக்கிடப்படுகிறது.

   (i) 2150 மணி நேரத்திற்கு மேலாக

   (ii) 1950 மணி நேரத்திற்கும் குறைவாக

   (iii) 1920 மற்றும் 2100 மணி நேரத்திற்கும் இடைப்பட்ட நேரத்தில் எத்தனை மின்விளக்குகள் ஒளிரும் என்பதனை மதிப்பீடு செய்க.

6. ஒரு பரவலில் 30 சதவீத பொருள்கள் 50க்கும் குறைவாக மற்றும் 10 சதவீத பொருள்கள் 86 க்கும் அதிகமாக இருப்பின் அதனுடைய சராசரி , திட்டவிலக்கம் காண்க.

7. X எனும் மாறி இயல்நிலைப் பரவலின் சராசரி 12 மற்றும் திட்டவிலக்கம் 4 எனில் $P(X < 20)$ மற்றும் $P(0 \le X \le 12)$ மதிப்பினை காண்க.

8. 500 மாணவர்களின் உயரமானது இயல்நிலைப் பரவலில் சராசரியாக 68 அங்குலமும் அதன் திட்டவிலக்கம் 3 அங்குலமாக கணக்கிடப்படுகிறது.

   (i) 72 அங்குலத்திற்கும் அதிகமாக

   (ii) 64 அங்குலத்திற்கும் குறைவாக

   (iii) 65 மற்றும் 71 அங்குலத்திற்கும் இடைப்பட்ட மாணவர்களின் எண்ணிக்கையினை கணக்கிடுக.

9. புகைப்பட பிரதி உருவாக்குவதற்கு ஆகும் புகைப்பட செயல்முறையின் நேரமானது இயல்நிலை பரவலில் சராசரியாக 16.28 வினாடிகள் மற்றும் திட்டவிலக்கம் 0.12 வினாடிகள் தேவைப்படுகிறது. புகைப்படம் உருவாக்குவதற்கு 16.35 வினாடிகளுக்கும் குறைவாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவினை காண்க.

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 7.indd 74 09-05-2019 14:20:37

10. ஒரு கட்டுமான நிறுவனம் மேம்பாலம் கட்டுவதற்கு இயல்நிலைப் பரவலில் சராசரியாக 400 வேலை நாள்கள் மற்றும் திட்டவிலக்கமாக 100 வேலை நாள்களாக நேரத்தை வரையறுக்கிறது. 450 அல்லது அதற்கும் குறைவான வேலை நாள்களுக்குள் மேம்பாலம் கட்டும் பணியினை நிறைவு செய்வதாக உறுதி அளிக்கின்றது. மேலும் அந்நிறுவனம் உறுதி தவறும் நிலையில் 450 நாள்களுக்கும் அதிகமாக ஆகும் ஒவ்வொரு நாள்களுக்கும் அபராதமாக ₹ 10,000 அளிப்பதாக ஒப்பந்தம் செய்கிறது.

(i) கட்டுமான நிறுவனம் குறைந்தபட்சம் 2 லட்சம் அபராதமாக கொடுப்பதற்கும்

(ii) அதிகபட்சம் 500 நாள்கள் மேம்பாலம் கட்டி முடிப்பதற்கும்

நிகழ்தகவினை கணக்கிடுக.

62UQRE

பயிற்சி 7.4

ஏற்புடைய விடையைத் தெரிவு செய்க:

1. இயல்நிலைப் பரவலைக் கண்டுபிடித்தவர்

   (a) லாப்லேஸ் (b) டீ மாய்வர் (c) காஸ் (d) அனைத்தும்

2. X ~N(9,81) எனில் திட்ட இயல்நிலைப் பரவலின் மாறி Z என்பது

   (a) $Z=\dfrac{X-81}{9}$ (b) $Z=\dfrac{X-9}{81}$ (c) $Z=\dfrac{X-9}{9}$ (d) $Z=\dfrac{9-X}{9}$

3. Z என்பது திட்ட இயல்நிலை மாறி எனில் $Z = -0.5$ லிருந்து $Z = -3.0$ வரை அமையும் உருப்படிகளின் விகிதமானது.

   (a) 0.4987 (b) 0.1915 (c) 0.3072 (d) 0.3098

4. X ~N(μ, σ^2), இயல்நிலை பரவலின் வளைவு மாற்றுப்புள்ளியில் மீப்பெரு நிகழ்தகவானது

   (a) $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)e^{\frac{1}{2}}$ (b) $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)e^{\left(-\frac{1}{2}\right)}$ (c) $\left(\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)e^{\left(-\frac{1}{2}\right)}$ (d) $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)$

5. சராசரியும் மாறுபாட்டளவையும் சமமாக இருக்கும் நிகழ்தகவுப் பரவலானது.

   (a) ஈருறுப்பு (b) இயல்நிலை (c) பாய்சான் (d) அனைத்தும்

6. பொம்மைகள் தயாரிக்கும் நிறுவனம் சராசரியாக 1% குறைபாடுள்ள தயாரிப்புகளை அளிக்கின்றது. கூறெடுத்தலில் 100 பொம்மைக்கு 3 பொம்மைகள் குறைபாடுள்ளவைகளாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவின் மதிப்பானது

   (a) 0.0613 (b) 0.613 (c) 0.00613 (d) 0.3913

7. $f(x)=\left(\dfrac{1}{\sqrt{72\pi}}\right)\dfrac{e^{-(x-10)^2}}{72}$ -∞< x < ∞ என்ற இயல்நிலை பரவலின் பண்பளவைகளானது

   (a) (10,6) (b) (10,36) (c) (6,10) (d) (36,10)

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 7.indd 75 09-05-2019 14:20:39

8. ஒரு உற்பத்தியாளர் தயாரிக்கும் மின் விசை மாற்றுக்குமிழ்களில் (Switches) 2 சதவீத தயாரிப்புகள் குறைபாடுள்ளவை என்று அறியப்படுகிறது. ஒரு பேழையில் இருக்கும் 50 மின்விசை மாற்றுக்குமிழ்களில் அதிகபட்சமாக 2 குறைபாடுகள் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவானது.

(a) $2.5\ e^{-1}$ (b) e^{-1} (c) $2\ e^{-1}$ (d) இவை ஏதுமில்லை

9. ஒவ்வொரு சோதனையிலும் வெற்றி என்பது தோல்விக்கான வாய்ப்பைப் போல் இருமடங்கு எனில் அடுத்து வரும் 6 முயற்சிகளில் குறைந்த பட்சம் நான்கு முறை வெற்றி பெறுவதற்கான வாயப்பானது.

(a) 240/729 (b) 489/729 (c) 496/729 (d) 251/729

10. ஈருறுப்புப் பரவலின் பண்பளவைகளான சராசரியின் மதிப்பு 4 மற்றும் மாறுபாடு 4/3 எனில் $P(X \geq 5)$ இன் மதிப்பானது.

(a) $(2/3)^6$ (b) $(2/3)^5(1/3)$ (c) $(1/3)^6$ (d) $4(2/3)^6$

11. சராசரியாக ஒரு தேர்வில் 40% மாணவர்கள் தோல்வி அடைகின்றனர். ஒரு குழுவிலுள்ள 6 மாணவர்களில் குறைந்தபட்சம் 4 நபர் வெற்றி அடைவதற்கான நிகழ்தகவானது.

(a) 0.5443 (b) 0.4543 (c) 0.5543 (d) 0.4573

12. ஒரு குறிப்பிட்ட வழிதடத்தில் செல்லும் விமானத்தில் பயணிக்கும் 40 சதவீத பயணிகள் பயணிக்கும் நேரத்தில் தங்களுடன் எந்த ஒரு உடைமைகளையும் எடுத்துச் செல்வதில்லை. அவ்வழித்தடத்தில் செல்லும் விமானங்கள் 15 இருக்கைகள் கொண்டது எனில், உடமைகள் இல்லாமல் பயணிக்கும் பயணிகளின் சராசரி எண்ணிக்கையானது.

(a) 6.00 (b) 6.45 (c) 7.20 (d) 7.50

13. பின்வரும் கூற்றில் (கூற்றுகளில்) எவை இயல்நிலைப் பரவல் வளைவரை தொடர்வுடையதாக இருக்கும்?

(a) இது சமச்சீரானது மற்றும் மணிவடிவம் உடையது

(b) இது தொலைத்தொடுகோட்டை உடையது. அதாவது வளைவரை கிடைஅச்சினை தொடர்ந்து சென்றாலும் அதனை தொடாமல் இணையாக செல்லும்.

(c) இதன் சராசரி, இடைநிலை மற்றும் முகடு ஆகியன ஒன்றுகின்றன.

(d) மேற்கண்ட கூற்றுகள் அனைத்தும் உண்மை.

14. பின்வருவனவற்றுள் எவை பாய்சான் பரவலை உருவாக்காது?

(a) 10 நிமிட இடைவெளியில் பெறப்படும் தொலைபேசி அழைப்புகள்

(b) பெட்ரோல் நிலையத்திற்கு வந்து சேரும் வாடிக்கையாளர்களின் எண்ணிக்கை

(c) கனஅடி மண்ணில் காணப்படும் பாக்டீரியாக்களின் எண்ணிக்கை

(d) ஒரு பக்கத்தின் அச்சுப் பிழைகளின் எண்ணிக்கை.

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 7.indd 76 09-05-2019 14:20:39

15. சராசரி 70 மற்றும் திட்டவிலக்கம் 10 எனக் கொண்ட இயல்நிலைப் பரவலை சமவாய்ப்பு மாறி X தழுவுகிறது. X ஆனது 72 மற்றும் 84–க்கு இடையில் உள்ளபோது அதன் நிகழ்தகவானது

(a) 0.683 (b) 0.954 (c) 0.271 (d) 0.340

16. புதிதாக தேர்ச்சிபெற்ற பட்டயக் கணக்கரின் ஆரம்பகால வருடாந்திர ஊதியம் இயல்நிலைப் பரவலைப் பின்பற்றுகிறது. இதன் சராசரி 1,80,000 மற்றும் திட்டவிலக்கம் 10,000 ஆகும். சமவாய்ப்பு முறையில் தேர்ந்தெடுக்கப்படும் புதிதாக தேர்ச்சிபெற்ற பட்டயக் கணக்கர் வருடத்திற்கு ₹ 1,65,000 லிருந்து ₹ 1,75,000 வரை ஈட்டுவதற்கு உண்டான நிகழ்தகவானது.

(a) 0.819 (b) 0.242 (c) 0.286 (d) 0.533

17. புள்ளியியல் வகுப்பில் பயிலும் மாணவர்களின் உயரமானது இயல்நிலை பரவலை பின்பற்றி சராசரி 172 செ.மீ மற்றும் மாறுபாடு 25 செ.மீ பெற்றுள்ளது, எனில் 165 செ.மீ மற்றும் 181 செ.மீ க்கும் இடைப்பட்ட உயரத்தில் இருக்கும் மாணவர்களின் விகிதமானது.

(a) 0.954 (b) 0.601 (c) 0.718 (d) 0.883

18. புள்ளிவிவர ஆய்வில் தொலை தூரத்தில் இருப்பவர்களின் உரையாடல்களின் நேரமானது இயல்நிலை பரவலைபின்பற்றி சராசரி 240 நொடிகளாகவும், திட்ட விலக்கம் 40 நொடிகளாகவும் உள்ளதாக அறியப்படுகிறது, எனில் 180 நொடிகளுக்கும் குறைவாக உரையாடல் நேரத்தை முடிப்பவர்களின் விகிதமானது.

(a) 0.214 (b) 0.094 (c) 0933 (d) 0.067

19. கேப் நகர மக்கள் தொகையில் 21 சதவீத மக்கள் DSTV எனும் செயற்கைகோள் தொலைக்காட்சி சேவைக்கு சந்தாதாரர்களாக தங்களை இணைத்துக் கொண்டனர் மாதிரிக்கூறாக நான்கு வீட்டினைத் தேர்ந்தெடுக்கும் பட்சத்தில் அனைத்து வீடுகளும் DSTV சேவையினை பயன்படுத்துவதற்கான நிகழ்தகவானது.

(a) 0.2100 (b) 0.5000 (c) 0.8791 (d) 0.0019

20. திட்ட இயல்நிலை அட்டவணையை பயன்படுத்துகையில் $z = 2.18$ –க்கு வலப்புறம் மற்றும் $z = -1.75$ –க்கு இடதுபுறம் அமையும் மதிப்புகளுக்கான நிகழ்தகவுகளின் கூடுதலானது.

(a) 0.4854 (b) 0.4599 (c) 0.0146 (d) 0.0547

21. ஒரு மைத்தரை அச்சு இயந்திரம் (Inkjet Printer) முதல் முறை பழுது ஏற்படுவதற்கான காலஅளவு இயல்நிலைப் பரவலை ஒத்துள்ளது. இதன் சராசரி 1500 மணி நேரம் மற்றும் திட்டவிலக்கம் 200 மணி நேரம் எனில் 1000 மணி நேரத்திற்கு முன்பாக அவ்வியந்திரம் பழுதடைவதற்கான விகிதமானது

(a) 0.0062 (b) 0.0668 (c) 0.8413 (d) 0.0228

22. புதிதாகப் பிறந்த குழந்தையின் எடையானது இயல்நிலைப் பரவலை பின்பற்றி சராசரியாக 3.2 கிலோ மற்றும் திட்டவிலக்கமாக 1.1 கிலோ பெற்றுள்ளது. சமவாய்ப்பு முறையில் தேர்தெடுக்கப்படும் புதிதாகப் பிறந்த ஒரு குழந்தையின் எடையில் 2.0 கிலோவுக்கும் குறைவாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவானது.

(a) 0.138 (b) 0.428 (c) 0.766 (d) 0.262

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 7.indd 77 09-05-2019 14:20:39

23. ஒரு குறிப்பிட்ட வங்கியின் கடன் அட்டைதாரர்கள், தங்களது கடன் அட்டையைப் பயன்படுத்தி செலவு செய்யும் மாதாந்திர செலவு இயல்நிலைப் பரவலை ஒத்துள்ளது. சராசரி ₹ 1295.00 மற்றும் திட்டவிலக்கம் ₹ 750.00 எனில், கடன் அட்டைதாரர்கள் தங்களின கடன் அட்டையின் மூலம் மாதம் ₹ 1500-க்கு மேலாக செலவழிக்கும் கடன் அட்டைதாரர்களின் விகிதாச்சாரமானது.

(a) 0.487 (b) 0.392 (c) 0.500 (d) 0.791

24. z ஒரு திட்ட இயல்நிலைமாறி என்க. z–க்கு வலப்புறம் உள்ள பரப்பு 0.8413 எனில், z–ன் மதிப்பானது

(a) 1.00 (b) –1.00 (c) 0.00 (d) –0.41

25. z–க்கு இடப்புறம் அமையும் (z– என்பது திட்ட இயல்நிலை பரவலை கொண்டுள்ளது) பரப்பு 0.0793, எனில் z–ன் மதிப்பானது.

(a) -1.41 (b) 1.41 (c) –2.25 (d) 2.25

26. $P(Z > z) = 0.8508$ எனில் z–ன் (z–என்பது திட்ட இயல்நிலை பரவலை கொண்டுள்ளது) மதிப்பானது

(a) –0.48 (b) 0.48 (c) –1.04 (d) 1.04

27. $P(Z > z) = 0.5832$ எனில் z–ன் (z–என்பது திட்ட இயல்நிலை பரவலை கொண்டுள்ளது) மதிப்பானது

(a) –0.48 (b) 0.48 (c) 1.04 (d) –0.21

28. ஈருறுப்புப் பரவலில் வெற்றிக்கான நிகழ்தகவானது தோல்விக்கான நிகழ்தகவைப்போல் இருமடங்கு எனில் நான்கு முயற்சியில் வெற்றி பெறுவதற்கான நிகழ்தகவானது

(a) 16/81 (b) 1/16 (c) 2/27 (d) 1/81

இதர கணக்குகள்

1. சராசரி 12 சதவீத பம்புகள் அளவில் சிறியதாக அல்லது பெரியதாக தயாரிக்கப்படுவதாக கண்டு நிராகரிப்படுவதை பம்பு தயாரிப்பாளர்கள் காண்கின்றனர். ஒரு தொகுதியில் உள்ள 10 பம்புகளில்

(a) இரண்டிற்கும் மேற்படாமல் நிராகரிக்கப்பட்ட பம்புகள்.

(b) குறைந்தபட்சம் இரண்டு நிராகரிக்கப்பட்ட பம்புகள்.

இருப்பதற்கான நிகழ்தகவினை காண்க.?

2. குறிப்பிட்ட நோயின் தாக்கத்தினால் 75 சதவீத நோயாளிகள் இறந்து போவதாக மருத்துவ அறிக்கை கூறுகிறது. அவர்களில் 6 நபரைத் தேர்ந்தெடுப்பின் அதில் 4 நோயாளிகள் நலமடைவதற்கான நிகழ்தகவினைக் காண்க?

3. மின்சாரத் தடை சராசரியாக ஒவ்வொரு 20 வாரத்தில் மூன்று முறை நிகழ்வது பாய்சான் பரவலை பின்பற்றினால் மின்சார தடையானது ஒரு குறிப்பிட்ட வாரத்தில் ஒரு முறைக்கு மிகாமல் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவினை கணக்கிடுக.

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 7.indd 78 09-05-2019 14:20:39

4. ஒரு பரபரப்பான சாலை சந்திப்பில் சராசரியாக 300 வாகனங்கள் ஒரு மணி நேரத்தில் கடக்கின்றன எனில்,

   (i) ஒரு நிமிடத்திற்கு எந்த வாகனமும் கடந்து செல்லாததற்கான நிகழ்தகவினை கணக்கிடுக.

   (ii) இரண்டு நிமிடங்களில் கடந்து போகும் வாகனங்களின் எதிர்ப்பார்க்கப்படும் எண்ணிக்கை என்ன?

5. ஒரு குறிப்பிட்ட பல்கலைகழகத்தில் மாணவர் சேர்க்கை என்பது மாநில அளவிலான தேர்வின் மூலமாக தீர்மானிக்கப்படுகிறது. தேர்வின் மதிப்பெண்கள் இயல்நிலைப் பரவலை பின்பற்றி சராசரி 500 மற்றும் மாறுபாடு 100 பெற்றுள்ளது. ராகுல் என்ற மாணவர் இப்பல்கலைகழகத்தில் சேர விரும்புகிறார். மேலும் மொத்த தேர்வு எழுதுபவர்களில் குறைந்த பட்சம் 70 சதவீத மாணவர்களின் மதிப்பெண்களுக்கு மேலாக அவர் பெற்றாக வேண்டும் என்பதை அறிகிறார். ராகுல் தேர்வு எழுதி அதில் 585 மதிப்பெண்களைப் பெறுகிறார் எனில், அவர் பல்கலைகழகத்தால் தேர்ந்தெடுக்கப்படுவாரா?

6. ஒரு குறிப்பிட்ட தொழிற்சாலையில் மகிழுந்து பொருத்துவது இயல்நிலைப் பரவலைப் பின்பற்றி சராசரியாக 20 மணி நேரமும் திட்டவிலக்கம் 2 மணி நேரமாகவும் கணக்கிடப்பட்டுள்ளது. தொழிற்சாலையில், மகிழுந்து பொருத்துவதற்கான கால அளவு

   (i) 19.5 மணி நேரத்திற்கு குறைவாக மற்றும்

   (ii) 20 மற்றும் 22 மணி நேரத்திற்குள்ளாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவினை கணக்கிடுக?

7. நிறுவனத்தின் தொழிலாளர்களின் ஆண்டு வருமானம் இயல்நிலை பரவலை பின்பற்றியுள்ளது. இதன் சராசரி \$. 50,000 மற்றும் திட்டவிலக்கம் \$. 20,000 எனில்

   (a) \$.40,000–க்கும் குறைவாக ஈட்டுபவர்களின் சதவீதம் என்ன?

   (b) \$.45,000 மற்றும் \$.65,000–க்கும் இடைப்பட்ட நிலையில் ஈட்டுபவர்களின் சதவீதம் என்ன?

   (c) \$.70,000/-க்கும் அதிகமாக சம்பாதிப்பவர்களின் சதவீதம் என்ன?

8. X எனும் மாறியானது இயல்நிலை பரவலை பின்பற்றி அதன் சராசரி $\mu = 30$ மற்றும் திட்டவிலக்கம் $\sigma = 4$ எனில்

   (a) $P(x < 40)$ (b) $P(x > 21)$ (c) $P(30 < x < 35)$ என்பனவற்றைக் காண்க

9. பிறந்த குழந்தைகளின் எடையானது இயல்நிலைப் பரவலைப் பின்பற்றி சராசரியாக 3500 கிராம் மற்றும் திட்டவிலக்கம் 500 கிராமம் பெற்றுள்ளது எனில், பிறக்கும் குழந்தையின் எடை 3100 கிராமுக்கு குறைவாக இருப்பதற்வான நிகழ்தகவு என்ன?

10. மாதாந்திர மின்சாரக் கட்டணமாக சென்னையில் வசிக்கும் மக்கள் செலுத்தும் கட்டணம் இயல்நிலைப் பரவலைப் பின்பற்றுகிறது. இதன் சராசரி ₹ 225 மற்றும் திட்டவிலக்கம் 55. 500 நபர் கொண்ட ஒரு குழுவில் ₹ 100 அல்லது அதற்கும் குறைவான கட்டணம் செலுத்துபவர்களின் எதிர்ப்பார்க்கப்படும் எண்ணிக்கை யாது?

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 7.indd 79 09-05-2019 14:20:39

தொகுப்புரை

- ஈறுருப்பு நிகழ்தகவு பரவலின் கட்டுப்பாடுகளாவன
  - (i) முயற்சிகள் சார்பற்றவை
  - (ii) முயற்சிகளின் எண்ணிக்கை முடிவானவை
  - (iii) ஒவ்வொரு முயற்சியும் வெற்றி மற்றும் தோல்வி என்ற இரு வாய்ப்புகள் மட்டுமே பெற்றிருக்கும்.
  - (iv) ஒவ்வொரு முயற்சியிலும் வெற்றிக்கான நிகழ்தகவு மாறிலியாகும்.
- n சார்பற்ற முயற்சிகளில் சரியாக x வெற்றிக்கான நிகழ்தகவு

  $p(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$ இங்கு $x = 0,1,2,3.....n$ மற்றும் $q = 1 - p$
- n மற்றும் p என்பன ஈருறுப்புப் பரவலின் பண்பளவைகள் ஆகும்.
- ஈறுருப்பு பரவலின் சராசரி np மற்றும் மாறுபாடு npq ஆகும்.
- பாய்சான் பரவலை ஈருறுப்புப் பரவலின் எல்லையாக பின்வரும் நிபந்தனைகளில் பெறலாம்.n ஆனது மிகப்பெரிய முடிவுறா எண் மற்றும் p மிகச்சிறியது மற்றும் np முடிவுறு எண்.
- பாய்சான் நிகழ்தகவு பரவலானது $p(x) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}$ $x = 0,1,2,3...$ இங்கு $\lambda = np$
- பாய்சான் பரவலின் சராசரி மற்றும் மாறுபாட்டளவை λ ஆகும்.
- பாயசான் பரவலின் பண்பளவை λ மட்டுமே.
- பாய்சான் பரவல் ஒரு போதும் சமச்சீராக இருக்காது
- இது அரிதாக நடக்கும் நிகழச்சிக்கான பரவலாகும்.
- n ஆனது மிகப்பெரிய முடிவுறா எண் மற்றும் p –ம் q–ம் மிகச் சிறியவை அல்ல என்ற நிபந்தகைளின் கீழ் இயல்நிலைப் பரவலானது ஈருறுப்புப் பரவலின் எல்லையாக உள்ளது.
- இயல்நிலை நிகழ்தகவு பரவல் $f(x) = \left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)(e^{-1/2\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2})$
- பரவலின் சராசரி μ ஆகும்.
- பரவலின் திட்ட விலிக்கம் σஆகும்.
- இது ஒரு சமச்சீர் பரவலாகும்.
- பரவலின் வரைபடம் மணிவடிவம் உடையது.

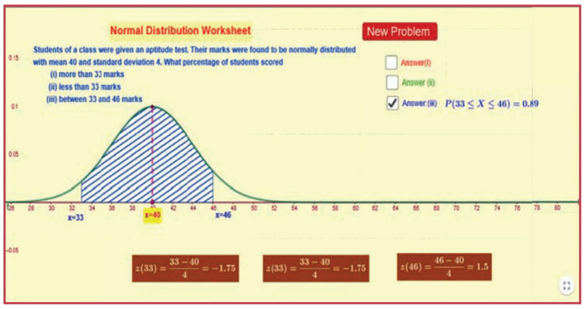
- இயல்நிலைப்பரவலில் சராசரி, இடைநிலை மற்றும் முகடு ஆகியவை சமமாக இருக்கும்.
- வளைவு மாற்றுப் புள்ளிகள் $\mu - \sigma$ மற்றும் $\mu + \sigma$–ல் அமையும்.
- இயல்நிலை வளைவரை கிடைஅச்சினை தொடர்ந்து சென்றாலும் கிடைஅச்சினை தொடமல் இணையாக செல்லும்.
- பரப்பளவு பண்புகள் : இயல்நிலை பரவலின் 68% சதவீத (தோராயமாக) உருப்படிகள் $\mu-\sigma$ மற்றும் $\mu+\sigma$–க்கு இடையில் அமைகிறது. 95% சதவீத (தோராயமாக) உருப்படிகள் $\mu-2\sigma$ மற்றும் $\mu+2\sigma$–க்கு இடையில் அமைகிறது. 99% சதவீத (தோராயமாக) உருப்படிகள் $\mu-3\sigma$ மற்றும் $\mu+3\sigma$ இடையில் அமைகிறது.
- திட்ட இயல்நிலை சமவாய்ப்பு மாறி $Z = (X - \mu)/\sigma$ என குறிப்பிடபடுகிறது.
- திட்ட இயல்நிலை நிகழ்தகவு பரவல் $1/\sqrt{2\pi}(e^{\frac{-z^2}{2}})$ ஆகும்.
- பரவலின் சராசரி பூச்சியம் மற்றும் திட்ட விலக்கம் 1 ஆகும்.
- வளைவு மாற்று புள்ளிகள் $z = -1$ மற்றும் $z = +1$–ல் அமையும்

கலைச்சொற்கள் (Glossary)	
இயல்நிலை	Normal
ஈருறுப்பு	Binomial
கூறுவெளி	Sample Space
கோட்ட அளவை	Skewness
சமச்சீர்	Symmetry
சமவாய்ப்பு சோதனை	Random Experiment
சமவாய்ப்பு மாறி	Random Variable
சார்பற்ற	Independent
திட்ட விலக்கம்	Standard Deviation
தொடர்ச்சியற்ற பரவல்	Discrete Distribution
தொடர்ச்சியான பரவல்	Continuous Distribution
பண்பளவை	Parameter
மணிவடிவ வளைவரை	Bell shaped Curve
வளைவு மாற்றுப் புள்ளி	Point of Inflexion

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 7.indd 81 09-05-2019 14:20:40

இணையச் செயல்பாடு

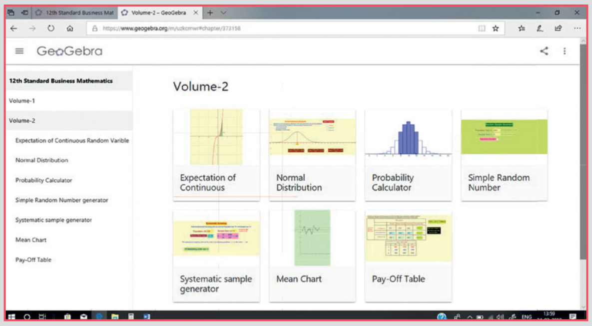
எதிர்பார்க்கப்படும் விளைவு



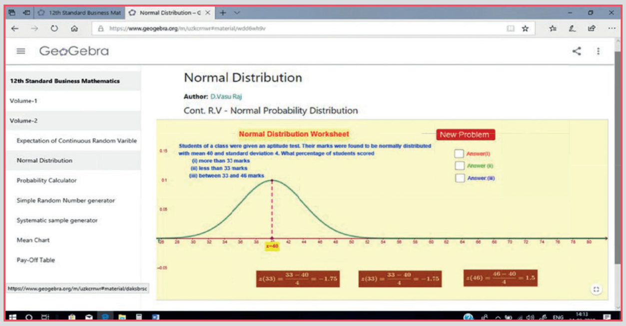
படி – 1 : கீழ்க்காணும் உரலி / விரைவுக் குறியீட்டைப் பயன்படுத்தி இச்செயல்பட்டிற்கான இணையப் பக்கத்திற்குச் செல்க. பின்பு "12th Standard Business Mathematics and Statistics" என்னும் திரையில் "Volume–2" யை தெரிவு செய்யவும்.

படி - 2 : "Normal Distribution" என்னும் பயிற்சித்தாளினை தெரிவு செய்துகொள்ளவும். வலது பக்கத்தில் உள்ள "New Problem" என்னும் பொத்தானை சொடுக்கவும் பின்பு Answer – I, Answer – II, Answer – III யை சொடுக்கினால் அதற்க்கான சரியான விடைகளைப் பெறலாம்.

படி 1



படி 2



செயல்பாட்டிற்கான உரலி : **https://ggbm.at/uzkcrnwr**

அல்லது விரைவுக் குறியீடு **(QR Code)**

B247_12_BUS_MAT_TM

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 7.indd 82 09-05-2019 14:20:40

8

கூறெடுப்பு முறைகளும் புள்ளியியல் அனுமானித்தலும்

பாண்டுரங்க வாசுதேவ் சுகாத்மி
(ஜூலை 27, 1911 - ஜனவரி 28, 1997)

அறிமுகம்

பாண்டுரங்க வாசுதேவ் சுகாத்மி (1911-1997) என்பவர் பத்மபூஷண் விருது வென்ற இந்திய புள்ளியியல் நிபுணர் ஆவர். 1940–ம் ஆண்டுகளில் சமவாய்ப்பு கூறெடுப்பு முறைகளை விவசாய புள்ளியியல் மற்றும் காலம் சார்ந்த புள்ளியியலில் முதன்முதலாக பயன்படுத்தினார். இந்திய விவசாய புள்ளியியல் ஆராய்ச்சி நிறுவனம் தொடங்குவதற்கு காரணமாக இருந்தவர். அவருடைய பணியின் ஒரு பகுதியாக ரோம் நாட்டில் அமைந்துள்ள உணவு மற்றும் விவசாய கழகத்தில், உலகில் நிலவும் பசிக்கொடுமையின் பல்வேறு பரிமாணங்களை தீர்மானித்து அதற்கேற்ப உணவு வழங்குவதற்கான பல புள்ளியியல் முறைகளை உருவாக்கினார். புரதச்சத்து இடைவெளிக்கான அளவு மற்றும் தன்மையை அளவிடுவதற்கான புள்ளியியல் முறைகளையும் உருவாக்கினார்.

ஒவ்வொரு புள்ளியியல் ஆய்விலும், ஒரு குழுவைச் சார்ந்த, உறுப்புகளின் பண்புகளைப் பற்றி அறிவதே நமது நோக்கமாகும். ஒரு தொகுதி அல்லது குழுவில் உள்ள அனைத்து உறுப்புகளையும், புள்ளியியல் ஆய்வுக்கு உட்படுத்துவது, முழுமைக் கணக்கிடல் முறை எனப்படும். சில சமயங்களில் ஆய்வில் உள்ள அனைத்து உறுப்புகளையும் ஆராய்ந்து அறிவது கடினமான ஒன்றாகும். ஆகையால், கூறெடுத்தல் என்ற முறையைப்பயன்படுத்தி ஆய்வில் உள்ள ஒரு பகுதி உறுப்புகளை மட்டும் தேர்ந்தெடுத்து, அவற்றின் சிறப்பியல்புகளை மதிப்பிடுவதன் மூலம் முழுமைத் தொகுதியைப் பற்றி அறிந்து கொள்ளலாம்.

(i) இல்லத்தரசி, சமையல் செய்யும் பொழுது, எதை சமைத்தாலும். அதன் சுவைப்பற்றி அறிய ஒரு தேக்கரண்டி அளவு சுவைப்பது.

(ii) நோயின் தன்மை அறிய, சில துளி ரத்தத்தின் மூலம் சோதித்து அறிவது.

(iii) ஒரு தானிய வியாபாரி, மொத்த தானியத்தின் தரம் அறிய ஒரு கைப்பிடி அளவு தானியத்தை சோதிப்பது

போன்றவை கூறெடுத்தலுக்கான பொருத்தமான எடுத்துக்காட்டுகள் ஆகும். இங்கு, கூறுகளின் மூலம் பெறப்படும் விவரங்களைப் பொறுத்து, முடிவுகள் எடுக்கப்படுகின்றன. எனவே, கூறெடுத்தல் என்பது முழுமைத் தொகுதியின் தன்மையை பிரதிபலிக்கும், ஒரு சிறிய பகுதியை தெரிவு செய்வது ஆகும்.

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 8.indd 83 09-05-2019 14:21:26

கற்றல் நோக்கங்கள்

இந்த அத்தியாயத்தைப் படித்த பின்பு பின்வரும் பாடக்கருத்துக்களை மாணவர்கள் புரிந்து கொள்ள இயலும்.

- கூறெடுப்பு முறைகள்
- சமவாய்ப்பு கூறெடுப்பு
- எளிய சமவாய்ப்பு கூறெடுப்பு முறை
- படுகை சமவாய்ப்பு கூறெடுப்பு
- முறைபடுத்திய கூறெடுப்பு
- கூறெடுப்பு முறைசார்ந்த மற்றும் முறைசாரா பண்புகள் கூறெடுப்பு பரவல்
- புள்ளியில் அனுமானங்கள்
- மதிப்பிடும் முறை
- கருதுகோள் சோதனை

8.1 கூறெடுத்தல் (Sampling)

ஒரு முழுமை தொகுதியிலிருந்து, ஒரு சிறிய பகுதியை கூறுகளாக (மாதிரியாக) தெரிவு செய்யும் முறை கூறெடுத்தல் (Sampling) அல்லது மாதிரி எடுத்தல் என்று அழைக்கப்படுகிறது. இது நம் அன்றாட வாழ்க்கையில் பயன்படுத்தப்படுகிறது.

8.1.1 கூறெடுத்தலின் அடிப்படை கருத்துருக்கள் (Basic concepts of sampling)

முழுமைத் தொகுதி (Population)

முழுமைத் தொகுதி என்பது ஆய்விற்கு தேவையான அனைத்து கூறுகள் அல்லது அனைத்து உறுப்புகளின் தொகுப்பைக் குறிக்கும். முழுமைத் தொகுதிக்கு எடுத்துக்காட்டுகளாக ஒரு நாளில் / வாரத்தில் / மாதத்தில் தயாரிக்கப்படும் இரு சக்கர வாகனங்களின் எண்ணிக்கை, நான்கு சக்கர வாகனங்களின் எண்ணிக்கை, மின்விசிறிகள், தொலைக்காட்சி பெட்டிகள், எழுதும் சுண்ணாம்பு துண்டுகள் தயாரிப்பு ஆகியவற்றின் எண்ணிக்கை மற்றும் மாணவர்கள், பெண்கள், ஆண்கள் ஆகியோரின் எண்ணிக்கை, போன்றவற்றைக் குறிப்பிடலாம்.

முடிவுறு மற்றும் முடிவுறா முழுமைத் தொகுதி (Finite and infinite population):

ஒரு குழுவில் உள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை எண்ணிடத்தக்கதாக இருப்பின், அது முடிவுறு முழுமைத் தொகுதி எனப்படும்.

ஒரு பள்ளியில் பயிலும் பன்னிரெண்டாம் வகுப்பு மாணவர்களின் எடை அல்லது உயரம் ஆகியவற்றை முடிவுறு தொகுதிக்கு எடுத்துக்காட்டாக கூறலாம்.

ஒரு முழுமைத்தொகுதியிலுள்ள உறுப்புகள் எண்ணற்றவையாக இருப்பின், அம்முழுமைத் தொகுதி முடிவுறா முழுமைத் தொகுதி எனப்படும், ஒரு மூட்டையில் உள்ள தானியங்களின் எண்ணிக்கை அளவையும், ஒரு நோயாளியின் உடலில் உருவாகியுள்ள கிருமிகளின் எண்ணிக்கை அளவையும் முடிவுறா முழுமைத்தொகுதிக்கு எடுத்துக்காட்டுகளாகக் கூறலாம்.

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 8.indd 84 09-05-2019 14:21:26

கூறு மற்றும் கூறின் அளவு (Sample and sample size)

முழுமைத் தொகுதியின் தன்மையைப் பிரதிபலிக்கும் வகையில், முழுமை தொகுதியில் தெரிவு செய்யப்படும் ஒரு பகுதி, மாதிரி அல்லது கூறு (Sample) என்று அழைக்கப்படுகிறது. அக்கூறிலுள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை, கூறின் அளவு (Sample size) என்று அழைக்கப்படுகிறது.

முழுமைத் தொகுதி பண்பளவை மற்றும் கூறு பண்பளவை (Parameter and statistic)

முழுமைத் தொகுதி பண்பளவை: முழுமைத் தொகுதியின் புள்ளியியல் மாறிகளான சராசரி (μ), பரவற்படி (σ^2) ஆகியன முழுமைத் தொகுதியின் பண்பளவைகளாகும். அவற்றைத் தொகுதிப்பண்பளவை (Parameter) என்று அழைப்பர்.

கூறு பண்பளவை : கூறுகளிலிருந்து கணக்கிடப்பட்ட எந்தவொரு புள்ளிவிவர அளவையும் கூறு பண்பளவை (Statistic)அல்லது மாதிரிப் பண்பளவை என்று அழைக்கப்படும்.

கூறு சராசரி $\overline{x}$, கூறுபரவற்படி (s^2) போன்றவை கூறுபண்பளவைகள் ஆகும்.

குறிப்பு

நடைமுறையில், தொகுதிப் பண்பளவைகளின் மதிப்புகள் தெரியாதபோது, கூறு பண்பளவை (மாதிரி) மதிப்புகளின் அடிப்படையில் தொகுதி பண்பளவைகளின் மதிப்புகள் கணக்கிடப்பட்டு பயன்படுத்தப்படுகின்றன.

கூறெடுத்தலின் வகைகள் (Types of sampling)

முழுமை தொகுதியிலிருந்து கூறுகளை தேர்ந்தெடுக்கும் உத்தி அல்லது முறையானது, கூறு (மாதிரி) எடுத்தல் கருத்தியலில் அடிப்படை முக்கியத்துவம் வாய்ந்தது ஆகும். இது பொதுவாக விவரங்களின் தன்மை மற்றும் விசாரணையின் வகை ஆகியவற்றைப் பொறுத்தே அமையும். கூறுகளைத் தேர்ந்தெடுப்பதற்கான நடைமுறைகள் பரவலாகக் கீழ்க்கண்டவாறு வகைப்படுத்தப்படுகிறது.

1. சமவாய்ப்பு அற்ற கூறெடுப்பு அல்லது நிகழ்தகவு சாரா கூறெடுப்பு
2. சமவாய்ப்பு கூறெடுப்பு அல்லது நிகழ்தகவு சார்ந்த கூறெடுப்பு

சமவாய்ப்பு கூறெடுப்பு அல்லது நிகழ்தகவு சார்ந்த கூறெடுப்பு (Random sampling or Probability sampling)

சமவாய்ப்பு கூறெடுப்பு என்பது முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து கூறுகளை சமவாய்ப்பு முறையில் தேர்ந்தெடுப்பதைக் குறிக்கிறது. சமவாய்ப்பு மாறி என்பது முழுமை தொகுதியில் உள்ள ஒவ்வோர் உறுப்பும், கூறு அல்லது மாதிரியாக தேர்ந்தெடுக்கப்படுவதற்கான வாய்ப்பு சமமாக உள்ளது என்பதாகும்.

“முழுமை தொகுதியின் ஒவ்வோர் உறுப்பும் சமவாய்ப்பின்படி சேர்க்கப்பட வாய்ப்பைப் பெற்றுள்ளது”.

– டாக்டர். யேட்ஸ்

“சமவாய்ப்பு கூறானது முழுமை தொகுதியில் உள்ள ஒவ்வோர் உறுப்பும் மாதிரியில் இடம் பெறுவதற்கு சமவாய்ப்பைப்பெற்றிருப்பதாகும்”.

– ஹார்பர்

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 8.indd 85 09-05-2019 15:19:21

நிகழ்தகவு சார்ந்த கூறெடுப்பின் முறைகள் பின்வருமாறு வகைப்படுத்தப்படுகிறது:

(i) எளிய சமவாய்ப்பு கூறெடுப்பு முறை

(ii) படுகை சமவாய்ப்பு கூறெடுப்பு முறை

(iii) முறைபடுத்திய கூறெடுப்பு முறை

(i) எளிய சமவாய்ப்பு கூறெடுப்பு முறை (Simple random sampling)

எளிய சமவாய்ப்பு கூறெடுப்பு முறையில் கூறுகளைத் தெரிவு செய்யும் முறையானது முழுமைத் தொகுதியிலுள்ள ஒவ்வோர் உறுப்பும் சமமான மற்றும் சார்பற்ற வாய்ப்பைப் பெற வழி வகுக்கிறது.

எளிய சமவாய்ப்பு கூறெடுப்பினை, உறுப்புகளைத் திரும்பவும் வைக்கும் முறை (With Replacement) அல்லது திரும்ப வைக்கா முறை (Without replacement) என்னும் வகைகளில் நிகழ்த்தலாம். எளிய சமவாய்ப்புக் கூறெடுப்பை, திருப்பி வைக்கும் முறையில் தெரிவு செய்யும்போது ஏற்கனவே தெரிவு செய்யப்பட்ட ஒரு கூறு, பல முறை கூறெடுத்தலில் இடம்பெற வாய்ப்பு உள்ளது. எனவே எளிய சமவாய்ப்பு கூறெடுப்பில், திரும்ப வைக்கா முறையினைப் பின்பற்றலாம்:

N உறுப்புகளைக் கொண்ட முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எளிய சமவாய்ப்பு கூறெடுப்பு, திரும்ப வைக்கா முறையில் முதல் உறுப்பை தெரிவு செய்வதற்கான நிகழ் தகவு $\frac{1}{N}$ ஆகவும், இரண்டாவது உறுப்பை, மீதமுள்ள $(N-1)$ உறுப்புகளிலிருந்து தெரிவு செய்வதற்கான நிகழ் தகவு $\frac{1}{(N-1)}$ ஆகவும் காணலாம். எளிய சமவாய்ப்பு கூறெடுப்பு முறையில் முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து கூறினைத் தெரிவு செய்ய பல முறைகள் இருந்தாலும் பின்வரும் இரண்டு முறைகள் பொதுவாகப் பயன்படுத்தப்படுகிறது. அவை கீழே விவரிக்கப்பட்டுள்ளது.

(A) குலுக்கல் முறை (Lottery method)

குலுக்கல் முறையானது நடைமுறையில் உள்ளதும், எளிதானதும் ஆகும். இம்முறையில், N உறுப்புகளைக் கொண்ட ஒரு முடிவுறு முழுமைத்தொகுதியில் உள்ள எல்லா உறுப்புகளையும் தனித்தனி எண்களால் குறிப்பிடவேண்டும். பிறகு முழுமைத் தொகுதியிலுள்ள அனைத்து அலகுகளின் எண்ணிக்கைக்கு ஏற்ப ஒரே அளவு, வடிவம் மற்றும் நிறம் இருக்குமாறு காகிதங்கள் தனித்தனித் துண்டுகளாக வெட்டப்பட்டு அவற்றில் எண்கள் குறிக்கப்படுகின்றன. இவற்றை ஒரே மாதிரியாக மடித்து ஒரு கொள்கலனில் இட்டு நன்றாகக் குலுக்க வேண்டும். இதிலிருந்து தேவையான கூறின் அளவிற்கு ஏற்ப, தேவையான சீட்டுகளைத் தெரிவுசெய்யவேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டாக, 100 மாணவர்களிலிருந்து 10 மாணவர்களைத் தேர்ந்தெடுப்பதாக வைத்துக்கொண்டால் ஒரே அளவுள்ள 100 துண்டு சீட்டுகளில் மாணவர்களின் பெயர் அல்லது பதிவு எண்ணை எழுதி, நன்றாகக் குலுக்கி, அதிலிருந்து பத்துசீட்டுகளை எடுத்து, அதன் மூலம் பத்து மாணவர்களைத் தேர்வு செய்ய வேண்டும். இம்முறையில் கூறுகள் முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து கட்டுப்பாடற்ற முறையில் தெரிவு செய்யப்படுவதால், இதனைக் கட்டுப்பாடற்ற சமவாய்ப்பு கூறெடுப்பு என அழைக்கலாம்.

இவ்வகையான முறை பெரும்பாலும் குலுக்கல் பரிசுகள் வழங்குவதற்கு மிக அதிகமாகப் பயன்படுத்தப்படுகிறது. இருப்பினும் முழுமைத் தொகுதியிலுள்ள உறுப்புகள் முடிவுறா எண்ணிக்கையில் இருந்தால் இம்முறையைப் பயன்படுத்த இயலாது.

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 8.indd 86 09-05-2019 14:21:26

(B) சமவாய்ப்பு எண்களின் அட்டவணை மூலம் கூறெடுக்கும் முறை (Table of Random Number)

முழுமைத்தொகுதியின் அளவு மிக அதிகமாக இருப்பின், குலுக்கல் முறைப்படி துண்டு சீட்டுகளில் எல்லா எண்களையும் குறிப்பது மிகவும் கடினமான ஒன்றாகும்.

இவ்வாறான சூழ்நிலையில் சமவாய்ப்பு எண்களால் ஆகிய அட்டவணை முறையினைப் பயன்படுத்துவது மாற்றுவழி ஆகும். நடைமுறையில் அதிகம் பயனுள்ளதாகவும் எளிய மற்றும் செலவற்ற முறையில் கூறுகளைச் சமவாய்ப்பு முறையில், சமவாய்ப்பு எண்களின் அட்டவணையைக் கொண்டு தெரிவு செய்ய முடியும். $0,1,2,\ldots,9$ என்ற இலக்கங்களைக் கொண்டு வடிவமைக்கப்படும் சமவாய்ப்பு எண் அட்டவணையில் உள்ள எண்கள், ஒன்றையொன்று சார்ந்திராமலும் எண்களின் அமைப்பு ஏறத்தாழ அதே நிகழ்வெண் எண்ணிக்கையில் இருப்பதற்கேற்ப அமைக்கப்பட்டுள்ளன.

சமவாய்ப்பு எண் அட்டவணைகள் சில கிழே தரப்பட்டுள்ளன:

(a) L.H.C. டிப்பெட்டின் சமவாய்ப்பு எண் தொடர்

(b) பிஸர் மற்றும் யேட்ஸ்ஸின் சமவாய்ப்பு எண் தொடர்

(c) கென்டல் மற்றும் ஸ்மித் இன் சமவாய்ப்பு எண் தொடர்

(d) ராண்ட் கார்ப்பரேஷனின் சமவாய்ப்பு எண் தொடர்

நடைமுறையில், டிப்பெட்டின் சமவாய்ப்பு எண் அட்டவணை பரவலாக பயன்படுத்தப்படுகிறது. டிப்பெட்டின் அட்டவணையில் இடம்பெற்றுள்ள முதல் 40 சமவாய்ப்பு எண்களின் தொகுப்பு கீழே உள்ள அட்டவணையில் விளக்கப்பட்டுள்ளது.:

2952	6641	3992	9792	7969	5911	3170	5624
4167	9524	1545	1396	7203	5356	1300	2693
2670	7483	3408	2762	3563	1089	6913	7991
0560	5246	1112	6107	6008	8125	4233	8776
2754	9143	1405	9025	7002	6111	8816	6446

ஒரு முழுமைத் தொகுதியிலுள்ள அளவிலிருந்து $N(\leq 99)$ இரண்டு இலக்க சமவாய்ப்பு எண்ணைத் தெரிவு செய்வதாக வைத்துக் கொண்டால், மேலே உள்ள சமவாய்ப்பு எண் அட்டவணையில் 00 முதல் 99 வரை எந்த எண்ணையும் தெரிவு செய்யலாம்.

இதேபோல், முழுமைத் தொகுதியின் அளவு $N(\leq 999)$ அல்லது (≤ 9999), எனில் மூன்று இலக்க சமவாய்ப்பு எண்களை 000 முதல் 999 வரை உள்ள எண்களையும் அல்லது நான்கு இலக்க சமவாய்ப்பு எண்களை 0000 முதல் 9999 வரை உள்ள எண்களையும் அட்டவணையிலிருந்து தேர்ந்தெடுக்கலாம்.

சமவாய்ப்பு கூறுகளைத் தேர்ந்தெடுக்கும் செயல்முறையின் படிநிலைகள் கீழ்க்கண்டவாறு:

1. முழுமைத்தொகுதியின் அலகுகளைக் கண்டறிந்து அதற்கு 1 முதல் N வரை எண்களைக் குறிப்பிடவும்.
2. சமவாய்ப்பு எண் அட்டவணையின் ஏதாவது ஒரு பக்கத்தினை சமவாய்ப்பு முறையில் தேர்ந்தெடுக்கவும்.

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 8.indd 87 09-05-2019 14:21:26

3. தேவையான கூறுகளை நிரல்கள், நிறைகள் அல்லது மூலைவிட்ட வாரியாகத் தேர்ந்தெடுக்கவும்.

இந்த இலக்கங்கள் எவ்வாறு சமவாய்ப்பாக இருக்க முடியும் என கேள்வி எழலாம். அட்டவணையில் உள்ள இலக்கங்களை ஒழுங்குமுறையின்றி தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட போதிலும் அவற்றின் சமவாய்ப்பு தன்மையின் உத்திரவாதம் நடைமுறை சோதனையில் உள்ளது என்று சுட்டிக் காண்பிக்கலாம்.

டிப்பெட்ஸின் அட்டவணை

டிப்பெட்ஸின் அட்டவணை, பல சோதனைகளுக்கு உட்படுத்தப்பட்டு, பல ஆய்வுகளில் பயன்படுத்தப்பட்டு அதனுடைய சமவாய்ப்புத்தன்மை நடைமுறை நோக்கங்களுக்காக நன்கு நிறுவப்பட்டுள்ளது.

டிப்பெட்ஸின் சமவாய்ப்பு எண்கள் அட்டவணையை எவ்வாறு பயன்படுத்தலாம் என்பதை விளக்கும் ஒரு எடுத்துக்காட்டு கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. 6000 அளவுகள் கொண்ட தொகுதியிலிருந்து 20 உறுப்புகள் மட்டும் எடுக்கப்படவேண்டும். 6000 அளவுகளையும் 1 முதல் 6000 வரை எண்ணிடப்பட வேண்டும். டிப்பெட்ஸின் அட்டவணையின் ஏதேனும் ஒரு பக்கத்தை தெரிவு செய்து முதல் 20 எண்களைத் தெரிவு செய்ய வேண்டும். நாம் எடுத்துக்கொண்ட பக்கத்தில் 6000க்கு மேல் எண்கள் இருப்பின் அதைத் தவிர்த்து 1 முதல் 6000 வரையிலான அடுத்த எண்ணைத் தேர்ந்தெடுக்கவும். அந்த எண்களைக் கொண்டிருக்கும் உறுப்புகள் முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து பெறப்பட்ட (தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட) கூறுகள் ஆகும். சமவாய்ப்பு அட்டவணையின் ஒரு பகுதி மட்டும் தெரிவு செய்யப்பட்டுத் தேவையான கூறுகள் நிழலிடப்பட்டுள்ளது. நாம் இதற்கு கூறுகளை தெரிவு செய்ய நிறைவாரியான தேர்வினை மேற்கொண்டுள்ளோம்.

2952	6641	3992	9792	7969	5911	3170	5624
4167	9524	1545	1396	7203	5356	1300	2693
2670	7483	3408	2762	3563	1089	6913	7991
0560	5246	1112	6107	6008	8125	4233	8776
2754	9143	1405	9025	7002	6111	8816	6446

முழுமைத் தொகுயின் அளவு 1000த்திலிருந்து நாம் 15 கூறுகளைத் தெரிவு செய்ய வேண்டுமெனில் முழுமைத் தொகுதி உறுப்புகளை 0001 முதல் 1000 வரை எண்ணிடப்பட வேண்டும்.பின்பு 15 எண்களைக் சமவாய்ப்பு அட்டவணையிலிருந்து தெரிவு செய்யலாம்.

டிப்பெட்ஸின்அட்டவணையில்நான்கு இலக்க எண்கள் இடம் பெற்றுள்ளதால் இவ்வெண்களை (கூறுகளை) தேர்ந்தெடுக்கும் முறை மாறுபடுகிறது, அதாவது நாம் முதல் மூன்று இலக்கங்களை அட்டவணையிலுள்ள நான்கு இலக்க எண்ணிலிருந்து எடுத்துக் கொள்ள வேண்டும்.கொடுக்கப்பட்ட சமவாய்ப்பு எண் அட்டவணையின் ஒரு பகுதியை பயன்படுத்தி தேவையான சமவாய்ப்பு கூறுகளானது சிவப்பு நிறத்தில் நிழலிடப்பட்டுள்ளன.இங்கு நிறைவாரியான சமவாய்ப்பு எண்ணை தேர்ந்தெடுக்கும் முறை கையாளப்படுகிறது,

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 8.indd 88 09-05-2019 14:21:26

2952	6641	3992	9792	7969	5911	3170	5624
4167	9524	1545	1396	7203	5356	1300	2693
2670	7483	3408	2762	3563	1089	6913	7991
0560	5246	1112	6107	6008	8125	4233	8776
2754	9143	1405	9025	7002	6111	8816	6446

முழுமைத் தொகுயின் அளவு 100லிருந்து நாம் 10 கூறுகளைத் தெரிவு செய்ய வேண்டுமெனில் முழுமைத் தொகுதி உறுப்புகளை 001 முதல் 100 வரை எண்ணிடப்பட வேண்டும்.பின்பு 10 எண்களைக் சமவாய்ப்பு அட்டவணையிலிருந்து தெரிவு செய்யலாம்.

டிப்பெட்ஸின் அட்டவணையில் நான்கு இலக்க எண்கள் இடம் பெற்றுள்ளதால் இவ்வெண்களை (கூறுகளை) தேர்ந்தெடுக்கும் முறை மாறுபடுகிறது, அதாவது நாம் முதல் இரண்டு இலக்கங்களை அட்டவணையிலுள்ள நான்கு இலக்க எண்ணிலிருந்து எடுத்துக் கொள்ள வேண்டும்.கொடுக்கப்பட்ட சமவாய்ப்பு எண் அட்டவணையின் ஒரு பகுதியை பயன்படுத்தி, தேவையான சமவாய்ப்பு கூறுகளானது சிவப்பு நிறத்தில் நிழலிடப்பட்டுள்ளன. இங்கு நிறைவாரியான சமவாய்ப்பு எண்ணை தெரிவு செய்யும் முறை கையாளப்படுகிறது.

2952	6641	3992	9792	7969	5911	3170	5624
4167	9524	1545	1396	7203	5356	1300	2693
2670	7483	3408	2762	3563	1089	6913	7991
0560	5246	1112	6107	6008	8125	4233	8776
2754	9143	1405	9025	7002	6111	8816	6446

எளிய சம வாய்ப்பு கூறெடுப்பு முறையின் நிறைகள் மற்றும் குறைகள்
(Merits and Demerits of Simple Random Sampling):

நிறைகள்

1. தனிப்பட்ட நபரின் விருப்பு, வெறுப்பு தவிர்க்கப்படுகிறது.
2. இது சிக்கனமான முறையாகும் ஏனெனில், பொருள் விரையம், காலவிரையம் மற்றும் அதிக உழைப்பு விரையமாவதை தவிர்க்கிறது.
3. முழுமைத்தொகுதியைப் பற்றி குறைந்தபட்ச தெளிவு முன்கூட்டியே தெரிந்திருப்பது இம்முறைக்கு போதுமானதாகும்.

குறைகள்

1. மாதிரியைத் தெரிவு செய்ய முழுமைத் தொகுதியின் முழுமையான விவரங்கள் தேவைப்படும், ஆனால் சமீபத்திய விவரங்கள் விசாரணைகளில் கிடைப்பதில்லை.
2. மாதிரியின் அளவு சிறியதாக இருக்கும் போது அவை முழுமைத் தொகுதியைப் பிரதிபலிப்பதில்லை.

எடுத்துக்காட்டு 8.1

கேண்டல் – பாபிங்டன் ஸ்மித் (பி.பி. ஸ்மித்) வாய்ப்பு எண் அட்டவணையைப் பயன்படுத்தி 5–உறுப்புக்கள் கொண்ட வாய்ப்பு மாதிரியைத் தெரிவு செய்க.

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 8.indd 89 09-05-2019 14:21:26

23	15	75	48	59	01	83	72	59	93	76	24	97	08	86	95	23	03	67	44
05	54	55	50	43	10	53	74	35	08	90	61	18	37	44	10	96	22	13	43
14	87	16	03	50	32	40	43	62	23	50	05	10	03	22	11	54	36	08	34
38	97	67	49	51	94	05	17	58	53	78	80	59	01	94	32	42	87	16	95
97	31	26	17	18	99	75	53	08	70	94	25	12	58	41	54	88	21	05	13

தீர்வு:

23	15	75	48	59	01	83	72	59	93	76	24	97	08	86	95	23	03	67	44
05	54	55	50	43	10	53	74	35	08	90	61	18	37	44	10	96	22	13	43
14	87	16	03	50	32	40	43	62	23	50	05	10	03	22	11	54	36	08	34
38	97	67	49	51	94	05	17	58	53	78	80	59	01	94	32	42	87	16	95
97	31	26	17	18	99	75	53	08	70	94	25	12	58	41	54	88	21	05	13

கேண்டல் – பாபிங்டன் ஸ்மித்தின் சமவாய்ப்பு எண் அட்டவணையிலிருந்து 5 மாதிரிகளை பல முறைகளில் தெரிவு செய்யலாம். மேற்கண்ட பட்டியலிருந்து நமக்கு தேவையான எண்களைத் தெரிவு செய்ய ஏதாவது ஒரு நிரையிலிருந்தோ அல்லது ஏதாவது ஒரு நிரலிலிருந்தோ நாம் தொடங்கலாம். இங்கு நாம் 3–ஆம் நிரலில் உள்ள எண்களை தெரிவு செய்வதாகக் கொண்டால் முதல் எண் 75 ஆகவும் 3- ஆவது நிரலில் உள்ள மற்ற எண்களான 55,16,67 மற்றும் 26 ஆகியவை மற்ற உறுப்புகளாகும். எனவே 75,55,16,67 மற்றும் 26 ஆகிய எண்களைச் சமவாய்ப்பு மாதிரியாகத் தெரிவு செய்யலாம். மேலும் மாற்று வழிகள் மூலம் தெரிவு செய்யப்பட்ட 5– சமவாய்ப்பு மாதிரிகள் அட்டவணையில் நிழலிட்டுக் காண்பிக்கப்பட்டுள்ளன.

எடுத்துக்காட்டு 8.2

கீழ்க்கண்ட டிப்பெட்டின் சமவாய்ப்பு எண் அட்டவணையை பயன்படுத்தி காவேரி தெருவில் உள்ள 83 வீடுகளிலிருந்து 15 வீடுகள் கொண்ட ஒரு சமவாய்ப்பு மாதிரியை தெரிவு செய்க.

2952	6641	3992	9792	7969	5911	3170	5624
4167	9524	1545	1396	7203	5356	1300	2693
2670	7483	3408	2762	3563	1089	6913	7991
0560	5246	1112	6107	6008	8125	4233	8776
2754	9143	1405	9025	7002	6111	8816	6446

தீர்வு:

மாதிரி அளவு 15 உள்ள ஒரு மாதிரியை டிப்பெட்டின் சமவாய்ப்பு அட்டவணையிலிருந்து பல வழிகளில் தெரிவு செய்யலாம். முழுமைத் தொகுதியின் அளவு 83 (இரண்டு இலக்க எண்) ஆதலால் தொகுதியிலுள்ள 83 வீடுகளுக்கும் கதவு எண்கள் 1 முதல் 83 வரை உள்ள எண்களைக் கொண்டு குறியிட வேண்டும்.இப்போது இரண்டாம் நிரலிலிருந்து எண்களைத் தெரிவு செய்யத் தொடங்குவோம். அவை 66,74,52,39,15,34,11,14,13,27,61,79,72,35,60 ஒருவேளை நாம் எடுக்கும் எண் 83 ஐ விட அதிகம் எனில் அவ்வெண்ணை விடுத்து 1 முதல் 83 வரை உள்ள அடுத்த எண்ணைத் தெரிவு செய்யவேண்டும்.

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 8.indd 90 09-05-2019 14:21:27

2952	6641	3992	9792	7969	5911	3170	5624
4167	9524	1545	1396	7203	5356	1300	2693
2670	7483	3408	2762	3563	1089	6913	7991
0560	5246	1112	6107	6008	8125	4233	8776
2754	9143	1405	9025	7002	6111	8816	6446

எடுத்துக்காட்டு 8.3

கீழ்க்கண்ட சமவாய்ப்பு எண் அட்டவணையைப் பயன்படுத்தி,

டிப்பெட்டின் சம வாய்ப்பு எண் அட்டவணை							
2952	6641	3992	9792	7969	5911	3170	5624
4167	9524	1545	1396	7203	5356	1300	2693
2670	7483	3408	2762	3563	1089	6913	7991
0560	5246	1112	6107	6008	8125	4233	8776
2754	9143	1405	9025	7002	6111	8816	6446

கீழ்க்கண்ட அட்டவணையில் வகைப்படுத்தப்பட்டுள்ள, ஒரு முழுமைத் தொகுதியில் உள்ள 8585 குழந்தைகளிலிருந்து 10 குழந்தைகளைக் கொண்ட மாதிரியை உருவாக்குக.

உயரம் (செ.மீ.)	105	107	109	111	113	115	117	119	121	123	125
குழந்தைகளின் எண்ணிக்கை	2	4	14	41	83	169	394	669	990	1223	1329
உயரம்(செ.மீ.)	127	129	131	133	135	137	139	141	143	145	
குழந்தைகளின் எண்ணிக்கை	1230	1063	646	392	202	79	32	16	5	2	

தீர்வு:

முதலாவதாக முழுமை தொகுதிலுள்ள 8585 குழந்தைகளுக்கும் கொடுக்கப்பட்ட அலைவெண் அட்டவணையைப் பயன்படுத்தி வரிசை எண் குறிப்பிட வேண்டும். உயரம் 105 செ.மீ. இல் 2 குழந்தைகள் உள்ளதால், இவ்விரு குழந்தைகளுக்கு 1, 2 என எண்கள் குறிப்பிடவேண்டும். 107 செ.மீ. உயரமுள்ள அடுத்த நான்கு குழந்தைகளுக்கு 3, 4, 5 மற்றும் 6 ஆகிய வரிசை எண்களை குறிக்க வேண்டும். இதேபோல் மற்ற உயரங்கள் கொண்ட குழந்தைகளுக்கும் தொடர் வரிசை எண்களைக் கொண்டு குறியிட வேண்டும். கடைசியாக 145 செ.மீ. உயரமுள்ள குழுவில் இரண்டு குழந்தைகளுக்கு 8584 மற்றும் 8585 ஆகிய எண்களை குறியீடாக வழங்கலாம்.

உயரம் (செ.மீ.)	குழந்தைகளின் எண்ணிக்கை	குவிவு நிகழ்வெண்(f)
105	2	2
107	4	6
109	14	20
111	41	61

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 8.indd 91 09-05-2019 14:21:27

113	83	144
115	169	313
117	394	707
119	669	1376
121	990	2366
123	1223	3589
125	1329	4918
127	1230	6148
129	1063	7211
131	646	7857
133	392	8249
135	202	8451
137	79	8530
139	32	8562
141	16	8578
143	5	8583
145	2	8585
மொத்தம்	8585	

முழுமைத் தொகுதியின் அளவு நான்கிலக்க எண் ஆதலால் நமக்கு தேவையான 10 மாதிரிகளை அட்டவணையிலிருந்து பெறலாம். அட்டவணையின் முதல் நிரலிருந்து தொடங்கி முழுமை தொகுதியின் அளவான 8585–க்கு மிகாமல் எண்களை தேர்வு செய்து கீழ்கண்டவாறு நிழலிடப்படுகிறது.

டிப்பெட்டின் சமவாய்ப்பு எண் அட்டவணை							
2952	6641	3992	9792	7969	5911	3170	5624
4167	9524	1545	1396	7203	5356	1300	2693
2670	7483	3408	2762	3563	1089	6913	7991
0560	5246	1112	6107	6008	8125	4233	8776
2754	9143	1405	9025	7002	6111	8816	6446

2952 என்ற எண் குறியிட்டுள்ள குழந்தையின் உயரத்தை காண வேண்டுமாயின் குவிவு நிகழ்வெண் நிரலில் 2952– க்கு அடுத்த அதிககுவிவு நிகழ்வெண் 3589–க்கு உரிய உயரமான 123 செ.மீட்டரை தேர்வு செய்யவும். இதேபோல் மற்ற எண்களுக்கு உரிய குழந்தையின் உயரத்தை கண்டு தேவையான 10 குழந்தைகள் மற்றும் அவர்களின் உயரங்கள் மாதிரியை கீழ்கண்ட அட்டவணையை உள்ளவாறு காணலாம்.

குழந்தைகளின் குறியீட்டு எண்	2952	4167	2670	0560	2754
குழந்தைகள் உயரம் (செ.மீ.)	123	125	123	117	123
குழந்தைகளின் குறியீட்டு எண்	6641	7483	5246	3992	1545
குழந்தைகள் உயரம் (செ.மீ.)	129	131	127	125	121

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 8.indd 92 09-05-2019 14:21:27

எடுத்துக்காட்டு 8.4

கீழ்க்கண்ட கேண்டல்– பாபிங்டன்ஸ்மித் சமவாய்ப்பு எண் அட்டவணையைப் பயன்படுத்தி.

23	15	75	48	59	01	83	72	59	93	76	24	97	08	86	95	23	03	67	44
05	54	55	50	43	10	53	74	35	08	90	61	18	37	44	10	96	22	13	43
14	87	16	03	50	32	40	43	62	23	50	05	10	03	22	11	54	36	08	34
38	97	67	49	51	94	05	17	58	53	78	80	59	01	94	32	42	87	16	95
97	31	26	17	18	99	75	53	08	70	94	25	12	58	41	54	88	21	05	13

1550 முதல் 8000 வரையிலான 4 இலக்க எண் கொண்ட 10 சமவாய்ப்பு மாதிரியை தேர்ந்தெடுக்க.

தீர்வு:

கொடுக்கப்பட்ட 2 இலக்க எண்களைக்கொண்ட சமவாய்ப்பு அட்டவணையிலிருந்து 1550 முதல் 8000 வரையிலான 4 இலக்கம் கொண்ட 10 மாதிரிகளை தேர்ந்தெடுக்க முதலில் இரண்டு இலக்க எண்களை மற்ற இரண்டிலக்க எண்களும் இணைந்து 4–இலக்க எண்களாக மாற்ற வேண்டும். அதாவது, அட்டவணையின் 5–வது மற்றும் 6–வது நிரல்களை நிழலிட்டவாறு இணைத்து முதல் ஐந்து மாதிரியையும் 8வது மற்றும் 9வது நிரல்களை இணைத்து அடுத்த ஐந்து மாதிரிகளையும் கொண்டு தேவையான 10 மாதிரிகளைத் தேர்ந்தெடுக்கலாம். கீழ்கண்ட அட்டவணையில் இரு நிரல்களை இணைத்து தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட சமவாய்ப்பு மாறிகளைக் காணலாம்.

23	15	75	48	59	01	83	72	59	93	76	24	97	08	86	95	23	03	67	44
05	54	55	50	43	10	53	74	35	08	90	61	18	37	44	10	96	22	13	43
14	87	16	03	50	32	40	43	62	23	50	05	10	03	22	11	54	36	08	34
38	97	67	49	51	94	05	17	58	53	78	80	59	01	94	32	42	87	16	95
97	31	26	17	18	99	75	53	08	70	94	25	12	58	41	54	88	21	05	13

எனவே, தேவையான 10 மாதிரிகளை கீழ்க்கண்டவாறு எழுதலாம்.

5901	4310	5032	5194	1899
7259	7435	4362	1758	5308

(ii) படுகை சமவாய்ப்பு கூறெடுப்பு முறை (Stratified Random Sampling)

வரையறை 8.1

படுகைசமவாய்ப்புகூறெடுப்புமுறையில்முழுமைத்தொகுதிபலதுணைமுழுமைத்தொகுதிகளாகப் பிரிக்கப்படுகிறது. இவற்றை படுகை (Strata) என அழைக்கிறோம். பிறகு ஒவ்வொரு படுகையிலிருந்தும் சமவாய்ப்பு முறையில் கூறுகள் (மாதிரிகள்) தெரிவு செய்யப்படுகிறது. எல்லா படுகைகளிலிருந்தும் பெறப்பட்ட கூறுகளின் தொகுப்பே படுகை கூறெடுப்பாகும்.

முழுமைத்தொகுதியானது அதன் பண்புகளைப் பொறுத்து அதாவது ஒத்த பண்பற்றவையாகவோ(heterogeneous), அல்லது வெவ்வேறு பகுதிகளாகவோ (துண்டுகளாகவோ) அல்லது பிரிவுகளாகவோ இருக்கும் போது படுகை கூறெடுப்பு முறை பயன்படுகிறது. படுகை

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 8.indd 93 09-05-2019 14:21:27

கூறெடுப்பு முறையின் மூலம் கூறுகளை தெரிவு செய்வதற்கு முன், முழுமைத்தொகுதியை ஒத்த பண்புகள் (homogeneous) உடைய துணைப் பிரிவுகளாக அல்லது படுகைகளாக (Strata) பிரிக்கப்பட்டு ஒவ்வொரு படுகையிலிருந்தும் கூறுகள் தெரிவு செய்யப்படவேண்டும். படுகை கூறெடுப்பு முறையில் சமவாய்ப்பு மாதிரிகளை தெரிவுசெய்யும் போது பின்பற்ற வேண்டிய படிநிலைகள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

(a) முழுமைத்தொகுதியானது ஏறத்தாழ ஒத்த பண்புகளைக் கொண்ட உறுப்புகளாலான வெவ்வேறு படுகைகளாகப் பிரிக்கப்படவேண்டும். படுகைகள் ஒன்றோடொன்று சேராதவாறு வடிவமைக்கப்படவேண்டும்.

(b) முழுமைத்தொகுதி, படுகைகளாகப் பிரிக்கப்பட்டப்பின் ஒவ்வொரு படுகையிலிருந்தும் குறிப்பிட்ட அளவு கொண்ட கூறுகளைச் சமவாய்ப்பு முறையில், குலுக்கல் முறையில் அல்லது சமவாய்ப்பு எண் அட்டவணையிலிருந்து பெறலாம்.

ஒரு மாநிலத்தில் தேர்தலுக்காக, வெவ்வேறு சட்டமன்றப் பகுதிகளை பிரிப்பது மாநிலத்திலிருந்து மாவட்டங்களை பிரிப்பது படுகைகளுக்கான எடுத்துக்காட்டுகள், இதுபோன்ற மற்ற நிகழ்வுகளிலும் படுகை கூறெடுப்பு முறை பயன்படுத்தப்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 8.5

கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள, ஒத்த பண்பற்ற 500 அளவு கொண்ட முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து 68 கூறு அளவு கொண்ட சமவாய்ப்பு மாதிரியை தெரிவு செய்யவும் படுகைகள் கீழ்கண்டவாறு வகைப்படுத்தப்பட்டுள்ளது.

சமவாய்ப்பு மாதிரியை தேர்ந்தெடுக்கவும்

வகை (1) குறைந்த வருமான வகுப்பினர் 39%

வகை (2) நடுத்தர வருமான வகுப்பினர் 38%

வகை (3) உயர் வருமான வகுப்பினர் 23%

தீர்வு

படுகைகள்	ஒத்த தொகுதிகள்	முழுமைத் தொகுதியில் சதவிகிதம்	ஒவ்வொரு படுகையில் உள்ள மக்கள் எண்ணிக்கை	சமவாய்ப்பு மாதிரிகள்
வகை 1	குறைந்த வருமான வகுப்பினர்	39	$\frac{39}{100} \times 500 = 195$	$195 \times \frac{68}{500} = 26.5 \sim 26$
வகை 2	நடுத்தர வருமான வகுப்பினர்	38	$\frac{38}{100} \times 500 = 190$	$190 \times \frac{68}{500} = 26.5 \sim 26$
வகை 3	உயர் வருமான வகுப்பினர்	23	$\frac{23}{100} \times 500 = 115$	$115 \times \frac{68}{500} = 15.6 \sim 16$
மொத்தம்		**100**	**500**	**68**

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 8.indd 94 09-05-2019 14:21:28

படுகை கூறெடுப்பின் நிறை மற்றும் குறைகள்

நிறைகள்

(a) படுகை கூறெடுப்பு முறையானது, எளிய சமவாய்ப்பு முறையை விட மேம்பட்டதாகும். ஏனெனில் கூறெடுப்பில் எல்லா படுகைகளிலிருந்தும் முழுமைத் தொகுதியின் பிரதிநிதிகள் பங்குபெறுகின்றன.

(b) படுகை கூறெடுப்பில், கூறுகளின் எண்ணிக்கை சிறிய அளவுள்ளதாக இருப்பினும் அதன் துல்லியத்தன்மை குறைவதில்லை.

(c) முழுமைத்தொகுதி பகுக்கப்பட்டிருந்தால் எளிதில் நிர்வகிக்க முடியும்.

(d) அரசானது, புவியியல் அடிப்படையில் நிலப்பகுதிகளை இடம் மற்றும் பரப்பளவைப் பொறுத்து படுகைகளாக பிரித்துள்ளதால் நேரம் மற்றும் செலவைக் குறைக்க முடிகிறது.

குறைகள்

(a) ஒத்த பண்பற்ற முழுமைத் தொகுதிகளை ஒத்த பண்புள்ள படுகைகளாக பிரிப்பது கடினமான ஒன்றாகும். அதற்கு செலவு, அதிக நேரம் மற்றும் புள்ளியியல் அனுபவம் தேவைப்படுகிறது

(b) படுகைகள் சரியான முறையில் பிரிக்கப்படாத போது துல்லியத் தன்மையை இழக்க நேரிடும்.

(c) சரியான முறையில் படுகைகள் பிரிக்கப்படுவதில் தவறுகள் நிகழ வாய்ப்பு இருப்பதால் மாறுபாடு அதிகரிக்கும்.

(iii) முறைப்படுத்திய கூறெடுப்பு (Systematic Sampling)

வரையறை 8.2

முதல் கூறெடுப்பானது சமவாய்ப்பு முறையில் முதல் kஅலகுகளிலிருந்து தெரிவு செய்யப்பட்டு, முதல் கூறிலிருந்து ஒவ்வொரு k ஆவது உறுப்புகளை அடுத்த கூறுகளாக தெரிவு செய்யப்பட்டு பெறப்படும் கூறெடுப்பு, முறைப்படுத்திய கூறெடுப்பு அல்லது முறை சார்ந்த மாதிரி எடுத்தல் முறை என அழைக்கப்படுகிறது. .

முழுமைத் தொகுதியிலுள்ள உறுப்புகளின் முழுபட்டியலும் இருக்கும்போது முறைபடுத்திய கூறெடுப்பு முறை பரவலாக பயன்படுத்தப்படுகிறது. இம்முறையைப் பயன்படுத்துவதற்கு ஏதுவாக உறுப்புகளை ஏறுவரிசையிலோ, அகரவரிசையிலோ, புவியியல் அடிப்படையிலோ அல்லது இதுபோன்ற மற்ற ஏனைய வரிசைகளிலிருந்து ஏதாவது ஒரு வரிசையில் அமைத்தல் வேண்டும். இம்முறையில் மாதிரிகளைத் தெரிவு செய்யும் போது, முதல் உறுப்பை சமவாய்ப்பு முறையில் தெரிவு செய்து பிறகு மற்றைய உறுப்புகளை நாம் வரையறுத்த வடிவத்திற்கு உட்பட்டு முதல் உறுப்பு சார்ந்த முறையாகவும் தொடர்ச்சியாகவும் தெரிவுசெய்யப்படுகின்றன. இம்முறையில் முழுமைத் தொகுதியிலுள்ள ஒவ்வொரு kஆவது உறுப்பு மாதிரியில் தேர்ந்தெடுக்கப்படுகின்றன. இங்கு k என்பது மாதிரி எடுத்தலின் இடைவெளி ஆகும். இடைவெளி k என்பது முழுமைத் தொகுதியின் அளவுக்கும் (N) மாதிரிகளின் அளவுக்கும் (n) உள்ள விகிதமாகும்.

கூறுஇடைவெளி $k = \frac{N}{n}$

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 8.indd 95 09-05-2019 14:21:28

N –முழுமை தொகுதி அளவு , k– .ஒரு முழு எண் , n = மாதிரியின் அளவு.

முறைபடுத்திய கூறெடுப்பு முறையில் கூறுகளைத் தெரிவு செய்யும் வழிமுறைகளாவன:

(i) 100 மாணவர்களைக் கொண்ட ஒரு வகுப்பிலிருந்து 10 மாணவர்களைக் கொண்ட ஒரு மாதிரியை தேர்வு செய்ய வேண்டுமெனில். மாதிரி இடைவெளி $k=\frac{N}{n}=\frac{100}{10}=10$. எனவே இங்கு மாதிரி இடைவெளி k= 10 என்பது ஒவ்வொரு 10 மாதிரிகளிலிருந்தும் ஒரு மாதிரியானது தெரிவு செய்வதைக் குறிக்கும்.

(ii) சமவாய்ப்பு முறையில் முதல் கூறெடுப்பானது முதல் 10 மாணவர்களிலிருந்து ஏதாவது ஒரு மாணவரைத் தெரிவு செய்ய வேண்டும்.

(iii) முதல் கூறானது 5 வது இடத்திலுள்ள மாணவர் எனில், மற்ற கூறுகள் முதல் கூறுடன் கூறு இடைவெளி (k= 10) கூட்டப்பட்டு, அதாவது 5, 15 , 25, 35, 45, 55, 65, 75, 85, 95 எனப்பெறலாம்.

உதாரணத்திற்கு :

6,000 உறுப்புகளைக் கொண்ட ஒரு முழுமை தொகுதியிலிருந்து 20 உறுப்புகளைக் கொண்ட ஒரு மாதிரியை முறைபடுத்திய கூறெடுப்பு முறையில் தேர்வு செய்வதாக எடுத்துக்கொள்வோம். முதலில் 1 முதல் 6000 வரையிலான எண்களை அனைத்து 6000 உறுப்புகளுக்கும் குறியிட வேண்டும்.

மாதிரி இடைவெளி $k=\frac{N}{n}=\frac{6000}{20}=300$. மாதிரி இடைவெளி k= 300 என்பது 6000 உறுப்புகள் கொண்ட முழுமைத் தொகுதியிலுள்ள ஒவ்வொரு 300 மாதிரியிலும் ஒரு மாதிரியைத் தெரிவு செய்யலாம். முதல் மாதிரி 50 வது எண்ணாகத் தெரிவு செய்வோமாயின் மற்ற உறுப்புகளை முதல் உறுப்பிலிருந்து இடைவெளி 300 ஐக் கூட்டிப் பெற வேண்டும் அதாவது (k=300) 50, 350, 650, 950, 1250, 1550, 1850, 2150, 2450, 2750, 3050, 3350, 3650, 3950, 4250, 4550, 4850, 5150, 5450, 5750. இவ்வெண்களை உறுப்புகளாக கொண்ட மாதிரிகளை முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து தெரிவு செய்யலாம்.

முறைபடுத்திய கூறெடுப்பின் நிறைகள் மற்றும் குறைகள்

நிறைகள்

1. இம்முறையானது எளிதானதும் பயன்படுத்துவதற்கு வசதியானதுமாகும்.
2. இம்முறையில் கூறுகள் முழுமைத்தொகுதி முழுவதும் சீராக பரவி இருக்கும்.
3. நேரமும் வேலையும் பெருமளவில் குறைகிறது.

குறைகள்

1. முறைப்படுத்திய கூறெடுப்பானது சமவாய்ப்பு முறையில் தெரிவு செய்யப்படுவதில்லை.
2. முழுமைத்தொகுதியன் அளவு N ஆனது மாதிரித்தொகுதி அளவு n இன் பெருக்கற்பலனாக இல்லாதிருப்பின் இடைவெளி k–இன் மதிப்பானது முழு எண்ணாக இருக்க வாய்ப்பில்லை. இவ்வாறான தருணங்களில் கூறுகளைத் தெரிவு செய்வது கடினம்.

8.1.2 கூறெடுப்புமுறை சார்ந்த மற்றும் சாரா பிழைகள் (Sampling and Non-Sampling Errors)

கூறு என்பது முழுமைத்தொகுதியின் ஒரு பகுதியாகும். முழுமைத் தொகுதிலிருந்து எடுக்கப்படும் கூறுகள் சமவாய்ப்பினைச் சாந்துள்ளதால் முழுமைத்தொகுதியின் அனைத்து சிறப்பியல்புகளையும் பெற்றிருக்கும் எனக்கூற இயலாது. விவரங்களை சேகரித்தல், முறைப்படுத்துதல், பகுத்தாய்தல் ஆகியவற்றை மேற்கொள்ளும் போது ஏற்படும் பிழைகள் இருவகையாக வகைப்படுத்தப்பட்டுள்ளன. அவை,

(i) கூறெடுப்பு சார்ந்த பிழைகள் (Sampling Errors)

(ii) கூறெடுப்பு சாரா பிழைகள் (Non–Sampling Errors)

(i) கூறெடுப்பு சார்ந்த பிழைகள் (Sampling Errors)

கூறுகளை வாய்ப்பு முறையில் தெரிவு செய்வதிலும், அவற்றின் விவரங்களை சேகரிப்பதிலும் ஏற்படும் பிழைகள் கூறெடுப்பு சார்ந்த பிழைகள் எனப்படும். இப்பிழைகள் கூறினைத் தேர்ந்தெடுக்கும் முறையினை உள்ளடக்கியாதாகும். இப்பிழை தற்செயலாகவும், சார்பற்றதாகவும், பாரபட்சம் இல்லாமலும் ஏற்படலாம்.

கூறெடுப்பு சார்ந்த பிழைகள் ஏற்படுவதற்கு முக்கிய காரணங்கள் பின்வருமாறு

(a) குறைபாடுள்ள உத்தியின் மூலம் சரியான கூறுக்கு பதில், தகுதியற்ற கூறு தேர்வு செய்யப்படும் போது.

(b) ஆய்வாளர் கூறெடுத்தலின் போது உகந்த உறுப்பு கிடைக்காதபோது அதற்கு பதிலாக தமக்கு தேவையான உறுப்பினைத் தெரிவு செய்யும்போது.

(c) நில அளவீடுகளின்போது எல்லைக் கோட்டினைக் கூறில் தேர்ந்தெடுப்பதா அல்லது தவிர்ப்பதா என்பது ஒவ்வொரு ஆய்வாளரைப் பொறுத்தாகும். இவ்வாறு கூறெடுப்பது, தவறான வரையறை கொண்ட மாதிரி அலகுகள் (Faulty demarcation of sampling) எனப்படுகிறது.

(ii) கூறெடுப்பு சாரா பிழைகள் (Non-Sampling Errors)

களப்பணி ஆய்வில் விவரங்களைச் சேகரிக்கும் போது, மதிப்பிடும் போது அல்லது கருவிகளைக் (நாடா, அளவுகோல்) கொண்டு அளவிடும் போதும் ஆய்வாளர்களுக்கிடையே விவரங்கள் வேறுபடுகிறது. இவ்வாறாக மனித காரணிகளால் எழும் பிழைகள் கூறெடுப்பு சாராபிழைகளாகும். இப்பிழை ஏற்படுவதற்கான காரணங்களாவன:

(a) ஆய்வு மேற்கொள்பவரின் அல்லது பதிலளிப்பவரின் அலட்சியம் மற்றும் கவனக்குறைவு.

(b) மாதிரி கணிப்பில் ஈடுபடும் ஆய்வாளர்களின் அனுபவமின்மை மற்றும் தகுதி குறைவு.

(c) தவறான வினாப்பட்டியல் அமைப்பு.

(d) தவறான புள்ளிவிவர அளவைகளைப் பயன்படுத்துவது.

(e) மாதிரி கணக்கெடுத்தல் முடிவடையாத ஆய்வு.

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 8.indd 97 09-05-2019 14:21:28

8.1.3 கூறெடுப்பு பரவல் (Sampling distribution)

வரையறை 8.3

ஒரே முழுமைத்தொகுதியிலிருந்து பெறப்பட்ட ஒரே அளவு கொண்ட அனைத்து மாதிரிகளின் புள்ளியியல் அளவைகள் கணக்கிடப்பட்டு, ஒரு நிகழ்வெண் (அலைவெண்) பரவல் அமைப்பதே கூறெடுப்பு பரவல் அல்லது மாதிரிப் பரவல் (Sampling distribution) என அழைக்கப்படுகிறது.

உதாரணமாக, N அளவுள்ள ஒரு முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து n அளவுடைய சமவாய்ப்பு மாதிரி எடுக்கப்படுகின்றது எனில், கிடைக்கப்பெறும் மொத்த மாதிரிகளின் எண்ணிக்கை $^NC_n = \frac{N!}{n!(N-n)!} = k$ ஆகும்.

இவ்வாறாக பெறப்பட்ட k மாதிரிகள் ஒவ்வொன்றிக்கும், $t = t(x_1, x_2, x_3, ... x_k)$, என்ற புள்ளியியல் அளவைகளான சராசரி $\bar{x}$, பரவற்படி s^2, முதலானவற்றைக் கண்டுபிடித்துப் பின்வருமாறு எழுதலாம்.

கூறெடுப்பு பரவல்			
கூறு எண்	கூறுஅளவை		
	t	$\bar{x}$	s^2
1	t_1	$\bar{x}_1$	s_1^2
2	t_2	$\bar{x}_2$	s_2^2
3	t_3	$\bar{x}_3$	s_3^2
⋮	⋮	⋮	⋮
k	t_k	$\bar{x}_k$	s_k^2

ஒவ்வொரு கூறுலிருந்தும் புள்ளியியல் அளவைகள் கணக்கிடப்பட்டு அவை கூறெடுப்புப் பரவலாக அமைக்கப்படுகிறது.

திட்டப்பிழை (Standard Error)

ஒரு புள்ளியியல் அளவையின் கூறெடுப்பு பரவலின் திட்டவிலக்கமே திட்டப்பிழை எனப்படும். இதனை S.E. எனச் சுருக்கமாகக் குறிப்பிடுகிறோம். பெருங்கூறுகளின் அதிக அளவில் அறியப்பட்ட சில திட்டப் பிழைகள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. இதில் n என்பது மாதிரியின் அளவு, σ^2 என்பது முழுமைத் தொகுதியின் மாறுபாட்டளவை (பரவற்படி) ஆகும்.

வ.எண்	கூறு அளவைகள்	திட்டப்பிழை
1.	மாதிரி சராசரி $(\bar{x})$	$\sigma/\sqrt{n}$
2.	கண்டறியப்பட்ட மாதிரி விகித சமம் (p)	$\sqrt{PQ/n}$
3.	மாதிரியின் திட்டவிலக்கம் (s)	$\sqrt{\sigma^2/2n}$

4.	மாதிரியின் பரவற்படி (s^2)	$\sigma^2\sqrt{2/n}$
5.	மாதிரி கால்மான அளவு	$1.36263\,\sigma/\sqrt{n}$
6.	மாதிரியின் இடைநிலை	$1.25331\,\sigma/\sqrt{n}$
7.	மாதிரியின் ஒட்டுறவுக்கெழு (r)	$(1-\rho^2)/\sqrt{n}$

8.1.4 திட்டப்பிழை கணக்கிடுதல் (Computing standard error)

எடுத்துக்காட்டு 8.6

ஒரு சேவையகம் வழங்கும் அலைவரிசை ஒரு மணி நேரம் கண்காணிக்கப்பட்டு, சராசரியாக நிமிடத்திற்கு 20 பரிவர்த்தனைகள் நடத்தப்படுவதாக மதிப்பிடப்படுகிறது. அதன் பரவற்படி 4 எனில் திட்டப்பிழையைக் காண்க.

தீர்வு:

பரவற்படி $\sigma^2 = 4$ $\quad \sigma = 2,\ n = 1$ மணிநேரம் = 60 நிமிடங்கள், $\bar{X} = 20$ /நிமிடம்.

$$\text{திட்டப்பிழை} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{2}{\sqrt{60}} = 0.2582$$

எடுத்துக்காட்டு 8.7

திட்ட விலக்கம் 10 மற்றும் மாதிரியைப் பொறுத்து திட்டப்பிழை 3 எனில் மாதிரியின் அளவைக் காண்க.

தீர்வு:

திட்டவிலக்கம் $\sigma = 10$, S.E. $\bar{X}$ =3, S.E = $\sigma/\sqrt{n}$

எனவே , $\quad 3 = \dfrac{10}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = \dfrac{10}{3}$

இருபுறமும் வர்க்கப்படுத்த,

$$n = \left(\frac{10}{3}\right)^2 = \frac{100}{9} = 11.11 \cong 11,$$ ∴ தேவையான மாதிரியின் அளவு $n = 11$.

எடுத்துக்காட்டு 8.8

ஒரு பகடை 9000 முறை வீசப்படும்போது அதன் மேல் உள்ள எண்கள் 3 அல்லது 4 ஆக 3240 முறை கிடைக்கின்றன. பிழையற்ற பகடையின் திட்டப் பிழை விகிதத்தைக் கணக்கிடுக.

தீர்வு :

ஒரு பகடையை உருட்டும்போது எண் 3 அல்லது 4 கிடைக்கப்பெறுவது வெற்றியாக கருதப்படுகிறது.

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 8.indd 99 09-05-2019 14:21:31

கூறுகளின் எண்ணிக்கை n = 9000; வெற்றிகளின் எண்ணிக்கை = 3240

$$\text{மாதிரி விகித சமம்} = p = \frac{3240}{9000} = 0.36$$

முழுமைத் தொகுதி விகித சமம் ஒரு பகடை உருட்டும்போது எண் 3 அல்லது 4 கிடைப்பதற்கான நிகழ்தகவு $= P$ (3 அல்லது 4)

$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} = 0.3333$$

எனவே $Q = 1 - P = 1 - 0.3333 = 0.6667$

மாதிரி விகித சமத்திற்கான திட்டப்பிழை

$$S.E. = \sqrt{\frac{PQ}{n}} = \sqrt{\frac{(0.3333)(0.6667)}{9000}} = 0.00496$$

மாதிரி விகித சமத்திற்கான திட்டப்பிழை S.E=0.00496.

எடுத்துக்காட்டு 8.9

ஒரு கூறின் அளவு 50 உடைய ஒரு மாதிரியின் திட்டவிலக்கம் 6.3. அதற்குரிய முழுமைத்தொகையின் திட்டவிலக்கம் 6 எனில் மாதிரியின் திட்டப்பிழை காண்க.

தீர்வு:

கூறின் அளவு $n = 50$

மாதிரியின் திட்டவிலக்கம் S.D $s = 6.3$

முழுமைத் தொகுதியின் திட்டவிலக்கம் S.D $\sigma = 6$

மாதிரியின் திட்டப்பிழை

$$S.E. = \sqrt{\frac{\sigma^2}{2n}} = \frac{6}{\sqrt{2(50)}} = \frac{6}{\sqrt{100}} = 1.8974$$

∴ மாதிரியின் திட்டப்பிழை S.D = 6

எடுத்துக்காட்டு 8.10

அதிக எண்ணிக்கையிலான மாணவர்களைக் கொண்ட ஒரு முழுமைத்தொகுதியிலிருந்து 100 மாணவர்கள் கொண்ட ஒரு மாதிரி தெரிவு செய்யப்படுகிறது. மாணவர்களின் சராசரி உயரம் 162 செ.மீ. மற்றும் திட்ட விலக்கம் 8 செ.மீ. முழுமைத்தொகுதியின் சராசரி உயரம் 160 செ.மீ. எனில் அதன் திட்டப் பிழையைக் காண்க

தீர்வு:

கொடுக்கப்பட்ட விவரத்தின்படி மாதிரிகளின் எண்ணிக்கை $n = 100$, $\bar{x}$ =162 செ.மீ., s = 8 செ.மீ.

மாதிரி சராசரி μ= 160 செ.மீ.

திட்டப்பிழை $S.E. = \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} = \frac{s}{\sqrt{n}} = \frac{8}{\sqrt{100}} = 0.8$

(முழுமைத் தொகுதியின் திட்ட விலக்கம் தரப்படாத நிலையில் $\hat{\sigma} = s$ எனக் கொள்வோம்)

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 8.indd 100 09-05-2019 14:21:32

எனவே, சராசரி உயரம் 160 செ.மீ. உள்ள பெரிய குழுவிலுள்ள மாணவர்களின் திட்டப்பிழை 0.8 ஆகும்

பயிற்சி 8.1

1. முழுமைத் தொகுதி என்றால் என்ன?
2. கூறு என்றால் என்ன?
3. கூறுஅளவை (Statistic) அல்லது மாதிரிப்பண்பளவை என்றால் என்ன?
4. பண்பளவையை (Parameter) – வரையறு.
5. கூறு அளவையின் மாதிரிப் பரவல் என்றால் என்ன?
6. திட்டப்பிழை என்றால் என்ன?
7. எளிய சமவாய்ப்பு கூறெடுப்பைத் தகுந்த எடுத்துக்காட்டுடன் விளக்குக.
8. படுகை கூறெடுப்பை தகுந்த எடுத்துக்காட்டுகளுடன் விளக்குக.
9. முறைபடுத்திய கூறெடுப்பை தகுந்த எடுத்துக்காட்டுகளுடன் விளக்குக.
10. கூறெடுப்பு சார்ந்தபிழையைப் பற்றி விளக்குக.
11. கூறெடுப்பு சாரா பிழையைப் பற்றி விளக்குக.
12. எளிய சமவாய்ப்பு கூறெடுப்பின் நன்மைகள் எவையேனும் இரண்டினை எழுதுக.
13. படுகை கூறெடுப்பின் நிறைகள் எவையேனும் மூன்றினை எழுதுக.
14. முறைபடுத்திய கூறெடுப்பின் குறைகள் இரண்டினைக் கூறுக.
15. முறைபடுத்திய கூறெடுப்பின் நிறைகள் இரண்டினைக் கூறுக.
16. கீழ்காணும் டிப்பெட்டின் வாய்ப்பு அட்டவணையைப் பயன்படுத்தி

2952	6641	3992	9792	7969	5911	3170	5624
4167	9524	1545	1396	7203	5356	1300	2693
2670	7483	3408	2762	3563	1089	6913	7991
0560	5246	1112	6107	6008	8125	4233	8776
2754	9143	1405	9025	7002	6111	8816	6446

மூன்றிலக்க இரட்டை எண்களாக 10 எண்களைக் கொண்ட ஒரு மாதிரியைத் தெரிவு செய்க.

17. மொத்த வணிகம் செய்யும் ஒருவர், தான் விற்பனை செய்த மொத்த ஆப்பிள்களில், 4% ஆப்பிள்கள் குறைப்பாடுள்ளவை எனக் கூறுகிறார். சமவாய்ப்பு முறையில் தெரிவு செய்யப்பட்ட 600 ஆப்பிள்களில், 36 ஆப்பிள்கள் குறைபாடுள்ளவை எனில், நல்ல ஆப்பிள்கள் குறித்த திட்டப்பிழையைக் காண்க.
18. தமிழ்நாட்டிலுள்ள ஒரு பள்ளியில், 1000 மாணவர்களைக் கொண்ட ஒரு மாதிரியில் அவர்களது சராசரி எடை 119 பவுண்டுகளாக (lbs) உள்ளது. தமிழ்நாட்டிலுள்ள மொத்த மாணவர்களின் சராசரி எடை 120 பவுண்டுகளாகவும், (lbs) திட்டவிலக்கம் 30 பவுண்டுகளாவும் (lbs) இருக்குமானால், சராசரிக்கான திட்டப்பிழையைக் கணக்கிடுக.

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 8.indd 101 09-05-2019 14:21:32

19. ஒரு முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து 60 உறுப்புகள் கொண்ட ஒரு பெருங்கூறு தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டு அதன் திட்ட விலக்கம் 2.5 ஆக கணக்கிடப்பட்டது. திட்டவிலக்கம் 3 கொண்ட முழுமைத்தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்ட மாதிரியின் பொருத்தமான திட்டப்பிழையை கணக்கிடுக.

20. ஒரு கிராமத்தில், 400 நபர்களைக் கொண்ட ஒரு கூறில் சைவ உணவு உண்பவர்கள் 230 நபர்கள், மற்றவர்கள் அசைவ உணவு உண்பவர்கள் என்க. அந்த கிராமத்தில் சைவ மற்றும் அசைவ உணவுகள் உண்பவர்களின் எண்ணிக்கை சமம் எனில் திட்டப்பிழையைக் காண்க.

புள்ளியியல் அனுமானம் (Statistical Inference)

ஒரு முழுமைத் தொகுதியின் மாதிரிகளை எடுத்துக்கொண்டு அவற்றைப் பகுப்பாய்வு செய்து, அவற்றிலிருந்து முழுமைத்தொகுதியின் பண்புகளை அனுமானிப்பதே ஒரு புள்ளியியல் ஆய்வின் முக்கிய நோக்கமாகும். மேலும், மாதிரியிலிருந்து எவ்வாறு முழுமைத்தொகுதியின் அளவைகளைப் பற்றி மதிப்பீடு செய்வது மற்றும் அம்மதிப்பீட்டினை முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து பெறப்பட்டதா என்பதை சோதிப்பது ஆகியவற்றைப் பற்றி புள்ளியியல் அனுமானமானது வழங்குகிறது.

புள்ளியியல் அனுமானத்திற்கான செயல்பாட்டில் (i) மதிப்பிடுதல் (ii) கருதுகோள் சோதனை எனும் இரண்டு முக்கிய பகுதிகள் உள்ளன. அவற்றை இங்கு விரிவாகக் காண்போம்.

8.2 மதிப்பீட்டு முறை (Estimation):

மாதிரிப்பரவல்களிலிருந்து முழுமைத்தொகுதியிலுள்ள தொகுதிப் பண்பளவைகளின் (Population Paramaters) பொருந்தக் கூடிய மதிப்புகளிலிருந்து முடிவுகளைப் பெறலாம். மதிப்பீட்டு முறையின் மூலம், தெரியாத முழுமைத்தொகுதிப் பண்பளவைகளான, தொகுதி சராசரி , தொகுதி திட்டவிலக்கம் போன்றவற்றின் மதிப்புகளை முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து பெறப்பட்ட பொருத்தமான மாதிரிப்பண்பளவையின் (Statistic) மூலம் கணக்கிடலாம்.

மதிப்பீட்டு முறை (Estimation):

வரையறை 8.4

மாதிரிப்பண்பளவைகளைப் பயன்படுத்தி தொகுதிப் பண்பளவையின் மிகச்சிறந்த மதிப்பை பெறும் முறையே மதிப்பீட்டு முறை (Estimation) என்று அழைக்கப்படுகிறது.

மதிப்பீட்டு பண்பளவை (Estimator):

வரையறை 8.5

மதிப்பு தெரியாத ஒரு தொகுதிப் பண்பளவையினை அளவிட பயன்படுத்தபடும் மாதிரிப் பண்பளவையே மதிப்பீட்டு பண்பளவை (Estimator) எனப்படும். அதாவது மதிப்பீட்டு பண்பளவை என்பது ஒரு மாதிரிப் பண்பளவையே, இது முழுமைத்தொகுதிப்பண்பளவையை மதிப்பிடப் பயன்படுகிறது.

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 8.indd 102 09-05-2019 14:21:32

மதிப்பீட்டு அளவை (Estimate):

வரையறை 8.6

மதிப்பீட்டு பண்பளவையின் ஒரு குறிப்பிட்ட மதிப்பு, மதிப்பீட்டு அளவை (Estimate) எனப்படும். மாறாக, கண்டறிந்த புள்ளியியல் அளவையின் மதிப்பே மதிப்பீட்டு அளவை ஆகும்.

சிறந்த மதிப்பீட்டு பண்பளவையின் பண்புகள் (Characteristic of a good estimator)

ஒரு சிறந்த மதிப்பீட்டு பண்பளவையின் பண்புகளாகக் கீழ்கண்டவற்றைக் கூறலாம்.

(i) பிழையற்ற தன்மை (ii) நிலைத்தன்மை (iii) திறன்தன்மை (iv) நிறைவுத்தன்மை

(i) பிழையற்றதன்மை : ஒரு மதிப்பீட்டு பண்பளவை $T_n = T(x_1, x_2, ..., x_n)$ என்பது ஒரு பிழையற்ற மதிப்பீட்டு பண்பு அளவையாக $\gamma(\theta)$ இருக்க வேண்டுமாயின், $E(T_n) = \gamma(\theta)$ என்பதை நிறைவு செய்யவேண்டும். அதாவது, எதிர்பார்த்தல் (Expectation) மதிப்பும், தொகுதிப் பண்பளவை (Population parameter) மதிப்பும் சமமாக இருக்கவேணடும். எடுத்துக்காட்டாக $E(\bar{x}) = \mu$ என்பதாகும்.

(ii) நிலைத்தன்மை: ஒரு மதிப்பீட்டு பண்பளவை $T_n = T(x_1, x_2, ..., x_n)$ என்பது ஒரு நிலைத்தன்மையுடைய மதிப்பீட்டு பண்பளவையாக $\gamma(\theta)$ இருக்க வேண்டுமாயின், T_n என்பது $\gamma(\theta)$ க்கு நிகழ்தகவு குவிவு பெற்றிருக்க வேண்டும், அதாவது $T_n \xrightarrow{P} \gamma(\theta)$ $as\, n \to \infty$, $\theta \, \varepsilon \, \Theta$.

(iii) திறன்தன்மை: T_1 என்பது மாறுபாட்டுஅளவை (variance) V_1 னின் திறத்தன்மையும், T_2 என்பது மாறுபாட்டு பண்பளவை (estimator) V_2 வின் திறத்தன்மையையும் குறிக்கும் எனில், T_2 இன் திறத்தன்மை E என்பது, $E = \dfrac{V_1}{V_2}$ என வரையறுக்கப்படுகிறது. மேலும் E இன் மதிப்பு 1 ஐ விட அதிகமாக இருக்க கூடாது.

(iv) நிறைவுத்தன்மை: $f(x, \theta)$ என்ற அடர்த்திச் சார்பு கொண்ட முழுமைத் தொகுயிலிருந்து பெறப்பட்ட n மாதிரிகள் $x_1, x_2, ..., x_n$ இன் பண்பளவையின் மதிப்பீட்டு பண்பளவை $T = t(x_1, x_2, ..., x_n)$ எனில் $x_1, x_2, ..., x_n$ மற்றும் T இன் நிபந்தனை பரவலானதும் θ-வை சாராததாகவும் இருப்பின், T–என்பதை θ –இன் நிறைவுத் தன்மையுடைய மதிப்பீட்டு பண்பளவை எனலாம்.

8.2.1 மதிப்பீட்டு முறையின் வகைகள் (Point and Interval Estimation):

ஒரு முழுமைத்தொகுதியின் தெரியாத தொகுதிப் பண்பளவையை மதிப்பிடுவதற்கு, மதிப்பீட்டு முறை கோட்பாடுகளைப் பயன்படுத்த வேண்டியுள்ளது. அவை (i) புள்ளி மதிப்பீட்டு முறை, (ii) இடைவெளி மதிப்பீட்டு முறை என இரு வகைப்படும்.

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 8.indd 103 09-05-2019 14:21:35

1. புள்ளி மதிப்பீட்டு முறை (Point Estimation)

ஒரே ஒரு மதிப்பை, மதிப்பீட்டு அளவையாகப் (Estimate) பயன்படுத்தி, தொகுதிப்பண்பளவையின் மதிப்பைப் பெறமுடியுமானால், அம்முறை புள்ளி மதிப்பீட்டு முறை (Point estimation) என்று அழைக்கப்படுகிறது. மாறாக தொகுதிப் பண்பளவையின் மதிப்பு ஒரு தனி எண்ணாக இருக்குமாயின் அதனை புள்ளி மதிப்பீட்டு முறை எனலாம்.

எடுத்துக்காட்டாக,

(i) 100 மாணவர்களைக் கொண்ட ஒரு வகுப்பில், 5 மாணவர்களைக் கொண்ட ஒரு மாதிரியின் சராசரி மதிப்பெண் 55 என்போம். இந்த மதிப்பெண் முழுவகுப்பின் சராசரி மதிப்பெண் எனக் கருதினால், இந்த 55 என்ற ஒரு மதிப்பையே, புள்ளி மதிப்பீட்டில் பெற்ற மதிப்பாகக் கருதலாம்.

(ii) 100 மாணவர்கள் உள்ள ஒரு வகுப்பில், 10 மாணவர்கள் உள்ள ஒரு மாதிரியின் சராசரி எடை 50கி.கி என்பதையே, அவ்வகுப்பிலுள்ள அனைத்து மாணவர்களின் சராசரியாகக் கருதப்படுமேயானால், அந்த 50 கிலோ கிராம் என்ற தனி மதிப்பு, புள்ளி மதிப்பீட்டில் பெற்றதாகக் கருதலாம்.

குறிப்பு

மாதிரி சராசரி $(\bar{x})$ ஆனது முழுமைத்தொகுதி சராசரி (μ) இன் மதிப்பீட்டு அளவையாக பயன்படும் மாதிரிப்புள்ளியியல் அளவையாகும்.

ஒரு தனிமதிப்பை தொகுதிப்பண்பளவையின் மதிப்பீட்டு அளவையாக பயன்படுத்துவதற்கு பதிலாக ஓர் இடைவெளியினைக் கருத்தில் எடுத்துக்கொள்ளலாம். இம்முறை இடைவெளி மதிப்பீட்டு முறை எனப்படும். இதுபற்றிக் கீழே விவரிக்கப்பட்டுள்ளது.

2. இடைவெளி மதிப்பீட்டு முறை (Interval Estimation)

புள்ளி மதிப்பீட்டு முறையை ஏற்க இயலாத சூழ்நிலைகளில், தொகுதிப் பண்பளவை மதிப்புகள் குறிப்பிட்ட இடைவெளிகளில் அமையுமாறு எல்லைகளைக் கண்டறியும் முறை இடைவெளி மதிப்பீட்டு முறை (Interval Estimation) என வரையறுக்கப்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டாக,

திட்டவிலக்கத்தின் பொதுவான பண்பின் அடிப்படையில் T என்பது திட்டப்பிழை S கொண்ட θ–இன் சிறந்த மதிப்பீட்டு பண்பளவையாகவும், θ என்பது T–இன் நிச்சயமற்ற மதிப்பீட்டு பண்பளவையாகவும் இருந்தால், θ என்பதன் தெரியாத மதிப்பு, 95% நம்பிக்கையில் (T-2s, T+2s) என்ற இடைவெளிகளுக்குள் அமையும் என்றும், 99% நம்பிக்கையில் (T-3s, T+3s) என்ற இடைவெளிகளுக்குள் அமையும் எனில், இந்த இடைவெளிகளை நம்பிக்கை இடைவெளிகள் என்கிறோம். இதனைப்பற்றி கீழே விவரிக்கப்பட்டுள்ளது.

நம்பிக்கை இடைவெளிகள் (Confidence interval)

ஒரு கூறிலிருந்து, மாதிரிப் பண்பளவை (statistic $'t'$) மதிப்பைப் பெற்றபின், தெரியாத தொகுதி பண்பளவை θ வைப்பற்றி நியாயமான நிச்சயமற்ற கூற்றை உருவாக்க முடியுமா ? என்ற வினா

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 8.indd 104 09-05-2019 14:21:35

எழுகிறது. இவ்வினாவிற்கான விடையானது நம்பிக்கை இடைவெளி என்ற நுட்பத்திலிருந்து கிடைக்கப்பெறுகிறது. ஒரு சிறு மதிப்பான α என்பதை எடுத்துக்கொண்டு அதை மிகைகாண்நிலை அல்லது மிகைகாண் மட்டம் (Level of significance) (1% அல்லது 5%) என்று கூறுகிறோம். அதற்குரிய இரு மாறிலிகள் c_1 , c_2 என்க. அது $P(c_1<\theta<c_2|t)=1-\alpha$ என்று அமையும்.

c_1 , c_2 எனும் இரு அளவுகளும் நம்பிக்கை எல்லைகள் (confidence limits) என்றும் $[c_1,c_2]$ என்ற எல்லைகளுக்குள் முழுமைத் தொகுதியின் தொகுதிப் பண்பளவை(Population Parameter) மதிப்பு அமையுமானால், அவ்விடைவெளி நம்பிக்கை இடைவெளி (Confidence Interval) என்றும் அழைக்கப்படும் . இங்கு $(1-\alpha)$ என்பது நம்பிக்கை கெழு என்று அழைக்கப்படுகிறது.

பெருங்கூறுகளில் முழுமைத் தொகுதியிலுள்ள சராசரிக்கான நம்பிக்கை இடைவெளிகள் (தொகுதி திட்டவிலக்கம் σ தெரிந்த நிலையில்) Confidence Interval for the population mean for Large Samples (when σ is known)

ஒன்றை ஒன்று சாராத n அளவுள்ள சமவாய்ப்பு கூறுகளை கொண்ட ஒரு முழுமைத் தொகுதியின் திட்ட விளக்கம் (σ) கொடுக்கப்பட்டிருந்தால் அதன் சராசரி அமையும் முழுமைத் தொகுதியின் சராசரி (μ) இடைவெளிக்குள் அமைவதற்கான நிகழ்தகவு $(1-\alpha)$ ஆகும்.

அதாவது, $P=\left(\bar{x}-Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\leq\mu\leq\bar{x}+Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=(1-\alpha)$ ஆகும்.

எனவே, முழுமைத் தொகுதியின் திட்டவிலக்கம் (σ) கொடுக்கப்பட்டிருக்கும் போது, சராசரி (μ) க்கான நம்பிக்கை இடைவெளி , $\bar{x}\pm Z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ என்பதாகும்.

நம்பிக்க இடைவெளி காண்பதற்கும் சிறப்புக்காண் சோதனைக்குமான வெவ்வேறு மிகைக்காண் நிலையில் தீர்மான மதிப்புக்கள் Z_α கீழ்க்கண்ட அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

இயல்நிலை நிகழ்தகவுடைய அட்டவணை

தீர்மான மதிப்புகள் Z_α	மிகைகாண் நிலை (α)			
	1%	2%	5%	10%
இருமுனை சோதனை	$\lvert Z_\alpha\rvert=2.58$	$\lvert Z_\alpha\rvert=2.33$	$\lvert Z_\alpha\rvert=1.96$	$\lvert Z_\alpha\rvert=1.645$
வலமுனை சோதனை	$Z_\alpha=2.33$	$Z_\alpha=2.055$	$Z_\alpha=1.645$	$Z_\alpha=1.28$
இடமுனை சோதனை	$Z_\alpha=-2.33$	$Z_\alpha=-2.055$	$Z_\alpha=-1.645$	$Z_\alpha=-1.28$

நம்பிக்கை இடைவெளிக்கான எடுத்துக்காட்டுகள்.

எடுத்துக்காட்டு 8.11

ஒரு இயந்திரம் தயாரிக்கும் உற்பத்தி பொருளின் உதிரிபாகங்களின் திட்டவிலக்கம் 1.6 செ.மீ. சமவாய்ப்பு முறையில் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட 64 மாதிரிகளின் சராசரி உயரம் 90 செ.மீ. ஆகும். உதிரிபாகங்களின் உயரம் 88 செ.மீட்டருக்கு குறைவாகவோ அல்லது 92 செமீக்கு அதிகமாகவோ இருக்கும் போது அப்பாகங்களை வாடிக்கையாளர் நிராகரிக்கிறார். உற்பத்தி செய்யப்பட்ட சராசரி உயரம் கொண்ட உதிரிபாகங்கள், 95% நம்பிக்கை இடைவெளியில் அமையும் என வாடிக்கையாளருக்கு உறுதிபடுத்த முடியுமா?

தீர்வு:

இங்கு μ என்பது உதிரிபாகங்களின் முழுமைத்தொகுதி சராசரி உயரம் ஆகும்.

μ –ஐ மதிப்பீடு செய்வதற்கான 95% எல்லைகள்

$$\bar{x} - Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

இங்கு $\sigma = 1.6$, $Z_{\alpha/2} = 1.96$, $\bar{x} = 90$ மற்றும் $n = 64$

திட்டப்பிழை $S.E. = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{1.6}{\sqrt{64}} = 0.2$

எனவே, $90-(1.96\times 0.2) \le \mu \le 90+(1.96\times 0.2)$

$$(89.61 \le \mu \le 90.39)$$

உதிரிபாகங்களின் முழுமைத்தொகுதி சராசரி உயரங்களின் உண்மை மதிப்பு (89.61, 90.39) என்ற 95% நம்பிக்கை இடைவெளியில் உள்ளது. எனவே 95% நம்பிக்கை இடைவெளியில் உள்ள உதிரிப்பாகங்களை வாடிக்கையாளர்கள் ஏற்றுக்கொள்வார்கள்.

எடுத்துக்காட்டு 8.12

பருத்தி நூலின் வலிமை (அறும் தன்மை) அறிய 100 அளவீடுகள் கொண்ட ஒரு தொகுதியினைத் தெரிவு செய்து அவற்றின் சராசரி மற்றும் திட்டவிலக்கம் முறையே 7.4 கிராம் மற்றும் 1.2 கிராம் எனில், பருத்தி நூலின் சராசரி வலிமையின் 95% நம்பிக்கை இடைவெளியை காண்க.

தீர்வு:

மாதிரியின் அளவு= 100, $\bar{x} = 7.4$, σ –ன் மதிப்பு தெரியாத நிலையில் உள்ளது.

ஆனால் $\hat{\sigma} = s = 1.2$

$$\hat{\sigma} = s,\ Z_{\alpha/2} = 1.96$$

$$S.E. = \frac{\breve{\sigma}}{\sqrt{n}} = \frac{s}{\sqrt{n}} = \frac{1.2}{\sqrt{100}} = 0.12$$

95% நம்பிக்கை இடைவெளியில் முழுமைத்தொகுதியின் சராசரியானது.

$$\bar{x} - Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$7.4-(1.96\times 0.12) \le \mu \le 7.4+(1.96\times 0.12)$$

$$7.4-0.2352 \le \mu \le 7.4+0.2352$$

$$7.165 \le \mu \le 7.635$$

முழுமைத்தொகுதியின் சராசரி வலிமைத் திறனாது (7.165,7.635) என்ற 95% நம்பிக்கை இடைவெளிக்குள் உள்ளது .

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 8.indd 106 09-05-2019 14:21:40

எடுத்துக்காட்டு 8.13

மின்விளக்குகள் தயாரிக்கும் நிறுவனம் ஒன்றிலிருந்து தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட 169 விளக்குகள் கொண்ட கூறின் சராசரி ஆயுட்காலம் 1350 மணி நேரம், அதன் திட்டவிலக்கம் 100 மணி நேரம் எனில், மின் விளக்குகளின் சராசரி ஆயுட்கால இடைவெளிகளை 90% நம்பிக்கை இடைவெளியில் காண்க.

தீர்வு:

கணக்கின்படி: $n = 169$, $\overline{x} = 1350$ மணி, $\sigma = 100$ மணி மிகைக்காண் (100-90)% =10% ஆகும். α is 0.1, 10% இல் மிகைக்காண் $Z_{\alpha/2} = 1.645$

$$S.E. = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{100}{\sqrt{169}} = 7.69$$

முழுமைத்தொகுதியின் சராசரியின் 90% நம்பிக்கை எல்லைகள்

$$\overline{x} - Z_{\alpha/2} SE < \mu < \overline{x} + Z_{\alpha/2} SE$$

$$1350 - (1.645 \times 7.69) \leq \mu < (1.645 \times 7.69)$$

$$1337.35 \leq \mu \leq 1362.65$$

மின் விளக்கு சராசரி ஆயுட்காலமானது 90% நம்பிக்கை இடைவெளியில் (1337.35, 1362.65) என்று அமைகிறது.

8.3 கருதுகோள் சோதனை (Hypothesis Testing)

கருதுகோள் சோதனை என்பது, புள்ளியியல் பகுப்பாய்வில் முக்கிய பங்கு வகிக்கும் பகுதியாகும். வழக்கமான நடைமுறை வாழ்க்கையில், பெரும்பாலும் மாதிரிகளை வைத்தே முழுமைத்தொகுதி பற்றி முடிவெடுக்க வேண்டியுள்ளது. கருதுகோள் சோதனை என்பதை புள்ளியியல் மூலம் முடிவுகளைப் பெறுதல் என்ற வகையிலும் குறிப்பிட முடியும்.

மாதிரியின் அளவு தீர்மானிக்கப்பட்ட நிலையில், சில சமயங்களில் மாதிரிகளைப்பொறுத்து ஒரு நிலையற்ற தன்மை நிலவும்போது, புள்ளியியல் நுட்பங்கள் மூலம் கருதுகோள் சோதனை செய்து ஒரு முடிவைப்பெற முடிகிறது. இவ்வாறு ஒரு முடிவெடுக்கும் திறன் பெறுவதற்குத் துணைபுரியும் புள்ளியியல் முறையைக் கருதுகோள் சோதனை என்று அழைக்கிறோம். இது ஜே. நேமன் என்பவராலும் இ.எஸ். பியர்சான் என்பவராலும் தொடங்கப்பட்டு இப்போது பரவலாக எல்லா துறைகளிலும் பயன்பட்டு வருகிறது.

எடுத்துக்காட்டாக, மாதிரிகளின் மூலம்

(i) புதிய தடுப்புமருந்து, நோயைத் தீர்ப்பதில் பயனுள்ளதாக இருக்கிறது.

(ii) தற்போதுள்ள பயிற்சி முறையைவிட புதிய பயிற்சிமுறை சிறந்ததாக உள்ளது.

(iii) விளைச்சலில், பழைய உரத்தைவிட புதிய உரம் அதிக விளைச்சல் தரக்கூடியது.

போன்றவற்றைக் கருதுகோள் சோதனை மூலம் தீர்வு கண்டு முடிவெடுக்கலாம்.

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 8.indd 107 09-05-2019 14:21:41

8.3.1 இன்மை கருதுகோள், மாற்று கருதுகோள், மிகைகாண் நிலை, பிழைகளின் வகைகள் (Null Hypothesis and Alternative Hypothesis - Level of Significants and Type of Errors)

புள்ளியியல் கருதுகோள் (Statistical Hypothesis)

முழுமைத் தொகுதி அளவை பற்றிய தற்கோள் அல்லது கூற்றை உண்மையானதாகவோ அதற்கு மாறாகவோ இருக்குமாறு எடுத்து கொள்வதே புள்ளியியல் கருதுகோள் அல்லது புள்ளியியல் எடுகோள் ஆகும்.

புள்ளியியல் கருதுகோள்களை இருவகையாகப்பிரிக்கலாம் அவை:

(i) இன்மை கருதுகோள் (Null hypothesis) (ii) மாற்று கருதுகோள் (Alternative hypothesis)

இன்மை கருதுகோள் (Null Hypothesis)

வரையறை 8.7

F.A பிஷரின் கூற்றுப்படி உண்மை என எடுக்கப்பட்ட எடுகோளை அனுமானத்தின் கீழ் நிராகரிக்க சாத்தியமான சோதனைக்குரிய எடுகோளே "இன்மை கருதுகோள்" (Null hypothesis) ஆகும். இது வழக்கமாக H_0 எனக் குறிக்கப்படும்.

உதாரணமாக குறிப்பிட்ட மதிப்பு μ_0 ஐ முழுமைத் தொகுதியின் சராசரி என அறிய விரும்பும்போது இன்மை கருதுகோள் H_0 என்பதை $H_0 : \mu = \mu_0$ என அமைத்துக் கொள்கிறோம்.

மாற்று கருதுகோள் (Alternative Hypothesis)

இன்மை கருதுகோளுக்கு நிரப்புப் பண்பாக (complementary) அதாவது எதிராக அமையும் கருதுகோள் "மாற்று கருதுகோள்" எனப்படும். இதனை வழக்கமாக H_1 என்று குறிப்பிடுகிறோம்.

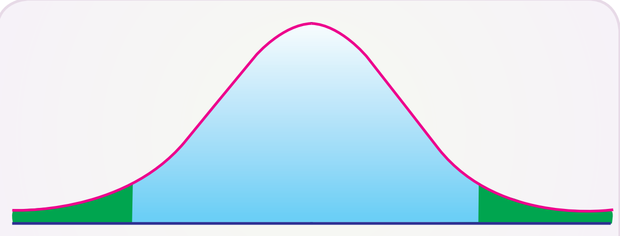
உதாராணமாக முழுமைத் தொகுதியின் சராசரி (μ) யின் குறிப்பிட்ட மதிப்பு μ_0 என்றுள்ளவாறு இன்மை கருதுகோள் சோதனையை $H_0 : \mu = \mu_0$ செய்யலாம் என்பதை நாம் அறிவோம். இதற்கு மாற்றாக, மாற்று கருதுகோள் (H_1) ஐ கீழ்க்கண்ட எவையேனும் ஒன்றின் வழியாகச் சோதனையை மேற்கொள்ளலாம்.

(i) $H_1 : \mu \neq \mu_0$ ($\mu >$ அல்லது $\mu < \mu_0$)

(ii) $H_1 : \mu > \mu_0$

(iii) $H_1 : \mu < \mu_0$

இவைகளில் $H_1 : \mu \neq \mu_0$ இல் குறிப்பிடப்பட்டுள்ள மாற்று கருதுகோளானது இருமுனை மாற்று கருதுகோள் என அழைக்கப்படுகிறது. கூறு அளவையின் மதிப்பானது மாதிரிப் பரவலின் வலது மற்றும் இடது தீர்வு கட்ட பகுதியில் அமைவதால் முழுமைத் தொகுதியின் பண்பளவை பற்றிய கருதுகோள் நிராகரிக்கப்படும் நிகழ்வே



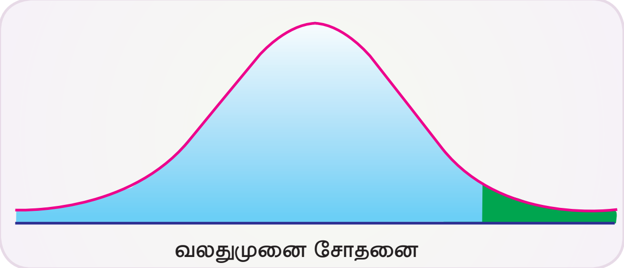
இருமுனை சோதனை

படம் 8.1

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 8.indd 108 09-05-2019 14:21:41

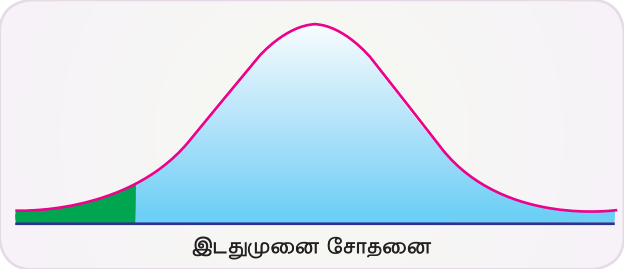
இருமுனை சோதனை என்கிறோம். கூறு அளவையின் சராசரியானது, மாதிரிப்பரவலின் தீர்வு கட்டப்பகுதி முழுவதும் வலதுமுனையில் அமைந்தால் வலதுமுனை சோதனை எனவும் இடது முனையில் அமைந்தால் இடதுமுனை சோதனை எனவும் அழைக்கிறோம். அதாவது $H_1 : \mu > \mu_0$ என்ற கருதுகோளுக்கு எதிரான மாற்று கருதுகோள்களான $H_1 : \mu > \mu_0$ (வலமுனை) அல்லது $H_1 : \mu < \mu_0$ (இடமுனை) ஆகியன ஒருமுனை சோதனையாக அமைகிறது என அறிவோம்.

வலதுமுனை சோதனை (Right tailed test): $H_1 : \mu > \mu_0$ மறுக்கப்படும் பகுதி அல்லது நிராகரிப்புப் பகுதி இயல்நிலை பரவலின் வலது முனையில் முழுவதும் அமையுமானால் $H_1 : \mu > \mu_0$ ஐ வலதுமுனை சோதனை என அழைக்கிறோம்.



படம்8.2

இடது முனை சோதனை நிராகரிப்புப் பகுதியானது இயல்நிலைப்பரவலின் இடது புறம் முழுவதும் அமையும் போது $H_1 : \mu < \mu_0$ஐ இடது முனை சோதனை என அழைக்கிறோம்.



படம்8.3

கருதுகோள் சோதனைப் பிழைகளின் வகைகள் (Types of Errors in Hypothesis testing)

இன்மை கருதுகோள் (Null Hypothesis) உண்மையாகவோ, தவறாகவோ இருக்கும் போது அவற்றைப் பற்றி எடுக்கும் முடிவுகளில் பிழைகள் நிகழ வாய்ப்புகள் அமைவதைக் காண்கிறோம் அவை.

முதல் வகைப் பிழை (Type I error): இன்மை கருதுகோள் (H_0) உண்மையாக இருக்கும்போது அதனை நிராகரிப்பது முதல் வகைப்பிழை எனப்படும்.

இரண்டாம் வகைப் பிழை (Type II error): இன்மை கருகோள் (H_0)தவறாக இருக்கும் போது அதனை ஏற்பது இரண்டாம் வகைப்பிழை எனப்படும்.

மறுக்கப்படும் பகுதி (Critical region or Rejection region)

கூறுவெளியில் இன்மை கருதுகோள் (H_0)எப்பகுதியில் மறுக்கப்படுகிறதோ அந்த பகுதியை மறுக்கப்படும் பகுதி என்கிறோம்.

குறிப்பு

மறுக்கப்படும் பகுதியின் நிரப்பு பண்பாக அமையும்பகுதி ஏற்கும் பகுதி என அழைக்கப்படுகிறது.

மிகைகாண் மட்டம் அல்லது மிகைகாண் நிலை (Level of significance)

மிகைகாண் மட்டம் என்பது முதல் வகை பிழைக்கான நிகழ்தகவினைக் குறிப்பதாகும். இது α என குறிக்கப்படுகிறது. வழக்கமாக 5% மற்றும் 1% நிலைகளை மிகைகாண் நிலைகளாக கருதுகோள் சோதனையில் எடுத்துக்கொள்வோம். மாதிரிகள் எடுப்பதற்கு முன்னதாகவே மிகைகாண் நிலை எனக்குறிப்பிடப்படுகிறது.

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 8.indd 109 09-05-2019 14:21:41

தீர்மான மதிப்பு (அல்லது) தீர்மானிக்கும் எல்லை மதிப்பு (Critical values or significant values)

கூறுபண்பளவை சோதனை அளவையில் எந்த மதிப்பானது ஏற்கப்படும் மற்றும் மறுக்கப்படுவதற்கான பகுதியினைப் பிரிக்கிறதோ அம்மதிப்பே தீர்மான மதிப்பு அல்லது தீர்மானிக்கும் எல்லை மதிப்பு என அழைக்கப்படுகிறது. இது கீழ்க்கண்டவற்றை பொறுத்து அமைகிறது.

(i) மிகைகாண் நிலை அல்லது மிகைகாண் மட்டம்

(ii) மாற்று கருதுகோளின் இருமுனை சோதனை மற்றும் ஒருமுனை சோதனை

பெருங்கூறுகளில், t கூறுபண்பளவையின் திட்ட இயல்நிலை மாறியானது,

$$Z = \frac{t - E(\mathrm{t})}{\sqrt{Var(t)}} = \frac{t - E(t)}{S.E.(t)} \sim N(0,1) \text{ as } n \to \infty \qquad \ldots (1)$$

என வரையறுக்கப்படுகிறது.

இன்மை கருதுகோளின் கீழ், (1) லிருந்து பெறப்படும் Z இன் மதிப்பே கூறுபண்பளவைச் சோதனை அளவை எனப்படும். மிகைகாண் மட்டத்தில் இருமுனை மற்றும் ஒரு முனை சோதனைகளில் பயன்படுத்தப்படும் Z ன் தீர்மான மதிப்பு ஆனது இயல்நிலை நிகழ்தகவு அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. (இயல்நிலை அட்டவணையைப் பார்க்கவும்)

கூறின் அளவு (n) பெரியதாக இருக்கும் போது ஈருறுப்பு, பாய்சன் போன்ற பரவல்கள் இயல்நிலைப் பரவலாக தோராயமாக்கப்படுகின்றன. எனவேதான் நாம் மிகைகாண் சோதனையில் இயல்நிலை சோதனையை பெருங்கூறுகளுக்கு பயன்படுத்துகிறோம்.

குறிப்பு

கூறின் அளவு $n > 30$ எனும்போது பெரும் கூறாகக் கருதுகிறோம்.

8.3.2 கருதுகோள் சோதனைக்கான வழிமுறைகள் (Testing Procedure : Large sample theory and test of significants for single mean)

கருதுகோள் சோதனை மேற்கொள்ளும்போது பயன்படுத்தப்படும் படிநிலைகள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

1. **இன்மை கருதுகோள் (Null hypothesis):** இன்மை கருதுகோள் H_0 ஐ அமைக்கவும்.

2. **மாற்றுக் கருதுகோள் (Alternative hypothesis):** மாற்று கருதுகோள் H_1 ஐ அமைக்கவும். இது இருமுனைகள் சோதனையா அல்லது ஒருமுனை சோதனையா (வலது அல்லது இடது முனை) என்பதைக்காண உதவும்.

3. **மிகைகாண் நிலை அல்லது மிகைகாண் மட்டம் (Level of significance):** மதிப்பீட்டு அளவையின் நம்பகத்தன்மை மற்றும் அதை அனுமதிப்பதில் உள்ள அபாயம் (ஆபத்து) ஆகியவற்றை பொறுத்து, மிகைக்காண் நிலை மதிப்பை (α) கூறு எடுப்பதற்கு முன்னதாக தீர்மானிக்க வேண்டும்.

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 8.indd 110 09-05-2019 14:21:42

4. கூறுபண்பளவை சோதனை (Test statistic) :

$Z=\frac{t-E(t)}{\sqrt{Var(t)}}=\frac{t-E(t)}{S.E.(t)}\sim N(0,1)$ as $n\to\infty$ யை பயன்படுத்தி கூறுபண்பளவை சோதனையைக் கணக்கிடலாம்.

5. தீர்மானம் : படி (4)ன் படி கணக்கிடப்பட்ட Z இன் மதிப்பை கொடுக்கப்பட்ட மிகைக்காண் நிலை மதிப்பு அல்லது தீர்மான மதிப்பு அல்லது Z_α -யின் அட்டவணை மதிப்பு ஆகியவற்றுடன் ஒப்பிட்டு கீழ்க்கண்டவாறு முடிவு மேற்கொள்ள வேண்டும்.

(i) $|Z|<Z_\alpha$ அதாவது, கண்டறியப்பட்ட Z –இன் மதிப்பானது, தீர்மான மதிப்பு Z_α ஐ விடக் குறைவாக இருக்கும்போது, இன்மை கருதுகோளை, மிகைகாண் நிலையில் ஏற்க வேண்டும்.

(ii) $|Z|>Z_\alpha$ எனில் இன்மை கருதுகோள் மிகைகாண் நிலைக்கேற்ப (α) மறுக்கப்படுகிறது.

சராசரிக்கான மிகைகாண் சோதனை (Test of significance for single mean)

சராசரி μ மற்றும் மாறுபாட்டளவை σ^2 கொண்ட முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து $x_i,(i=1,2,3,...,n)$ என்ற n அளவுள்ள ஒரு மாதிரியைத் தெரிவு செய்து அதன் கூறு சராசரி μ ஆகவும், மாறுபாட்டளவை $\frac{\sigma^2}{n}$ உள்ளது எனில், அதாவது $\bar{x}\sim N\left(\mu,\frac{\sigma^2}{n}\right)$. எனில் பெருங்கூறுக்கு திட்ட இயல்நிலை மாறி ஆனது.

$$Z=\frac{\bar{x}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\sim N(0,1) \text{ ஆகும்.}$$

சராசரி μ மற்றும் மாறுபாட்டளவை σ^2 என உள்ள முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து n கூறுகள் எடுக்கப்பட்டு அக்கூறுகளின் சராசரி (μ) க்கும் முழுமைத் தொகுதியின் சராசரி $(\bar{x})$ க்கும் குறிப்பிடத்தக்க வித்தியாசம் இல்லாத போது இன்மை கருதுகோள் H_0 –இன் கீழ் பெருங்கூறின் கூறுபண்பளவைச் சோதனை அளவையானது கீழ்க்கண்டவாறு கணக்கிடப்படுகிறது :

$$Z=\frac{\bar{x}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

குறிப்பு (Remark):

முழுமைத் தொகுதியின் திட்டவிலக்கம் σ கிடைக்காத போது (தெரியாத போது) கூறுகளின் மாறுபாட்டளவையைப் பயன்படுத்தி $\hat{\sigma}^2=s^2\Rightarrow\hat{\sigma}=s$ எனக் காணலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 8.14

ஒரு மகிழுந்து தயாரிக்கும் நிறுவனம் தற்போது உபயோகத்தில் உள்ள மகிழுந்தை விட எரிபொருள் சிக்கனப்படுத்தும் நோக்கில் புதிய ஆறு உருளைத் திறன் உள்ள மகிழுந்தை அறிமுகம் செய்கிறது. 50 புதிய மகிழுந்துகள் மாதிரியாக எடுத்து அதன் பெட்ரோல் உபயோகம் குறித்து சோதனை செய்யப்பட்ட போது அது சராசரியாக ஒரு லிட்டருக்கு 10 கி.மீ. மற்றும் அதன் திட்ட

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 8.indd 111 09-05-2019 14:21:43

விலக்கம் 3.5 கி.மீ என அறியப்பட்டது. புதிய மகிழுந்தின் சராசரி பெட்ரோல் உபயோகம் லிட்டருக்கு 9.5 கி.மீ என்ற நிறுவனத்தின் அறிவிப்பை ஏற்று கொள்ளலாமா என்பதை 5% மிகைகாண் நிலையில் சோதிக்க.

தீர்வு:

கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களிலிருந்து, கூறு அளவு $n= 50$, கூறு சராசரி $\overline{x} = 10$ கி.மீ,

கூறின் திட்டவிலக்கம் $s = 3.5$ கி.மீ

முழுமைத்தொகுதி சராசரி $\mu = 9.5$ கி.மீ

முழுமைத்தொகுதியின் திட்டவிலக்கம் σ கொடுக்கப்படவில்லையாதலால் $\sigma = s$ எனக் கொள்வோம்.

இது பெருங்கூறாதலால் Z – சோதனையைப் பயன்படுத்தலாம். சோதனை அளவை Z ஆனது திட்ட இயல்நிலை மாறியாகும்.

இன்மை கருதுகோள், கூறு சராசரிக்கும் முழுமைத் தொகுதி சராசரிக்கும் இடையே குறிப்பிடத்தக்க சிறப்பான வித்தியாசம் இல்லை அதாவது $H_0 : \mu = 9.5$ என்பதாகும்.

மாற்று எடுகோள் : கூறு சராசரி மற்றும் நிறுவனத்தின் சராசரிக்கும் வித்தியாசம் உள்ளது. அதாவது $H_1 : \mu \neq 9.5$ (இருமுனை சோதனை)

மிகைகாண் நிலை $\alpha = 5\% = 0.05$

கூறுபண்பளவைச் சோதனை கணக்கிடுதல்

$$Z = \frac{\overline{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1); \; Z = \frac{10 - 9.5}{\frac{3.5}{\sqrt{50}}} \sim N(0,1) = \frac{0.5}{0.495} = 1.01$$

கணக்கிடப்பட்ட Z–ன் மதிப்பு $Z = 1.01$ மற்றும் எதிர்பாக்கப்படும் மதிப்பு அல்லது அட்டவணை மதிப்பு $Z_{\alpha/2} = 1.96$. கணக்கிடப்பட்ட மதிப்பை அட்டவணை மதிப்போடு ஒப்பிடும்போது $Z < Z_{\alpha/2}$ அதாவது $1.01 < 1.96$.

முடிவு: கணக்கிடப்பட்ட Z மதிப்பானது அட்டவணை மதிப்பை $Z_{\alpha/2}$ விட குறைவாக உள்ளதால் $Z < Z_{\alpha/2}$. 5% மிகைகாண் நிலையில் இன்மை கருதுகோள் H_0 ஏற்றுக் கொள்ளப்படுகிறது. ஆகவே நிறுவனத்தின் அறிவிப்பின்படி புதிய மகிழுந்தின் எரிபொருள் பயன்பாடு 9.5 கி.மீ/லி என்பதை ஏற்றுக்கொள்ளலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 8.15

பந்து முனை பேனா தயாரிக்கும் நிறுவனமானது, தான் தயாரிக்கும் பேனாவின் (எழுதும்) ஆயுள், சராசரியாக 400 பக்கங்களாகவும், திட்டவிலக்கம் 20 பக்கங்கள் எனக் கூறுகிறது.ஒரு முகவர் 100 பேனாக்களைக் கொள்முதல் செய்து சோதனைக்கு உட்படுத்துகின்றார். அதன சராசரி (எழுதும்) ஆயுள் 390 பக்கங்கள் எனக் கண்டறிகிறார். கொள்முதல் முகவர் நிறுவனத்தின் கூற்றை 1% மிகைகாண் நிலையில் நிராகரிக்கலாமா?

தீர்வு:

கூறின் அளவு $n = 100$, கூறின் சராசரி $\bar{x} = 390$ பக்கங்கள் ,

முழுமைத்தொகுதி சராசரி $\mu = 400$ பக்கங்கள்

முழுமைத்தொகுதி திட்டவிலக்கம் SD $\sigma = 20$ பக்கங்கள்

பெருங்கூறானதால் Z சோதனையை பயன்படுத்துகிறோம்.

இன்மை கருதுகோள் : நிறுவனம் தயாரித்த போனாவின் (எழுதும்) ஆயுளின் கூறு சராசரிக்கும், முழுமைத்தொகுதி சராசரிக்கும் குறிப்பாக வித்தியாசம் இல்லை. $H_0 : \mu = 400$ என்க.

மாற்று கருதுகோள் : நிறுவனம் தயாரித்த போனாவின் எழுதும் ஆயுளின் கூறு சராசரிக்கும் முழுமைத் தொகுதி சராசரிக்கும். குறிப்பிடத்தக்க வித்தியாசம் உள்ளது. $H_1 : \mu \neq 400$ (இருமுனை சோதனை)

மிகைகாண் நிலை $\alpha = 1\% = 0.01$

கூறுபண்பளவை சோதனைக்கேற்ப கணக்கிடல்

$$Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1); \; Z = \frac{390 - 400}{\frac{20}{\sqrt{100}}} = \frac{-10}{2} = -5, \; \therefore |Z| = 5$$

$$Z_{\alpha/2} = 2.58$$

கண்டறியப்பட்ட மதிப்பு $|Z| = 5$ மற்றும் எதிர்பார்க்கும் மதிப்பு (அல்லது) அட்டவணை மதிப்பு $Z_{\alpha/2} = 2.58$, கணக்கிடப்பட்ட மதிப்பை அட்டவணை மதிப்போடு ஒப்பிடும்போது $Z > Z_{\alpha/2}$ அதாவது $5 > 2.58$.

முடிவு : கணக்கிடப்பட்ட Z –இன் மதிப்பானது, அட்டவணை மதிப்பு $Z_{\alpha/2}$ விட அதிகமாக உள்ளதால், $Z > Z_{\alpha/2}$ முதல் 1% மிகைகாண் நிலையில், இன்மை கருதுகோள் H_0 நிராகரிக்கப்படுகிறது. எனவே $\mu \neq 400$ என தீர்மானித்து நிறுவனத்தின் கூற்றை 1% நிலையில் நிராகரிக்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 8.16

(i) 900 பேர் கொண்ட ஒரு கூறின் சராசரி 3.4 செ.மீ. ஆகவும், திட்டவிலக்கம் 2.61 செ.மீ. ஆகவும் உள்ளது. சராசரி 3.25 செ.மீ. மற்றும் திட்டவிலக்கம் 2.62 செ.மீ. கொண்ட ஒரு பெரிய முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து அக்கூறு எடுக்கப்பட்டதா? என சோதிக்க.

(ii) இயல் நிலையில் உள்ள ஒரு முழுமைக் தொகுதியின் சராசரி தெரியாத நிலையில், உண்மை சராசரியின் 95% மற்றும் 98% நம்பிக்கை எல்லைகளை காண்க.

தீர்வு:

(i) கணக்கின்படி

கூறு அளவு : $n = 900$, கூறு சராசரி $\bar{x} = 3.4$ செ.மீ,

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 8.indd 113 09-05-2019 14:21:45

கூறு திட்டவிலக்கம் (SD) $s = 2.61$ செ.மீ.

முழுமைத்தொகுதி சராசரி μ= 3.25 செ.மீ, முழுமைத் தொகுதியின் திட்டவிலக்கம் (SD) σ = 2.61 செ.மீ.

இன்மை கருதுகோள் $H_0 : \mu = 3.25$ செ.மீ. (சராசரி $\mu = 3.25$ மற்றும் திட்டவிலக்கம் $\sigma = 2.61$ செ.மீ. உடைய முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து கூறு எடுக்கப்பட்டிருகிறது).

மாற்று கருதுகோள் $H_1 : \mu \neq 3.25$ செ.மீ. (இருமுனைசோதனை I) அதாவது சராசரி $\mu = 3.25$ செ.மீ. மற்றும் திட்டவிலக்கம் $\sigma = 2.61$ செ.மீ. கொண்ட முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து கூறு எடுக்கப்படவில்லை.

மிகைகாண் நிலை $\alpha = 5\% = 0.05$

கூறுபண்பளவை சோதனைக்கு ஏற்பக் கணக்கிடல்:

$$Z = \frac{3.4 - 3.25}{\frac{2.61}{\sqrt{900}}} = \frac{0.15}{0.087} = 1.724$$

$$\therefore Z = 1.724$$

கணக்கிடப்பட்ட $\therefore Z = 1.724$ மற்றும் அட்டவணை மதிப்பு $Z_{\alpha/2} = 1.96$

இவற்றை ஒப்பிடுகையில் $Z < Z_{\alpha/2}$ அதாவது $1.724 < 1.96$.

முடிவு: கணக்கிடப்பட்ட 5% மதிப்பானது, அட்டவணை மதிப்பை விட குறைவாக உள்ளது. அதாவது 5% மிகைகாண் நிலையில் $Z < Z_{\alpha/2}$ ஆக உள்ளதால். இன்மை கருதுகோள் ஆனது ஏற்றுக்கொள்ளப்படுகிறது.

எனவே, சராசரி $\mu = 3.25$ செ.மீ. மற்றும் திட்டவிலக்கம், $\sigma = 2.61$ செ.மீ. உடைய முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து கூறானது எடுக்கப்பட்டது என முடிவு செய்யப்படுகிறது.

(ii) நம்பிக்கை எல்லைகள் (Confidence limits)

முழுமைத் தொகுதியின் சராசரி μவிற்கான 95% நம்பிக்கை எல்லைகள் :

$$\bar{x} - Z_{\alpha/2} SE \leq \mu \leq \bar{x} + Z_{\alpha/2} SE$$

$$3.4 - (1.96 \times 0.087) \leq \mu \leq 3.4 + (1.96 \times 0.087)$$

$$3.229 \leq \mu \leq 3.571$$

முழுமைத் தொகுதியின் சராசரி μவிற்கான 98% நம்பிக்கை எல்லைகள் :

$$\bar{x} - Z_{\alpha/2} SE \leq \mu \leq \bar{x} + Z_{\alpha/2} SE$$

$$3.4 - (2.33 \times 0.087) \leq \mu \leq 3.4 + (2.33 \times 0.087)$$

$$3.197 \leq \mu \leq 3.603$$

எனவே, μ– இன் 95% நம்பிக்கை இடைவெளி (3.229,3.571) மற்றும் 98% நம்பிக்கை இடைவெளி (3.197,3.603) ஆகும்.

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 8.indd 114 09-05-2019 14:21:47

எடுத்துக்காட்டு 8.17

ஒரு பல்பொருள் அங்காடியில் ஒரு வாரத்தில் விற்பனை செய்யப்பட்ட சோப்பின் சராசரி 146.3 ஆக உள்ளது. விளம்பரத்திற்கு பிறகு 400 கடைகளை மாதிரி எடுத்ததில் வாராந்திர சராசரி விற்பனை 153.7 மற்றும் அதன் திட்டவிலக்கம் 17.2 எனில், விளம்பர பிரச்சாரம் வெற்றியடைந்ததாக கருதலாமா?

தீர்வு:

கூறின் அளவு n = 400 கடைகள்

கூறு சராசரி $\overline{x}$ = 153.7 சோதனைகள்

கூறு திட்டவிலக்கம் SD s = 17.2 சோப்புகள்

முழுமைத் தொகுதியின் திட்டவிலக்கம் m = 146.3 சோப்புகள்

முழுமைத் தொகுதியின் திட்டவிலக்கம் கொடுக்கப்படாததால் கூறு திட்டவிலக்கம் $s = \sigma$ என கொள்வோம்.

இன்மை கருதுகோள் : விளம்பர பிரச்சாரம் வெற்றியாக இல்லை. $H_0 : \mu = 146.3$ (விளம்பரத்திற்கு முன்னும் பின்னும் வாராந்திர சோப்பு விற்பனையில் சிறப்பான வித்தியாசம் இல்லை)

மாற்று கருதுகோள் $H_0 : \mu > 146.3$ (வலதுமுனை சோதனை) விளம்பர பிரச்சாரம் வெற்றிகரமானதாக உள்ளது)

மிகைகாண் நிலை $\alpha = 0.05$

கூறுபண்பளவைசோதனைக்கு ஏற்பக் கணக்கிடல்

$$Z = \frac{\overline{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$$

$$Z = \frac{153.7 - 146.3}{\frac{17.2}{\sqrt{400}}}$$

$$= \frac{7.4}{0.86} = 8.605$$

$$\therefore Z = 8.605$$

கணக்கிடப்பட்ட மதிப்பு $Z = 8.605$ மற்றும் எதிர்பார்க்கப்படும் மதிப்பு அல்லது அட்டவணை மதிப்பு $Z_\alpha = 1.645$ ஆகியவற்றிலிருந்து $8.605 > 1.645$ என பெறுகிறோம்.

கண்டறியப்பட்ட மதிப்பானது அட்டவணை மதிப்பை விட அதிகமாக உள்ளதால் $Z > Z_\alpha$, 5% மிகைகாண் நிலையில் இன்மை கருதுகோள் H_0 மறுக்கப்படுகிறது. எனவே விளம்பர பிரச்சாரம் சோப்பு விற்பனையை அதிகரித்துள்ளது என கருதலாம்.

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 8.indd 115 09-05-2019 14:21:48

எடுத்துக்காட்டு 8.18

இயல்நிலை பரவலில் உள்ள ஒரு தொழிற்சாலை ஊழியர்களின் ஊதியங்களின் சராசரி μ மற்றும் மாறுபாட்டளவை 25 என்க. 50 பணியாளர்கள் கொண்ட ஒரு கூறில் உள்ளவர்களின் மொத்த ஊதியம் ₹ 2,550 என்க. கருதுகோள், $\mu = 52$, என்பதையும் அதற்கு மாறான கருதுகோள் $\mu = 49$ யையும் 1% மிகைகாண் நிலையில் சோதனை செய்க.

தீர்வு:

கூறு அளவு $n = 50$ ஊழியர்கள்

மொத்த ஊதியம் $\sum x = 2550$

கூறு சராசரி $\bar{x} = \frac{\text{மொத்த ஊதியம்}}{n} = \frac{\sum x}{n} = \frac{2550}{50} = 51$ அலகுகள்

முழுமைத் தொகுதி சராசரி $\mu = 52$

முழுமைத் தொகுதி மாறுபட்டளவை $\sigma^2 = 25$

முழுமைத் தொகுதி திட்டவிலக்கம் SD $\sigma = 5$

இன்மை கருதுகோள் $H_0 : \mu = 52$

மாற்று கருதுகோள் $H_1 : \mu \neq 52$ (இருமுனை)

மிகைகாண் நிலை $\alpha = 0.01$

கூறுபண்பளவை சோதனை $Z = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$

$$Z = \frac{51-52}{\frac{5}{\sqrt{50}}} = \frac{-1}{0.7071} = -1.4142$$

மாற்று கருதுகோள் இருமுனை சோதனையாகும், எனவே $|Z| = 1.4142$ எனப் பெறுகிறோம்

தீர்மான மதிப்பு 1% மிகைகாண் நிலையில் $Z_{\alpha/2} = 2.58$

முடிவு: கணக்கிடப்பட்ட மதிப்பானது அட்டவணை மதிப்பை விட குறைவாக உள்ளது. $Z < Z_{\alpha/2}$, 1% மிகைகாண் நிலையில் இன்மை கருதுகோள் H_0 ஏற்றுக் கொள்ளப்படுகிறது.

எனவே கூறு சராசரிக்கும் தொகுதி சராசரி $\mu = 52$, திட்டவிலக்கம் $\sigma = 5$ –க்கும் குறிப்பிடத்தக்க வித்தியாசம் இல்லை என்பதால் $\mu = 49$ என்பது நிராகரிக்கப்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டு 8.19

அவசர மருத்துவ சிகிச்சை வாகன சேவை வழங்கும் ஒரு நிறுவனம், தங்களுக்கு கிடைக்கப் பெறும் அவசர அழைப்பின் போது சராசரியாக 8.9 நிமிடங்களில் அழைப்பிடத்தை சென்றவடைவதாக கூறுகிறது. அவர்களின் கூற்றை சோதிக்க, எடுக்கப்பட்ட 50 அவசர அழைப்பின் மாதிரி தேர்வுகளில் அதன் சராசரி 9.3 நிமிடங்கள், திட்டவிலக்கம் 1.6 நிமிடங்கள் என அறியப்படுகிறது. 5% மிகைகாண் நிலையில் நிறுவனத்தின் கூற்று சரியானதா?

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 8.indd 116 09-05-2019 14:21:49

தீர்வு:

கூறு அளவு $n = 50$

கூறு சராசரி $\overline{x} = 9.3$ நிமிடங்கள்

கூறு திட்டவிலக்கம் $s = 1.6$ நிமிடங்கள்

முழுமைத் தொகுதி சராசரி $\mu = 8.9$ நிமிடங்கள்

இன்மை கருதுகோள் $H_0 : \mu = 8.9$

மாற்று கருதுகோள் $H_1 : \mu \neq 8.9$(Two tail)

மிகைகாண் நிலை $\alpha = 0.05$

கூறுபண்பளவை சோதனைக்கு $Z = \dfrac{\overline{x}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$

$$Z = \frac{9.3-8.9}{\frac{1.6}{\sqrt{50}}} = \frac{0.4}{0.2263} = 1.7676$$

கணக்கிடப்பட்ட மதிப்பு $Z = 1.7676$

5% மிகைகாண் நிலையில் தீர்மான மதிப்பு $Z_{\alpha/2} = 1.96$

முடிவு: கணக்கிடப்பட்ட மதிப்பானது அட்டவணை மதிப்பை விட குறைவாக உள்ளது. அதாவது, $Z < Z_{\alpha/2}$ 5% மிகைகாண் நிலையில் இன்மை கருதகோள் ஏற்கப்படுகிறது எனவே நோயுற்றோரை ஏற்றிச் செல்லும் வண்டிசேவை சராசரி 8.9 நிமிடங்களில் அவசர அழைப்பிடத்தை சேரும் என்ற கூற்று உண்மையாகிறது.

பயிற்சி 8.2

1. புள்ளியியல் அனுமானத்தின் இரண்டு பகுதிகளை எழுதுக?
2. மதிப்பீட்டுப் பண்பளவை என்றால் என்ன?
3. மதிப்பீட்டு அளவை என்றால் என்ன?
4. புள்ளி மதிப்பீட்டு முறை என்றால் என்ன?
5. இடைவெளி மதிப்பீட்டு முறை என்றால் என்ன?
6. நம்பிக்கை இடைவெளி என்றால் என்ன?
7. இன்மை கருதுகோள் என்றால் என்ன? எடுத்துக்காட்டு தருக.
8. மாற்று கருதுகோள் – வரையறு.
9. மறுக்கும் பகுதியை – வரையறு.
10. மறுக்கும் அளவு – வரையறு.
11. மிகைகாண் நிலை – வரையறு.
12. முதல்வகை பிழை என்றால் என்ன?
13. ஒருமுனை சோதனை என்றால் என்ன?.

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 8.indd 117 09-05-2019 14:21:50

14. சராசரி மதிப்பு 4 மற்றும் திட்டவிலக்கம் 3 உடைய ஒரு முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட 100 உறுப்புகளைக் கொண்ட ஒரு கூறின் சராசரி 63.5 எனில் சராசரியின் மாறுபாடு குறிப்பிட்டத்தக்கதா?

15. 400 தனிநபர்களைக் கொண்ட ஒரு கூறில் உள்ளவர்களின் சராசரி உயரம் 67.47 அங்குலம் எனில், அக்கூறானது சராசரி உயரம் 67.39 அங்குலமும் திட்டவிலக்கம் 1.30 அங்குலமும் கொண்ட முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து எடுக்கப்பட்டதாக கருதலாமா?

16. ஒரு தேசிய நிர்வாக திறன் தேர்வில் மாணவர்களின் சராசரி மதிப்பெண் 76 மற்றும் திட்டவிலக்கம் 8 என்க. மாநிலத்தின் கல்வி முறையினை மதிப்பீடு செய்ய சமவாய்ப்பு முறையில் 100 மாணவர்கள் தெரிவு செய்யப்பட்டனர். அவர்களின் சராசரி மதிப்பெண் 72 எனில் தேசிய மற்றும் மாநில அளவில் மாணவர்களின் மதிப்பெண்களில் குறிப்பிடத்தக்க வித்தியாசம் உள்ளதா என்பதை 0.05 மிகைக்காண் நிலையில் சோதிக்க.

17. ஒரு தயாரிப்பாளர் வழங்கிய கம்பி வடத்தின் சராசரி முறியும் வலிமை 1800 ஆகவும் திட்டவிலக்கம் 100 ஆகவும் உள்ளது. கம்பி வடத்தின் முறிவு வலிமை புதிய தொழில் நுட்பம் மூலம் அதிகரித்துள்ளது என உரிமையாளர் கூறுகிறார். அவர் கூற்றைச் சோதிக்க, 50 கம்பி வடம் மாதிரியாக எடுக்கப்பட்டு அதன் சராசரி முறியும் வலிமை 1850 என்று கண்டறியப்படுகிறது. தயாரிப்பாளரின் கூற்றை 0.01 என்ற மிகைகாண் நிலை சோதனையில் ஆதரிக்கலாமா?

பயிற்சி 8.3

ஏற்புடைய விடையைத் தெரிவு செய்க:

1. முடிவுறு அல்லது முடிவுறா ___________ என்பது அதில் உள்ள முடிவுறு அல்லது முடிவுறா உறுப்புகளின் எண்ணிக்கையைப் பொறுத்தாகும்.

   (a) முழுமைத்தொகுதி (b) முழுமைக்கணிப்பு

   (c) தொகுதிப் பண்பளவை (d) மேற்கூறிய எதுவுமில்லை

2. ஒரு முழுமைத் தொகுதியின் ……………… கூறு என அழைக்கப்படுகிறது.

   (a) முடிவுறா கணம் (b) முடிவுறு உட்கணம் (c) முடிவுறு கணம் (d) முழுமை கணம்

3. ஒரு முழுமைத் தொகுதியின் முடிவுறு உட்கணத்தை ………………என கூறலாம்.

   (a) கூறு (b) முழுமைத்தொகுதி (c) முழுமை (d) முழுமைக் கணிப்பு

4. கூறுகளிலிருந்து கணக்கிடப்பட்ட எந்தவொரு புள்ளியியல் அளவைகளும் ………… எனப்படும்.

   (a) தொகுதிபண்பளவை (b) கூறு பண்பளவை

   (c) முடிவுள்ள அளவை (d) எண்ணத்தக்கதற்ற அளவை

5. ……………என்பது முழுமைத் தொகுதியிலுள்ள ஒவ்வொரு உறுப்பும் தேர்ந்தெடுக்கப்படுவதற்கு ஒரு சமமான வாய்ப்பை அளிக்கும் ஒன்றாகும்.

   (a) பண்பளவை (b) சமவாய்ப்பு கூறு

   (c) புள்ளியியல் அளவை (d) முழுமைத் தொகுதி

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 8.indd 118 09-05-2019 14:21:50

6. சமவாய்ப்பு கூறானது முழுமைத்தொகுதியில் உள்ள ஒவ்வொரு உறுப்பும் மாதிரியில் இடம்பெறுவதற்கான சமவாய்ப்பைப் பெற்றிருக்கும் உறுப்புகளால் ஆனது என கூறியவர்.

(a) ஹார்பர் (b) ஃபிஷர் (c) கார்ல் பியார்ஸன் (d) டாக்டர் யேட்ஸ்

7. கீழ்க்காண்பவற்றில் எது நிகழ்தகவு கூறெடுப்பு வகையைச் சார்ந்தது .

(a) நோக்கமுள்ள மாதிரித்தேர்வு (b) கருத்து கணிப்புமுறை

(c) எளிய சமவாய்ப்பு கூறெடுப்பு (d) ஏதுவான முறை

8. N அளவுள்ள ஒரு முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து சமவாய்ப்பு கூறெடுப்பு முறையில் முதன் முறை ஒரு உறுப்பு தேர்வு செய்யும்போது அதன் நிகழ்தகவு

(a) $\frac{n}{N}$ (b) $\frac{1}{N}$ (c) $\frac{N}{n}$ (d) 1

9. ……………..யில் ஒரு சீரற்ற முழுமைத் தொகுதியானது சீரான துணை முழுமைத் தொகுதிகளாகப் பிரிக்கப்படுகிறது.

(a) நிகழ்தகவு சாரா கூறெடுப்பு முறை (b) எளிய சமவாய்ப்பு கூறெடுப்பு முறை

(c) படுகை வாய்ப்பு கூறெடுப்பு முறை (d) முறைப்படுத்திய கூறெடுப்பு முறை

10. கூறெப்பில் உள்ள பிழைகள் ___________

(a) இருவகை (b) மூன்று வைக (c) நான்கு வகை (d) ஐந்து வகை

11. கூறு அளவையைப் பயன்படுத்தி முழுமைத் தொகுதி பண்பளவைக்கான மிக சிறந்த மதிப்பை பெற முற்படும் முறையே………………

(a) மதிப்பீட்டு முறை (b) மதிப்பீட்டு அளவை

(c) பிழற்சியான மதிப்பீடு (d) திட்டப் பிழை

12. மதிப்பீட்டு அளவையானது மாதிரி புள்ளியியல் அளவையின்_____________ஐ மதிப்பிட பயன்படுகிறது.

(a) முழுமைத்தொகுதி பண்பளவை (b) பிழையான மதிப்பீட்டு

(c) மாதிரி அளவு (d) முழுமைக் கணிப்பு

13. …………..என்ற பண்பானது ஒரு மதிப்பீட்டு அளவையானது மற்றொரு மதிப்பீட்டு அளவையை ஒப்பிடும்போது திறன் வாய்ந்தது என வரையறுக்கப்படுகிறது.

(a) திறன்தன்மை (b) நிறைவுத்தன்மை

(c) பிழையற்றதன்மை (d) நிலைத்தன்மை

14. $P[|\hat{\theta}-\theta|<\varepsilon]\to 1$, $n\to\infty$, $\varepsilon>0$, எனில் $\hat{\theta}$ என்பது θ –ன்________ உடைய மதிப்பீட்டு அளவையாகும்.

(a) திறன்தன்மை (b) நிறைவுத்தன்மை

(c) பிழையற்ற தன்மை (d) நிலைத்தன்மை

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 8.indd 119 09-05-2019 14:21:50

15. மதிப்பீட்டு அளவையானது பண்பளவையில் குறித்த அனைத்து மதிப்பீடுகளையும் உள்ளடக்கிய தரவுகளைப் பெற்றிருந்தால் அது ___________ வாய்ந்தது ஆகும்.

(a) திறன்தன்மை (b) நிறைவுத்தன்மை (c) பிழையற்ற தன்மை (d) நிலைத்தன்மை

16. முழுமைத் தொகுதி பண்பளவை கொடுக்கப்பட்ட இரு எண்களுக்கிடையே அமைந்துள்ளது என எதிர்பார்க்கப்படும் இடைவெளி பண்பளவையின் ________ இடைவெளியாகும்.

(a)புள்ளி மதிப்பீடு (b) இடைவெளி மதிப்பீடு

(c) திட்டப்பிழை (d) நம்பிக்கை

17. முழுமைத் தொகுதி பண்பளவையைக்குறித்த கருதுகோள் அல்லது கூற்றை உண்மை அல்லது அதற்கு மாறாக எடுத்துக்கொள்வது________ ஆகும்.

(a) கருதுகோள் (b) புள்ளியியல் அளவை (c) கூறு (d) முழுமைக் கணிப்பு

18. முதல் வகைப்பிழை என்பது

(a) H_0 உண்மை எனில் ஏற்கப்படுவது (b) H_0 தவறு எனில் ஏற்படுவது

(c) H_0 உண்மை எனில் மறுக்கப்படுவது (d) H_0 தவறு எனில் மறுக்கப்படுவது.

19. இரண்டாவது வகைப்பிழை என்பது_________ஆகும்.

(a) H_0 தவறு எனில் ஏற்பது (b) H_0 உண்மை எனில் ஏற்பது

(c) H_0 உண்மை எனில் மறுப்பது (d) H_0 தவறு எனில் மறுப்பது

20. கூறுசராசரியின் திட்டப்பிழையானது

(a) $\frac{\sigma}{\sqrt{2n}}$ (b) $\frac{\sigma}{n}$ (c) $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ (d) $\frac{\sigma^2}{\sqrt{n}}$

இதர வினாக்கள்

1. கூறெடுத்தலின் வகைகளை விவரி.
2. கூறெடுப்புப் பரவல் மற்றும் திட்டப்பிழை சிறுகுறிப்பு வரைக.
3. கருதுகோள் சோதனை செய்வதன் வழிமுறைகளை விவரி.
4. கூட்டு சராசரிக்கான சிறப்புகாண் சோதனையை விவரி.
5. ஒரு பெரிய தொகுதியிலிருந்து 500 எண்ணிக்கையுள்ள அன்னாசிப்பழம் எடுக்கப்பட்டடன. அவற்றில் 65 வீணானவை எனில், விகிதத்திற்கான திட்டப்பிழையைக் காண்க.
6. ஒரு பள்ளியிலிருந்து 100 மாணவர்கள் மாதிரியாகத் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டனர். மாதிரியின் சராசரி எடை மற்றும் மாறுபாடு முறையே 67.45 கிகி மற்றும் 9 கிகி எனில் (அ) 95% மற்றும் (ஆ) 99% –ல் மாணவர்களின் சராசரியின் அமையும் நம்பிக்கை இடைவெளி காண்க
7. 1600 மாணவர்களை உடைய மாதிரியில், மாணவர்களின் சராசரி நுண்ணறிவு ஈவு 99. சராசரி 100 மற்றும் திட்டவிலக்கம் 15 கொண்ட முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து அக்கூறு எடுக்கப்பட்டதா எனச் சோதிக்க. (5% மிகைநிலை சோதனையில்)

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 8.indd 120 09-05-2019 14:21:51

தொகுப்புரை

- **கூறெடுத்தல்:** முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து கூறினைத் தெரிவு செய்யும் முறையாகும்.
- **முழுமைத்தொகுதி:** கணக்கிடத் தேவையான அனைத்து உறுப்புகளைக் கொண்ட முழுமையான தொகுதியாகும்.
- **கூறு:** முழுமைத்தொகுதியிலிருந்து தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டதொகுதி.
- **கூறுஅளவு:** கூறில் உள்ள உறுப்புகளின் எண்ணிக்கை.
- **எளிய சமவாய்ப்பு கூறெடுப்புமுறை:** முழுமைத் தொகுதியிலுள்ள ஒவ்வோர் உறுப்பும் சமமான மற்றும் சார்பற்ற வாய்ப்பைப் பெறுமாறு கூறுகளை தெரிவு செய்யும் முறை.
- **படுகை கூறெடுப்பு:** முழுமைத் தொகுதி பல துணை முழுமைத் தொகுதிகளாக பிரிக்கப்படுகிறது. இவற்றை படுகை (Strata) என அழைக்கிறோம்.
- **முறைப்படுத்திய கூறெடுப்பு:** முதல் கூறெடுப்பானது சமவாய்ப்பு முறையில் முதல் kஅலகுகளிலிருந்து தெரிவு செய்யப்பட்டு, முதல் கூறிலிருந்து ஒவ்வொரு k-வது உறுப்புகளை அடுத்த கூறுகளாக தெரிவு செய்யப்படுவது முறைப்படுத்திய கூறெடுப்பு என அழைக்கப்படுகிறது.
- **கூறெடுப்பு பரவல்:** ஒரே முழுமைத் தொகுதியிலிருந்து பெறப்பட்ட ஒரே அளவு கொண்ட அனைத்து கூறுகளின் புள்ளியியல் அளவைகள் கணக்கிடப்பட்டு ஒரு அலைவெண் பரவல் அமைப்பதே கூறெடுப்பு பரவல் அல்லது மாதிரிப் பரவல் (Sampling Distribution) என அழைக்கப்படுகிறது.
- **திட்டப்பிழை:** ஒரு புள்ளியியல் அளவையின் கூறெடுப்பு பரவலின் திட்டவிலக்கமே திட்டப்பிழை எனப்படும்
- **புள்ளியியல் அனுமானங்கள்:** ஒரு முழுமைத் தொகுதியின் மாதிரிகளை எடுத்துக்கொண்டு அவற்றைப் பகுப்பாய்வு செய்து, அவற்றிலிருந்து முழுமைத்தொகுதியின் பண்புகளை ஆராய்வதே புள்ளியியல் அனுமானங்கள் ஆகும்.
- **மதிப்பீட்டு முறை:** மாதிரிப்பண்பளவையைப் பயன்படுத்தி தொகுதிப் பண்பளவைகளை மதிப்பீடு முறையே மதிப்பீட்டு முறை (Estimation) எனப்படும்.
- **புள்ளி மதிப்பீட்டுமுறை:** ஒரே ஒரு மதிப்பை, மதிப்பீட்டு அளவையாகப் (estimate) பயன்படுத்தி, தொகுதிப்பண்பளவையின் மதிப்பைப் பெறமுடியுமானால், அம்முறை புள்ளி மதிப்பீட்டு முறை (point estimation) என்று அழைக்கப்படுகிறது.
- **இடைவெளி மதிப்பீட்டு முறை:** புள்ளி மதிப்பீட்டு முறையை செயல்படுத்த இயலாத சூழ்நிலைகளில், தொகுதிப் பண்பளவை மதிப்புகள் குறிப்பிட்ட இடைவெளிகளில் அமையுமாறு எல்லைகளைக் கண்டறியும் முறை இடைவெளி மதிப்பீட்டு முறை (Interval Estimation) என்று அழைக்கப்படுகிறது.
- **கருது கோள் சோதனை:** ஒரு முடிவெடுக்கும் திறன் பெறுவதற்குத் தேவையான புள்ளியியல் முறையைக் கருதுகோள் சோதனை என்று அழைக்கிறோம்.

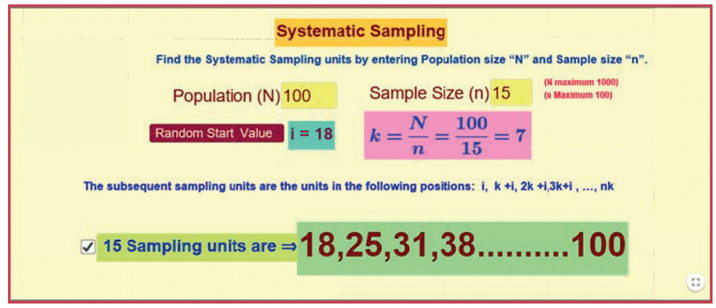
XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 8.indd 121 09-05-2019 14:21:51

- **இன்மை கருதுகோள்:** உண்மை என கருதப்பட்ட எடுகோளை அனுமானத்தின் கீழ் நிராகரிக்க சாத்தியமான சோதனை எடுகோளே இன்மை கருதுகோள் ஆகும்.
- **மாற்று கருதுகோள்:** இன்மை எடுகோளுக்கு நிரப்புப் பண்பாக (complementary) அதாவது எதிராக அமையும் கருதுகோள் "மாற்று கருதுகோள் அல்லது மாற்று எடுகோள்" எனப்படும்.
- **முதல்வகை பிழை:** இன்மை கருதுகோள் H_0 உண்மையாக இருக்கும்போது நமது சோதனை மறுக்கப்படும்போது ஏற்படும் பிழை முதல் வகைப்பிழை என்கிறோம்.
- **இரண்டாம்வகை பிழை:** இன்மை கருகோள் H_0 தவறாக இருந்து நமது சோதனை ஏற்கப்படும் போது பிழை நிகழலாம் அவ்வகைப்பிழையை இரண்டாம் வகைப்பிழை என்கிறோம்.
- **கூட்டு சராசரிக்கான சிறப்புக்காண் சோதனை :** $Z = \dfrac{\overline{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$

கலைச்சொற்கள் (Glossary)	
இடைவெளி மதிப்பீடு	Interval Estimation
இன்மை எடுகோள்	Null hypothesis
எளிய சம வாய்ப்பு கூறெடுப்பு	Simple Random Sampling
கூறற்ற பிழை	Non-Sampling Errors
கூறின் அளவு	Sample size
கூறு	Sample
கூறுபண்பளவை/மாதிரிப்பண்பளவை	Statistic
கூறுபரவல்	Sampling distribution
கூறுபிழை	Sampling Errors
கூறெடுப்பு	Sampling
திட்டபிழை	Standard Error
தீர்மானிக்கும் பகுதி/ மறுக்கும் பகுதி	Critical Region
தொகுதிப்பண்பளவை	Parameter
நம்பிக்கை இடைவெளி	Confidence interval
படுகை சமவாய்ப்பு கூறெடுப்பு	Stratified Random Sampling
புள்ளி மதிப்பீடு	Point Estimation
புள்ளியியல் உய்த்துணர்வு/புள்ளியியல் அனுமானங்கள்	Statistical Inference
மதிப்பீடு	Estimation
மாற்று எடுகோள்	Alternative hypothesis
மிகைகாண் நிலை/மிகைகாண் மட்டம்	Level of Significance
முழுமைத்தொகுதி	Population
முறையுடை கூறெடுப்பு	Systematic Sampling

இணையச் செயல்பாடு

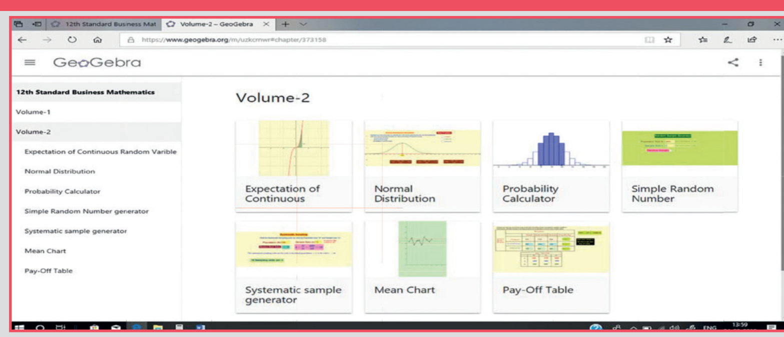
எதிர்பார்க்கப்படும் விளைவு



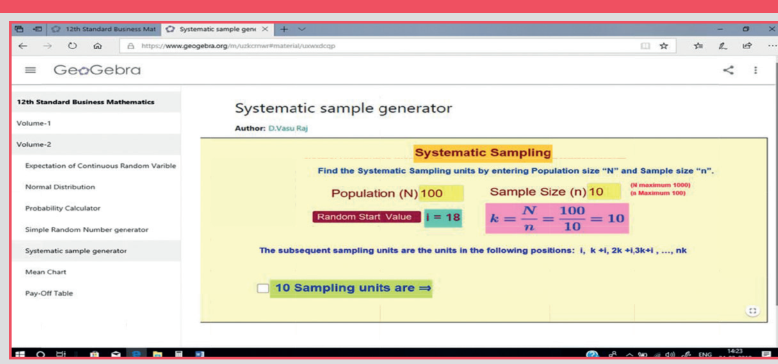
படி – 1 : கீழ்க்காணும் உரலி / விரைவுக் குறியீட்டைப் பயன்படுத்தி இச்செயல்பட்டிற்கான இணையப் பக்கத்திற்குச் செல்க. பின்பு "12th Standard Business Mathematics and Statistics" என்னும் திரையில் "Volume–2" யை தெரிவு செய்யவும்.

படி - 2 : "Normal Distribution" என்னும் பயிற்சித்தாளினை தெரிவு செய்துகொள்ளவும். வலது பக்கத்தில் உள்ள "New Problem" என்னும் பொத்தானை சொடுக்கவும் பின்பு Answer – I, Answer – II, Answer – III யை சொடுக்கினால் அதற்க்கான சரியான விடைகளைப் பெறலாம்.

படி 1



படி 2



செயல்பாட்டிற்கான உரலி : **https://ggbm.at/uzkcrnwr**

அல்லது விரைவுக் குறியீடு **(QR Code)**

B247_12_BUS_MAT_TM

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 8.indd 123 09-05-2019 14:21:52

9

பயன்பாட்டுப் புள்ளியியல்

வால்டர் ஆண்ட்ரிவ் ஷுவார்ட்

(மார்ச் 18, 1891-மார்ச் 11, 1967)

அறிமுகம்

அன்றாட வாழ்க்கையில் பல்வேறு துறைகளில் எடுக்கப் படும் நடவடிக்கைகளுக்குப் புள்ளியியல் கோட்பாடுகளைச் செயல்படுத்துவதற்கு பயன்பாட்டுப் புள்ளியியல் (Applied Statistics) பெரிதும் உதவுகிறது. தற்போது, ஒவ்வொரு துறையிலும் புள்ளியியலின் பயன்பாடானது தவிர்க்க இயலாத ஒன்றாகும். வணிக முடிவெடுத்தல், நிதி, வியாபாரம், பொருளாதாரம், சமூக அறிவியல், தொழில் மற்றும் விவசாயம் போன்ற துறைகளில் புள்ளியியல் கருத்தாக்கத்தின் பங்களிப்பு பெரிதும் செயல்படுத்தப் படுகிறது. ஒரு தொழிற்துறையில் தொடர்ச்சியாக மேற்கொள்ள வேண்டிய நடிவடிக்கைகள் அதாவது இன்றைய மற்றும் எதிர்கால சூழல் பற்றிய ஆய்வு செய்ய பயன்பாட்டுப் புள்ளியியல் ஒரு முக்கிய அம்சமாக திகழ்கிறது.

வால்டர் ஆண்ட்ரிவ் ஷுவார்ட் என்பவர் அமெரிக்க இயற்பியலாளர் பொறியாளர் மற்றும் புள்ளியியலாளர் ஆவர். புள்ளியியல் தரக்கட்டுப்பாட்டின் தந்தை என அறியப்பட்டவர் மற்றும் ஸ்வார்ட் சுழற்சி கருத்தியலிலும் தொடர்பு கொண்டிருந்தார்.

காலம்சார் தொடர்வரிசை, குறியீட்டெண் மற்றும் புள்ளியியல் தரக்கட்டுப்பாடு போன்ற புள்ளியியல் முறைகள் பற்றிய கோட்பாடு மற்றும் பயன்பாடு ஆகியவற்றை இந்த அத்தியாயத்தில் நாம் படிப்போம். அவை ஒவ்வொன்றும் அதன் துறை சார்ந்த பயன்பாட்டில் முக்கியத்துவத்தைக் கொண்டுள்ளன. புள்ளியியலின் பகுப்பாய்வானது அறிவியல் ஆராய்ச்சி, கணக்கெடுப்பு மற்றும் சோதனைகள் என பலவகைகளில் பரவலாகப் பயன்படுத்தப்படுகிறது. புள்ளியியல் பகுப்பாய்வு விளக்கத்தின் நம்பகத் தன்மையானது, சேகரிக்கபட்ட தகவல் மற்றும் அவற்றை முன்னிலைப் படுத்தும் செயலைப் பொறுத்தே அமைகிறது.

கற்றல் நோக்கங்கள்

மாணவர்கள் இந்த அத்தியாத்தை கற்ற பிறகு கீழ்க்கண்ட பாடப்பகுதிகளை புரிந்து கொள்ள இயலும்.

- காலம்சார் தொடர் வரிசை புள்ளி விவரங்கள்
- காலம்சார் தொடர் வரிசையின் கூறுகள்
- நகரும் சராசரிகள் முறை
- பருவகால மாறுபாடு

DAGU6N

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 9.indd 124 09-05-2019 14:24:09

- குறியீட்டெண்கள்
- நிறையிட்ட குறியீட்டு எண்கள்
- சீரான குறியீட்டு எண்களுக்கான சோதனைகள்
- புள்ளியியல் தரக்கட்டுப்பாடு
- மாறுபாடுகளுக்கான காரணங்கள்
- செயல்முறை கட்டுப்பாடு மற்றும் உற்பத்தி கட்டுப்பாடு,

9.1 காலம்சார் தொடர் வரிசை பகுப்பாய்வு (Time Series Analysis)

காலம்சார் தொடர் வரிசையின் பகுப்பாய்வு என்பது ஒரு கால கட்டத்தில் சேகரிக்கப்பட்ட விவரங்களின் வடிவங்களைத் தீர்மானிக்க பயன்படுத்தப்படும் ஒரு புள்ளியியல் முறை ஆகும். கடந்தகால மற்றும் தற்போது நடந்துள்ள மாற்றங்களைக் கவனிக்கவும், புரிந்துகொள்ளவும் கடந்தகால விவரங்களை பற்றி நாம் ஒவ்வொரும் அறிந்திருக்க வேண்டும். காலம்சார் தொடரின் ஒரு குறிப்பிட்ட காலப் பகுதியில் எந்தவொரு குறிப்பிட்ட அம்சத்தின் வழக்கமான அல்லது ஒழுங்கற்ற நிகழ்வையும் அடையாளம் காணமுடியும். பெரும்பாலான காலம்சார் தொடர் புள்ளி விவரங்கள், பொருளாதாரம், வணிகம், வாணிபம் போன்ற துறைகளுடன் தொடர்புடையது. உதாரணமாக, ஒரு பொருளின் உற்பத்தி, பொருளின் விலை, விற்பனை, ஒரு நாட்டின் வருமானம், ஒரு தனிநபர் வருமானம் போன்றவைகள் ஆகும். காலம்சார் தொடர் வரிசையின் புள்ளி விவரங்களைக் கூர்ந்து கண்காணிப்பதன் மூலம், தொழில் மற்றும் பிறதுறைகளில் எதிர்கால நடவடிக்கைகளை முன்னெடுக்க மற்றும் திட்டமிடத் தீர்மானிக்கப்படுகிறது.

வரையறை 9.1

ஒரு காலம்சார் புள்ளி விவரங்கள் காலவரிசைப்படி வடிவமைக்கப்படுகிறது.

– காக்ஸ்டன் & கவ்வுடன்.

அளவிடக் கூடிய புள்ளி விவரங்களை அதன் நிகழ்வுகளின்படி வரிசைப்படுத்துவதின் முடிவில் கிடைக்க கூடிய தொடரானது காலம்சார் தொடர் வரிசை ஆகும். – வெஸ்ல் & வாலட்.

9.1.1 காலம்சார் தொடரின் பொருள், பயன்கள் மற்றும் அடிப்படைக் கூறுகள் (Meaning, Uses and Basic Components)

பொருள்:

ஒரு காலம்சார் தொடரானது கண்டறிந்த பதிவுகளின் தொகுப்பை காலவரிசையில் (ஏறுவரிசையில் அல்லது இறங்குவரிசையில்) உள்ளடக்கியதாகும். காலம்சார் வரிசையின் முக்கிய நோக்கமானது விவரங்களின் வேறுபாடுகளைக் கண்டறிந்து வேறுபாடுகளை நீக்க முயற்சிப்பதற்கும், எதிர்கால மதிப்பீடுகளை மதிப்பிடுவதற்கும் மற்றும் அவற்றைக் கணிக்கவும் உதவுகிறது.

நாம் ஏன் காலம்சார் தொடரைக் கற்றுக் கொள்ளவேண்டும்?

- கடந்த கால நடவடிக்கைகளை பகுப்பாய்வு செய்வதற்கு.
- எதிர்கால அம்சங்களை கணிப்பதற்கும் மற்றும் திட்டமிடுவதற்க்கும் உதவுகிறது.
- நிகழ்கால செயல்பாடுகளை மதிப்பீடு செய்வதற்கு.

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 9.indd 125 09-05-2019 14:24:09

காலம்சார் தொடரானது ஒரு குறிப்பிட்ட கால வரைவுகளை மற்ற கால வரைவுகளுடன் ஒப்பீட்டு ஆய்வுகள் செய்ய உதவுகிறது.

எனவே காலம்சார் தொடர் வரிசையானது வணிகத்துறை, பொருளாதாரம், தொழிற்சாலை ஆகிய துறைகளின் காலம் தொடர்புடைய புள்ளி விவரங்களைப் படிப்பதற்கும் மற்றும் பகுப்பாய்வு செய்வதற்கும் நமக்கு உதவுகிறது.

காலம்சார் தொடரின் கூறுகள் (Components of Time Series)

ஒரு காலம்சார் தொடரில் நான்கு வகைக் கூறுகள் உள்ளன. அவை பின்வருமாறு;

(i) நீள் காலப்போக்கு

(ii) பருவகால மாறுபாடுகள்

(iii) சுழற்சி மாறுபாடுகள்

(iv) சீரற்ற மாறுபாடுகள்

(i) நீள் காலப்போக்கு (Secular Trend)

நீள் காலப்போக்கு என்பது ஒரு நீண்டகால இடைவெளியில் அதிகரிக்கும் அல்லது குறையும் அல்லது தேக்கமளிக்கும் ஒரு காலம்சார் தொடரின் பொதுவான போக்கு ஆகும். பொதுவாக, நாட்டின் மக்கள் தொகை, தொழிற்சாலைகளின் உற்பத்தி விற்பனை, பொருளின் விலை, தனி நபரின் வருமானம் போன்றவைகள் அதிகரிக்கக் கூடியப்போக்கைக் கொண்டிருக்கும். மரணம், தொற்றுநோய், மின்னலை இயந்திரகருவிகள், நீர் ஆதாரங்கள், இறப்பு விகிதம் போன்றவற்றில் இப்போக்கானது ஒரு கீழ்நோக்குப் போக்காக காணப்படுகிறது. கொடுக்கப்பட்ட காலப்பகுதியில் ஏற்ற அல்லது இறக்கங்கள் ஒரே திசையில் இருக்க வேண்டும் என்பது அவசியமில்லை.

(ii) பருவகால மாறுபாடு (Seasonal Variations)

பருவகால வேறுபாடு என்பது ஒவ்வொரு பருவத்திலும் குறிப்பிட்டகால முறையில் மீண்டும் மீண்டும் உருவாகிறது. இந்த வேறுபாடுகள் ஒரு வருடத்திற்கும் குறைவான காலத்திற்குள் மீண்டும் மீண்டும் ஏற்படுகின்றன. இது குறிப்பிட்ட கால இடைவெளியில் அளவிடப்படுகிறது. பருவ காலவேறுபாடுகள் இயற்கை சக்திகள், சமூகபழக்கங்கள் மற்றும் மரபுகள் ஆகியவற்றால் பாதிக்கப்படலாம். இந்த மாறுபாடுகள் அதன் காரணிகளின் முடிவுகளாகும். இது சீராக மற்றும் வழக்கமாக அதிகரித்தும், வீழ்ச்சியுற்றும் காணப்படும்.

எடுத்து காட்டாக, மழைக் காலங்களில் குடைகள் மற்றம் மழைக்குப் பயன்படுத்தப்படும் உடைகள் (Raincoat) விற்பனை, கோடைப்பருவத்தில் குளிர்பானங்களின் விற்பனை, தீபாவளிப் பண்டிகை நாள்களில் பட்டாசு விற்பனை, பண்டிகை காலங்களில் ஆடைகள் வாங்குதல், பொங்கல் திருநாள்களில் கரும்பு விற்பனை.

(iii) சுழற்சி மாறுபாடு (Cyclic Variations)

பொதுவாக, இந்த மாறுபாடுகள் சீரான காலம்சார் ஒழுங்கிற்கு அமையத் தேவையில்லை. அதாவது சுழற்சி மாறுபாடு சமமான இடைவெளிகளுக்குப் பின்னர் அல்லது இதே போன்ற சரியான வடிவங்களை பின்பற்றாமல் இருக்கலாம். பொதுவாக ஒரு சுழற்சிகாலம் என்பது 7 முதல் 9 ஆண்டுகள் வரையிலானது. சுழற்சிக்கான காலப் பகுதியை ஆண்டுகளின் நிலைப்பாட்டில் கட்டாயப்படுத்த முடியாது.

எடுத்து காட்டாக, அரசு நிதிக் கொள்கைகளின் மாற்றங்கள், வட்டி விகிதங்களில் மாற்றங்கள் ஆகியவற்றிற்கான ஒவ்வொரு வர்த்தக சுழற்சியும் துவக்கம் – அபிவிருத்தி – வீழ்ச்சி – மீட்சி – பராமரிப்பு போன்றவைகளை பெற்றிருக்கும்.

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 9.indd 126 09-05-2019 14:24:09

(iv) சீரற்ற மாறுபாடு (Irregular Variations)

சீரற்ற மாறுபாடுகளுக்கு குறிப்பிட்ட வடிவமைப்பு கிடையாது மற்றும் இவற்றின் நிகழ்வுகளுக்கு வழக்கமான நேரத்திற்கான காலஅளவு என எதுவும் கிடையாது. இவை தற்செயலாக நிகழும் மாற்றங்கள் ஆகும். இவை முற்றிலும் ஒழுங்கற்ற, கணிக்க முடியாத குறுகியகால மாறுபாடுகள் ஆகும். சிலசமயங்களில் அதன் நிகழ்வில் புதிய சுழற்சிகளையோ அல்லது மாறுபாடுகளின் மற்ற இயக்கங்களை அதிகரிக்கச் செய்வதாலேயே அதன் விளைவு மிகவும் தீவிரமாகிறது.

எடுத்து காட்டாக, வெள்ளம், போர்கள், பூகம்பங்கள், சுனாமி, வேலை நிறுத்தங்கள், கதவடைப்புகள் போன்றவைகள்.

காலம்சார் தொடருக்கான கணித வடிவமைப்பு (Mathematical Model for a Time Series)

காலம்சார் தொடரின் கூறுகளை பொதுவாக அதன் பயன்பாட்டுக்காக இரண்டு வகைகளாகப் பிரிக்கலாம். அவை (i) கூட்டு வடிவமைப்பு, (ii) பெருக்கல் வடிவமைப்பு.

(i) கூட்டு வடிவமைப்பு:

இந்த வடிவமைப்பானது காலம்சார் தொடரில் மதிப்பிடப்பட்ட மதிப்புகளின் நான்கு கூறுகளின் கூட்டுத்தொகை மதிப்பு ஆகும். அதாவது, $Y = T+S+C+I$

இங்கு Y = அசல்மதிப்பு , T = போக்குமதிப்பு (Trend Value),

S = பருவகாலகூறு (Seasonal Componemt)

C = சுழற்சிகூறு (Cyclic Component),

I = சீர்ற்றகூறு (Irregular Component)

கூட்டு வடிவமைப்பின் அனைத்து நான்கு கூறுகளும் சுதந்திரமாகச் செயல்படுகின்றன எனக்கருதலாம். மேலும், கூறுகளின் நடத்தை ஒரு கூட்டுத்தன்மையைக் குறிக்கிறது.

(ii) பெருக்கல் வடிவமைப்பு:

இந்த வடிவமைப்பானது, போக்குமதிப்புடன் (T) மற்ற மூன்று கூறுகளின் விகிதங்களைப் பெருக்குவதன் மூலம் கண்டறிந்த மதிப்பு ஆகும். $Y = T \times S \times C \times I$

இங்கு, Y = அசல் மதிப்பு, T = போக்குகூறு, S = பருவக்காலகூறு

C = சுழற்சி கூறு, I = சீரற்றகூறு

பல்வேறு காரண கூறுகள் இருக்க வேண்டும் என்பது அவசியமில்லை என இந்த வடிவமைப்பு அனுமானிக்கிறது. மற்றும் ஒன்று, மற்ற கூற்றினைப் பாதிக்கக் கூடியது. மேலும் கூறுகளின் செயல்பாடுகள் ஒரு பெருக்கல் தன்மையைக் குறிக்கிறது என்றும் அனுமானம் செய்யமுடியும்.

9.1.2 போக்கினை அளவிடுதல் (Measurements of Trend)

கீழ்க்காணும் முறைகளின் மூலம் நாம் போக்கு மதிப்பை அளவிட முடியும்.

(i) வரைபட முறை (Freehand or Graphic Method).

(ii) பகுதி சராசரி முறை (Method of Semi-Averages).

(iii) நகரும் சராசரி முறை (Method of Moving Averages).

(iv) மீச்சிறு வர்க்க முறை (Method of Least Squares).

(i) வரைபட முறை (Freehand or Graphic Method)

வரைபட முறையானது ஒரு போக்கினை மதிப்பிடுவதற்கு இலகுவான முறையாகும். இந்த முறையின் செயல்முறைகளை இங்கு காண்போம்.

செயல்முறைகள் (Procedure):

(a) வரைபடத்தின் மீது காலம்சார் தொடரின் புள்ளி விவரங்களைக் குறிக்கவும்.

(b) குறிக்கப்பட்ட அனைத்து புள்ளிகளுக்கும் மிகப்பொருத்தமான வளைவரையை வரையவும்.

(c) குறிக்கப்பட்ட புள்ளிகளின் அடிப்படையிலான போக்குகளின் திசையை ஆராயவும்.

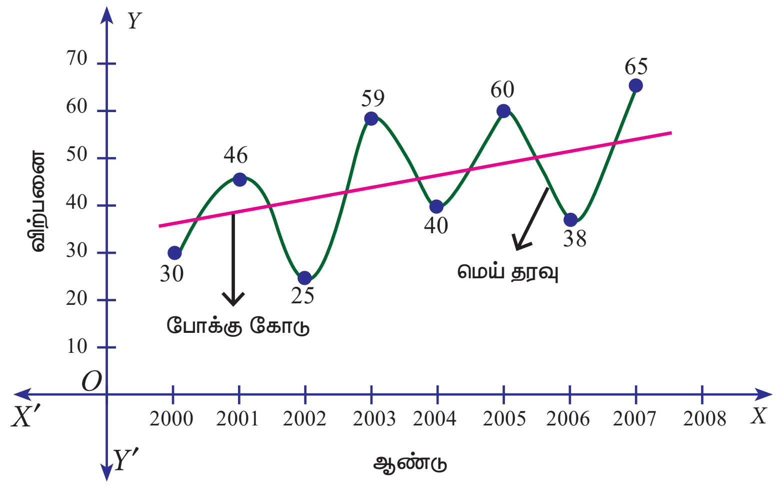
(d) அதிகபட்சமாக குறிக்கப்பட்ட புள்ளிகள் வழியே செல்லகூடிய ஒரு நேர்க்கோட்டை வரையவும்.

எடுத்துக்காட்டு 9.1

கொடுக்கப்பட்டுள்ள விவரங்களுக்கு வரைபட முறையின் போக்குக் கோட்டைப் பொருத்துக.

ஆண்டு	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
விற்பனை (டன்களில்)	30	46	25	59	40	60	38	65

தீர்வு:



படம் 9.1

குறிப்பு:

கொடுக்கப்பட்ட புள்ளி விவரங்களைக் கொண்டு எதிர்கால மதிப்புகளை முன்கணிப்பதற்கு வரைபட முறை மூலம் வரையப்பட்ட போக்கினை நீட்டிக்க முடியும். இருப்பினும், இந்த முறை சார்புடைய இயல்பில் உள்ளது. இந்த முறையில் பெறப்பட்ட கணிப்புகள் ஒருதலைபட்சமாகவும் மற்றும் புள்ளி விவர ஆய்வாளரின் தனிப்பட்ட முடிவினைச் சார்ந்துள்ளது.

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 9.indd 128 09-05-2019 14:24:10

(ii) பகுதிச் சராசரி முறை (Method of Semi-Averages)

பகுதிச் சராசரி முறையில் பகுதிச் சராசரிகள் கணக்கிடப்பட்டு போக்கு மதிப்புகள் கண்டுபிடிக்கப் படுகின்றது. இந்த முறையின் செயல் முறைகளைக் காண்போம்.

செயல்முறைகள்:

(i) கொடுக்கப்பட்ட புள்ளி விவரங்கள் இரு சம பிரிவுகளாகப் பிரிக்கப்பட வேண்டும். புள்ளி விவரமானது ஒற்றைப்படை எண்ணிக்கையில் இருக்குமாயின் நடுவில் உள்ள ஆண்டுக்கான புள்ளி விவரத்தை நீக்குவதன் மூலம் எளிமையான இரண்டு சம பகுதியை உருவாக்கலாம்.

(ii) ஒவ்வொரு பகுதிக்கும் சராசரி கணக்கிடுவதன் மூலம் இரண்டு புள்ளிகளைப் பெறலாம்.

(iii) ஒவ்வொரு புள்ளியும் ஒவ்வொரு அரை பகுதியின் நடுப்புள்ளியாக (ஆண்டு) குறிக்கப்படுகிறது.

(iv) குறிக்கப்பட்ட இரு புள்ளிகளையும் ஒரு நேர்க்கோட்டைக் கொண்டு இணைக்கவும்.

(v) நேர்க்கோட்டை இரு பக்கங்களிலும் நீட்டிக்கலாம்.

(vi) பகுதிச் சராசரி முறையின் மூலம் பெறப்பட்ட நேர்க்கோடானது போக்குக் கோடு ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 9.2

கொடுக்கப்பட்ட புள்ளிவிவரங்களைக் கொண்டு, பகுதிச் சராசரி முறையில் ஒரு போக்கு கோட்டை பொருத்துக.

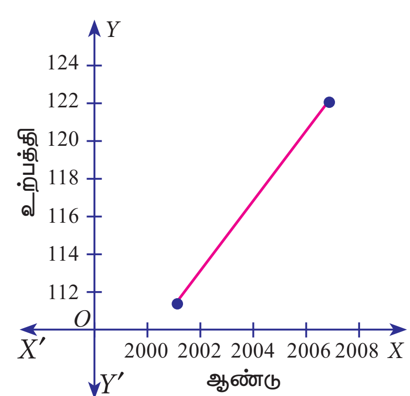
ஆண்டு	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006
உற்பத்தி ('000)	105	115	120	100	110	125	135

தீர்வு:

ஆண்டுகளின் எண்ணிக்கை ஒற்றைப்படை (ஏழு) என்பதால், நாம் நடுவில் உள்ள ஆண்டு (2003) உற்பத்தியை விட்டு விடுவோம் பிறகு முதல் மூன்று ஆண்டுகளின் உற்பத்தி சராசரி மற்றும் கடைசி மூன்று ஆண்டுகளின் உற்பத்தி சராசரியைப் பெற வேண்டும்.

ஆண்டு	உற்பத்தி	சராசரி
2000	105	
2001	115	$\frac{105+115+120}{3}=113.33$
2002	120	
2003	100–ஐ விடுத்து	
2004	110	
2005	125	$\frac{110+125+135}{3}=123.33$
2006	135	

அட்டவணை 9.1



படம் 9.2

எடுத்துக்காட்டு 9.3

கொடுக்கப்பட்ட புள்ளி விவரங்களுக்கு பகுதிச் சராசரி முறையின் ஒரு போக்குக்கோட்டைப் பொருத்துக.

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 9.indd 129 09-05-2019 14:24:10

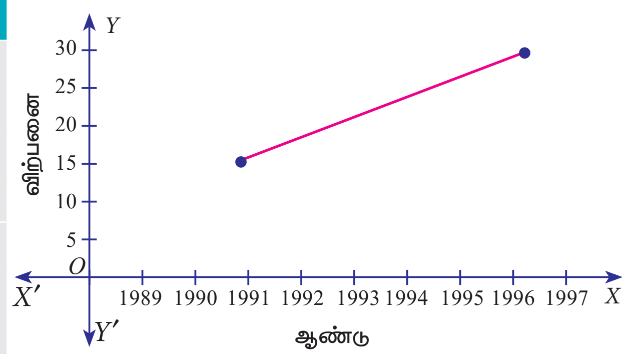
ஆண்டு	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997
விற்பனை (டன்களில்)	15	11	20	10	15	25	35	30

தீர்வு:

ஆண்டுகளின் எண்ணிக்கை (எட்டு) என்பதால், கொடுக்கப்பட்ட புள்ளி விவரங்களை இரண்டு சம பாகங்களாகப் பிரிக்கலாம் அதிலிருந்து முதல் நான்கு ஆண்டுகள் மற்றும் கடைசி நான்கு ஆண்டுகளின் விற்பனை சராசரியைப் பெறலாம்.

ஆண்டு	விற்பனை	சராசரி
1990	15	$\frac{15+11+20+10}{4}=14$
1991	11	
1992	20	
1993	10	
1994	15	$\frac{15+25+35+30}{4}=26.25$
1995	25	
1996	35	
1997	30	

அட்டவணை 9.2



படம்: 9.3

குறிப்பு:

(i) எதிர்கால மதிப்புகளைக் கணிக்க முடியும்.

(ii) இந்த முறை மூலம் போக்கு மதிப்பைப் பெறலாம். ஆனால் கணித்துப் பெறப்பட்ட மதிப்புகள் துல்லியமானவை அல்ல.

9.1.3 நகரும் சராசரி முறை (Method of Moving Averages)

நகரும் சராசரி முறையானது நியாயமான மற்றும் துல்லியமான போக்கு மதிப்புகள் வழங்கக் கூடியதாகும்.

செயல்முறைகள்:

(i) நகரும் சராசரிக்கான கால இடைவெளியைத் தீர்மானிக்கவும். (மூன்று ஆண்டு, நான்கு ஆண்டு)

(ii) ஒற்றைப்படை (மூன்று) ஆண்டுகளில் இருப்பின்,

$$\frac{a+b+c}{3},\frac{b+c+d}{3},\frac{c+d+e}{3},\frac{d+e+f}{3},\ldots$$ இவற்றின் மூலம் கணக்கீட்டு

சராசரியைப் பெற முடியும்.

(iii) நகரும் சராசரியானது ஒற்றைப்படை எண்ணாக இருந்தால், அதை மையப்படுத்துவதில் எந்த பிரச்சனையும் இல்லை, சராசரியாக ஒவ்வொரு மூன்று ஆண்டுகளுக்கும் அதனுடைய இரண்டாம் ஆண்டில் மையமதிப்பு இருக்கும்.

(iv) இரட்டைப்படை (நான்கு) ஆண்டுகளில் இருப்பின்,

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 9.indd 130 09-05-2019 14:24:10

$$\frac{a+b+c+d}{4}, \frac{b+c+d+e}{4}, \frac{c+d+e+f}{4}, \frac{d+e+f+g}{4}, \ldots$$

(v) நகரும் சராசரியானது, இரட்டைப்படை எண்ணாக இருந்தால் முதல் நான்கு மதிப்புகளின் சராசரி இரண்டாம் மற்றும் மூன்றாம் ஆண்டுகளுக்கு இடையில் குறிப்பிட வேண்டும். அதே போல் இரண்டாவது நான்கு மதிப்புகளின் சராசரியானது 3வது மற்றும் 4வது ஆண்டுகளுக்கு இடையில் குறிக்கப்பட வேண்டும்.மேற்கண்ட இரண்டு சராசரிக்கும் மீண்டும் சராசரி கணக்கிட்டு 3வது ஆண்டுகளுக்கு எதிரே குறிப்பிடவும். மீதமுள்ள மதிப்புகளுக்கு மேற்கண்ட முறை போல் தொடர்ந்து கணக்கிடவும். இம்முறைக்கு சராசரி மையப்படுத்துதல் எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு 9.4

ஒரு குறிப்பிட்ட கிராமத்தில் உள்ள மேல்நிலைப் பள்ளியில் பயிலும் மாணவர்களின் புள்ளி விவரம் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. இவற்றின் மூன்று ஆண்டு நகரும் சராசரியைக் காண்க.

ஆண்டு	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004
மாணவர்களின் எண்ணிக்கை	332	317	357	392	402	405	410	427	435	438

தீர்வு:

மூன்று ஆண்டு நகரும் சராசரியை கணக்கிடுதல்.

ஆண்டு	மாணவர்களின் எண்ணிக்கை	மூன்று ஆண்டு நகரும் கூடுதல்	மூன்று ஆண்டு நகரும் சராசரி
1995	332	---	---
1996	317	1006	335.33
1997	357	1066	355.33
1998	392	1151	383.67
1999	402	1199	399.67
2000	405	1217	405.67
2001	410	1242	414.00
2002	427	1272	424.00
2003	435	1300	433.33
2004	438	---	---

அட்டவணை 9.3

எடுத்துக்காட்டு 9.5

ஒரு குறிப்பிட்ட நகரத்தில் உள்ள உயர்நிலைப்பள்ளியில் படிக்கும் மாணவர்களின் எண்ணிக்கையை நான்கு வருடாந்திர நகரும் சராசரியைப் பின்வரும் தரவுகளிலிருந்து கணக்கிடுக.

ஆண்டு	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008
மாணவர்களின் எண்ணிக்கை	124	120	135	140	145	158	162	170

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 9.indd 131 09-05-2019 14:24:11

தீர்வு:

நான்கு ஆண்டு நகரும் சராசரியை கணக்கிடுதல். (ஒற்றைப்படை ஆண்டு).

ஆண்டு	விற்பனை	4 ஆண்டு மைய கூட்டுத்தொகை	4 ஆண்டு நகரும் சராசரி	4 ஆண்டு மையப்படுத்தப்பட்ட நகரும் சராசரி
2001	124	--	--	--
2002	120	--	--	--
		519	129.75	
2003	135	--		132.37
		540	135.00	
2004	140	--		139.75
		578	144.50	
2005	145	--		147.87
		605	151.25	
2006	158	--		155.00
		635	158.75	
2008	162	--		162.50
		665	166.25	
2007	170	--	--	-
2008	175	--	--	-

அட்டவணை 9.4

குறிப்பு

கணக்கிடப்பட்ட 4 ஆண்டு மைய நகரும் சராசரியானது குறிப்பிட்ட நிரலின் வருடத்திற்கு உள்ள மதிப்பாகும். உதாரணத்திற்கு 132.37 என்ற மதிப்பு 2003 ஆம் ஆண்டிற்கு உரியதாகும்.

9.1.4 மீச்சிறு வர்க்க முறை (Method of Least Squares)

ஒரு கோட்டிலிருந்து பல்வேறு புள்ளிகளின் விலக்கங்களின் கூட்டுத் தொகை பூஜ்ஜியமாக இருந்தால் அக்கோடானது, பொருத்தமான கோடு ஆகும். இம்முறையானது, போக்கு மதிப்பைக் காண்பதற்கான சிறந்த முறையாகும். காலம்சார் தொடர் வரிசைக்கான பொருத்தமான கோட்டை கணக்கிடுவதற்கான ஒரு வசதியான அடிப்படை முறையாகும். இங்கு கணித முறையில் போக்கை அளவிட முடியும் மேலும் பிற பொருத்துதல் வடிவமைப்பைவிட இந்த முறையில் மாறுபாடுகளின் வர்க்கங்களின் கூடுதல் மீச்சிறு மதிப்பாக இருக்கும். ஆகையால் இது மீச்சிறு வர்க்க முறை எனப்படுகிறது. அது கீழ்க்காணும் நிபந்தனைகளை பூர்த்தி செய்யும்.

(i) உண்மையான மதிப்பு Yக்கும் மதிப்பிடப்பட்ட மதிப்பு $\hat{Y}$ க்கும் உள்ள மாறுபாடுகளின் கூட்டுத்தொகை பூஜ்ஜியமாக இருக்கும். அதாவது, $\Sigma(Y-\hat{Y}) = 0$.

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 9.indd 132 09-05-2019 14:24:11

(ii) உண்மையான மதிப்பு Yக்கும் மதிப்பிடப்பட்ட மதிப்பு $\hat{Y}$ க்கும் கூடுதல் மீச்சிறு மதிப்பாக இருக்கும் அதாவது $\Sigma(Y-\hat{Y})^2$ என்பது மீச்சிறு மதிப்பு ஆகும்.

செயல்முறை:

(i) ஒரு நேர்க்கோட்டு போக்கானது $Y = a + bX$ …(1) என்ற சமன்பாட்டின் மூலம் குறிப்பிடலாம்.

Y என்பது உண்மையான மதிப்பு, X என்பது காலம், a, b என்பது மாறிலிகள் ஆகும்.

(ii) கீழ்க்காணும் இயல்நிலை சமன்பாடுகள் மற்றும் கொடுக்கப்பட்ட புள்ளி விவரத்தில் உள்ள ஆண்டுகளின் எண்ணிக்கை n–ஐ கொண்டு தீர்ப்பதன் மூலம் மாறிலிகள் 'a' மற்றும் 'b' மதிப்பை காணலாம்.

$$\Sigma Y = n\,a + b\,\Sigma X \qquad \text{...(2)}$$

$$\Sigma XY = a\,\Sigma X + b\,\Sigma X^2 \qquad \text{...(3)}$$

'n' = மொத்த ஆண்டுகளின் எண்ணிக்கை.

(iii) மொத்த ஆண்டுகளின் எண்ணிக்கை (ΣX) கணக்கிட்டால் அம்மதிப்பு பூஜ்ஜியம் ஆகும். அதாவது $\Sigma X = 0$

(iv) $\Sigma X = 0$, ஆக இருக்கும் போது, இரு இயல்நிலைச் சமன்பாடுகள் கீழ்க்கண்டவாறு உருமாற்றம் அடையும்.

$$\Sigma Y = n\,a + b\,(0) \quad ; \; a = \frac{\sum Y}{n} = \bar{Y}$$

$$\Sigma XY = a(0) + b\,\Sigma X^2 \quad ; \; b = \frac{\sum XY}{\sum X^2}$$

மாறிலி 'a' என்பது Y இன் சராசரி மற்றும் 'b' என்பது மாறுவீதம் (சாய்வு) ஆகும்.

(v) போக்கு சமன்பாட்டில் 'a' மற்றும் 'b' இன் மதிப்புகளைப் பிரதியிடுவதன் மூலம் பொருத்தமான கோட்டை பெற முடியும்.

எடுத்துக்காட்டு 9.6

ஒரு மாவட்டத்தில் கரும்பு உற்பத்தி தொடர்பான புள்ளி விவரங்கள் கீழே தரப்பட்டுள்ளது. மீச்சிறு வர்க்க முறை மூலம் நேர்க்கோட்டுப் போக்கினைப் பொருத்துக. மேலும் போக்கு மதிப்பை அட்டவணைப்படுத்துக.

ஆண்டு	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006
கரும்பு உற்பத்தி (டன்களில்)	40	45	46	42	47	50	46

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 9.indd 133 09-05-2019 14:24:11

தீர்வு:

மீச்சிறு வர்க்க முறை மூலம் போக்கு மதிப்புகளைப் கணக்கிடலாம். (ஒற்றைப்படை ஆண்டு).

ஆண்டு(x)	கரும்பு உற்பத்தி(Y)	$X=(x-2003)$	X^2	XY	போக்கு மதிப்புகள்((Yt)
2000	40	–3	9	–120	42.04
2001	45	–2	4	–90	43.07
2002	46	–1	1	–46	44.11
2003	42	0	0	0	45.14
2004	47	1	1	47	46.18
2005	50	2	4	100	47.22
2006	46	3	9	138	48.25
$N=7$	$\Sigma Y=316$	$\Sigma X=0$	$\Sigma X^2=28$	$\Sigma XY=29$	$\Sigma Yt=316$

அட்டவணை 9.5

$$a=\frac{\sum Y}{n}=\frac{316}{7}=45.143\ ;\ b=\frac{\sum XY}{\sum X^2}=\frac{29}{28}=1.036$$

எனவே, தேவையான நேர்க்கோட்டுப் போக்குச் சமன்பாடானது,

$$Y = a + bX \quad ;$$

$$Y = 45.143 + 1.036\ (x - 2003)$$

$X = 2000$, $Yt = 45.143 + 1.036(2000-2003) = 42.035$

$X = 2001$, $Yt = 45.143 + 1.036(2001-2003) = 43.071$, எனும் போக்கு மதிப்புப்களைப் பெற முடியும். இதே போல் மற்ற மதிப்புகளையும் பெற முடியும்.

எடுத்துக்காட்டு 9.7

ஒரு மாவட்டத்தில் ஓர் உற்பத்திப் பொருளின் விற்பனையைப் பற்றிய புள்ளி விவரங்கள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. மீச்சிறு வர்க்க முறை மூலம் நேர்க்கோட்டுப் போக்கினைப் பொருத்துக மேலும் போக்கு மதிப்பை அட்டவணைப்படுத்துக.

ஆண்டு	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001	2002
விற்பனை	6.7	5.3	4.3	6.1	5.6	7.9	5.8	6.1

தீர்வு:

போக்கு மதிப்பை மீச்சிறு வர்க்க முறையில் கணக்கிட்டுச் செய்யலாம். ஆண்டுகளின் எண்ணிக்கை இரட்டைப்படையாக இருப்பதால், X-ஐக் கான பின்வரும் சூத்திரத்தை பயன்படுத்துவோம்.

$$X = \frac{x\text{–மத்திய இரண்டு வருடங்களுக்கான கூட்டு சராசரி}}{0.5}$$

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 9.indd 134 09-05-2019 14:24:12

ஆண்டு(x)	விற்பனை(Y)	$X = \frac{(x - 1998.5)}{0.5}$	XY	X^2	போக்கு மதிப்பு (Y_t)
1995	6.7	–7	46.9	49	5.6166
1996	5.3	–5	26.5	25	5.7190
1997	4.3	–3	12.9	9	5.8214
1998	6.1	–1	6.1	1	5.9238
1999	5.6	7	39.2	49	6.0261
2000	7.9	5	39.5	25	6.1285
2001	5.8	3	17.4	9	6.2309
2002	6.1	1	6.1	1	6.3333
N=8	47.8	$\Sigma X = 0$	194.6	168	

அட்டவணை 9.6

$$a = \frac{\sum Y}{n} = \frac{47.8}{8} = 5.975 \quad ; \; b = \frac{\sum XY}{\sum X^2} = \frac{4.3}{42} = 0.10238$$

எனவே,

$$Y = a + bX \quad ; \; Y = 5.975 + 0.10238\, X.$$

$$X = 1995\,,\; Y_t = 5.975 + 0.10238 \left(\frac{1995 - 1998.5}{0.5}\right) = 5.6166$$

$$X = 1996\,,\; Y_t = 5.975 + 0.10238 \left(\frac{1996 - 1998.5}{0.5}\right) = 5.7190$$

இதே போல் மற்ற மதிப்புகளைப் பெறலாம்.

குறிப்பு:

(i) இந்த முறையால் உருவாக்கப்பட்ட எதிர்கால முன்னறிவிப்பு, போக்குகளின் மதிப்புகளைச் சார்ந்தவை.

(ii) மற்ற முறைகளை விட இந்த முறையில் கணிக்க கூடிய மதிப்புகள் அதிக நம்பகமானவை ஆகும்.

9.1.5 பருவகால மாறுபாடுகளை அளவிடுவதற்கான முறைகள் (Methods of measuring Seasonal Variations By Simple Averages)

பருவகால மாறுபாடுகள் எளிய சராசரி முறையால் அளவிடப்பட முடியும். புள்ளி விவரங்களானது, வாரங்கள், காலாண்டுகள் போன்ற காலம் சார்ந்த நிலைகளில் கிடைக்கின்றன.

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 9.indd 135 09-05-2019 14:24:13

எளிய சராசரி முறை (Method of Simple Averages) :

பருவகால மாறுபாடுகள் அறிவதற்கு இம்முறை எளிமையாக இருக்கும்.

இம்முறையின் செயல்முறைகள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன:

(i) கொடுக்கப்பட்ட புள்ளி விவரங்களை வாரங்கள், மாதங்கள், காலாண்டுகள் என்ற வரிசையில் அமைக்க வேண்டும்.

(ii) ஒவ்வொரு மாதங்கள், காலாண்டுகள் அல்லது ஆண்டுகளின் கூடுதலைக் காண வேண்டும்.

(iii) ஒவ்வொரு மாதங்கள், காலாண்டுகள் அல்லது ஆண்டு ஆகியவற்றிற்குச் சராசரி காண வேண்டும்.

(iv) சராசரிகளுக்கான சராசரி காண வேண்டும் இதனை மொத்த சராசரி (G) என அழைக்கலாம்.

(v) ஒவ்வொரு பருவத்திற்கும் பருவகாலக் குறியீட்டைக் கணக்கிடுக.
மாதங்கள், காலாண்டுகள் அல்லது ஆண்டு கொடுக்கப்பட்டால்

$$\text{பருவகால குறியீடு (S.I)} = \frac{\text{பருவகால சராசரி}}{\text{மொத்த சராசரி}} \times 100$$

(vi) புள்ளி விவரங்கள் மாதந்தோறும் கொடுக்கப்பட்டிருந்தால்

$$\text{பருவகால குறியீடு ஜனவரி (S.I)} = \frac{\text{மாத சராசரி}}{\text{மொத்த சராசரி}} \times 100$$

$$\text{பருவகால குறியீடு பிப்ரவரி (S.I)} = \frac{\text{மாத சராசரி}}{\text{மொத்த சராசரி}} \times 100$$

இதே போல் மற்ற எல்லா மாதங்களுக்கும் பருவகால குறியீட்டெண்கள் கணக்கிட முடியும்.

(vii) புள்ளி விவரங்கள் காலாண்டுகளாக கொடுக்கப்பட்டால்,

$$\text{முதல் காலாண்டிற்கான பருவகால குறியீடு(S.I)} = \frac{\text{முதல் காலாண்டு சராசரி}}{\text{மொத்த சராசரி}} \times 100$$

$$\text{இரண்டாம் காலாண்டிற்கான பருவகால குறியீடு (S.I)} = \frac{\text{இரண்டாம் காலாண்டு சராசரி}}{\text{மொத்த சராசரி}} \times 100$$

$$\text{மூன்றாம் காலாண்டிற்கான பருவகால குறியீடு (S.I)} = \frac{\text{மூன்றாம் காலாண்டு சராசரி}}{\text{மொத்த சராசரி}} \times 100$$

$$\text{நான்காம் காலாண்டிற்கான பருவகால குறியீடு (S.I)} = \frac{\text{நான்காம் காலாண்டு சராசரி}}{\text{மொத்த சராசரி}} \times 100$$

எடுத்துக்காட்டு 9.8

எளிய சராசரி முறையைப் பயன்படுத்தி ஒரு பொருளின் மாதாந்திர விற்பனைக்கு, பருவகால குறியீட்டைக் கணக்கிடுக.

மாதங்கள் / ஆண்டு	ஜன	பிப்	மார்ச்	ஏப்	மே	ஜூன்	ஜூலை	ஆகஸ்	செப்	அக்	நவம்	டிசம்
2001	15	41	25	31	29	47	41	19	35	38	40	30
2002	20	21	27	19	17	25	29	31	35	39	30	44
2003	18	16	20	28	24	25	30	34	30	38	37	39

தீர்வு:

எளிய சராசரியின் மூலம் பருவகால குறியீட்டை கணக்கிடுதல்.

மாதங்கள் / ஆண்டு	ஜன	பிப்	மார்ச்	ஏப்	மே	ஜூன்	ஜூலை	ஆகஸ்	செப்	அக்	நவம்	டிசம்
2001	15	41	25	31	29	47	41	19	35	38	40	30
2002	20	21	27	19	17	25	29	31	35	39	30	44
2003	18	16	20	28	24	25	30	34	30	38	37	39
மாதாந்திர மொத்தம்	53	78	72	78	70	97	100	84	100	115	107	113
மாதாந்திர சராசரி	17.67	26	24	26	23.33	32.33	33.33	28	33.33	38.33	35.67	37.67

அட்டவணை 9.7

பருவகால குறியீடு (ஜனவரி) $= \dfrac{\text{மாத சராசரி}}{\text{மொத்த சராசரி}} \times 100$

மொத்த சராசரி $= \dfrac{355.582}{12} = 29.63$

பருவகால குறியீடு (ஜனவரி) $= \dfrac{17.666}{29.361} X100 = 59.62\,;$

பருவகால குறியீடு (பிப்ரவரி) $= \dfrac{26}{29.361} X100 = 87.77\,;$

இதேபோல் மற்ற பருவகாலக் குறியீட்டு மதிப்புகள் பெறமுடியும்.

மாதங்கள்	ஜனவரி	பிப்ரவரி	மார்ச்	ஏப்ரல்	மே	ஜீன்	ஜீலை	ஆகஸ்ட்	செப்	அக்டோ	நவம்	டிசம்
பருவகால குறியீட்டு	59.62	87.77	80.99	87.77	78.74	109.12	112.49	94.49	112.49	129.36	120.36	126.89

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 9.indd 137 09-05-2019 14:24:14

எடுத்துக்காட்டு 9.9

எளிய சராசரி முறையைப் பயன்படுத்தி ஒரு பொருளின் உற்பத்தியின் காலாண்டு பருவகாலக் குறியீட்டை கணக்கிடுக.

ஆண்டு	I காலாண்டு	II காலாண்டு	III காலாண்டு	IV காலாண்டு
2005	255	351	425	400
2006	269	310	396	410
2007	291	332	358	395
2008	198	289	310	357
2009	200	290	331	359
2010	250	300	350	400

தீர்வு :

எளிய சராசரியின் மூலம் பருவகாலக் குறியீட்டை கணக்கிடுதல்.

ஆண்டு	ஆண்டு	I காலாண்டு	II காலாண்டு	III காலாண்டு	IV காலாண்டு
2005	255	351	425	400	
2006	269	310	396	410	
2007	291	332	358	395	
2008	198	289	310	357	
2009	200	290	331	359	
2010	250	300	350	400	
காலாண்டு கூடுதல்	1463	1872	2170	2321	
காலாண்டு சராசரி	243.83	312	361.67	386.83	

அட்டவணை 9.8

முதல் காலண்டிற்கான பருவகால குறியீடு (S.I) $= \dfrac{\text{முதல் காலாண்டு சராசரி}}{\text{மொத்த சராசரி}} \times 100$

மொத்த சராசரி $= \dfrac{1304.333}{4} = 326.0833$

முதல் காலண்டிற்கான பருவகால குறியீடு (S.I) $= \dfrac{243.8333}{326.0833} \times 100 = 74.77\,;$

இரண்டாம் காலண்டிற்கான பருவகால குறியீடு (S.I) $= \dfrac{312}{326.0833} \times 100 = 95.68\,;$

மூன்றாம் காலண்டிற்கான பருவகால குறியீடு (S.I) $= \dfrac{361.6667}{326.0833} \times 100 = 110.91\,;$

நான்காம் காலண்டிற்கான பருவகால குறியீடு (S.I) $= \dfrac{386.833}{326.0833} \times 100 = 118.63$

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 9.indd 138 09-05-2019 14:24:15

பயிற்சி 9.1

1. காலம்சார் தொடர் வரிசையை வரையறு
2. காலம்சார் தொடர் வரிசையைக் கற்பதன் அவசியம் என்ன?
3. காலம்சார் தொடர் வரிசையின் பயன்பாட்டை குறிப்பிடுக.
4. காலம்சார் தொடர் வரிசையின் கூறுகளைக் குறிப்பிடுக.
5. நீள்காலப்போக்கு வரையறு.
6. பருவகால மாறுபாட்டின் மீது ஒரு சுருக்கமான குறிப்பு எழுதுக.
7. சூழல் மாறுபாடுகள் என்பதை விளக்குக.
8. ஒழுங்கற்ற மாறுபாடுகள் பற்றி விவாதிக்கவும்
9. பருவகால குறியீட்டை வரையறுக்க
10. ஒரு நேர்க்கோட்டைப் பொருத்தும் முறையை விளக்குக.
11. நேர்க்கோடு பொருத்துதலில் பயன்படுத்தப்படும் இரு இயல்நிலைச் சமன்பாடுகளை கூறுக.
12. போக்கினை அளவிடுவதற்கான வெவ்வெறு முறைகளை குறிப்பிடுக.
13. கீழ்க்கண்ட தொடருக்கு சராசரி பருவகாலப் போக்கைக் கணக்கிடுக.

வருடம்	காலாண்டு உற்பத்தி			
	I	II	III	IV
2002	3.5	3.8	3.7	3.5
2003	3.6	4.2	3.4	4.1
2004	3.4	3.9	3.7	4.2
2005	4.2	4.5	3.8	4.4
2006	3.9	4.4	4.2	4.6

14. எட்டு ஆண்டுகளுக்கான வர்த்தக சம்பந்தமான இலாபங்களுடன் தொடர்புடைய புள்ளி விவரங்கள் கீழ்க்கண்ட அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

ஆண்டுகள்	1986	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993
இலாபம் (₹)	15,420	15,470	15,520	21,020	26,500	31,950	35,600	34,900

மூன்று ஆண்டு காலத்தைக் கொண்ட நகரும் சராசரி முறையைப் பயன்படுத்தி போக்கு மதிப்புகளைக் கணக்கிடுக.

15. ஐந்து ஆண்டு காலத்தைக் கொண்ட நகரும் சராசரிகளின் மூலம் பின்வரும் புள்ளி விவரங்களுக்கான உற்பத்தி போக்கு மதிப்புகளைக் கணக்கிடுக.

ஆண்டுகள்	1979	1980	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988	1989	1990
உற்பத்தி(‘000)	126	123	117	128	125	124	130	114	122	129	118	123

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 9.indd 139 09-05-2019 14:24:15

16. தொழில்துறையில் 1985 மற்றும் 1991 இடைப்பட்ட ஆண்டுகளில் பதிவு செய்யப்பட்ட சிறுதொழில் நிறுவனங்களின் எண்ணிக்கை பின்வரும் அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. போக்குக்கோட்டின் மீது இதன் வளர்ச்சியை வரைபட முறையில் காட்டுக.

ஆண்டுகள்	1985	1986	1987	1988	1989	1990	1991	1992
அலகுகளின் எண்ணிக்கை (in'000)	10	22	36	62	55	40	34	50

17. ஒரு பொருளின் ஆண்டு உற்பத்தி கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது

ஆண்டுகள்	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001
உற்பத்தி ('000)	155	162	171	182	158	180	178

மீச்சிறு வர்க்க முறையில் நேர்க்கோட்டுப் போக்கினை பொருத்துக.

18. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள புள்ளி விவரங்களுக்கு பொருத்தமான நேர்க்கோட்டின் சமன்பாட்டைத் தீர்மானிக்க. மேலும், 2000–இலிருந்து 2004 வரை உள்ள எல்லா ஆண்டுகளுக்கும் போக்கு மதிப்பை கணக்கிடுக.

வருடம்	2000	2001	2002	2003	2004
விற்பனை(.'000)	35	36	79	80	40

19. ஒரு பொருளின் விலை (டன்னில்) ஜனவரி 2010 முதல் டிசம்பர் 2010 வரை கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. புள்ளி விவரங்களுக்குப் பகுதி சராசரி முறையில் போக்குக் கோட்டைப் பொருத்துக:

2010 ஆம் ஆண்டில்	ஜனவரி	பிப்ரவரி	மார்ச்	ஏப்ரல்	மே	ஜூன்	ஜூலை	ஆகஸ்	செப்	அக்டோ	நவம்பர்	டிசம்பர்
விற்பனை (டன்)	280	240	270	300	280	290	210	200	230	200	230	210

20. மாதாந்திர சராசரி முறையில் 2002, 2003 மற்றும் 2004 ஆண்டுகளுக்கான கீழ்க்காணும் பொருள்களின் உற்பத்தி புள்ளி விவரங்களுக்கு மாதாந்திர குறியீடுகளை காண்க.

2002	15	18	17	19	16	20	21	18	17	15	14	18
2003	20	18	16	13	12	15	22	16	18	20	17	15
2004	18	25	21	11	14	16	19	20	17	16	18	20

21. எளிய சராசரி முறையின் மூலம் கீழ்க்கண்ட புள்ளி விவரங்களுக்கு பருவகால குறியீடுகளைக் காண்க:

வருடம்	I காலாண்டு	II காலாண்டு	III காலாண்டு	IV காலாண்டு
2008	72	68	62	76
2009	78	74	78	72
2010	74	70	72	76
2011	76	74	74	72
2012	72	72	76	68

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 9.indd 140 09-05-2019 14:24:15

22. ஒரு குறிப்பிட்ட நிறுவனத்தில் பணிப்புரியும் விற்பனையாளர்களின் எண்ணிக்கை கீழே உள்ள அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

ஆண்டு	1992	1993	1994	1995	1996
விற்பனையாளர்களின் எண்ணிக்கை	46	48	42	56	52

இப்புள்ளி விவரங்களுக்கு மீச்சிறு வர்க்க முறையில் ஒரு நேர்க்கோட்டைப் பொருத்துக மேலும் 1997 ஆம் ஆண்டில் விற்பனையாளர்களின் எண்ணிக்கையை மதிப்பிடுக.

9.2 குறியீட்டு எண்கள் (Index Number)

அறிமுகம்:

குறியீட்டு எண்கள் என்பது பல்வேறு பொருள்களின் விலை, உற்பத்தி, விற்பனை, வாழ்க்கைச் செலவு ஆகியவற்றில் ஒரு குறிப்பிட்ட காலத்தில் ஏற்படும் மாற்றங்களைப் பிரதிபலிப்பலிக்கும் குறிகாட்டிகளாகும். அவை மாறி அல்லது மாறிகளின் தொகுப்பில் ஏற்படும் மாற்றத்தை அதன் நேரம், புவியியல் அமைப்பு, வருமானம் மற்றும் தொழில் போன்ற பிற பண்புகளை ஒப்பிட்டுப் பார்த்து அளவிடும் புள்ளியியல் முறைகள் ஆகும்.

இம்மாறிகள் என்பது கீழ்க்கண்டவாறு இருக்கலாம்,

(i) ஒரு குறிப்பிட்ட பொருளின் விலை. உதாரணமாக தங்கம், வெள்ளி, இரும்பு (அல்லது) பொருள்களின் தொகுப்பு. உதாரணமாக நுகர்வோர் பொருள்கள், வீட்டு உணவு பொருள்கள் போன்றவை.

(ii) ஏற்றுமதி மற்றும் இறக்குமதி பொருளின் அளவு, விவசாய மற்றும் தொழில்துறை உற்பத்தி.

(iii) ஒரு நாட்டின் தேசிய வருமானம், ஒரு குறிப்பிட்ட வருமான வரம்பில் உள்ள நபர்களின் வாழ்க்கைச் செலவு.

9.2.1 பொருள், வகைப்பாடு மற்றும் பயன்கள் (Meaning, Classifications and Uses)

நுகர்வோர் பொருள்களின் விலையில் ஏற்படும் பொதுவான மாற்றங்களை நாம் நேரிடையாக அளவிட முடியாது. ஏனெனில், நுகர்வோர் பொருள்களின் அளவுகள் வெவ்வேறு அலகுகளில் இருக்கும். எடுத்துக்காட்டாக அரிசி, கோதுமை மற்றும் சர்க்கரை ஆகிய பொருள்கள் கிலோகிராமிலும், பால், பெட்ரோல், எண்ணெய் ஆகிய பொருள்கள் லிட்டரிலும் மற்றும் ஆடைகள் மீட்டரிலும் அளவிடபடுகின்றன. மேலும் சில பொருள்களின் விலை மற்றும் அளவு இரண்டு காலக்கட்டங்களில் அதிகரிக்க அல்லது கணிசமாகக் குறைய வாய்ப்பு உண்டு. எனவே, குறியீட்டு எண்ணானது, ஒரு குறிப்பிட்ட கால கட்டத்தில் கொடுக்கப்பட்ட தொகுப்பிலுள்ள அனைத்துப் பொருட்களின் விலையையும் பிரதிபலிக்கும் ஓர் ஒற்றை எண்ணாகும்.

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 9.indd 141 09-05-2019 14:24:15

வரையறை 9.2

"ஒரு குறியீட்டு எண் என்பது துல்லியமான அளவுகளில் அளக்க முடியாத அல்லது வழக்கத்தில் நேரடி மதிப்பீடு செய்ய முடியாத எண் அளவிலான மாறுபாடுகளில் உள்ள வேறுபாடுகளை காண்பிக்க கூடிய ஒரு கருவியாகும்".

– வெல்டன்

"ஒரு குறியீட்டு எண் என்பது தொடர் அமைப்பில் வரிசை படுத்தப்பட்ட ஒரு மாறியில் காணப்படும் ஏற்ற இறக்கங்களை காணும் புள்ளியியல் அளவிடுகளாகும் மேலும் அடிப்படை கால இடைவெளியை பயன்படுத்தி ஒப்பீடு செய்வதாகும். "

– லாரன்ஸ் ஜெ கல்பன்

குறியீட்டு எண்களின்வகைப்பாடுகள்:

குறியீட்டு எண்களை பின்வருமாறு வகைப்படுத்த முடியும்,

(i) **விலைக் குறியீட்டு எண் (Price Index Number)**

சில்லறை அல்லது மொத்த விலையில் ஏற்படும் ஒரு குறிப்பிட்ட மாற்றத்தை அல்லது தொகுப்பு பொருள்களின் விலை குறியீட்டு எண்ணின் பொதுவான மாற்றங்களை அளவிடுவதற்கான குறியீடு ஆகும்.

(ii) **எண்ணளவு குறியீட்டு எண் (Quantity Index Number)**

ஒரு தொழிற்சாலையில் தயாரிக்கப்படும் பொருள்களின் அளவுகளில் ஏற்படும் மாற்றங்களை அளவிடுவதற்கான குறியீடு ஆகும்.

(iii) **வாழ்க்கைத்தர குறியீட்டு எண் (Cost of living Index Number)**

வெவ்வேறு வர்க்க மக்களின் வாழ்க்கைத் தர செலவில் விலை சார்ந்த மாற்றத்தின் விளைவுகளை அறிவதற்காக இவை உருவாக்கப்பட்டுள்ளன.

குறியீட்டு எண்ணின் பயன்கள்: (Uses of Index number)

(i) முடிவுகள் மற்றும் நிர்வாகக் கொள்கைகளை அமைப்பதற்கு இது ஒரு முக்கியமான கருவியாகும்.

(ii) இது போக்குகள் மற்றும் போக்கு அளவைகளை அறிய உதவுகிறது.

(iii) இது ஒரு பொருளாதாரத்தின் வீக்கம் மற்றும் பணவாட்டத்தைத் தீர்மானிக்கிறது

குறியீட்டுஎண் அமைக்கும் விதம்: (Construction of Index Number)

குறியீட்டு எண்ணின் கட்டுமானத்தில் இரண்டு வகைகள் உள்ளன.

(i) நிறையிடா குறியீட்டு எண் (Unweighted Index Number)

(ii) நிறையிட்ட குறியீட்டு எண் (Weighted Index Number)

இங்கு, நிறையிட்ட குறியீட்டு எண்களை பற்றி மட்டும் நாம் படிப்போம்.

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 9.indd 142 09-05-2019 14:24:15

9.2.2 நிறையிட்ட குறியீட்டு எண் (Weighted Index Number)

பொதுவாக, அனைத்துப் பொருள்களுக்கும் சமமான முக்கியத்துவத்தை வழங்க முடியாது. எனவே, ஒவ்வொரு பொருளுக்கும் அதன் முக்கியத்துவத்தைப் பொருத்து நிறைகளை நம்மால் வழங்க முடியும். இந்த நிறையிலிருந்து கணக்கிடப்படும் குறியீட்டு எண், நிறையிட்ட குறியீட்டு எண் என்று அழைக்கப்படுகிறது. எடுத்துக்காட்டாக உற்பத்தி, நுகர்வு மதிப்புகள் போன்றவை நிறைகள் அகும். 'w' என்பது ஒரு பொருளுக்கு இணைக்கப்பட்ட நிறை எனில், விலை குறியீட்டுஎண் பின்வருமாறு வழங்கப்படுகிறது,

விலைகுறியீட்டு எண்: $P_{01} = \dfrac{\sum p_1 w}{\sum p_0 w} \times 100$ இங்கு,

p_1 - நடப்பு ஆண்டின்விலை $\quad$ p_0 - அடிப்படைஆண்டின் விலை

q_1 - நடப்பு ஆண்டின்அளவு $\quad$ q_0 - அடிப்படைஆண்டின் அளவு

'0' என்பது அடிப்படை ஆண்டையும் மற்றும் '1' என்பது நடப்பு ஆண்டையும் குறிக்கிறது.

லாஸ்பியர் விலைக் குறியீட்டு எண் (Laspeyre's price index number)

$$P_{01}^{L} = \frac{\sum p_1 q_0}{\sum p_0 q_0} \times 100$$

பாசி விலைக் குறியீட்டு எண் (Paasche's price index number)

$$P_{01}^{P} = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1} \times 100$$

ஃபிஷர் விலைக் குறியீட்டு எண் (Fisher's price index number)

$$P_{01}^{F} = \sqrt{P_{01}^{L} \times P_{01}^{P}}$$

$$P_{01}^{F} = \sqrt{\frac{\sum p_1 q_0 \times \sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_0 \times \sum p_0 q_1}} \times 100$$

குறிப்பு:

(i) சரியான ஃபிஷர் விலை குறியீட்டு எண்ணைப் பெறுவதற்கு, $P_{01}^{F} = \sqrt{P_{01}^{L} \times P_{01}^{P}}$ -ஐ பயன்படுத்துவதற்குப் பதிலாக,சூத்திர முறையைப் பயன்படுத்த வேண்டும்.

(ii) லாஸ்பியரின் விலை குறியீட்டு எண்ணில், அடிப்படை ஆண்டின் அளவைகள், நிறையாகப் பயன்படுத்தப்படுகின்றன.

(iii) பாசியின் விலை குறியீட்டு எண்ணில், நடப்பு ஆண்டின் அளவைகள், நிறையாக பயன்படுத்தப்படுகிறது.

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 9.indd 143 09-05-2019 14:24:17

எடுத்துக்காட்டு 9.10

லாஸ்பியர், பாசி மற்றும் ஃபிஷர் விலைக் குறியீட்டு எண்களைக் கீழ்க்கண்ட தரவுகளுக்கு கண்டுபிடித்து மற்றும் அவற்றிக்கான கருத்து விளக்கம் தருக.

பொருள்கள்	விலை		அளவு	
	2000	2010	2000	2010
அரிசி	38	35	6	7
கோதுமை	12	18	7	10
வாடகை	10	15	10	15
எரிபொருள்	25	30	12	16
இதரசெலவுகள்	30	33	8	10

உங்களுக்கு தெரியுமா?

ஃபிஷர் விலை குறியீட்டு எண் என்பது லாஸ்பியர் மற்றும் பாசி விலை குறியீட்டு எண்களுக்கு இடையேயான பெருக்கு சராசரி ஆகும்.

தீர்வு:

பொருள்கள்	விலை 2000 (p_0)	விலை 2010 (p_1)	அளவு 2000 (q_0)	அளவு 2010 (q_1)	$p_0 q_0$	$p_0 q_1$	$p_1 q_0$	$p_1 q_1$
அரிசி	38	35	6	7	228	266	210	245
கோதுமை	12	18	7	10	84	120	126	180
வாடகை	10	15	10	15	100	150	150	225
எரிபொருள்	25	30	12	16	300	400	360	480
இதரசெலவுகள்	30	33	8	10	240	300	264	330
				மொத்தம்	**952**	**1236**	**1110**	**1460**

அட்டவணை 9.9

லாஸ்பியரின் விலைக் குறியீட்டு எண்

$$P_{01}^{L} = \frac{\sum p_1 q_0}{\sum p_0 q_0} \times 100 = \frac{1110}{952} \times 100 = 116.60$$

சராசரியாக, 2000 ஆம் ஆண்டுடன் ஒப்பிடுகையில் 2010 ஆம் ஆண்டில் பொருள்களின் விலை 16.60% அதிகரித்துள்ளது.

பாசியின் விலைக் குறியீட்டுஎண்

$$P_{01}^{P} = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1} \times 100 = \frac{1460}{1236} \times 100 = 118.12$$

சராசரியாக, 2000 ஆம் ஆண்டுடன் ஒப்பிடுகையில் 2010 ஆம் ஆண்டில் பொருள்களின் விலை 18.12% அதிகரித்துள்ளது.

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 9.indd 144 09-05-2019 15:22:49

ஃபிஷர் விலைக் குறியீட்டு எண்

$$P_{01}^{F} = \sqrt{\frac{\sum p_1 q_0 \times \sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_0 \times \sum p_0 q_1}} \times 100 = \sqrt{\frac{1110 \times 1460}{952 \times 1236}} \times 100 = 117.36$$

சராசரியாக, 2000 ஆம் ஆண்டுடன் ஒப்பிடுகையில் 2010 ஆம் ஆண்டில் பொருள்களின் விலை 17.36% அதிகரித்துள்ளது.

எடுத்துக்காட்டு 9.11

லாஸ்பியர், பாசி மற்றும் ஃபிஷர் விலைக் குறியீட்டு எண்களை உருவாக்கவும். மேலும் முடிவின் மீதான கருத்தினைத் தருக.

பொருள்கள்	அடிப்படை ஆண்டு		நடப்பு ஆண்டு	
	விலை	அளவு	விலை	அளவு
அரிசி	15	5	16	8
கோதுமை	10	6	18	9
வாடகை	8	7	15	8
எரிபொருள்	9	5	12	6
போக்குவரத்து	11	4	11	7
இதரசெலவுகள்	16	6	15	10

தீர்வு:

பொருள்கள்	அடிப்படை ஆண்டு		நடப்பு ஆண்டு		$p_0 q_0$	$p_0 q_1$	$p_1 q_0$	$p_1 q_1$
	விலை (p_0)	அளவு (p_0)	விலை	அளவு				
அரிசி	15	5	16	8	75	120	80	128
கோதுமை	10	6	18	9	60	90	108	162
வாடகை	8	7	15	8	56	64	105	120
எரிபொருள்	9	5	12	6	45	54	60	72
போக்குவரத்து	11	4	11	7	44	77	44	77
இதரசெலவுகள்	16	6	15	10	96	160	90	150
				மொத்தம்	**376**	**565**	**487**	**709**

அட்டவணை 9.10

லாஸ்பியரின் விலைக் குறியீட்டு எண்

$$P_{01}^{L} = \frac{\sum p_1 q_0}{\sum p_0 q_0} \times 100 = \frac{487}{376} \times 100 = 129.5212$$

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 9.indd 145 09-05-2019 14:24:18

பாசியின் விலைக்குறியீட்டுஎண்

$$P_{01}^{P} = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1} \times 100 = \frac{709}{565} \times 100 = 125.4867$$

∴பிஷர் விலைக் குறியீட்டு எண்

$$P_{01}^{F} = \left(\sqrt{\frac{\sum p_1 q_0 \times \sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_0 \times \sum p_0 q_1}} \right) \times 100 = \left(\sqrt{\frac{487 \times 709}{376 \times 565}} \right) \times 100 = 127.4879$$

லாஸ்பியர், பாசி, ∴பிஷரின் விலைக் குறியீட்டு எண்கள் அடிப்படை ஆண்டோடு நடப்பு ஆண்டை ஒப்பிடும்பொழுது பொருள்களின் விலையானது முறையே சராசரியாக, 29.52%, 25.48% மற்றும் 27.48% ஆக அதிகரித்துள்ளது.

9.2.3 குறியீட்டு எண்களின் (போதுமான தன்மை) சோதனை: (Test of adequacy for an Index Number)

குறியீட்டு எண்களானது ஏதேனும் இரண்டு ஆண்டுகளை ஒப்பிடும் போது, விலை மற்றும் அளவு ஆகியவற்றில் காணப்படும் மாற்றங்களை அறிந்து கொள்வதற்கு பயன்படுகின்றன. ஒரு குறியீட்டு எண்ணிண் போதுமான தன்மையை சோதிப்பதற்கு இரண்டு சோதனைகள் உள்ளன. அவை பின்வருமாறு:

(i) காலமாற்றுச் சோதனை (Time Reversal Test)

(ii) காரணி மாற்றுச் சோதனை (Factor Reversal Test)

ஒரு சிறந்த குறியீட்டு எண்ணின் அளவுகோல் என்பது மேலே உள்ள இரண்டு சோதனைகளை நிறைவு செய்வது என்பதாகும்.

காலமாற்றுச் சோதனை (Time Reversal Test)

காலமாற்றுச் சோதனை என்பது ஒரு சிறந்த குறியீட்டு எண்ணின் நிலைத் தன்மையை சோதிக்கும் ஒரு முக்கியமான சோதனை ஆகும். இச்சோதனையானது நேரத்தின், நிலைத்தன்மையைப் பராமரிக்க முன்னோக்கிய மற்றும் பின்னோக்கிய காலத்தைப் பொறுத்து செயல்படும். (இங்கு நேரம் என்பது அடிப்படை ஆண்டு மற்றும் நடப்பு ஆண்டு ஆகியவற்றைக் குறிக்கிறது) இது, பின்வரும் தொடர்பினை நிறைவு செய்ய வேண்டும், $P_{01} \times P_{10} = 1$.

∴பிஷரின் குறியீட்டு எண் சூத்திரம் மேலே உள்ள தொடர்பை பூர்த்தி செய்கிறது.

$$P_{01}^{F} = \sqrt{\frac{\sum p_1 q_0 \times \sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_0 \times \sum p_0 q_1}}$$

அடிப்படை ஆண்டு மற்றும் நடப்பு ஆண்டினைப் பரிமாற்றம் செய்யும் போது, நாம் பெறுவது

குறிப்பு

ஒவ்வொரு குறியீட்டு எண்ணிலும் காரணி 100ஐப் புறக்கணியுங்கள்.

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 9.indd 146 09-05-2019 14:24:19

$$P_{10}^{F} = \sqrt{\frac{\sum p_0 q_1 \times \sum p_0 q_0}{\sum p_1 q_1 \times \sum p_1 q_0}}$$

$$P_{01}^{F} \times P_{10}^{F} = 1$$

காரணி மாற்றுச் சோதனை (Factor Reversal Test)

காரணி மாற்றுச் சோதனை என்பது ஒரு சிறந்த குறியீட்டு எண்ணின் நிலைத்தன்மையை சோதிக்கும் மற்றொரு சோதனை ஆகும். உண்மை மதிப்பு விகிதமானது அடிப்படை ஆண்டு முதல் நடப்பு ஆண்டு வரை உள்ள விலை குறியீட்டு எண் மற்றும் எண் அளவு குறியீட்டு எண்ணின் பெருக்குத் தொகைக்கு சமம் ஆகும். அதாவது, நடப்புக்காலத்தின் மொத்த மதிப்பு மற்றும் அடிப்படை காலத்தின் மொத்த மதிப்பின் விகிதமாக, உண்மை மதிப்பு விகிதம் (true value ratio) கண்டறியப்படுகிறது. காரணி மாற்றுச் சோதனை பின்வருமாறு வழங்கப்படுகிறது,

$$P_{01} \times Q_{01} = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_0}$$

இங்கே,

$$P_{01} = \sqrt{\frac{\sum p_1 q_0 \times \sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_0 \times \sum p_0 q_1}}$$

இப்போது, P க்கு பதிலாக Q வை பரிமாற்றம் செய்தால், நாம் பெறுவது

$$Q_{01} = \sqrt{\frac{\sum q_1 p_0 \times \sum q_1 p_1}{\sum q_0 p_0 \times \sum q_0 p_1}}$$

இங்கே, P_{01} விலை ஒப்பீட்டு மாற்றம் ஆகும்

Q_{01} அளவு ஒப்பீட்டு மாற்றம் ஆகும்

எடுத்துக்காட்டு 9.12

பின்வரும் விவரங்களுக்கு ஃபிஷர்விலை குறியீட்டு எண்ணைக் கண்டுபிடிக்கவும், மேலும் காலமாற்றுச் சோதனை, காரணி மாற்றுச் சோதனை ஆகியவற்றை நிறைவு செய்வதை சரிபார்க்கவும்.

பொருள்கள்	விலை		அளவு	
	2003	2009	2003	2009
அரிசி	10	13	4	6
கோதுமை	15	18	7	8
வாடகை	25	29	5	9
எரிபொருள்	11	14	8	10
இதரசெலவுகள்	14	17	6	7

உங்களுக்கு தெரியுமா?

ஃபிஷரின் விலை குறியீட்டு எண் காலமாற்றுச் சோதனை (TRT) மற்றும் காரணி மாற்றுச் சோதனை (FRT) ஆகிய இரண்டு சோதனைகளை நிறைவு செய்வதால் தனித்த குறியீட்டு எண் எனப்படுகிறது.

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 9.indd 147 09-05-2019 14:24:20

தீர்வு:

பொருள்கள்	விலை		அளவு		p_0q_0	p_0q_1	p_1q_0	p_1q_1
	2003 (p_0)	2009 (p_1)	2003 (q_0)	2009 (q_1)				
அரிசி	10	13	4	6	40	60	52	78
கோதுமை	15	18	7	8	105	120	126	144
வாடகை	25	29	5	9	125	225	145	261
எரிபொருள்	11	14	8	10	88	110	140	140
இதரசெலவுகள்	14	17	6	7	84	98	102	119
				மொத்தம்	442	613	565	742

அட்டவணை 9.11

ஃபிஷர்விலை குறியீட்டுஎண் (Fisher's price index number)

$$P_{01}^{F}=\left(\sqrt{\frac{\sum p_1q_0 \times \sum p_1q_1}{\sum p_0q_0 \times \sum p_0q_1}}\right)\times 100=\left(\sqrt{\frac{565\times 742}{442\times 613}}\right)\times\ 100=124.3898$$

காலமாற்றுச் சோதனை: $P_{01}\times P_{10}=1$

$$P_{01}\times P_{10}=\sqrt{\left(\frac{\sum p_1q_0 \times \sum p_1q_1 \times \sum p_0q_1 \times \sum p_0q_0}{\sum p_0q_0 \times \sum p_0q_1 \times \sum p_1q_1 \times \sum p_1q_0}\right)}$$

$$P_{01}\times P_{10}=\sqrt{\left(\frac{565\times 742\times 613\times 442}{442\times 613\times 742\times 565}\right)}$$

$$P_{01}\times P_{10}=1$$

காரணி மாற்றுச் சோதனை

$$P_{01}\times Q_{01}=\frac{\sum p_1q_1}{\sum p_0q_0}$$

$$P_{01}\times Q_{01}=\sqrt{\left(\frac{\sum p_1q_0 \times \sum p_1q_1 \times \sum q_1p_0 \times \sum q_1p_1}{\sum p_0q_0 \times \sum p_0q_1 \times \sum q_0p_0 \times \sum q_0p_1}\right)}$$

$$P_{01}\times Q_{01}=\sqrt{\left(\frac{565\times 742\times 613\times 742}{442\times 613\times 442\times 565}\right)}$$

$$P_{01}\times Q_{01}=\sqrt{\left(\frac{742\times 742}{442\times\ 442}\right)}=\frac{742}{442}\qquad\Rightarrow\ P_{01}\times Q_{01}=\frac{\sum p_1q_1}{\sum p_0q_0}$$

எனவே, ஃபிஷர்விலைக் குறியீட்டு எண்ணானது காலமாற்றுச் சோதனை, காரணி மாற்றுச் சோதனை ஆகியவற்றை நிறைவு செய்கிறது.

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 9.indd 148 09-05-2019 14:24:22

எடுத்துக்காட்டு 9.13

பின்வரும் விவரங்களுக்கு ஃபிஷரின் விலை குறியீட்டுஎண்ணை கண்டுபிடிக்கவும். மேலும் காலமாற்றுச் சோதனை, காரணி மாற்றுச் சோதனை ஆகியவற்றை நிறைவு செய்வதைச் சரிபார்க்கவும்.

பொருள்கள்	அடிப்படைஆண்டு		நடப்பு ஆண்டு	
	விலை	அளவு	விலை	அளவு
அரிசி	10	5	11	6
கோதுமை	12	6	13	4
வாடகை	14	8	15	7
எரிபொருள்	16	9	17	8
போக்குவரத்து	18	7	19	5
இதரசெலவுகள்	20	4	21	3

தீர்வு:

பொருள்கள்	அடிப்படைஆண்டு		நடப்பு ஆண்டு		p_0q_0	p_0q_1	p_1q_0	p_1q_1
	விலை	அளவு (q_0)	விலை (p_1)	அளவு (q_1)				
அரிசி	10	5	11	6	50	60	55	66
கோதுமை	12	6	13	4	72	48	78	52
வாடகை	14	8	15	7	112	98	120	105
எரிபொருள்	16	9	17	8	144	128	153	136
போக்குவரத்து	18	7	19	5	126	90	133	95
இதரசெலவுகள்	20	4	21	3	80	60	84	63
				மொத்தம்	584	484	623	517

அட்டவணை 9.12

ஃபிஷர்விலைக் குறியீட்டுஎண்

$$P_{01}^{F} = \left(\sqrt{\frac{\sum p_1q_0 \times \sum p_1q_1}{\sum p_0q_0 \times \sum p_0q_1}}\right) \times 100 = \left(\sqrt{\frac{623 \times 517}{584 \times 484}}\right) \times 100 = 106.74$$

காலமாற்றுச் சோதனை: $P_{01} \times P_{10} = 1$

$$P_{01} \times P_{10} = \sqrt{\left(\frac{\sum p_1q_0 \times \sum p_1q_1 \times \sum p_0q_1 \times \sum p_0q_0}{\sum p_0q_0 \times \sum p_0q_1 \times \sum p_1q_1 \times \sum p_1q_0}\right)}$$

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 9.indd 149 09-05-2019 14:24:23

$$P_{01} \times P_{10} = \sqrt{\left(\frac{623 \times 517 \times 484 \times 584}{584 \times 484 \times 517 \times 623}\right)}$$

$$P_{01} \times P_{10} = 1$$

காரணி மாற்றுச் சோதனை

$$P_{01} \times Q_{01} = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_0}$$

$$P_{01} \times Q_{01} = \sqrt{\left(\frac{\sum p_1 q_0 \times \sum p_1 q_1 \times \sum q_1 p_0 \times \sum q_1 p_1}{\sum p_0 q_0 \times \sum p_0 q_1 \times \sum q_0 p_0 \times \sum q_0 p_1}\right)}$$

$$P_{01} \times Q_{01} = \sqrt{\left(\frac{623 \times 517 \times 484 \times 517}{584 \times 484 \times 584 \times 623}\right)}$$

$$P_{01} \times Q_{01} = \sqrt{\left(\frac{517 \times 517}{585 \times 584}\right)} = \frac{517}{584}$$

$$P_{01} \times Q_{01} = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_0}$$

எனவே, ஃபிஷர்விலை குறியீட்டு எண்ணானது காலமாற்றுச் சோதனை, காரணி மாற்றுச் சோதனை ஆகியவற்றை நிறைவு செய்கிறது.

எடுத்துக்காட்டு 9.14

பின்வரும் விவரங்களுக்கு, ஃபிஷர் விலைக் குறியீட்டு எண்ணைக் கட்டமைக்கவும் மேலும் அது காலமாற்றுச்சோதனை, காரணிமாற்றுச் சோதனை ஆகியவற்றைப் பூர்த்திசெய்யும் என நிரூபிக்கவும்.

பொருள்கள்	அடிப்படை ஆண்டு		நடப்பு ஆண்டு	
	விலை	அளவு	விலை	அளவு
அரிசி	40	5	48	4
கோதுமை	45	2	42	3
வாடகை	90	4	95	6
எரிபொருள்	85	3	80	2
போக்குவரத்து	50	5	65	8
இதரசெலவுகள்	65	1	72	3

தீர்வு:

பொருள்கள்	அடிப்படை ஆண்டு		நடப்பு ஆண்டு		p_0q_0	p_0q_1	p_1q_0	p_1q_1
	விலை (p_0)	அளவு (q_0)	விலை (p_1)	அளவு (q_1)				
அரிசி	40	5	48	4	200	160	240	192
கோதுமை	45	2	42	3	90	135	84	126
வாடகை	90	4	95	6	360	540	380	570
எரிபொருள்	85	3	80	2	255	170	240	160
போக்குவரத்து	50	5	65	8	250	400	325	520
இதரசெலவுகள்	65	1	72	3	65	195	72	216
				மொத்தம்	1220	1600	1341	1784

அட்டவணை 9.13

∴பிஷர்விலை குறியீட்டுஎண்

$$P_{01}^{F}=\left(\sqrt{\frac{\sum p_1q_0\times\sum p_1q_1}{\sum p_0q_0\times\sum p_0q_1}}\right)\times100=\left(\sqrt{\frac{1341\times1784}{1220\times1600}}\right)\times100=110.706$$

காலமாற்றுச் சோதனை: $P_{01}\times P_{10}=1$

$$P_{01}\times P_{10}=\sqrt{\left(\frac{\sum p_1q_0\times\sum p_1q_1\times\sum p_0q_1\times\sum p_0q_0}{\sum p_0q_0\times\sum p_0q_1\times\sum p_1q_1\times\sum p_1q_0}\right)}$$

$$P_{01}\times P_{10}=\sqrt{\left(\frac{1341\times1784\times1600\times1220}{1220\times1600\times1784\times1341}\right)}$$

$$P_{01}\times P_{10}=1$$

காரணி மாற்றுச் சோதனை

$$P_{01}\times Q_{01}=\frac{\sum p_1q_1}{\sum p_0q_0}$$

$$P_{01}\times Q_{01}=\sqrt{\left(\frac{\sum p_1q_0\times\sum p_1q_1\times\sum q_1p_0\times\sum q_1p_1}{\sum p_0q_0\times\sum p_0q_1\times\sum q_0p_0\times\sum q_0p_1}\right)}$$

$$P_{01}\times Q_{01}=\sqrt{\left(\frac{1341\times1784\times1600\times1784}{1220\times1600\times1220\times1341}\right)}$$

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 9.indd 151 09-05-2019 14:24:26

$$P_{01} \times Q_{01} = \sqrt{\left(\frac{1784 \times 1784}{1220 \times 1220}\right)} = \frac{1784}{1220} \quad \Rightarrow \quad P_{01} \times Q_{01} = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_0}$$

எனவே, ஃபிஷர்விலைக் குறியீட்டு எண்ணானது காலமாற்றுச் சோதனை, காரணி மாற்றுச் சோதனை ஆகியவற்றைப் பூர்த்திசெய்யும் என நிரூபிக்கப்பட்டுள்ளன.

9.2.4 வாழ்க்கைத்தர குறியீட்டுஎண் (Construction of Cost of Living Index Number)

அடிப்படை காலத்துடன் ஒப்பிடுகையில் தற்போதைய காலத்திற்கு நுகர்வோர்கள் மற்றும் சேவைகளின் விலையில் ஏற்படும் மாற்றங்களின் விளைவுகளை ஆய்வு செய்ய வாழ்க்கைத் தரகுறியீட்டு எண் கட்டமைக்கபட்டுள்ளது. ஏதேனும் இரண்டு காலத்திற்கு இடையே வாழ்க்கைத்தர குறியீட்டு எண்ணின் மாற்றம் என்பது இரு காலங்களில் அதே வாழ்க்கைத் தரத்தை பராமரிக்க அவசியமான வருமான மாற்றமே ஆகும். எனவே வாழ்க்கைத்தர குறியீட்டு எண், அதே வாழ்க்கைத் தரத்தை பராமரிக்கக் கூடிய சராசரி வருமான அதிகரிப்பை அளவிடக் கூடியதாகும். மேலும், மக்களின் நுகர்வு பழக்கம் பரவலாக வேறுபடுகிறது. (பணக்காரர், ஏழை, நடுத்தர வர்க்கம்) மேலும் இடத்திற்கு இடம் வேறுபடுகிறது. விலையில் ஏற்படும் மாற்றங்களானது பல்வேறு வகைப்பட்ட மக்களை பாதிக்கிறது, இதன் விளைவாக பொது விலைக் குறியீட்டு எண்கள், வெவ்வேறு வர்க்க மக்களின் வாழ்க்கை செலவில் மாற்றங்களின் விளைவுகளை ஏதிரொலிக்கத் தவறுகிறது. எனவே, வாழ்க்கை தர குறியீட்டு எண் ஆனது பல்வேறு மக்கள் நுகரும் பொருள்களின் பொதுவான விலையில் ஏற்படும் மாற்றங்களை அளவிடப் பயன்படுகிறது.

நுகர்வோர் விலைக் குறியீட்டெண்ணானது வாழ்க்கைக் குறியீட்டு செலவு என்றும் அழைக்கப்படுகிறது.

வாழ்க்கைத் தரகுறியீட்டு எண்ணின் பயன்கள் (Uses of Cost of Living Index Number)

(i) ஒரு குறிப்பிட்ட காலத்தில் பணியாளர்களின் ஊதியம் உண்மையாக அதிகரிக்கிறதா அல்லது வீழ்ச்சி அடைகிறதா என்பதை அறிய பயன்படுகிறது.

(ii) நிர்வாகமானது, தொழிலாளர்களின் ஊதியத்திற்கான அகவிலைப்படியை சீர்படுத்த அல்லது ஊக்கத்தொகை வழங்க பயன்படுகிறது.

வாழ்க்கைத்தர குறியீட்டு எண்ணை அமைக்கும் முறைகள் (Methods of constructing Cost of Living Index Number)

பின்வரும் வழிமுறைகளால் வாழ்க்கைத் தரகுறியீட்டு எண்ணை அமைக்க முடியும்,

(i) மொத்த செலவு முறை அல்லது நிறையிட்ட மொத்தமுறை
(Aggregate Expenditure Method (or) Weighted Aggregative Method).

(ii) குடும்ப வரவு செலவுத் திட்ட முறை (Family Budget Method)

மொத்த செலவுமுறை (Aggregate Expenditure Method)

மொத்த செலவு முறையானது வாழ்க்கைத்தரக் குறியீட்டு எண்ணை கணக்கிடப் பயன்படுத்தப்படும் மிகவும் பொதுவான முறை ஆகும். இம்முறையில் அடிப்படை ஆண்டின் அளவுகள் நிறைகளாக பயன்படுத்தப்படுகின்றன. அதற்கான சூத்திரம் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

$$\text{வாழ்க்கைத் தரக்குறியீட்டு எண் (CLI)} = \frac{\sum p_1 q_0}{\sum p_0 q_0} \times 100$$

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 9.indd 152 09-05-2019 14:24:27

குறிப்பு

வாழ்க்கைத் தரக்குறியீட்டு எண்ணைக் கணக்கிட உதவும் சூத்திரமும், லாஸ்பியர் விலைக்குறியீட்டு எண் சூத்திரமும் ஒன்றே ஆகும்.

குடும்ப வரவு செலவுத் திட்ட முறை (Family Budget Method)

குடும்ப வரவு செலவு திட்ட முறையில், அடிப்படை ஆண்டின் விலைகள் மற்றும் அளவை பெருக்குவதன் மூலம் நிறைகள் கணக்கிடப்படுகின்றன. அதாவது $V=\sum p_0q_0$ அதன் சூத்திரம் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

வாழ்க்கைத்தர குறியீட்டுஎண் $= \dfrac{\sum PV}{\sum V}$

இங்கு தொடர்பு விலை: $P = \dfrac{p_1}{p_0}\times 100$

உருப்படியின் நிறை மதிப்பு: $V=\sum p_0q_0$

குறிப்பு

குடும்ப வரவு செலவுத் திட்டமுறையானது தொடர்பு விலைகளின் நிறையிட்ட சராசரி முறைக்கு ஒப்பாகும்.

குறியீட்டு எண்களை எந்தச் சூழலில் பயன்படுத்தலாம்?

விலைகள் மற்றும் அளவுகள் கொடுக்கப்பட்டு இருந்தால், மொத்த செலவு முறையைப் பயன்படுத்தலாம்.

விலைகள் மற்றும் நிறைகள் கொடுக்கப்பட்டு இருந்தால், குடும்ப வரவு செலவுத்திட்ட முறையைப் பயன்படுத்தலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 9.15

கொடுக்கப்பட்டுள்ள புள்ளி விவரங்களுக்கு வாழ்க்கைத் தரக்குறியீட்டு எண்ணை கணக்கிடுக.

பொருள்கள்	அளவு 2005	விலை	
		2005	2010
A	10	7	9
B	12	6	8
C	17	10	15
D	19	14	16
E	15	12	17

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 9.indd 153 09-05-2019 14:24:27

தீர்வு:

பொருள்கள்	அளவு 2005 (Q_0)	விலை 2005 (P_0)	2010 (P_1)	P_1Q_0	P_0Q_0
A	10	7	9	90	70
B	12	6	8	96	72
C	17	10	15	255	170
D	19	14	16	304	266
E	15	12	17	255	180
			மொத்தம்	1000	758

அட்டவணை 9.14

$$\text{வாழ்க்கைத் தரக்குறியீட்டுஎண்} = \frac{\sum p_1 q_0}{\sum p_0 q_0} \times 100 = \frac{1000}{758} \times 100 = 131.926$$

எடுத்துக்காட்டு 9.16

பின்வரும் விவரங்களுக்கு, 2010 அடிப்படை ஆண்டை பொறுத்து 2015 ஆம் ஆண்டிற்கான வாழ்க்கைக் குறியீட்டு எண்ணை கணக்கிடுக.

பொருள்கள்	அலகுகள் எண்ணிக்கை (2010)	விலை (2010)	விலை (2015)
அரிசி	5	1500	1750
சர்க்கரை	3.5	1100	1200
பருப்பு	3	800	950
துணி	2	1200	1550
நெய்	0.75	550	700
வாடகை	12	2500	3000
எரிபொருள்	8	750	600
இதரசெலவுகள்	10	3200	3500

தீர்வு:

இங்கே, அடிப்படை ஆண்டு அளவு கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. எனவே மொத்த செலவு முறையைப் பயன்படுத்தலாம்.

பொருள்கள்	அலகுகள் எண்ணிக்கை q_0 (2010)	விலை (2010) p_0	விலை (2015) p_1	p_0q_0	p_1q_0
அரிசி	5	1500	1750	7500	8750
சர்க்கரை	3.5	1100	1200	3850	4200

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 9.indd 154 09-05-2019 14:24:28

பருப்பு	3	800	950	2400	2850
துணி	2	1200	1550	2400	3100
நெய்	0.75	550	700	412.5	525
வாடகை	12	2500	3000	30000	36000
எரிபொருள்	8	750	600	6000	4800
இதரசெலவுகள்	10	3200	3500	32000	35000
			மொத்தம்	84562.5	95225

அட்டவணை 9.15

$$\text{வாழ்க்கை குறியீட்டுஎண்} = \frac{\sum p_1 q_0}{\sum p_0 q_0} \times 100 = \frac{95225}{84562.5} \times 100 = 112.609$$

எனவே, 2015 ஆம் ஆண்டை, 2010 ஆண்டு உடன் ஒப்பிடுகையில், வாழ்க்கை குறியீட்டுஎண் 12.609% அதிகரித்துள்ளது.

எடுத்துக்காட்டு 9.17

பின்வரும் விவரங்களுக்கு, 2011 அடிப்படை ஆண்டைப் பொறுத்து 2016 ஆம் ஆண்டிற்கான நுகர்வோர் விலைக் குறியீட்டு எண் மூலம் வாழ்க்கை குறியீட்டு எண்ணை கணக்கிடுக.

பொருள்கள்	விலை		அளவு
	அடிப்படை ஆண்டு	நடப்பு ஆண்டு	
அரிசி	32	48	25
சர்க்கரை	25	42	10
எண்ணெய்	54	85	6
காப்பி	250	460	1
தேயிலை	175	275	2

தீர்வு:

இங்கே, அடிப்படை ஆண்டு அளவு கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. எனவே மொத்த செலவு முறையைப் பயன்படுத்தலாம்.

பொருள்கள்	விலை		அளவு (q_0)	p_0q_0	p_1q_0
	அடிப்படை ஆண்டு (p_0)	நடப்பு ஆண்டு (p_1)			
அரிசி	32	48	25	800	1200
சர்க்கரை	25	42	10	250	420
எண்ணெய்	54	85	6	324	510
காப்பி	250	460	1	250	460
தேயிலை	175	275	2	350	550
			மொத்தம்	1974	3140

அட்டவணை 9.16

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 9.indd 155 09-05-2019 14:24:28

$$\text{வாழ்க்கை குறியீட்டு எண்} = \frac{\sum p_1 q_0}{\sum p_0 q_0} \times 100 = \frac{3140}{1974} \times 100 = 159.0679$$

எனவே, 2016 ஆம் ஆண்டை, 2011 ஆண்டு உடன் ஒப்பிடுகையில், வாழ்க்கை குறியீட்டுஎண் 59.0679% அதிகரித்துள்ளது.

எடுத்துக்காட்டு 9.18

2007 ஆம் ஆண்டின்அடிப்படையில் 2011 ஆம் ஆண்டிற்கான வாழ்க்கை குறியீட்டு எண்ணைக் கொடுக்கப்பட்ட விவரங்களுக்கு குடும்ப வரவு செலவு முறையைப் பயன்படுத்திக் கணக்கிடுக.

பொருள்கள்	விலை		நிறைகள்
	2007	2011	
A	350	400	40
B	175	250	35
C	100	115	15
D	75	105	20
E	60	80	25

தீர்வு:

பொருள்கள்	விலை		நிறைகள் (V)	$P = \frac{P_1}{P_0} \times 100$	PV
	2007 (P_0)	2011 (P_1)			
A	350	400	40	114.285	4571.4
B	175	250	35	142.857	4999.99
C	100	115	15	115	1725
D	75	105	20	114	2280
E	60	80	25	133.333	3333.33
		Total	135		16909.7315

அட்டவணை 9.17

$$\text{வாழ்க்கை குறியீட்டு எண்} = \frac{\sum PV}{\sum V} = \frac{16909.7315}{135} = 125.2572$$

எனவே, 2011–ஆம் ஆண்டை, 2007 ஆண்டு உடன் ஒப்பிடுகையில், வாழ்க்கை குறியீட்டு எண் 25.2572% அதிகரித்துள்ளது.

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 9.indd 156 09-05-2019 14:24:29

பயிற்சி 9.2

1. குறியீட்டு எண் என்பதை வரையறுக்க.
2. குறியீட்டு எண்ணின் பயன்பாட்டைக் விவரிக்க.
3. குறியீட்டு எண் வகைப்படுத்தலைக் குறிப்பிடவும்.
4. லாஸ்பியரின் விலை குறியீட்டு எண் என்பதை வரையறுக்க.
5. பாசியின் விலை குறியீட்டு எண்ணை விளக்கவும்.
6. ஃபிஷரின் விலை குறியீட்டு எண் பற்றி குறிப்பு எழுதுக.
7. குறியீட்டு எண்ணின் போதுமான தன்மையை சோதிக்கும் சோதனைகளை எழுதுக.
8. காலமாற்றுச் சோதனை வரையறுக்க.
9. காரணி மாற்றுச் சோதனை விளக்கவும்.
10. உண்மை மதிப்பீட்டு விகிதத்தை வரையறுக்கவும்.
11. வாழ்க்கை குறியீட்டு எண்ணை பற்றி விளக்குக..
12. குடும்ப வரவுசெலவுத் திட்ட முறை வரையறுக்க.
13. வாழ்க்கை குறியீட்டு எண்ணின் பயன்பாட்டைக் எழுதுக.
14. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள புள்ளி விவரங்களுக்குப் பொருத்தமான முறையில் விலைக் குறியீட்டு எண்ணை கணக்கிடுக.

பொருள்கள்	2002		2012	
	விலை	அளவு	விலை	அளவு
A	10	20	16	10
B	12	34	18	42
C	15	30	20	26

15. 2005ஆம் ஆண்டிற்கு (i) லாஸ்பியரின் முறை (ii) பாசியின் முறை மூலம் விலைக் குறியீட்டு எண்களைக் கணக்கிக.

பொருள்கள்	1995		2005	
	விலை	அளவு	விலை	அளவு
A	5	60	15	70
B	4	20	8	35
C	3	15	6	20

16. 2010ஆம் ஆண்டிற்கு (i) லாஸ்பியர் (ii) பாசி (iii) ஃபிஷர் விலைக் குறியீட்டு எண்களை பின்வரும் புள்ளி விவரங்களுக்குக் கணக்கிக.

பொருள்கள்	விலை		அளவு	
	2000	2010	2000	2010
A	12	14	18	16
B	15	16	20	15
C	14	15	24	20
D	12	12	29	23

17. பின்வரும் விவரங்களுக்கு, ஃபிஷர் விலைக் குறியீட்டு எண்ணைக் கட்டமைக்கவும் மேலும் அது காலமாற்றுச் சோதனை, காரணி மாற்றுச் சோதனை ஆகியவறைறைப் பூர்த்தி செய்யும் என நிரூபிக்கவும்.

பொருள்கள்	யூனிட்ஒன்றுக்கு விலை (ரூ)		அலகுகளின்எண்ணிக்கை	
	அடிப்படை ஆண்டு	நடப்பு ஆண்டு	அடிப்படை ஆண்டு	நடப்பு ஆண்டு
A	6	10	50	56
B	2	2	100	120
C	4	6	60	60
D	10	12	50	24
E	8	12	40	36

18. பின்வரும் விவரங்களுக்கு, ஃபிஷர் விலைக் குறியீட்டு எண்ணைக் கட்டமைக்கவும் மேலும் அது காலமாற்றுச் சோதனை, காரணி மாற்றுச் சோதனை ஆகியவறைறைப் பூர்த்தி செய்யும் என நிரூபிக்கவும்.

ஆண்டு	கள்: A		கள்: B		கள்: C	
	விலை (₹)	அளவு (கி.கி)	விலை (₹)	அளவு (கி.கி)	விலை (₹)	அளவு (கி.கி)
1996	5	10	8	6	6	3
1999	4	12	7	7	5	4

19. பின்வரும் விவரங்களுக்கு, ஃபிஷர் விலை குறியீட்டு எண்ணைக் கண்டுபிடிக்க. மேலும் அது கால மாற்றுச் சோதனையை பூர்த்தி செய்யும் என நிரூபிக்க.

பொருள்கள்	2016		2017	
	விலை (₹)	அளவு (கி.கி)	விலை (₹)	அளவு (கி.கி)
உணவு	40	12	65	14
எரிபொருள்	72	14	78	20
ஆடை	36	10	36	15
கோதுமை	20	6	42	4
மற்ற	46	8	52	6

20. பின்வரும் குழு குறியீட்டு எண்கள் மற்றும் சராசரி தொழிலாளர் வர்க்க குடும்பத்தின் பட்ஜெட்டின் குழு நிறைகளுக்கான வாழ்க்கை குறியீட்டு எண்ணை கட்டமைக்கவும்.

குழுக்கள்	உணவு	எரிபொருள்	ஆடை	வாடகை	இதர
குறியீட்டு எண்கள்	2450	1240	3250	3750	4190
எடை	48	20	12	15	10

21. குடும்ப வரவு செலவுத்திட்ட முறையைப் பயன்படுத்தி பின்வரும் விவரங்களுக்கு 2012ஆம் ஆண்டை அடிப்படை ஆண்டாகக் கொண்டு 2015–க்கான வாழ்க்கை குறியீட்டு எண்ணைக் கட்டமைக்கவும்.

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 9.indd 158 09-05-2019 14:24:29

பொருள்கள்	விலை		நிறைகள்
	2012	2015	
அரிசி	250	280	10
கோதுமை	70	85	5
சோளம்	150	170	6
எண்ணெய்	25	35	4
பருப்பு	85	90	3

22. மொத்த செலவுமுறையைப் பயன்படுத்தி பின்வரும் விவரங்களுக்கு வாழ்க்கை குறியீட்டு எண்ணைக் கண்டுபிடி.

பொருள்கள்	நிறைகள் 2010	விலை (₹)	
		2010	2015
P	80	22	25
Q	30	30	45
R	25	42	50
S	40	25	35
T	50	36	52

9.3 புள்ளியியல் தரக்கட்டுப்பாடு (Statistical Quality Control (SQC))

முன்னுரை

புள்ளியியல் தரக்கட்டுப்பாடானது தொழிற்சாலைகளில் பயன்படுத்த கூடிய மிகமுக்கியமான புள்ளியியல் உத்தியாகும். ஒரு பொருளின் தரமானது அதன் மூலப்பொருள்கள், இயந்திரங்கள், மனித ஆற்றல் மற்றும் மேலாண்மை ஆகியவற்றை சார்ந்தது. இது உற்பத்திப் பொருளின் அளவுகோல் அல்லது தரநிலையைக் குறிக்கிறது. புள்ளியியல் தரக்கட்டுப்பாடானது மூலப்பொருளை தருவிப்பதிலிருந்து இறுதிப்பொருள் தயாரிக்கப்படும் வரை தரத்தை உறுதி செய்கிறது.

9.3.1 பொருள் (Meaning)

தரக்கட்டுப்பாடு என்பது பொருள்கள், செயலாக்கம், இயந்திரங்கள் ஆகியவற்றில் காணப்படும் தரக்குறைப்பாட்டைக் கண்டுபிடிக்க உதவும் வலிமை வாய்ந்த உத்தியாகும். உற்பத்தி செய்யப்பட்ட இறுதி பொருள்கள் நுகர்வோரிடமிருந்து எதிர்பார்க்கக்கூடிய தரத்தைப் பெற்றிருப்பது அவசியமாகும்.

இந்த உத்தியானது அனைத்து உற்பத்தி தொழிற்சாலைகளிலும் அதாவது, மின் உபகரணங்கள், பிஸ்கட், சோப்பு, ரசாயனங்கள், பெட்ரோலிய பொருள்கள் மற்றும் இதர பொருள்களின் தரக் கட்டுப்பாட்டை நிர்ணயிக்க உதவுகிறது.

9.3.2 மாறுபாட்டின் காரணங்கள் (Causes of Variation)

ஒரு பொருளின் தரத்தை நிர்ணயிக்கும் மாறுபாட்டின் காரணங்கள் இரண்டு வகைபடுகிறது. அவை

1. வாய்ப்பு காரணங்கள்
2. குறிப்பிட்ட காரணங்கள்

வாய்ப்பு காரணங்கள் (அல்லது சீரற்ற காரணங்கள்) (Chance Causes)

வாய்ப்பு காரணங்கள் என்பது உற்பத்தி செயல் முறைகளில் இயற்கையாகவோ அல்லது இயல்பாகவோ ஏற்படும் சிறிய மாறுபாடுகள் ஆகும். இந்த காரணங்களால் ஏற்படும் மாறுபாடுகள் மனித கட்டுப்பாட்டிற்கு அப்பாற்பட்டதாகும் இதைத் தடுக்கவோ, அகற்றவோ எந்த சூழ்நிலைகளிலும் முடியாது.

பொருள்களின் தரத்திற்கு எந்தவித பாதிப்பையும் ஏற்படுத்தாத சிறிய விளைவுகள், வாய்ப்பு காரணங்கள் என அழைக்கப்படுகிறது. உதாரணமாக மழை, வெள்ளம், மின்தடை போன்றவை ஆகும்.

குறிப்பிட்ட காரணங்கள் (Assignable Causes)

குறிப்பிட்ட காரணங்கள் என்பது எந்தவொரு உற்பத்தி செயல்களிலும் ஏற்படும் இரண்டாவது வகை மாறுபாடாகும். இந்த குறிப்பிட்ட காரணங்கள் மூலப்பொருள்கள் பெறுவதிலிருந்து இறுதியாக உற்பத்தி செய்யப்பட்ட பொருள் நுகர்வோரிடம் அளிக்கும் வரை செயல் முறையின் எந்த கட்டத்திலும் நிகழலாம். உதாரணமாக குறைபாடுள்ள மூலப்பொருள்கள், இயந்திரங்களில் தவறு, திறமையற்ற மனித ஆற்றல், பழுதடைந்த கருவிகள், புதிய செயல்பாடு ஆகியவை குறிப்பிட்ட காரணங்களின் முக்கிய காரணிகள் ஆகும்.

புள்ளியியல் தரக்கட்டுப்பாட்டின் முக்கிய நோக்கம் குறிப்பிட்ட காரணங்களை நீக்குவது மற்றும் உற்பத்தி கட்டுப்பாட்டின் கீழ் கொண்டு வருவதற்கான புள்ளியியல் உத்திகளை வழங்குவதாகும்.

9.3.3 செயல்முறை கட்டுப்பாடு மற்றும் உற்பத்தி கட்டுப்பாடு (Process Control and Product Control)

உற்பத்தி செய்யப்பட்ட பொருளின் நிறைவான தர அளவை கட்டுபடுத்துவது மற்றும் பராமரிப்பது ஆகியவை உற்பத்தி செயல்முறையின் முக்கிய நோக்கம் ஆகும். இது செயல்முறைக் கட்டுப்பாட்டின் மூலமே சாத்தியமாகும். செயல்முறை கட்டுப்பாட்டில், உற்பத்தி செயல்முறை மூலம் குறைபாடுள்ள பொருள்களின் விகிதம் குறைக்கப்படவேண்டும். இது கட்டுப்பாட்டு வரைபடங்களின் உத்தியின் மூலம் பெறப்படுகிறது. உற்பத்தி கட்டுப்பாடு என்பது ஆய்வு திட்டங்களின் வாயிலாக உற்பத்தி செய்யப்பட்ட பொருளின் தரத்தை கூறெடுத்தல் முறையில் சோதனை செய்வதாகும். உற்பத்தி கட்டுப்பாட்டின் நோக்கம் தமது வாடிக்கையாளர்களுக்கு ஒரு குறிப்பிட்ட தர அளவை உத்தரவாதத்துடன் கொடுப்பதாகும். விற்கப்பட்ட பொருள்களில், குறைபாடுள்ள பொருள்கள் மிகுதியாக இருக்காது என்பதை உறுதிப்படுத்த முயற்சிக்கிறது. இம்முறையானது மூலப்பொருள்களை, முழுமை பெறாத பொருள்கள் அல்லது முழுமை பெற்ற பொருள்கள் என வகைப்படுத்தி, அதனை ஏற்பதா அல்லது நிராகரிக்கப்பதா என தீர்மானிக்கிறது.

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 9.indd 160 09-05-2019 14:24:29

கட்டுப்பாட்டு வரைபடங்கள் (Control Charts)

ஒரு தொழிற்சாலையானது, இரு வகையான இடர்பாடுகளை எதிர் கொள்ளவேண்டி உள்ளது, அவை

(i) செயல்முறையானது அதன் திட்ட அளவிற்கு ஒத்துப்போகிறதா என்பதை சோதிப்பதற்கு.

(ii) திட்டநிலைகளை மேம்படுத்த மற்றும் மாறுபாட்டை குறைப்பதற்கு.

ஷேவார்ட்டின் கட்டுப்பாட்டு வரைபடங்கள் இவை இரண்டிற்கும் பதில் அளிக்கின்றன. தரவுகளில் உள்ள வடிவ மாறுபாடுகளைக் கண்டறிவதற்கு இது ஒரு எளிய உத்தியாகும். கட்டுப்பாட்டு விளக்கப்படங்கள் எளிமையாக வடிவமைக்ககூடியது மற்றும் எளிதாக விளக்கக் கூடியது ஒரு வழக்கமான கட்டுப்பாட்டு வரைபடத்தில் பின்வரும் மூன்று கோடுகள் உள்ளன.

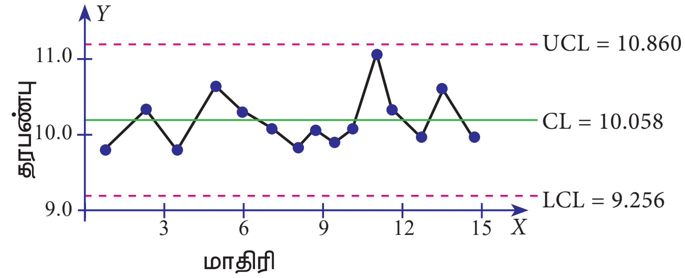
(i) மைய கோடு (CL) செயல் முறையின் தேவையான தரநிலை நிலையைக் குறிக்கிறது.

(ii) மேல் நிலை கட்டுப்பாடு கோடு (UCL) ஏற்றுக்கொள்ளக் கூடிய மேல் வரம்பைக் குறிக்கிறது.

(iii) கீழ் நிலை கட்டுப்பாட்டுக் கோடு (LCL) ஏற்றுக் கொள்ளக் கூடிய கீழ் வரம்பைக் குறிக்கிறது.

தரவுப் புள்ளிகள் கட்டுப்பாட்டு வரம்புக்குள் விழும்போது, செயல்முறையானது கட்டுப்பாட்டில் இருப்பதாக நாம் கூறலாம், அதற்குப் பதிலாக ஒன்று அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட தரவுப் புள்ளிகள் கட்டுப்பாட்டு வரம்புக்கு வெளியே விழுமாயின், செயல்முறையானது கட்டுப்பாட்டிற்கு அப்பால் இருப்பதாக நாம் கூறலாம்.

எடுத்துக்காட்டாக பின்வரும் வரைபடம் குறிக்கப்பட்ட தரவுப்புள்ளிகளைக் கொண்ட மூன்று கட்டுப்பாட்டுக் கோடுகளைக் காண்பிக்கிறது, இதில் எல்லா புள்ளிகளும் கட்டுப்பாட்டு எல்லைக்குள் விழுகின்றன, எனவே, செயல்முறையானது கட்டுப்பாட்டில் இருப்பதாக நாம் கருதலாம்.



படம் 9.4

மாறிகளுக்கான கட்டுப்பாடு வரைபடங்கள் (Control Charts for Variables)

மாறிகளுக்கான கட்டுப்பாடு வரைபடங்கள் என்பது உற்பத்தி செய்யபட்ட ஒரு பொருளின் தரத்தை அளவிட பயன்படுகிறது. ஒரு எண் மதிப்பின் மூலம் வெளிப்படுத்தக்கூடிய ஒரு உற்பத்தி பொருளின் தர பண்பினை மாறி (Variable) என அழைக்கலாம். உற்பத்தி தர பண்புகளானது நீளம், அகலம், வெப்பநிலை மற்றும் இழுவிசைபலம் ஆகியவற்றை அளவிடத்தக்கவையாகும். இவை ஒரு குறிப்பிட்ட அலகுகளில் வெளிப்படுத்தப்படுகின்றன. மாறிகளானது இயல் நிலை நிகழ்தகவு விதியைப் பின்பற்றக் கூடியதாக இருக்கிறது. அத்தகைய தரவின் தரக்கட்டுப்பாட்டுக்காக இரண்டு வகையான கட்டுப்பாட்டு வரைபடங்கள் பயன்படுத்தப்படுகின்றன. அவை பின்வருமாறு,

(i) சராசரி வரைபடங்கள் ($\overline{X}$) (ii) வீச்சு வரைபடங்கள்(R)

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 9.indd 161 09-05-2019 14:24:29

9.3.4 $\overline{X}$ மற்றும் R வரைபடங்கள் கட்டமைத்தல் (Construction of $\overline{X}$ and R charts)

ஒரு உற்பத்தி செயல்முறையைக் கொண்டு அனைத்து பொருள்களையும் ஒரே மாதிரியாக உற்பத்தி செய்ய முடியாது. ஒவ்வொரு உற்பத்தி செயல்முறைகயிலும் ஒரு குறிப்பிட்ட மாறுபாடு காணப்படும். மாறுபாடு என்பது மூலப்பொருள்கள், இயந்திர அமைப்பு, இயந்திரம் இயக்குபவர்கள், புதிய செயல்பாடுகள் மற்றும் புதிய இயந்திரங்கள் கையாளுபவர்கள் ஆகிய எல்லாவற்றையும் உள்ளடக்கிய உற்பத்தி செயல்முறை பண்புகளின் மொத்த எண்ணிக்கை ஆகும். கொடுக்கப்பட்ட செயல்பாட்டில் இருந்து பெறப்பட்ட கூறுகளின் சராசரி தரத்தைக் காண்பதற்கு இந்த $\overline{X}$ விளக்கப்படம் பயன்படுத்தப்படுகிறது. வீச்சு (R) விளக்கப்படம் கொடுக்கப்பட்ட செயல்முறையில் இருந்து பெறப்பட்ட கூறுகளின் மாறுபாடு அல்லது சிதறலைக் காண்பிக்க இவ்வரைபடம் பயன்படுகிறது. ஒரு உற்பத்தி செயலில் குறிப்பிட்ட விளைவுகள் இருக்கின்றதா அல்லது இல்லையா என்பதனை $\overline{X}$ மற்றும் R வரைபடங்களின் கட்டுப்பாட்டு வரம்புகள் காண்பிக்கிறது. ஒரு செயல்முறையை ஏற்பதா அல்லது நிராகரிப்பதா என முடிவெடுப்பதற்கு $\overline{X}$ மற்றும் R என இரண்டு வரைபடங்கள் பொதுவாக தேவைப்படுகின்றன.

$\overline{X}$ மற்றும் R வரைபடங்கள் அமைப்பதற்கான செயல்முறை கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

$\overline{X}$ வரைபடத்தின் செயல்முறை

(i) நாம் $X_1, X_2, X_3, \ldots$ ஆகியவை தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட கூறுகள் என்க. ஒவ்வொரு கூறும் 'n' கண்டறிவு பதிவுகளைக் கொண்டு உள்ளது. பொதுவாக (n = 4,5 அல்லது 6).

(ii) $\overline{X_i} = \dfrac{\sum X_i}{n}, i = 1,2,3,4,\ldots$ என்ற சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி, ஒவ்வொரு மாதிரிகளுக்கும் சராசரி $\overline{X_1}, \overline{X_2}, \overline{X_3}\ldots$ –ஐ கணக்கிடுக. இங்கு $\sum X_i$ என்பது கூறில் சேர்க்கப்பட்ட 'n' மதிப்புகளின் மொத்தம் ஆகும்.

(iii) கூறு சராசரிகளின் சராசரியைக் கண்டறியவும் $\left(\overline{\overline{X}}\right)$. அதாவது $\overline{\overline{X}} = \dfrac{\sum \overline{X}}{n}$. இங்கு $\sum \overline{X}$ என்பது அனைத்து கூறு சராசரிகளின் மொத்தம் மற்றும் n என்பது கூறு சராசரிகளின் எண்ணிக்கை ஆகும்.

R வரைபடத்தின் செயல்முறை (Procedure for R -Charts)

$R = x_{max} - x_{min}$ –ஐ கண்டுபிடிக்கவும்.

$R_1, R_2, R_3\ldots$ என்பன 'n' கூறுகளின் வீச்சுகள் என்க.

வீச்சு சராசரி $\overline{R} = \dfrac{\sum R}{n}$ மூலம் பெறப்படுகிறது.

$\overline{X}$ வரைபடங்களின் கட்டுப்பாட்டின் வரம்புகளைக் கீழ்க்கண்ட இரண்டு வகைகளில் கணக்கிடலாம்.

வகை (i) $\overline{X}$ மற்றும் திட்டவிலக்கம் கொடுக்கப்படும் போது	வகை (ii) $\overline{X}$ மற்றும் திட்டவிலக்கம் கொடுக்கப்படாதபோது
$UCL = \overline{\overline{X}} + 3\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	$UCL = \overline{\overline{X}} + A_2\overline{R}$
$CL = \overline{\overline{X}}$	$CL = \overline{\overline{X}}$
$LCL = \overline{\overline{X}} - 3\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	$LCL = \overline{\overline{X}} - A_2\overline{R}$

அட்டவணை 9.18

இரு வேறுபட்ட சூழ்நிலைகளில், வீச்சு வரைபடங்களின் (R) வரம்புகளைக் கணக்கிடுவது.

வகை (i) திட்டவிலக்கம் கொடுக்கப்படும் போது	வகை (ii) திட்டவிலக்கம் கொடுக்கப்படாதபோது
$UCL = \overline{R} + 3\sigma_R$	$UCL = D_4\overline{R}$
$CL = \overline{R}$	$CL = \overline{R}$
$LCL = \overline{R} - 3\sigma_R$	$LCL = D_3\overline{R}$

அட்டவணை 9.19

A_2, D_3 மற்றும் D_4 ஆகியவற்றின் மதிப்புகள் அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

எடுத்துக்காட்டு 9.19

ஓர் இயந்திரம், குழாயை 0.532 செ.மீ. சராசரியான விட்டத்துடன் திட்டவிலக்கம் 0.002 செ.மீ அளவிலும் துளையிடுகிறது. கட்டுப்பாடு சராசரிக்கான வரம்புகளை 5 கூறுகளுக்குக் கணக்கிடுக.

தீர்வு:

கொடுக்கப்பட்ட தகவல்கள் $\overline{\overline{X}} = 0.532$, $\sigma = 0.002$, $n = 5$

$\overline{X}$ வரைபடத்தின் கட்டுப்பாடு வரம்புகள்

$$UCL = \overline{\overline{X}} + 3\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 0.532 + 3\frac{0.002}{\sqrt{5}} = 0.5346$$

$$CL = \overline{\overline{X}} = 0.532$$

$$LCL = \overline{\overline{X}} - 3\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 0.532 - 3\frac{0.002}{\sqrt{5}} = 0.5293$$

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 9.indd 163
09-05-2019 14:24:33

எடுத்துக்காட்டு 9.20

ஒரு குறிப்பிட்ட பொருளுக்கான உற்பத்தியில் 6 அளவு கொண்ட 8 கூறுகளின் அளவுகள் கொடுக்கபட்டுள்ளன. சராசரி வரைபடத்தைப் பயன்படுத்தி கட்டுப்பாடு வரம்புகளை கணக்கிடுக.

கூறு	1	2	3	4	5	6
சராசரி	300	342	351	319	326	333
வீச்சு	25	37	20	28	30	22

$n = 6, A_2 = 0.483$ என கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

தீர்வு:

கூறு	1	2	3	4	5	6	மொத்தம்
சராசரி	300	342	351	319	326	333	**1971**
வீச்சு	25	37	20	28	30	22	**162**

அட்டவணை 9.20

$\overline{X}$ வரைபடத்தின் கட்டுப்பாடு வரம்புகள்

$\overline{\overline{X}} = \frac{\sum \overline{X}}{n} = \frac{1971}{6} = 328.5$ $\quad \overline{R} = \frac{\sum R}{n} = \frac{162}{6} = 27$ இங்கே 'n' என்பது கூறுகளின் எண்ணிக்கை ஆகும்.

$$UCL = \overline{\overline{X}} + A_2\overline{R} = 328.5 + 0.483(27) = 341.54$$

$$CL = \overline{\overline{X}} = 328.5$$

$$LCL = \overline{\overline{X}} - A_2\overline{R} = 328.5 - 0.483(27) = 315.45$$

எடுத்துக்காட்டு 9.21

பின்வரும் விவரங்கள் ஒவ்வொன்றும் 5 அளவுகொண்ட 10 கூறுகளின் சராசரி மற்றும் வீச்சு ஆகியவற்றைக் காண்பிற்கிறது. சராசரி வரைபடம் மற்றும் வீச்சு வரைபடம் ஆகியவற்றுக்கான கட்டுப்பாடு வரம்புகளைக் கணக்கிடுக.

கூறு	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
சராசரி	21	26	23	18	19	15	14	20	16	10
வீச்சு	5	6	9	7	4	6	8	9	4	7

தீர்வு:

கூறு	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	மொத்தம்
சராசரி	21	26	23	18	19	15	14	20	16	10	**182**
வீச்சு	5	6	9	7	4	6	8	9	4	7	**65**

அட்டவணை 9.21

$\overline{X}$ வரைபடத்தின் கட்டுப்பாடு வரம்புகள்

$$\overline{\overline{X}} = \frac{\sum \overline{X}}{n} = \frac{182}{10} = 18.2 \qquad \overline{R} = \frac{\sum R}{n} = \frac{65}{10} = 6.5$$

$$UCL = \overline{\overline{X}} + A_2\overline{R} = 18.2 + 0.577(6.5) = 21.95$$

$$CL = \overline{\overline{X}} = 18.2$$

$$LCL = \overline{\overline{X}} - A_2\overline{R} = 18.2 - 0.577(6.5) = 14.5795$$

வீச்சு வரைபடக் கட்டுப்பாடு வரம்புகள்

$$UCL = D_4\overline{R} = 2.114(6.5) = 13.741$$

$$CL = \overline{R} = 6.5$$

$$LCL = D_3\overline{R} = 0(6.5) = 0$$

எடுத்துக்காட்டு 9.22

ஒரு குறிப்பிட்ட உற்பத்திப் பொருளின் 6 அளவுகொண்ட 10 கூறுகளின் அளவுகள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. சராசரி மற்றும் வீச்சு கட்டுப்பாடு வரம்புகளைக் கணக்கிடுக.

கூறு	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
சராசரி	383	508	505	582	557	337	514	614	707	753
வீச்சு	95	128	100	91	68	65	148	28	37	80

தீர்வு:

கூறு	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	**மொத்தம்**
சராசரி	383	508	505	582	557	337	514	614	707	753	**5460**
வீச்சு	95	128	100	91	68	65	148	28	37	80	**840**

அட்டவணை 9.22

$$\overline{\overline{X}} = \frac{\sum \overline{X}}{10} = \frac{5460}{10} = 546 \qquad \overline{R} = \frac{\sum R}{n} = \frac{840}{10} = 84$$

$\overline{X}$ வரைபட கட்டுப்பாடு வரம்புகள்

$$UCL = \overline{\overline{X}} + A_2\overline{R} = 546 + 0.483(84) = 586.57$$

$$CL = \overline{\overline{X}} = 546$$

$$LCL = \overline{\overline{X}} - A_2\overline{R} = 546 - 0.483(84) = 505.43$$

வீச்சு கட்டுப்பாடு வரம்புகள்

$$UCL = D_4\overline{R} = 2.004(84) = 168.336$$

$$CL = \overline{R} = 84$$

$$LCL = D_3\overline{R} = 0(84) = 0$$

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 9.indd 165 09-05-2019 14:24:36

எடுத்துக்காட்டு 9.23

5 அளவுகொண்ட 10 மாதிரிகளின் சராசரி மற்றும் வீச்சு அளவீடுகள் உங்களுக்காகக் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. சராசரி வரம்பு வரைபடங்களை வரையவும். மற்றும் செயல்முறை கட்டுப்பாட்டின் நிலைகுறித்து உமது கருத்தைக் விவரிக்கவும்.

கூறு	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\overline{X}$	43	49	37	44	45	37	51	46	43	47
R	5	6	5	7	7	4	8	6	4	6

$n=5,\ A_2=0.58\ ,D_3=0$ மற்றும் $D_4=2.115$ என கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

தீர்வு:

$$\overline{\overline{X}}=\frac{\sum\overline{X}}{10}=\frac{442}{10}=44.2$$

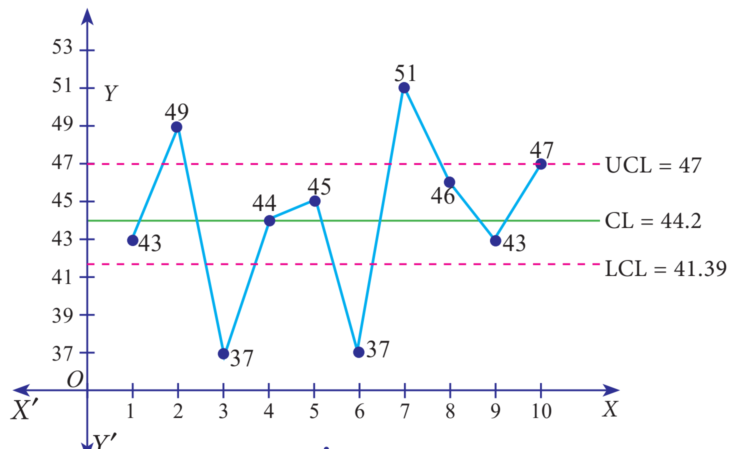
$$\overline{R}=\frac{\sum R}{n}=\frac{58}{10}=5.8$$

$$UCL=\overline{\overline{X}}+A_2\overline{R}$$

$$=44.2+0.483(5.8)=47.00$$

$$CL=\overline{\overline{X}}=44.2$$

$$LCL=\overline{\overline{X}}-A_2\overline{R}=44.2-0.483(5.8)=41.39$$



படம் 9.5

மேலே சுட்டிக் காட்டப்பட்ட விளக்கப்படம், மூன்று கட்டுப்பாட்டு கோடுகள் புள்ளிகளால் குறிக்கப்படுகிறது. நான்கு புள்ளிகள் கட்டுப்பாட்டு வரம்புகளிலிருந்து வெளியேறுவதால், செயல்முறையானது கட்டுப்பாட்டில் இல்லை என்று சொல்லலாம்.

பயிற்சி 9.3

1. புள்ளிவிவர தரக்கட்டுப்பாடு என்பதை வரையறு.
2. உற்பத்தி செயல்முறையில் மாறுபாட்டிற்கான காரணங்களின் வகைகளைக் குறிப்பிடுக.
3. தற்செயல் காரணங்கள் என்பதை வரையறு.
4. குறிப்பட்ட காரணங்கள் என்பதை வரையறு.
5. உற்பத்தி கட்டுப்பாட்டைப் பற்றி நீங்கள் என்ன கருதுகிறீர்கள்?
6. நீங்கள் செயல்முறை கட்டுப்பாட்டைப் பற்றி நீங்கள் என்ன கருதுகிறீர்கள்?
7. கட்டுப்பாட்டு வரைபடங்கள் என்பதை வரையறுக்கவும்.
8. மாறிகளுக்கான கட்டுப்பாட்டு வரைபடங்களைக் குறிப்பிடுக.
9. சராசரி வரைபடங்கள் என்பதை வரையறு.

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 9.indd 166 09-05-2019 14:24:37

10. வீச்சு வரைபடங்கள் வரையறு.

11. புள்ளியியல் தரக் கட்டுப்பாடின் பயன்கள் யாவை?

12. சராசரி விளக்கப் படத்திற்கான கட்டுப்பாடு வரம்புகளை எழுதுக.

13. வீச்சு விளக்கப் படத்திற்கான கட்டுப்பாட்டு வரம்புகளை எழுதுக.

14. ஓர் இயந்திரம், கொடுக்கப்பட்ட எடையுடன் பாக்கெட்டுகளை வழங்க வடிவமைக்கப்பட்டுள்ளது. 5 அளவு கொண்ட 10 மாதிரிகளின் அளவீடுகள் பதிவு செய்யப்பட்டுக் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள:

மாதிரி	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\bar{X}$	15	17	15	18	17	14	18	15	17	16
R	7	7	4	9	8	7	12	4	11	5

சராசரி மற்றும் வீச்சு கட்டுப்பாடு வரம்புகளைக் கண்டுபிடி. மேலும் கட்டுப்பாட்டின் நிலை குறித்துக் கருத்து தருக.

($n=5$, $A_2=0.58$,$D_3=0$ மற்றும் $D_4 = 2.115$)க்கான மாற்றகாரணிகள்)

15. உற்பத்தி செய்முறையிலிருந்து வழக்கமான இடைவெளியில் 5 அளவுகொண்ட 10 மாதிரிகளின் அளவீடுகள் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டு அதன் மாதிரி சராசரி ($\bar{X}$) மற்றும் வீச்சு (R) ஆகியவை கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

மாதிரி	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\bar{X}$	49	45	48	53	39	47	46	39	51	45
R	7	5	7	9	5	8	8	6	7	6

சராசரி கட்டுப்பாடு வரம்புகளைக் கண்டுபிடிக்க, மேலும் கட்டுப்பாட்டின் நிலை குறித்து கருத்து தருக.. (கொடுக்கப்பட்ட தகவல் $A_2=0.58$,$D_3=0$ மற்றும் $D_4 = 2.115$)

16. பின்வரும் தரவிற்காக சராசரி ($\bar{X}$) மற்றும்வீச்சு (R) கட்டுப்பாடு வரம்புகளைக் கண்டுபிடி.

மாதிரி எண்	கூறுகள்		
1	32	36	42
2	28	32	40
3	39	52	28
4	50	42	31
5	42	45	34
6	50	29	21
7	44	52	35
8	22	35	44

(கொடுக்கப்பட்ட தகவல் $n = 3$ $A_2=0.58$,$D_3=0$ மற்றும் $D_4 = 2.115$)

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 9.indd 167 09-05-2019 14:24:38

17. சராசரி ($\overline{X}$) மற்றும் அதன் வீச்சு (R)க்கான மதிப்புகள் 5 அளவு கொண்ட 10 மாதிரிகளுக்கான அளவுகள் பின்வரும் அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. சராசரி மற்றும் வீச்சுக் கட்டுப்பாடு வரம்புகளைக் கண்டுபிடி, மேலும் கட்டுப்பாட்டின் நிலை குறித்து கருத்து தருக.

மாதிரி எண்	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
சராசரி	11.2	11.8	10.8	11.6	11.0	9.6	10.4	9.6	10.6	10.0
வீச்சு	7	4	8	5	7	4	8	4	7	9

(கொடுக்கப்பட்டதகவல் $n = 5$ $A_2 = 0.58$, $D_3 = 0$ மற்றும் $D_4 = 2.115$)

18. ஒரு தரக்கட்டுப்பாட்டு ஆய்வாளர், ஓர் உருளைக்கிழங்கு சில்லுகள் (chips) தயாரிக்கும் நிறுவனத்தில் இருந்து நான்கு அளவுகொண்ட பத்து மாதிரிப் பாக்கெட்டுகள் எடுத்துள்ளார். மாதிரி உள்ளடக்கங்கள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. சராசரி மற்றும் வீச்சு கட்டுப்பாடு வரம்புகளைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

மாதிரி எண்	கூறுகள்			
	1	2	3	4
1	12.5	12.3	12.6	12.7
2	12.8	12.4	12.4	12.8
3	12.1	12.6	12.5	12.4
4	12.2	12.6	12.5	12.3
5	12.4	12.5	12.5	12.5
6	12.3	12.4	12.6	12.6
7	12.6	12.7	12.5	12.8
8	12.4	12.3	12.6	12.5
9	12.6	12.5	12.3	12.6
10	12.1	12.7	12.5	12.8

(கொடுக்கப்பட்டதகவல் $n = 5$ $A_2 = 0.58$, $D_3 = 0$ மற்றும் $D_4 = 2.115$)

19. பின்வரும் தரவு, சராசரி ($\overline{X}$) மற்றும் அதன் வீச்சு (R) மதிப்புகள் 4 அளவுகொண்ட பத்து மாதிரியினைக் காட்டுகின்றன. சராசரி மற்றும் வீச்சுக் கட்டுப்பாட்டு விளக்கப்படம் ஒன்றை உருவாக்குக.

மாதிரி எண்	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\overline{X}$	29	26	37	34	14	45	39	20	34	23
R	39	10	39	17	12	20	05	21	23	15

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 9.indd 168 09-05-2019 14:24:38

20. ஓர் உற்பத்தி செயல்முறையில், 4 அளவுகொண்ட எட்டு மாதிரிகள் சேகரிக்கப்பட்டு, அதனுடைய சராசரி மற்றும் வீச்சு கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. சராசரி மற்றும் வீச்சுக் கட்டுப்பாட்டு விளக்கப்படத்துடன் கட்டுப்பாடு வரம்புகளையும் கண்டுபிடிக்க.

மாதிரி எண்	1	2	3	4	5	6	7	8
$\overline{X}$	12	13	11	12	14	13	16	15
R	2	5	4	2	3	2	4	3

21. ஒரு குறிப்பிட்ட குவளை தயாரிக்கும் துறையில், தரகட்டுப்பாட்டு ஆய்வாளர் காலையில் ஒவ்வொரு மணி நேரத்திலும் சீரற்ற முறையில் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட 5 குவளைகளின் ஒவ்வொரு எடையையும் பதிவு செய்தார்.

நேரம்	எடைகள் (ml)				
8:00 AM	43	41	42	43	41
9:00 AM	40	39	40	39	44
10:00 AM	42	42	43	38	40
11:00 AM	39	43	40	39	42

சராசரி மற்றும் வீச்சுக் கட்டுப்பாடு வரம்புகளை கண்டுபிடிக்க.

J8S9IL

பயிற்சி 9.4

ஏற்புடைய விடையைத் தெரிவு செய்க:

1. ஒரு காலம்சார் தொடரின் தரவுத் தொகுப்பு விவரங்களை பதிவு செய்யப்படும் இடைவெளி
   (a) சமகால இடைவெளி (b) வாரம் ஒருமுறை
   (c) தொடர்ச்சியான கால புள்ளிகள் (d) மேற்கண்ட அனைத்தும்

2. ஒரு காலம்சார் தொடரில்___________உள்ளன.
   (a) ஐந்து கூறுகள் (b) நான்கு கூறுகள்
   (c) மூன்று கூறுகள் (d) இரண்டு கூறுகள்

3. குறுகிய கால, ஏற்ற இறக்கத்துடன் அமையக்கூடிய ஒரு காலம்சார் தொடரின் கூறுகள்
   (a) நீள் காலப்போக்கு (b) பருவகால மாறுபாடு
   (c) சுழற்சி மாறுபாடு (d) சீரற்ற மாறுபாடு

4. பருவகால மாறுபாடுகளின் உகந்த காரணிகள்
   (a) வானிலை (b) விழாக்காலங்கள்
   (c) சமூக பழக்கவழக்கங்கள் (d) மேற்கண்ட அனைத்தும்

5. T, S, C மற்றும் I ஆகிற கூறுகளைக் கொண்டக் காலம்சார் தொடரின் கூட்டு வடிவமைப்பானது

(a) $y=T+S+C\times I$ (b) $y=T+S\times C\times I$ (c) $y=T+S+C+I$ (d) $y=T+S\times C+I$

6. போக்கை பொறுத்துவதற்கான மீச்சிறு வர்க்க முறையானது

(a) மிகவும் துல்லியமானது (b) மிகக் குறைந்த துல்லியத் தன்மை கொண்டது

(c) முழுமையான கருத்தேற்பு கொண்டது (d) கணக்கியல் மூலம் தீர்க்கப்படாதது

7. $y=a+bx$ என்ற போக்கு கோட்டில் 'b' இன் மதிப்பானது

(a) எப்போதும் மிகை (b) எப்போதும் குறை

(c) மிகை அல்லது குறை (d) பூஜ்ஜியம்

8. ஒரு காலம்சார் தொடருடன் சார்ந்த நீண்டகால மாறுபாடுகளின் கூறுகளின் போக்கானது.

(a) சுழற்சி மாறுபாடு (b) நீள்போக்கு மாறுபாடு

(c) சீரற்ற மாறுபாடு (d) பருவகால மாறுபாடு

9. பருவகால மாறுபாடு என்ற வேறுபாடுகள் நிகழ

(a) சில ஆண்டுகளின் எண்ணிக்கையில் (b) ஒரு ஆண்டிற்குள்ளாக

(c) ஒரு மாதத்திற்குள்ளாக (d) ஒரு வாரத்திற்குள்ளாக

10. நுகர்வோர் விலைக்குறியீட்டு எண்ணின் மற்றொரு பெயர்

(a) மொத்தவிலைக் குறியீட்டு எண் (b) வாழ்க்கை செலவீட்டுக் குறியீட்டு எண்

(c) வளைவு குறியீட்டு எண் (d) இவற்றில் எதுவும் இல்லை

11. இரு வேறு நகரங்களின் வாழ்க்கைத் தரக் குறியிட்டு எண்ணை ஒப்பிட்டுப் பயன்படுவது

(a) நுகர்வோர் விலைகுறியீட்ட எண் (b) மதிப்பு குறியீட்ட எண்

(c) கொள்ளவு குறியீட்டு எண் (d) நிரையிடப்படா குறியீட்டு எண்

12. லாஸ்பியர் குறியீட்டு எண் = 110, பாசி குறியீட்டு எண் =108 எனில், ஃபிஷர் தனித்த குறியீட்டு எண் =

(a) 110 (b) 108 (c) 100 (d) 109

13. பொதுவாக பெரும்பாலும் பயன்படுத்தப்படும் குறியீட்டு எண்

(a) கொள்ளவு குறியீட்டு எண் (b) மதிப்பு குறியீட்ட எண்

(c) விலை குறியீட்டு எண் (d) எளிய குறியீட்ட எண்

14. நுகர்வோர் விலைக் குறியீட்ட எண்ணை அளிக்கக் கூடியது

(a) பாசியின் முறை (b) ஃபிஷரின் தனித்த முறை

(c) மார்ச்சல் எட்ஜ்வொர்த் முறை (d) குடும்ப வரவு செலவு முறை

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 9.indd 170 09-05-2019 14:24:38

15. கீழ்க்கண்ட எந்த குறியீட்டு எண் கால மாற்று சோதனையை நிறைவு செய்கிறது

(a) லாஸ்பியர் குறியீட்டு எண் (b) பாசியின் குறியீட்டு எண்

(c) ஃபிஷர் தனித்தகுறியீட்டு எண் (d) அனைத்தும்

16. நிறை குறியீட்டு எண் கணக்குகளில் நிகழ்கால அளவுகள் பயன்படுவது

(a) லாஸ்பியர் முறை (b) பாசியின்முறை

(c) மார்ச்சல் எட்ஜ்வொர்த் முறை (d) ஃபிஷர் தனித்த முறை

17. எண் வடிவில் அளவிடக்கூடிய அளவுகள் குறிக்கபடுவது

(a) p - வரைபடம் (b) c – வரைபடம் (c) $\overline{X}$ வரைபடம் (d) np – வரைபடம்

18. உற்பத்திப் பொருளின் தரத்தை பாதிக்கக் கூடிய மாறுபாடுகள் எத்தனை?

(a) 4 (b) 3 (c) 2 (d) 1

19. ஒழுங்கற்ற இயற்கை ஏற்படுத்தும் மாறுபாடுகள் என்பது

(a) தற்செயல் விளைவு (b) தற்செயலற்ற விளைவு

(c) மனிதனால் ஏற்படக்கூடிய விளைவு (d) அனைத்தும்

20. குறிப்பிடக்கூடிய விளைவுகள் ஏற்படுத்துவது

(a) குறைபாடுள்ள மூலப்பொருள்கள் (b) திறமையற்ற வேலை ஆட்கள்

(c) குறைபாடுள்ள இயந்திரங்கள் (d) அனைத்தும்

21. கட்டுபாட்டு வரைபடங்கள் பெற்றிருப்பவை

(a) CL, UCL (b) CL, LCL (c) CL, LCL, UCL (d) UCL, LCL

22. $\overline{X}$ வரைபடம் என்பது

(a) பண்புகளையுடைய கட்டுபாட்ட வரைபடம்

(b) மாறிகளைக் கொண்ட கட்டுப்பாட்டு வரைபடம்

(c) பண்புகள் மற்றும் மாறி இல்லா கட்டுப்பாட்டு வரைபடம்

(d) பண்புகள் மற்றும் மாறிகள் கொண்ட கட்டுப்பாடு வரைபடம்

23. R –ஐ கணக்கிடப் பயன்படும் சூத்திரம்

(a) $x_{max} - x_{min}$ (b) $x_{min} - x_{max}$ (c) $\overline{x}_{max} - \overline{x}_{min}$ (d) $\overline{\overline{x}}_{max} - \overline{\overline{x}}_{min}$

24. $\overline{X}$ – வரைபடத்தின் மேல் கட்டுபாட்டு எல்லையை அளிக்க கூடியது

(a) $\overline{X} + A_2\overline{R}$ (b) $\overline{\overline{X}} + A_2 R$ (c) $\overline{\overline{X}} + A_2\overline{R}$ (d) $\overline{\overline{X}} + A_2\overline{\overline{R}}$

25. R வரைபடத்தின் கீழ் கட்டுபாட்டு எல்லையை அளிக்ககூடியது

(a) $D_2\overline{R}$ (b) $D_2\overline{\overline{R}}$ (c) $D_3\overline{\overline{R}}$ (d) $D_3\overline{R}$

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 9.indd 171 09-05-2019 14:24:40

இதர கணக்குகள்

1. பின்வரும் புள்ளி விவரங்களுக்கு, மூன்று ஆண்டுகாலத்தைக் கொண்ட நகரும் சராசரி முறையைப் பயன்படுத்தி போக்குமதிப்பு காண்க.

ஆண்டுகள்	இலாபம்	ஆண்டுகள்	இலாபம்
2001	142	2007	241
2002	148	2008	263
2003	154	2009	280
2004	146	2010	302
2005	157	2011	326
2006	202	2012	353

2. பின்வரும் புள்ளி விவரங்களுக்கு, 4 ஆண்டுகாலத்தைக் கொண்ட நகரும் சராசரி முறையைப் பயன்படுத்தி போக்கு மதிப்புகளைக் காண்க.

ஆண்டுகள்	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998
விற்பனை	506	620	1036	673	588	696	1116	738	663

3. பின்வரும் புள்ளி விவரங்களுக்கு மீச்சிறு வர்க்க முறை மூலம் நேர்க்கோட்டுப் போக்கினைப் பொருத்துக.

ஆண்டுகள்	1980	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987
விற்பனை	50.3	52.7	49.3	57.3	56.8	60.7	62.1	58.7

4. லாஸ்பியர், பாசி மற்றும் ஃபிஷர் விலைக் குறியீட்டு எண்ணைப் பின்வரும் தரவிற்குக் கண்டுபிடித்து கருத்து விளக்கம் தருக.

பொருள்கள்	அடிப்படைஆண்டு		நடப்பு ஆண்டு	
	விலை	அளவு	விலை	அளவு
A	170	562	72	632
B	192	535	70	756
C	195	639	95	926
D	187	128	92	255
E	185	542	92	632
F	150	217	180	314
7	12.6	12.7	12.5	12.8
8	12.4	12.3	12.6	12.5
9	12.6	12.5	12.3	12.6
10	12.1	12.7	12.5	12.8

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 9.indd 172 09-05-2019 14:24:40

5. பின்வரும் தரவைப் பயன்படுத்தி, ஃபிஷர் விலைக் குறியீட்டு எண்ணை கட்டமைக்கவும் மேலும் அது காலமாற்றுச்சோதனை, காரணி மாற்றுச் சோதனையை பூர்த்திசெய்யும் என நிரூபிக்கவும்.

பொருள்கள்	விலை		அளவு	
	அடிப்படைஆண்டு	நடப்பு ஆண்டு	அடிப்படைஆண்டு	நடப்பு ஆண்டு
கோதுமை	6	10	50	56
நெய்	2	2	100	120
விறகு	4	6	60	60
சர்க்கரை	10	12	30	24
ஆடைகள்	8	12	40	36

6. பின்வரும் தரவுகளிலிருந்து 2014 இன் அடிப்படையில் 2015 க்கான நுகர்வோர் விலைக் குறியீட்டு எண்ணைக் கணக்கிடுக.

பொருள்கள்	அளவு	விலை 2015	விலை 2016
A	6	5.75	6.00
B	6	5.00	8.00
C	1	6.00	9.00
D	6	8.00	10.00
E	4	2.00	1.50
F	1	20.00	15.00

7. ஒரு நகரத்தில் நடுத்தர வர்க்க குடும்பங்களின் வரவு–செலவுத் திட்டங்களில் ஒரு விசாரணை நடைபெற்று பின்வரும் தகவல் கொடுக்கப்பட்டது.

செலவுகள்	உணவு	வாடகை	ஆடை	எரிபொருள்	அரிசி
விலை (2010)	150	50	100	20	60
விலை (2011)	174	60	125	25	90
நிறைகள்	35	15	20	10	20

நகரத்தின் நடுத்தரவர்க்கக் குடும்பங்களில் வாழ்க்கைச் செலவுகளில் என்ன மாற்றங்கள் ஏற்பட்டுள்ளன எனக் காட்டுக.

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 9.indd 173 09-05-2019 14:24:40

8. பின்வரும் தரவிற்கான சராசரி மற்றும் வீச்சு கட்டுப்பாட்டு வரம்புகளைக் கண்டுபிடி.

மாதிரி எண்	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
மாதிரி உறுப்புகள்	50	51	50	48	46	55	45	50	47	56
	55	50	53	53	50	51	48	56	53	53
	52	53	48	50	44	56	53	54	49	55
	49	50	52	51	48	47	48	53	52	54
	54	46	47	53	47	51	51	57	54	52

9. 5 மின் விளக்குகள் கொண்ட 12 மாதிரிகளின் சராசரி எரியும் காலம் (நேரங்களில்) மற்றும் வீச்சு ஆகியவற்றின் தரவானது கீழே கொடுக்கபட்டுள்ளது.

மாதிரி எண்	1	2	3	4	5	6
மாதிரி சராசரி	1080	1390	1460	1380	1230	1370
மாதிரி வீச்சு	410	670	180	320	690	450
மாதிரி எண்	7	8	9	10	11	12
மாதிரி சராசரி	1310	1630	1580	1510	1270	1200
மாதிரி வீச்சு	380	350	270	660	440	310

சராசரி மற்றும் வீச்சு கட்டுப்பாட்டு வரம்புகளைக் கணக்கிடுக. கட்டுப்பாட்டின் நிலை குறித்துக் கருத்து தெரிவிக்கவும் .

10. 5 அளவு கொண்ட 10 மாதிரிகளின் சராசரி மற்றும் வீச்சு அளவீடுகள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. சராசரி மற்றும் வீச்சு கட்டுப்பாடு வரம்புகளைக் கணக்கிடுக. செயல்முறைக் கட்டுப்பாட்டின் நிலைகுறித்து கருத்து தெரிவிக்கவும்.

மாதிரி	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
சராசரி	5.10	4.98	5.02	4.96	4.96	5.04	4.94	4.92	4.92	4.98
வீச்சு	0.3	0.4	0.2	0.4	0.1	0.1	0.8	0.5	0.3	0.5

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 9.indd 174 09-05-2019 14:24:40

கட்டுப்பாட்டு அட்டவணை			
கூறு அளவு	A2	D3	D4
2	1.880	0	3.267
3	1.023	0	2.574
4	0.729	0	2.282
5	0.577	0	2.114
6	0.483	0	2.004
7	0.419	0.076	1.924
8	0.373	0.136	1.864
9	0.337	0.184	1.816
10	0.308	0.223	1.777
11	0.285	0.256	1.744
12	0.266	0.283	1.717
13	0.249	0.307	1.693
14	0.235	0.328	1.672
15	0.223	0.347	1.653
16	0.212	0.363	1.637
17	0.203	0.378	1.622
18	0.194	0.391	1.608
19	0.187	0.403	1.597
20	0.180	0.415	1.585
21	0.173	0.425	1.575
22	0.167	0.434	1.566
23	0.162	0.443	1.557
24	0.157	0.451	1.548
25	0.153	0.459	1.541

அட்டவணை 9.23

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 9.indd 175 09-05-2019 14:24:40

தொகுப்புரை

- **நகரும் சராசரி முறை (Method of Moving Averages)**

மூன்று ஆண்டு நகரும் சராசரி : $\frac{a+b+c}{3}, \frac{b+c+d}{3}, \frac{c+d+e}{3}, \frac{d+e+f}{3}, \ldots\ldots.$

நான்கு ஆண்டு நகரும் சராசரி : $\frac{a+b+c+d}{4}, \frac{b+c+d+e}{4}, \frac{c+d+e+f}{4}, \frac{d+e+f+g}{4}, \ldots.$

- **மீச்சிறுவர்க்க முறை (Method of Least Squares)**

நேர்க்கோட்டு (போக்கு) சமன்பாடு: Y = a + bX

இரு இயல்நிலை சமன்பாடுகள்: ΣY = n a + b ΣX ; ΣXY = a ΣX + b ΣX2

- **பருவகால மாறுபாடுகளை அளவிடுவதற்கான முறைகள்**

(அ) எளிய சராசரி முறை:

$$\text{பருவகால குறியீடு (S.I)} = \frac{\text{பருவகால சராசரி}}{\text{மொத்த சராசரி}} \times 100$$

(ஆ) புள்ளி விவரங்கள் மாதந்தோறும் கொடுக்கப்பட்டிருந்தால்

$$\text{ஜனவரி மாத பருவகால குறியீடு (S.I)} = \frac{\text{மாத சராசரி (ஜனவரி)}}{\text{மொத்த சராசரி}} \times 100$$

(இ) புள்ளி விவரங்கள் காலாண்டுதோறும் கொடுக்கப்பட்டிருந்தால்

$$\text{K–வது காலாண்டுக்கான (S.I)} = \frac{\text{K–வது காலாண்டு சராசரி}}{\text{மொத்த சராசரி}} \times 100$$

- **நிறையிட்ட குறியீட்டு எண்**

விலை குறியீட்டு எண்: $P_{01} = \frac{\sum p_1 w}{\sum p_0 w} x100$

லாஸ்பியர் விலை குறியீட்டு எண்: $P_{01}^{L} = \frac{\sum p_1 q_0}{\sum p_0 q_0} X100$

பாசி விலை குறியீட்டு எண்: $P_{01}^{P} = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1} X100$

ஃபிஷர் விலை குறியீட்டு எண் $P_{01}^{F} = \sqrt{P_{01}^{L} \, x \, P_{01}^{P}} = \sqrt{\frac{\sum p_1 q_0 \;\; X \sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_0 \;\; X \sum p_0 q_1}} \; X100$

- **காலமாற்றுச் சோதனை:** $P_{01} \times P_{10} = 1.$

- **காரணிமாற்றுச் சோதனை:** $P_{01} \; X \; Q_{01} = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_0}$

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 9.indd 176 09-05-2019 14:24:42

- **வாழ்க்கைத்தர குறியீட்டு எண்**

மொத்த செலவு முறை $= \frac{\sum p_1 q_0}{\sum p_0 q_0} X100$.

குடும்ப வரவு செலவுத்திட்ட முறை $= \frac{\sum PV}{\sum V}$

- **மாறுபாட்டின் காரணங்கள்**

1. வாய்ப்பு காரணங்கள் அல்லது சீரற்ற காரணங்கள்
2. குறிப்பிட்டகாரணங்கள்

- **கட்டுப்பாட்டு வரைபடங்கள்**

(i) மையக்கோடு (CL) செயல்முறையின் தேவையான தரநிலை நிலையை குறிக்கிறது.

(ii) மேல்நிலை கட்டுப்பாட்டுக்கோடு (UCL) ஏற்றுக்கொள்ளக் கூடியமேல் வரம்பை குறிக்கிறது.

(iii) கீழ்நிலை கட்டுப்பாட்டுக்கோடு (LCL) ஏற்றுக்கொள்ளக் கூடிய கீழ்வரம்பை குறிக்கிறது.

$\overline{X}$ வரைபடங்களின் கட்டுப்பாட்டின் வரம்புகளின் இரண்டுவகைகள்

வகை (i) $\overline{X}$ மற்றும்திட்ட விலக்கம் கொடுக்கப்படும்போது	வகை $\overline{X}$ மற்றும்திட்ட விலக்கம் கொடுக்கப்படாதபோது
$UCL = \overline{\overline{X}} + 3\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	$UCL = \overline{\overline{X}} + A_2\overline{R}$
$CL = \overline{\overline{X}}$	$CL = \overline{\overline{X}}$
$LCL = \overline{\overline{X}} - 3\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$	$LCL = \overline{\overline{X}} - A_2\overline{R}$

R வரைபடங்களின் கட்டுப்பாட்டின் வரம்புகளின் இரண்டு வகைகள்

வகை (i) திட்டவிலக்கம் கொடுக்கப்படும்போது	வகை (ii) திட்டவிலக்கம் கொடுக்கப்படாதபோது
$UCL = \overline{R} + 3\sigma_R$	$UCL = D_4\overline{R}$
$CL = \overline{R}$	$CL = \overline{R}$
$LCL = \overline{R} - 3\sigma_R$	$LCL = D_3\overline{R}$

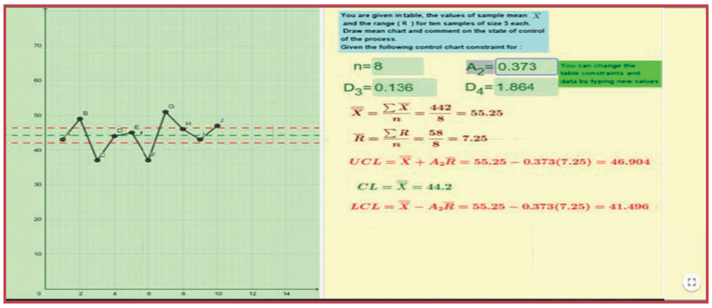
XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 9.indd 177 09-05-2019 14:24:44

கலைச்சொற்கள் (Glossary)	
உற்பத்தி கட்டுப்பாடு	Product control
ஒழுங்கற்ற மாறுபாடு	Irregular variation
கட்டுப்பாட்டு எல்லை	Control limit
கட்டுப்பாட்டு விளக்கப்படங்கள்	Control charts
கண்டறிபதிவு / கூர்நோக்கு	Observation
காரணி மாற்று சோதனை	Factor reversal test
காலமாற்று சோதனை	Time reversal test
காலம்சார் தொடர்வரிசை	Time series
கீழ்க் கட்டுப்பாட்டு எல்லை	Lower control limit
குடும்ப வரவு– செலவுத் திட்டம்	Family budget
குறியீட்டெண்கள்	Index numbers
சராசரி வரைவுகள்	Mean charts
சுழல் மாறுபாடு	Cyclical variation
செயல்பாட்டு கட்டுப்பாடு (அல்லது) செயலாக்கக் கட்டுபாடு	Process control
நகரும் சராசரி	Moving average
நிறையிடா குறியீடு	Unweighted Index
நிறையிட்ட குறியீடு	Weighted index
நீள் காலப்போக்கு	Secular trend
பகுதி சராசரி	Semi–vverage
பருவகால குறியீடு	Seasonal Index
பருவகால மாறுபாடு	Seasonal variation
பாசியின் குறியீடு	Paasche's index
பிஷரின் குறியீடு	Fisher's index
புள்ளியியல் தரக்கட்டுப்பாடு	Statistical quality control
போக்கு	Trend
மீச்சிறு வர்க்கம்	Least square
மேல் கட்டுப்பாட்டு எல்லை	Upper control limit
லாஸ்பியரின் குறியீடு	Laspeyre's index
வீச்சு வரைபடங்கள்	Range charts

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 9.indd 178 09-05-2019 14:24:44

இணையச் செயல்பாடு

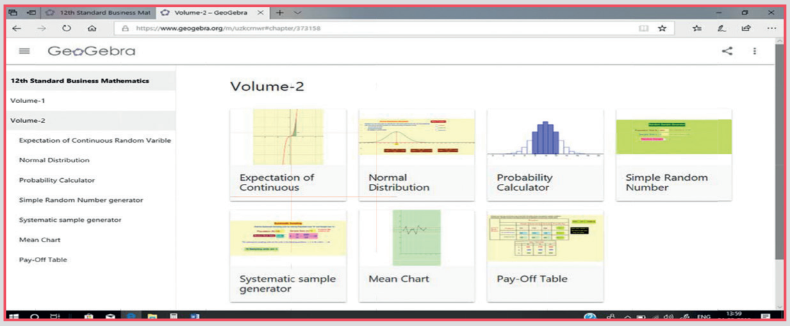
எதிர்பார்க்கப்படும் விளைவு



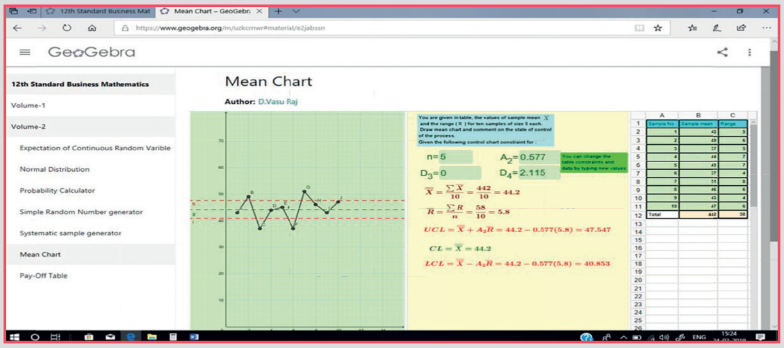
படி - 1 : கீழ்க்காணும் உரலி / விரைவுக் குறியீட்டைப் பயன்படுத்தி இச்செயல்பட்டிற்கான இணையப் பக்கத்திற்குச் செல்க. பின்பு "12th Standard Business Mathematics and Statistics" என்னும் திரையில் "Volume–2" யை தெரிவு செய்யவும்.

படி - 2 : "Mean Chart" என்னும் பயிற்சித்தாளினை தெரிவு செய்துகொள்ளவும். வலது பக்கத்தில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள விரிதாளில் தரவுகளை பதிவு செய்யவும். பின்பு n, A2, D3 மற்றும் D4 ன் மதிப்புகளை கொடுக்கப்பட்டுள்ள பெட்டியில் பதிவு செய்தால் UCL, CL மற்றும் LCL மதிப்பினையும் அதற்கான வரைபடத்தினையும் காணலாம்.

படி 1



படி 2



செயல்பாட்டிற்கான உரலி : **https://ggbm.at/uzkcrnwr**

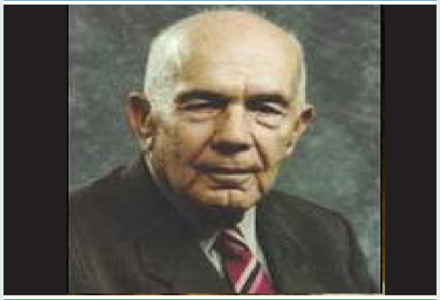
அல்லது விரைவுக் குறியீடு **(QR Code)**

B247_12_BUS_MAT_TM

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 9.indd 179 09-05-2019 14:24:45

10

செயல்முறைகள் ஆராய்ச்சி



ஃபிராங்க் லாரன் ஹிட்ச்காக்
(1875-1957)

அறிமுகம்

செயல்முறை ஆராய்ச்சி (Operations Research) என்பது நிறுவனங்களில் ஏற்படும் பிர்ச்சனைகளை பகுப்பாய்வு செய்து உகந்த தீர்வினை முடிவெடுக்கும் திறனை அளிக்கும் வழிமுறைகளாகும். இது மேலாண்மை நிறுவனங்களில் பெரிதும் பயன்படுகிறது. செயல்முறை ஆராய்ச்சிகளில் உள்ள கணக்குகளில் போக்குவரத்து கணக்குகள் முக்கிய இடத்தைப் பெறுகின்றன.

போக்குவரத்து கணக்கு என்பது ஒரே மாதிரியான பொருள்களை உற்பத்தி செய்கின்ற தொழிற்சாலைகள் எனும் ஆதார இடங்களையும், உற்பத்தியான பொருள்களைத் தேவை அளிக்கக்கூடிய சேரும் இடங்களையும் இணைப்பதாகும். ஒவ்வொரு தொழிற்சாலைக்கும் ஒரு குறிப்பிட்ட திறன் கட்டுப்பாடு மற்றும் ஒவ்வொரு சேரும் இடத்திற்கும் (விநியோகிப்பவர் / வாடிக்கையாளர்) ஒரு தேவைக் கட்டுப்பாடு இருக்கும் தொழிற்சாலையிலிருந்து (விநியோகிப்போர் / வாடிக்கையாளருக்கு) அனுப்பக் கூடிய ஒரு அலகிற்கான போக்குவரத்துச் செலவு தெரிந்திருக்கும். இவற்றைப் பற்றி ஃபிராங்க் லாரன் ஹிட்ச்காக் என்ற அமெரிக்க கணிதவியல் மற்றும் இயற்பியலாளர் என்பரால் 1941–ஆம் ஆண்டு போக்குவரத்து கணக்குகளை உருவாக்கியுள்ளார் எனத் தெரியவருகிறது.

கற்றல் நோக்கங்கள்

Q73NVJ

இந்த அத்தியாயத்தைப் படித்த பின்பு பின்வரும் பாடக்கருத்துகளை மாணவர்கள் புரிந்து கொள்ள இயலும்.

- போக்குவரத்து மற்றும் ஒதுக்கீடு கணக்குகளை அமைத்தல்
- போக்குவரத்து கணக்கிற்கும் ஒதுக்கீட்டுக் கணக்கிற்கும் இடையேயான வித்தியாசத்தை காணல்.
- போக்குவரத்து கணக்கின் ஆரம்ப அடிப்படை உகந்த தீர்வை காணல்
- போக்குவரத்து கணக்கில், மாறுப்பட்ட மற்றும் மாறுப்பாடற்ற தீர்வுகளை அடையாளம் காணுதல்.
- ஹங்கேரி முறையில் ஒதுக்கீட்டு கணக்கின் தீர்வு காணல்
- உத்திகள் மற்றும் மூலஉத்தி முடிவுகளை வேறுபடுத்தல்.
- மீப்பெரு சிறுமம் மற்றும் மீச்சிறு பெருமம் முறையில் சிறந்த மாற்று முடிவுகளை தீர்மானித்தல்

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 10.indd 180 09-05-2019 14:25:38

10.1 போக்குவரத்து கணக்குகள் (Transportation Problem)

மொத்த போக்குவரத்துச் செலவை குறைக்கும் வகையில் ஒவ்வொரு ஆதியிலிருந்து ஒவ்வொரு சேரும் இடத்திற்கு அனுப்பக் கூடிய பொருள்களின் அளவை தீர்மானிப்பது நமது நோக்கமாகும்.

10.1.1 வரையறை மற்றும் அமைப்பு (Definition and formulation)

m தொழிற்சாலைகள் மற்றும் n சேரும் இடங்கள் உள்ளன எனக் கருதுக. i எனும் ஆதியின் அளிப்புகள் a_i அலகுகள் என்க. j எனும் சேருமிடத்தின் தேவைகள் b_j அலகுகள் என்க.

ஒரு அலகு பொருளை ஆதி i யிலிருந்து சேருமிடம் j வுக்கு கொண்டு செல்ல ஆகும் போக்குவரத்து செலவு c_{ij} என்க மற்றும் இதனுடைய எல்லா சேர்வுகள் (i,j) எனத் தெரியும். ஆதி i யிலிருந்து சேருமிடம் j க்கு கொண்டு செல்லும் பொருள்களின் அளவு x_{ij} என்க.

மொத்த போக்குவரத்து செலவு குறைக்கக் கூடிய (i,j) எனும் அனைத்து வழிகளிலும் கொண்டு செல்லும் பொருள்களின் அளவு x_{ij} ஐக் கணக்கிடுவதே நமது குறிக்கோள் ஆகும். ஆதியின் வளங்கள் அளவு மற்றும் சேருமிடத்தின் தேவைகள் பூர்த்தி செய்யப்பட வேண்டும்.

மேற்கூறிய போக்குவரத்து கணக்கை கீழ்க்கண்ட அட்டவணையில் குறிக்கலாம்

		சேருமிடம் 1	2	3	…	n	அளிப்பு
ஆதிகள்	1	(x_{11}) C_{11}	(x_{12}) C_{12}	(x_{13}) C_{13}	…	(x_{1n}) C_{1n}	a_1
	2	(x_{21}) C_{21}	(x_{22}) C_{22}	(x_{23}) C_{23}	…	(x_{2n}) C_{2n}	a_2
	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	m	(x_{m1}) C_{m1}	(x_{m2}) C_{m2}	(x_{m3}) C_{m3}	…	(x_{mn}) C_{mn}	a_m
	தேவை	b_1	b_2	b_3	…	b_n	

அட்டவணை-10.1

மேற்கண்ட போக்குவரத்து கணக்குகளை நேரிய திட்டமிடல் கணக்கு வடிவில் கீழ்க்கண்டவாறு எழுதலாம்.

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 10.indd 181 09-05-2019 14:25:38

$$Z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$ என்ற கட்டுப்பாடுகளுக்கிணங்க என்ற குறிக்கோள் சார்பின் சிறுமம் காணுதல்.

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \; i=1,2,\ldots\ldots.m$$ (அளிப்பு கட்டுப்பாடுகள்)

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \; j=1,2,\ldots\ldots.n$$ (தேவை கட்டுப்பாடுகள்)

$x_{ij} \geq 0$ for all i,j (குறை குறியற்ற நிபந்தனைகள்)

வரையறைகள்

ஏற்புடையத் தீர்வுகள்: கட்டுப்பாடுகளைப் பூர்த்தி செய்யக்கூடிய குறை குறியற்ற $x_{ij}(i=1,2,..,m, j=1,2,\ldots n)$ இன் மதிப்புகள் போக்குவரத்து கணக்குகளின் ஏற்புடையத் தீர்வுகளாகும். $x_{ij}(i=1,2,..,m, j=1,2,\ldots n)$ இன் மதிப்புகள் போக்குவரத்து கணக்குகளின் ஏற்புடையத் தீர்வுகளாகும்.

அடிப்படை ஏற்புடையத் தீர்வுகள் : m நிரைகள் மற்றும் n நிரல்கள் கொண்ட போக்குவரத்து கணக்கின் ஏற்புடையத் தீர்வு $m+n-1$ ஒதுக்கீடுகளுக்கு மிகாமல் இருந்தால் அது அடிப்படை ஏற்புடையத் தீர்வு எனப்படும்.

உகந்த தீர்வு: மொத்த போக்குவரத்து செலவினைக் குறைக்கக் கூடிய ஏற்புடையத் தீர்வு என்பது உகந்த தீர்வு எனப்படும்.

சிதைவற்ற அடிப்படை ஏற்புடையத் தீர்வு: சிதைவற்ற அடிப்படை தீர்வு என்பது போக்குவரத்து கணக்கின் ஏற்புடையத் தீர்வில் சரியாக $m+n-1$ ஒதுக்கீடுகள் ஒன்றை ஒன்று சாரா நிலையில் அமைந்ததாகும். இங்கு m, n என்பது முறையே நிரை மற்றும் நிரலைக் குறிக்கிறது.

சிதைந்த தீர்வு: போக்குவரத்து கணக்கின் ஏற்புடையத் தீர்ப்பில் ஒதுக்கீடுகளின் எண்ணிக்கை $m+n-1$ க்கு குறைவாக இருந்தால் அது சிதைந்த தீர்வு எனப்படும். இங்கு m, n என்பது முறையே நிரை மற்றும் நிரலைக் குறிக்கிறது.

10.1.2 ஆரம்ப அடிப்படை ஏற்புடையத் தீர்வைக் காணும் முறைகள் (Methods of finding initial Basic Feasible Solutions)

போக்குவரத்து கணக்குகளின் ஆரம்ப அடிப்படை ஏற்புடையத் தீர்வுகளைக் காண பல முறைகள் இருந்தாலும், கீழ்க்கண்ட மூன்று முறைகளை எவ்வாறு காணலாம் என்பதை கற்போம். ஆரம்ப அடிப்படை ஏற்புடையத் தீர்வைக் காண மொத்த அளிப்புகளும், மொத்த தேவைகளும் சமமாக இருக்க வேண்டும்.

அதாவது, $$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 10.indd 182 09-05-2019 14:25:39

முறை 1: வட மேற்கு மூலை முறை (North-West Corner Rule (NWC))

இம்முறையானது ஆரம்ப அடிப்படை ஏற்புடையத் தீர்வுகள் காண்பதற்கான எளிய மற்றும் திறமையான முறையாகும். இந்த முறையில் தீர்வைக் காண பல்வேறு படிகள் கீழே தரப்பட்டுள்ளன.

படி 1: போக்குவரத்து அட்டவணையை வடமேற்கு மூலையிலுள்ள சிற்றறை(cell)யைத் தேர்ந்தெடுத்து அங்கு சாத்தியமான அளவுகளை ஒதுக்கீடு செய்க. அதாவது, $x_{11} = \min(a_1,b_1)$ ன் சிறும மதிப்பு.

படி 2: தேவைகள் பூர்த்தி செய்யப்பட்டால் $(b_1 < a_1)$, வலது புறத்தில் கிடைமட்டமாக இரண்டாவது நிரலுக்கு நகர்ந்து அங்குள்ள சிற்றறையில் அளவுகள் ஒதுக்கீடு செய்ய வேண்டும். அதாவது, $x_{12}= \min\,(a_1 - x_{11}, b_2)$ ன் சிறும மதிப்பு.

அளிப்புகள் பூர்த்தி செய்யப்பட்டால் $(b_1 > a_1)$, கீழே செங்குத்தாக இரண்டாவது நிரைக்கு நகர்ந்து அங்குள்ள சிற்றறையில் அளவுகள் ஒதுக்கீடு செய்ய வேண்டும். அதாவது, $x_{21} = \min\,(a_2,b_1 - x_{11})$ன் சிறும மதிப்பு.

அளிப்புகள் மற்றும் தேவைகள் இரண்டும் ஒரே நேரத்தில் பூர்த்தி செய்யப்பட்டால், மூலைவிட்டமாக அடுத்த சிற்றறைக்கு நகர்ந்து அங்கு அளவுகள் ஒதுக்கீடு செய்யப்பட வேண்டும். அதாவது $x_{21}= (a_1, b_2)$ இன் சிறும மதிப்பு.

படி 3: அனைத்து ஒதுக்கீடுகளையும் செய்து முடிக்கும் வரையில் இம்முறையைத் தொடர வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு 10.1

கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள போக்குவரத்து கணக்கின் ஆரம்பத் தீர்வைக் காண்க.

		சேருமிடம்			
		A	B	C	அளிப்பு
ஆதிகள்	1	2	7	4	5
	2	3	3	1	8
	3	5	4	7	7
	4	1	6	2	14
தேவை		7	9	18	

தீர்வு:

இங்கு, மொத்த அளிப்புகள் $= 5+8+7+14=34$, மொத்த தேவைகள் $= 7+9+18=34$

அதாவது, மொத்த அளிப்புகள் = மொத்த தேவைகள் கொடுக்கப்பட்ட கணக்கானது சமநிலை போக்குவரத்து கணக்காகும்.

$\therefore$ எனவே, ஆரம்ப அடிப்படை ஏற்புடையத் தீர்வு உள்ளது.

மேலே கூறப்பட்ட அட்டவணையில் வடமேற்கு மூலையில் உள்ள சிற்றறை $(1, A)$யைத் தேர்ந்தெடுத்து அதிகபட்ச சாத்தியமான ஒதுக்கீடுகளைச் செய்யவும்.

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 10.indd 183 09-05-2019 14:25:39

அதாவது (5,7) இன் சிறும மதிப்பு 5

	A	B	C	அளிப்பு (a_i)
1	(5) 2	7	4	5/0
2	3	3	1	8
3	5	4	7	7
4	1	6	2	14
தேவை(b_j)	7/2	9	18	

குறைக்கப்பட்ட போக்குவரத்து அட்டவணை,

	A	B	C	a_i
2	3	3	1	8
3	5	4	7	7
4	1	6	2	14
b_j	2	9	18	

தற்போது $(2, A)$ என்ற சிற்றறை வடமேற்கு மூலையில் உள்ளது.

அங்கு (8,2) இன் சிறும மதிப்பான 2 அலகுகளை ஒதுக்கீடு செய்யவும்.

x_{12} = சிறும (2,8) = 2

	A	B	C	a_i
2	(2) 3	3	1	8/6
3	5	4	7	7
4	1	6	2	14
b_j	2/0	9	18	

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 10.indd 184 09-05-2019 14:25:39

குறைக்கப்பட்ட போக்குவரத்து அட்டவணை,

	B	C	a_i
2	3	1	6
3	4	7	7
4	6	2	14
b_j	9	18	

தற்போது (2, B) என்ற சிற்றறை வடமேற்கு மூலையில் உள்ளது.

அங்கு (6,9)ன் சிறும மதிப்பான 6 அலகுகளை ஒதுக்கீடு செய்யவும்.

x_{22} = சிறும (6,9) = 6

	B	C	a_i
2	(6) 3	1	6/0
3	4	7	7
4	6	2	14
b_j	9/3	18	

குறைக்கப்பட்ட போக்குவரத்து அட்டவணை,

	B	C	a_i
3	4	7	7
4	6	2	14
b_j	3	18	

தற்போது (3,B)என்ற சிற்றறை வடமேற்கு மூலையில் உள்ளது.

அங்கு (7,3)ன் சிறும மதிப்பான 3 அலகுகளை ஒதுக்கீடு செய்யவும்.

x_{32} = சிறும (7,3) = 3

	B	C	a_i
3	(3) 4	7	7/4
4	6	2	14
b_j	3/0	18	

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 10.indd 185 09-05-2019 14:25:39

குறைக்கப்பட்ட போக்குவரத்து அட்டவணை,

	C	a_i
3	7	7/4
4	2	14
b_j	18	

தற்போது (3,C) என்ற சிற்றறை வடமேற்கு மூலையில் உள்ளது.

அங்கு (4,18) -ன் சிறும மதிப்பான 4 அலகுகளை ஒதுக்கீடு செய்யவும்.

x_{33} = சிறும (4,18) = 4

	C	a_i
3	(4) 7	4/0
4	2	14
b_j	18/14	

குறைக்கப்பட்ட போக்குவரத்து அட்டவணை மற்றும் இறுதி ஒதுக்கீடு, $x_{44} = 14$

	C	a_i
4	(14) 2	14/0
b_j	14/0	

அனைத்து ஒதுக்கீடுகளைக் கொண்ட அட்டவணை கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

	A	B	C	a_i
1	(5) 2	7	4	5
2	(2) 3	(6) 3	1	8
3	5	(3) 4	(4) 7	7
4	1	6	(14) 2	14
b_j	7	9	18	

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 10.indd 186 09-05-2019 14:25:39

போக்குவரத்து விவரம் $1 \rightarrow A,\ 2 \rightarrow A,\ 2 \rightarrow B,\ 3 \rightarrow B,\ 3 \rightarrow C,\ 4 \rightarrow C$

மொத்த போக்குவரத்து செலவு

$= (5\times2) + (2\times3) + (6\times3) + (3\times4) + (4\times7) + (14\times2) =$ ₹ 102

எடுத்துக்காட்டு 10.2

வடமேற்கு மூலை முறையைப் பயன்படுத்தி கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள போக்குவரத்து கணக்கீன் அடிப்படைத் தீர்வைக் காண்க.

	D_1	D_2	D_3	D_4	இருப்பு
O_1	6	4	1	5	14
O_2	8	9	2	7	16
O_3	4	3	6	2	5
தேவை	6	10	15	4	35

இங்கு O_i மற்றும் D_j என்பன i ஆவது ஆதி மற்றும் j ஆவது சேருமிடம் முறையே ஆகும்.

தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்ட போக்குவரத்து அட்டவணை

	D_1	D_2	D_3	D_4	இருப்பு (a_i)
O_1	6	4	1	5	14
O_2	8	9	2	7	16
O_3	4	3	6	2	5
தேவை (b_j)	6	10	15	4	35

அதாவது, மொத்த இருப்புகள் = மொத்த தேவைகள் . எனவே கொடுக்கப்பட்ட கணக்கானது சமநிலை போக்குவரத்து கணக்காகும்.

முதல் ஒதுக்கீடு :

	D_1	D_2	D_3	D_4	a_i
O_1	(6) 6	4	1	5	14/8
O_2	8	9	2	7	16
O_3	4	3	6	2	5
b_j	6/0	10	15	4	35

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 10.indd 187 09-05-2019 14:25:39

இரண்டாம் ஒதுக்கீடு:

	D_1	D_2	D_3	D_4	a_i
O_1	(6) 6	(8) 4	1	5	14/8/0
O_2	8	9	2	7	16
O_3	4	3	6	2	5
b_j	6/0	10/2	15	4	35

மூன்றாவது ஒதுக்கீடு:

	D_1	D_2	D_3	D_4	a_i
O_1	(6) 6	(8) 4	1	5	14/8/0
O_2	8	9	2	7	16/14
O_3	4	3	6	2	5
b_j	6/0	10/2/0	15	4	35

நான்காம் ஒதுக்கீடு:

	D_1	D_2	D_3	D_4	a_i
O_1	(6) 6	(8) 4	1	5	14/8/0
O_2	8	(2) 9	(14) 2	7	16/14/0
O_3	4	3	6	2	5
b_j	6/0	10/2/0	15/1	4	35

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 10.indd 188 09-05-2019 14:25:40

ஐந்தாவது ஒதுக்கீடு:

	D_1	D_2	D_3	D_4	a_i
O_1	(6) 6	(8) 4	1	5	14/8/0
O_2	8	(2) 9	(14) 2	7	16/14/0
O_3	4	3	(1) 6	2	5/4
b_j	6/0	10/2/0	15/1/0	4	35

இறுதி ஒதுக்கீடு:

	D_1	D_2	D_3	D_4	a_i
O_1	(6) 6	(8) 4	1	5	14/8/0
O_2	8	(2) 9	(14) 2	7	16/14/0
O_3	4	3	(1) 6	(4) 2	5/4/0
b_j	6/0	10/2/0	15/1/0	4/0	35

போக்குவரத்து விவரம் : $O_1 \rightarrow D_1$, $O_1 \rightarrow D_2$, $O_2 \rightarrow D_2$, $O_2 \rightarrow D_3$, $O_3 \rightarrow D_3$, $O_3 \rightarrow D_3$.

மொத்த போக்குவரத்து செலவு

$$= (6\times6)+(8\times4)+(2\times9)+(14\times2)+(1\times6)+(4\times2) = ₹128$$

முறை : 2 மீச்சிறு செலவு முறை (Least Cost Method (LCM))

வடமேற்கு மூலை முறையை விட மீச்சிறு செலவு முறையில் காணும் போக்குவரத்து கணக்கின் செலவு குறைவாக இருக்கும். இம்முறையிலான பல்வேறு படிகள் கீழே தொகுக்கப்பட்டுள்ளன..

படி 1: போக்குவரத்து அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள செலவுகளில் மீச்சிறு செலவுக் கொண்ட சிற்றறையை தேர்ந்தெடுக்க.

படி 2: தேர்ந்தெடுத்த சிற்றறையில் சாத்தியமான ஒதுக்கீடுகள் செய்யவும்.

படி 3: ஒதுக்கீடுகள் நிறைவுபெற்ற நிரை மற்றும் நிரல்களை நீக்குக.

குறிப்பு

மீச்சிறு செலவு ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட சிற்றறைகள் ஒரே மீச்சிறு செலவைக் கொண்டிருந்தால் சிற்றறையை நமது விருப்பப்படி தேர்ந்தெடுத்து ஒதுக்கீடு செய்யவும். அவ்வாறு செய்யும் பட்சத்தில், வெவ்வேறான போக்குவரத்து செலவு கிடைக்கும்.

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 10.indd 189 09-05-2019 14:25:40

படி 4: அனைத்து ஒதுக்கீடுகளும் செய்து முடிக்கும் வரை மேற்கண்ட மூன்று படிகளையும் தொடர வேண்டும்.

எடுத்துக்காட்டு 10.3

மீச்சிறு செலவு முறையை பயன்படுத்திக் கீழ்க்கண்ட போக்குவரத்துக் கணக்கின் ஆரம்ப அடிப்படை தீர்வு காண்க.

	D_1	D_2	D_3	D_4	அளிப்பு
O_1	1	2	3	4	6
O_2	4	3	2	5	8
O_3	5	2	2	1	10
தேவை	4	6	8	6	

இங்கு O_i மற்றும் D_j ஆகியவை முறையே i ஆவது ஆதி மற்றும் j ஆவது சேருமிடத்தைக் குறிக்கும்.

தீர்வு:

அதாவது, மொத்த இருப்புகள் =மொத்த தேவைகள் . எனவே கொடுக்கப்பட்ட கணக்கானது சமநிலை போக்குவரத்து கணக்காகும்.

கொடுக்கப்பட்ட போக்குவரத்து அட்டவணை

	D_1	D_2	D_3	D_4	அளிப்பு (a_i)
O_1	1	2	3	4	6
O_2	4	3	2	5	8
O_3	5	2	2	1	10
தேவை (b_j)	4	6	8	6	

மீச்சிறுசெலவு 1 ஆனது சிற்றறைகள் $(O_1, D_1), (O_3, D_4)$ –இல் உள்ளது.

நாம் சிற்றறை (O_1, D_1) தேர்ந்தேடுப்போம்.

$(6,4)$ இன் சிறும மதிப்பு = 4 அலகுகளை இங்கு ஒதுக்கீடு செய்க.

	D_1	D_2	D_3	D_4	a_i
O_1	(4) 1	2	3	4	6/2
O_2	4	3	2	5	8
O_3	5	2	2	1	10
b_j	4/0	6	8	6	

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 10.indd 190 09-05-2019 14:25:40

குறைக்கப்பட்ட போக்குவரத்து அட்டவணை

	D_2	D_3	D_4	a_i
O_1	2	3	4	2
O_2	3	2	5	8
O_3	2	2	1	10
b_j	6	8	6	

மீச்சிறுசெலவு 1 ஆனது சிற்றறை (O_3, D_4)–ல் உள்ளது.

(10,6) இன் சிறும மதிப்பு = 6 அலகுகளை இங்கு ஒதுக்கீடு செய்க.

	D_2	D_3	D_4	a_i
O_1	2	3	4	2
O_2	3	2	5	8
O_3	2	2	(6) 1	10/4
b_j	6	8	6/0	

குறைக்கப்பட்ட போக்குவரத்து அட்டவணை

	D_2	D_3	a_i
O_1	2	3	2
O_2	3	2	8
O_3	2	2	4
b_j	6	8	

மீச்சிறுசெலவு 2 ஆனது சிற்றறைகள் (O_1, D_2), (O_2, D_3), (O_3, D_2), (O_3, D_3)–ல் உள்ளது. நாம் சிற்றறை (O_1, D_2) தேர்ந்தேடுப்போம். (2,6) இன் சிறும மதிப்பு = 2 அலகுகளை இங்கு ஒதுக்கீடு செய்க.

குறைக்கப்பட்ட போக்குவரத்து அட்டவணை

	D_2	D_3	a_i
O_2	3	2	8
O_3	2	2	4
bj	4	8	

மீச்சிறுசெலவு 2 ஆனது சிற்றறைகள் (O_2, D_3), (O_3, D_2), (O_3, D_3) –ல் உள்ளது.

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 10.indd 191 09-05-2019 14:25:40

நாம் சிற்றறை (O_2, D_3) தேர்ந்தெடுப்போம். $(8,8)$ இன் சிறும மதிப்பு = 8 அலகுகளை இங்கு ஒதுக்கீடு செய்க.

	D_2	D_3	a_i
O_2	3	(8) 2	8/0
O_3	2	2	4
b_j	4	8/0	

குறைக்கப்பட்ட

	D_2	a_i
O_3	2	4
b_j	4	

குறைக்கப்பட்ட போக்குவரத்து அட்டவணை மற்றும் இறுதி ஒதுக்கீடு

	D_2	a_i
O_3	(4) 2	4/0
b_j	4/0	

அனைத்து ஒதுக்கீடுகளும் ஒரே அட்டவணையில் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன (O_3, D_2)

	D_1	D_2	D_3	D_4	a_i
O_1	(4) 1	(2) 2	3	4	6/2/0
O_2	4	3	(8) 2	5	8/0
O_3	5	(4) 2	2	(6) 1	10/4/0
b_j	4/0	6/4/0	8/0	6/0	

போக்குவரத்து விவரம்

$$O_1 \rightarrow D_1,\ O_1 \rightarrow D_2,\ O_2 \rightarrow D_3,\ O_3 \rightarrow D_2,\ O_3 \rightarrow D_4$$

மொத்த போக்குவரத்து செலவு

$$= (4\times1) + (2\times2) + (8\times2) + (4\times2) + (6\times1)$$

$$= 4+4+16+8+6$$

$$= ₹\ 38.$$

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 10.indd 192 09-05-2019 14:25:40

எடுத்துக்காட்டு 10.4

ஒவ்வொரு தொழிற்சாலையிலிருந்தும் ஒவ்வொரு சேருமிடத்திற்கும் எவ்வளவு அலகு பொருள்களைக் கொண்டுசெல்ல முடியும் என்பதை மீறுச்சிறு செலவு முறையில் காண்க.

சேருமிடம்

		C	H	K	P	இருப்பு
தொழிற்சாலை	T	6	8	8	5	30
	B	5	11	9	7	40
	M	8	9	7	13	50
	தேவை	35	28	32	25	

ஓர் அலகு, பொருளைக் கொண்டு செல்ல ஆகும் செலவு ரூபாயில் தரப்பட்டுள்ளது.

தீர்வு:

அதாவது, மொத்த இருப்புகள் = மொத்த தேவைகள். எனவே கொடுக்கப்பட்ட கணக்கானது சமநிலை போக்குவரத்து கணக்காகும்.

கொடுக்கப்பட்ட போக்குவரத்து அட்டவணை

சேருமிடம்

		C	H	K	P	இருப்பு (a_i)
தொழிற்சாலை	T	6	8	8	5	30
	B	5	11	9	7	40
	M	8	9	7	13	50
	தேவை (b_j)	35	28	32	25	

முதல் ஒதுக்கீடு:

	C	H	K	P	a_i
T	6	8	8	(25) 5	30/5
B	5	11	9	7	40
M	8	9	7	13	50
b_j	35	28	32	25/0	

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 10.indd 193 09-05-2019 14:25:40

இரண்டாவது ஒதுக்கீடு:

	C	H	K	P	a_i
T	6	8	8	(25) 5	30/5
B	(35) 5	11	9	7	40/5
M	8	9	7	13	50
b_j	35/0	28	32	25/0	

மூன்றாவது ஒதுக்கீடு:

	C	H	K	P	a_i
T	6	8	8	(25) 5	30/5
B	(35) 5	11	9	7	40/5
M	8	9	(32) 7	13	50/18
b_j	35/0	28	32/0	25/0	

நான்காவது ஒதுக்கீடு:

	C	H	K	P	a_i
T	6	(5) 8	8	(25) 5	30/5/0
B	(35) 5	11	9	7	40/5
M	8	9	(32) 7	13	50/18
b_j	35/0	28/23	32/0	25/0	

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 10.indd 194 09-05-2019 14:25:40

ஐந்தாவது ஒதுக்கீடு:

	C	H	K	P	a_i
T	6	(5) 8	8	(25) 5	30/5/0
B	(35) 5	11	9	7	40/5
M	8	(18) 9	(32) 7	13	50/18/0
b_j	35/0	28/23/5	32/0	25/0	

இறுதி ஒதுக்கீடு:

	C	H	K	P	a_i
T	6	(5) 8	8	(25) 5	30/5/0
B	(35) 5	(5) 11	9	7	40/5/0
M	8	(18) 9	(32) 7	13	50/18/0
b_j	35/0	28/23/5/0	32/0	25/0	

போக்குவரத்து விவரம்

$T \rightarrow H, T \rightarrow P, B \rightarrow C, B \rightarrow H, \mathrm{M} \rightarrow H, \mathrm{M} \rightarrow K$

மொத்த போக்குவரத்து செலவு $= (5\times8) + (25\times5) + (35\times5) + (5\times11) + (18\times9) + (32\times7)$

$= 40+125+175+55+162+224$

$=$ ₹ 781

வோகலின் தோராய முறை (Vogel's Approximation Method(VAM))

வோகலின் தோராய முறையில் காணும் போக்குவரத்து கணக்கின் ஆரம்ப அடிப்படைத்தீர்வு ஏறக்குறைய உகந்த தீர்வுக்கு அருகில் இருக்கும். எனவே மற்ற இரண்டு முறைகளை விட இம்முறையில் தீர்வு காண்பது சிறந்தாகும். இம்முறையில் உள்ளடக்கிய பல்வேறு படிகள் கீழே தொகுக்கப்பட்டுள்ளன.

படி 1: ஒவ்வொரு நிரை மற்றும் நிரலில் காணப்படும் அடுத்தடுத்த இரண்டு சிறிய எண்களின் வித்தியாசத்தைக் (Penalty) கண்டுபிடித்து அதற்குறிய நிரை மற்றும் நிரலுக்கு நேராக எழுதவும்.

படி 2: அதிக வித்தியாசம் கொண்ட நிரை அல்லது நிரலைத் தேர்ந்தெடுக்கவும்

படி 3: தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட நிரை அல்லது நிரலில் உள்ள சிற்றறைகளில் மிகச்சிறிய மதிப்பு கொண்ட சிற்றறையைத் தேர்ந்தெடுக்கவும். அங்கு எவ்வளவு ஒதுக்கீடு செய்ய முடியுமோ அவ்வளவு ஒதுக்கீடு செய்ய வேண்டும்.

படி 4: அனைத்து ஒதுக்கீடுகளுக்கும், நிறைவடைந்த நிரை அல்லது நிரலை நீக்குக.

படி 5: நீக்கிய நிரை அல்லது நிரல் இல்லாத குறைக்கப்பட்ட புதிய போக்குவரத்து அட்டவணையை எழுதுக.

படி 6: அனைத்து ஒதுக்கீடுகளும் செய்து முடிக்கும் வரை மேற்கண்டபடிகளைத் தொடரவும்.

குறிப்பு

நிரை அல்லது நிரலில் உள்ள முதல் இரண்டு சிறிய எண்களுக்கிடையே உள்ள வேறுபாட்டை வித்தியாசம் (Penalty) எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு 10.5

வோகலின் தோராய முறையைக் கொண்டு கீழ்க்கண்ட போக்குவரத்து கணக்கின் அடிப்படை ஆரம்பத் தீர்வை காண்க.

		விநியோக மையம்				இருப்பு a_i
		D_1	D_2	D_3	D_4	
ஆதி	S_1	11	13	17	14	250
	S_2	16	18	14	10	300
	S_3	21	24	13	10	400
	தேவை b_j	200	225	275	250	

தீர்வு:

இங்கு $\sum a_i = \sum b_j = 950$

அதாவது, மொத்த இருப்புகள் = மொத்த தேவைகள் . எனவே கொடுக்கப்பட்ட கணக்கானது சமநிலை போக்குவரத்து கணக்காகும்.

முதலில் ஒவ்வொரு நிரை மற்றும் நிரலில் காணப்படும் அடுத்தடுத்த இரண்டு சிறிய எண்களின் வித்தியாசத்தை கண்டுபிடித்து அதற்குறிய நிரை மற்றும் நிரலுக்கு நேராக அடைப்புக்குறிக்குள் எழுதவும்.

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 10.indd 196 09-05-2019 14:25:40

	D_1	D_2	D_3	D_4	இருப்பு a_i	நிரை வித்தியாசம்
S_1	(200) 11	13	17	14	250/50	2
S_2	16	18	14	10	300	4
S_3	21	24	13	10	400	3
b_j	200/0	225	275	250		
நிரல் வித்தியாசம்	5	5	1	4		

அதிக வித்தியாசமான 5–ஆனது நிரல் D_1 மற்றும் D_2.–க்கு நேராக உள்ளது.இங்கு நமது விருப்படி D_1 தேர்ந்தெடுக்கவும். தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட D_1 நிரலில்குறைந்த செலவு கொண்ட சிற்றறை (S_1, D_1) தேர்ந்தெடுத்து அங்கு அதிக பட்சமாக அதாவது (250,200) –ன் சிறும மதிப்பான 200 அலகுகளை ஒதுக்கீடு செய்யவும்.

குறைக்கப்பட்ட போக்குவரத்து அட்டவணை

	D_2	D_3	D_4	a_i	நிரை வித்தியாசம்
S_1	(50) 13	17	14	50/0	1
S_2	18	14	10	300	4
S_3	24	13	10	400	3
b_j	225/175	275	250		
நிரல் வித்தியாசம்	5	1	4		

வித்தியாசமான 5–ஆனது நிரல் D_2.–க்கு நேராக உள்ளது. தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட D_2 நிரலில்குறைந்த செலவு கொண்ட சிற்றறை (S_1, D_2).) தேர்ந்தெடுத்து அங்கு அதிக பட்சமாக அதாவது (50,175) –ன் சிறும மதிப்பான 50 அலகுகளை ஒதுக்கீடு செய்யவும்.

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 10.indd 197 09-05-2019 14:25:40

குறைக்கப்பட்ட போக்குவரத்து அட்டவணை

	D_2	D_3	D_4	a_i	நிரை வித்தியாசம்
S_2	(175) 18	14	10	300/125	4
S_3	24	13	10	400	3
b_j	175/0	275	250		
நிரல் வித்தியாசம்	6	1	0		

வித்தியாசமான 6–ஆனது நிரல் D_2–க்கு நேராக உள்ளது. தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட D_2. நிரலில்குறைந்த செலவு கொண்ட சிற்றறை (S_2, D_2) தேர்ந்தெடுத்து அங்கு அதிக பட்சமாக அதாவது (300,175) –ன் சிறும மதிப்பான 175 அலகுகளை ஒதுக்கீடு செய்யவும்.

குறைக்கப்பட்ட போக்குவரத்து அட்டவணை

	D_3	D_4	a_i	நிரை வித்தியாசம்
S_2	14	(125) 10	125/0	4
S_3	13	10	400	3
b_j	275	250/125		
நிரல் வித்தியாசம்	1	0		

வித்தியாசமான 4–ஆனது நிரை S_2 நேராக உள்ளது. தேர்ந்தெடுக்கப்பட்ட S_2 நிரையில் குறைந்த செலவு கொண்ட சிற்றறை (S_2, D_4) தேர்ந்தெடுத்து அங்கு அதிக பட்சமாக அதாவது (125,250) இன் சிறும மதிப்பான 125 அலகுகளை ஒதுக்கீடு செய்யவும்.

குறைக்கப்பட்ட போக்குவரத்து அட்டவணை மற்றும் ஒதுக்கீடுகள்

	D_3	D_4	a_i	நிரை வித்தியாசம்
S_3	13	10	400	3
b_j	275	125		
நிரல் வித்தியாசம்	-	-		

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 10.indd 198 09-05-2019 14:25:41

	D_3	D_4	a_i
S_3	(275) 13	(125) 10	400/275/0
b_j	275	125/0	

அனைத்து ஒதுக்கீடுகளும் ஒரே அட்டவணையில் கீழே கொடுக்கப்ட்டுள்ளன

மொத்த செலவு

	D_1	D_2	D_3	D_4	a_i
S_1	(200) 11	(50) 13	17	14	250
S_2	16	(175) 18	14	(125) 10	300
S_3	21	24	(275) 13	(125) 10	400
b_j	200	225	275	250	

போக்குவரத்து

போக்குவரத்து விபரம் :

$S_1 \rightarrow D_1, S_1 \rightarrow D_2, S_2 \rightarrow D_2, S_2 \rightarrow D_4, S_3 \rightarrow D_3, S_3 \rightarrow D_4$

போக்குவரத்து செலவு

$$= (200 \times 11) + (50 \times 13) + (175 \times 18) + (125 \times 10) + (275 \times 13) + (125 \times 10)$$

$$= ₹\ 12{,}075$$

எடுத்துக்காட்டு 10.6

வோகலின் தோராய முறையை கொண்டு கீழ்க்கண்ட போக்குவரத்து கணக்கின் அடிப்படை ஆரம்பத் தீர்வை காண்க.

கிடங்குகள் / கடைகள்

	I	II	III	IV	இருப்பு(a_i)
A	5	1	3	3	34
B	3	3	5	4	15
C	6	4	4	3	12
D	4	1	4	5	19
தேவை (b_j)	21	25	17	17	

தீர்வு:

இங்கு $\sum a_i = \sum b_j = 80$ அதாவது, மொத்த இருப்புகள் =மொத்த தேவைகள் . எனவே கொடுக்கப்பட்ட கணக்கானது சமநிலை போக்குவரத்து கணக்காகும்.

முதல் ஒதுக்கீடு :

	I	II	III	IV	இருப்பு a_i	நிரை வித்தியாசம்
A	5	1	3	3	34	2
B	3	3	5	4	15	0
C	6	4	4	3	12	1
D	4	(19) 1	4	5	19/0	3
தேவை b_j	21	25/6	17	17		
நிரல் வித்தியாசம்	1	0	1	0		

இரண்டாவது ஒதுக்கீடு:

	I	II	III	IV	a_i	நிரை வித்தியாசம்
A	5	(6) 1	3	3	34/28	2
B	3	3	5	4	15	0
C	6	4	4	3	12	1
b_j	21	6/0	17	17		
நிரல் வித்தியாசம்	2	2	1	0		

மூன்றாவது ஒதுக்கீடு :

	I	III	IV	a_i	நிரை வித்தியாசம்
A	5	3	3	28	0
B	(15) 3	5	4	15/0	1
C	6	4	3	12	1
b_j	21/6	17	17		
நிரல் வித்தியாசம்	2	1	0		

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 10.indd 200 09-05-2019 14:25:41

நான்காவது ஒதுக்கீடு :

	I	III	IV	a_i	நிரை வித்தியாசம்
A	5	3	3	28	0
C	6	4	(12) 3	12/0	1
b_j	6	17	17/5		
நிரல் வித்தியாசம்	1	1	0		

ஐந்தாவது ஒதுக்கீடு :

	I	III	IV		நிரை வித்தியாசம்
A	5	3	(5) 3	28/23	0
	6	17	5/0		
நிரல் வித்தியாசம்	-	-	-		

ஆறாவது ஒதுக்கீடு :

	I	III		நிரை வித்தியாசம்
A	(6) 5	(17) 3	23/6/0	2
	6/0	17/0		
நிரல் வித்தியாசம்	-	-		

அனைத்து ஒதுக்கீடுகளும் ஒரே அட்டவணையில் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன:

	I	II	III	IV	a_i
A	(6) 5	(6) 1	(17) 3	(5) 3	34
B	(15) 3	3	5	4	15
C	6	4	4	(12) 3	12
D	4	(19) 1	4	5	19
b_j	21	25	17	17	

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 10.indd 201 09-05-2019 14:25:41

போக்குவரத்து விவரம்

$$A\rightarrow I,\ A\rightarrow II,\ A\rightarrow III,\ A\rightarrow IV,\ B\rightarrow I,\ C\rightarrow IV,\ D\rightarrow II$$

மொத்த போக்குவரத்து செலவு

$$= (6\times5)+(6+1)+(17\times3)+(5\times3)+(15\times3)+(12\times3)+(19\times1)$$

$$= 30+6+51+15+45+36+19$$

$$= ₹\ 202$$

பயிற்சி 10.1

1. போக்குவரத்து கணக்குகள் என்றால் என்ன?

2. போக்குவரத்து கணக்கின் கணித வடிவத்தை எழுதுக.

3. போக்குவரத்து கணக்கின் ஏற்புடையத் தீர்வு மற்றும் சிதைவற்ற தீர்வு என்றால் என்ன ?

4. சமநிலை போக்குவரத்து கணக்கு என்பதன் பொருள் யாது?

5. வடமேற்கு மூலை முறையைப் பயன்படுத்தி பின்வரும் போக்குவரத்து கணக்கின் ஆரம்ப அடிப்படை சாத்தியமானத் தீர்வை காண்க.

	D_1	D_2	D_3	D_4	அளிப்பு
O_1	5	3	6	2	19
O_2	4	7	9	1	37
O_3	3	4	7	5	34
தேவை	16	18	31	25	

6. வடமேற்கு மூலை முறையை பயன்படுத்தி பின்வரும் போக்குவரத்து கணக்கின் ஆரம்ப அடிப்படை சாத்தியமானத் தீர்வை காண்க.

	பெங்களூரு	நாசிக்	போபால்	டில்லி	இருப்பு
சென்னை	6	8	8	5	30
மதுரை	5	11	9	7	40
திருச்சி	8	9	7	13	50
தேவை (அலகுகள்/நாள்)	35	28	32	25	

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 10.indd 202 09-05-2019 14:25:41

7. மீச்சிறு செலவு முறையை பயன்படுத்தி பின்வரும் போக்குவரத்து கணக்கின் ஆரம்ப அடிப்படைத் தீர்வைக் காண்க

	D_1	D_2	D_3	அளிப்பு
O_1	9	8	5	25
O_2	6	8	4	35
O_3	7	6	9	40
தேவை	30	25	45	

16

8. வோகலின் தோராய முறையை பயன்படுத்தி பின்வரும் போக்குவரத்து கணக்கின் ஆரம்ப அடிப்படை சாத்தியமானத் தீர்வை காண்க.

	D_1	D_2	D_3	D_4	அளிப்பு
O_1	2	3	11	7	6
O_2	1	0	6	1	1
O_3	5	8	15	9	10
தேவை	7	5	3	2	

9. வோகலின் தோராய முறையை பயன்படுத்தி பின்வரும் போக்குவரத்து கணக்கின் ஆரம்ப அடிப்படை சாத்தியமானத் தீர்வை காண்க.

	D_1	D_2	D_3	D_4	இருப்பு
O_1	5	8	3	6	30
O_2	4	5	7	4	50
O_3	6	2	4	6	20
தேவை	30	40	20	10	

10. வடமேற்கு மூலை முறையை பயன்படுத்தி பின்வரும் போக்குவரத்து கணக்கின் ஆரம்ப அடிப்படை சாத்தியமானத் தீர்வை காண்க.

		தொட்டி					அளிப்பு
		A	B	C	D	E	
	P	2	11	10	3	7	4
ஆதி	Q	1	4	7	2	1	8
	R	3	9	4	8	12	9
தேவை		3	3	4	5	6	

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 10.indd 203 09-05-2019 14:25:41

11. கொடுக்கப்பட்டுள்ள போக்குவரத்து கணக்கின் ஆரம்ப அடிப்படைத் தீர்வை கீழ்க்கண்ட முறைகளில் காண்க:

	I	II	III	அளிப்பு
A	1	2	6	7
B	0	4	2	12
C	3	1	5	11
தேவை	10	10	10	

(i) வடமேற்கு மூலை முறை

(ii) மீச்சிறு செலவு முறை

(iii) வோகலின் தோராய முறை

12. வடமேற்கு மூலை முறையை பயன்படுத்தி பின்வரும் போக்குவரத்து கணக்கின் ஆரம்ப அடிப்படை சாத்தியமானத் தீர்வை காண்க.

	D	E	F	C	அளிப்பு
A	11	13	17	14	250
B	16	18	14	10	300
C	21	24	13	10	400
தேவை	200	225	275	250	

10.2 ஒதுக்கீட்டுக் கணக்குகள் (Assignment Problems)

அறிமுகம்

ஒதுக்கீட்டு கணக்கு என்பது போக்குவரத்து கணக்கின் ஒரு தனிப்பட்ட கணக்காகும். ஒதுக்கீட்டு கணக்கு தீர்ப்பதில் மற்ற முறைகளைவிட குன் (Kuhn, 1956) ஃபிளட் (Flood, 1956) ஆகியோர் கண்டுபிடித்த முறையானது நேரத்தைக் குறைவாகப் பயன்படுத்துகிறது. ஹங்கேரியன் கணிதவியலாளர்கள் கோனிக் (Koneig, 1950) மற்றும் ஈஜ்வரி (Egervary, 1953) இந்த முறையை நியாயப்படுத்தினார்கள். ஆதலால் இந்த முறை ஹங்கேரியன் முறை என்று பெயரிடப்பட்டது.

'm' வேலைகள் மற்றும் 'n' இயந்திரங்கள் (மனிதர்கள்) இருப்பதாக எடுத்துக் கொள்வோம். வேலைகளின் எண்ணிக்கையும் இயந்திரங்களின் எண்ணிக்கையும் சமமாக இருக்க வேண்டும். ஒரு இயந்திரத்திற்கு ஒரு வேலை என்ற அடிப்படையில் ஒதுக்கீடு செய்ய வேண்டும். i என்ற வேலையை j என்ற இயந்திரத்திற்கு ஒதுக்கீடு செய்யப்பட்டால் ஆகும் செலவு C_{ij} ($i = 1,2,\ldots,m$ and $j = 1,2,\ldots,n$). நமது நோக்கமானது மொத்த ஒதுக்கீட்டு செலவை குறைக்குமாறு ஒவ்வொரு இயந்திரத்திற்கும் ஒரே ஒரு வேலையை மட்டும் ஒதுக்கீடு செய்வதாகும்.

ஒதுக்கீட்டு கணக்கு என்பது போக்குவரத்து கணக்கின் ஒரு தனிப்பட்ட கணக்காகும். இங்கு ஆதிகள் வேலைகளையும் சேருமிடம் இயந்திரங்களையும் குறிக்கும். ஒவ்வொரு ஆதிக்கும் வழங்கல் அளவு ஒரு அலகு. அதேபோல, ஒவ்வொரு சேருமிடத்திற்கும் தேவை ஒரு அலகு மட்டுமே.

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 10.indd 204 09-05-2019 14:25:41

ஒதுக்கீட்டு கணக்கின் கணித வடிவம்:

n வேலைகளை n இயந்திரங்களுக்கு ஒதுக்கீடு செய்வதாக கொள்வோம் (ஒரு இயந்திரத்திற்கு ஒரு வேலை) . C_{ij} என்பது i –வது வேலையை j –வது இயந்திரத்திற்கு ஒதுக்கீடு செய்ய ஆகும் செலவு என்க.

$$X_{ij} = \begin{cases} 1 \; i \text{ வது வேலையை } j \text{வது இயந்திரத்திற்கு ஒதுக்கீடு செய்யப்பட்டால்} \\ 0, \; i \text{ வது வேலையை jவது இயந்திரத்திற்கு ஒதுக்கீடு செய்யவில்லையெனில்} \end{cases}$$

இயந்திரங்கள்

		1	2	…	n	அளிப்பு
வேலைகள்	1	(x_{11}) C_{11}	(x_{12}) C_{12}	…	(x_{1n}) C_{1n}	1
	2	(x_{21}) C_{21}	(x_{22}) C_{22}	…	(x_{2n}) C_{2n}	1
	⋮		⋮	⋮	⋮	1
	m	(x_{ij}) C_{n1}	(x_{ij}) C_{n2}	…	(x_{ij}) C_{nn}	1
	தேவை	b_1	b_2	…	b_n	

எந்த ஒரு சிற்றறையிலாவது x_{ij} விடுபட்டு இருந்தால் அங்கு ஒதுக்கீடு செய்யப்படவில்லை என்பதாகும். அதாவது, $x_{ij} = 0$.

எந்த சிற்றறையில் x_{ij} இடம் பெற்றிருக்கும் அங்கு ஒதுக்கீடு செய்யப்பட்டிருக்கிறது என்பதாகும். அதாவது, $x_{ij} = 1$

ஒதுக்கீடு கணக்கை நேரிய திட்டமிடல் கணக்காக கீழ்க்கண்டவாறு எழுதலாம்.

$$Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} x_{ij}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \; j = 1, 2, ...n$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \; i = 1, 2, ...n$$ and $x_{ij} = 0$ (அல்லது) 1 அனைத்து (i, j) என்ற கட்டுபாடுகளுக்கினங்க

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 10.indd 205 09-05-2019 14:25:42

10.2.3 ஒதுக்கீடு கணக்கின் தீர்வைக் காணும் வழிமுறைகள் (ஹங்கேரியன் முறை) (Solution of assignment problems (Hungarian Method))

கொடுக்கப்பட்ட அணி சதுர அணியாக இருக்க வேண்டும். அவ்வாறு இல்லையெனில் தகுந்த ஒப்புக்கான நிரல் அல்லது நிரையை சேர்த்து சதுர அணியாக மாற்ற வேண்டும். அவ்வாறு சேர்க்கப்படும் நிரல் அல்லது நிரையில் உள்ள சிற்றறைகளில் செலவு 0 என்க.

படி : 1 ஒவ்வொரு நிரையின் மீச்சிறு மதிப்பை அந்த நிரையின் எல்லா மதிப்புகளிலிருந்தும் கழிக்க வேண்டும்.

படி : 2 படி (1)–ல் கிடைத்த அணியில் ஒவ்வொரு மீச்சிறு மதிப்பையும் அந்தந்த நிரலின் அனைத்து மதிப்புகளிலிருந்தும் கழிக்க வேண்டும்.

படி : 3 ஒவ்வொரு நிரல் மற்றும் நிரையில் குறைந்தபட்சம் ஒரு பூஜ்யமாவது இருக்கிறதா என்பதை சரிபார்க்க.

(i) ஒவ்வொரு நிரையாக ஒரே ஒரு பூஜ்யம் உள்ளதா என சோதிக்கவும். அந்த பூஜ்யத்தை சுற்றி □,வரைக. அந்த சிற்றறையின் நிரலிலுள்ள மற்ற அனைத்து பூஜ்யங்களையும் $(\times)$ அடித்துவிடுக.

(ii) மேற்கண்ட முறையை ஒவ்வொரு நிரலுக்கும் செய்யவும். அதாவது, ஒவ்வொரு நிரலாக ஒரே ஒரு பூஜ்யம் உள்ளதா என சோதிக்கவும். அந்த பூஜ்யத்தை சுற்றி □ வரைக. அந்த சிற்றறையின் நிரையிலுள்ள மற்ற அனைத்து பூஜ்யங்களையும் $(\times)$ அடித்துவிடுக

படி 4 : ஒவ்வொரு நிரை மற்றும் நிரலிரும் ஒரே ஒரு ஒதுக்கீடு செய்யப்பட்டிருந்தால், அது உகந்த தீர்வாகும்.

உங்களுக்கு தெரியுமா?

ஒதுக்கீடு கணக்குகளுக்கான உகந்த ஒதுக்கீடு முறையை ஹங்கேரியன் முறை நமக்கு அளிக்கிறது.

குறிப்பு

ஒரு நிரை(நிரல்)–ல் உள்ள அனைத்து எண்களுடனும் ஒரு எண்ணைக் கூட்டினாலும் கழித்தாலும் ஒதுக்கீடு கணக்கின் உகந்த தீர்வு மாறாது

குறிப்பு

$C_{ij} > 0$ எனில், $\sum C_{ij}\, x_{ij} = 0$ என்பது x_{ij} ஆல் பூர்த்தி செய்யப்பட்டால் அது உகந்த தீர்வாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 10.7

கீழ்க்கண்ட ஒதுக்கீட்டு கணக்கை தீர்க்க. சிற்றறைகளிலுள்ள மதிப்பானது A, B, C மற்றும் D என்ற வேலைகளை I, II, III, IV என்ற இயந்திரங்களுக்கு ஒதுக்கீடு செய்ய ஆகும் செலவு.

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 10.indd 206 09-05-2019 14:25:43

இயந்திரங்கள்

		I	II	III	IV
வேலைகள்	A	10	12	19	11
	B	5	10	7	8
	C	12	14	13	11
	D	8	15	11	9

தீர்வு:

இங்கு நிரல்களின் எண்ணிக்கையும், நிரைகளின் எண்ணிக்கையும் சமமாக உள்ளன. எனவே, கொடுக்கப்பட்ட கணக்கானது சமசீரான ஒதுக்கீடு கணக்காகும்.

தற்போது அதன் தீர்வைக் காணலாம்.

படி 1: ஒவ்வொரு நிரையில் உள்ள மீச்சிறு மதிப்பை அந்த நிரையில் உள்ள அனைத்து மதிப்புகளிலிருந்தும் கழிக்க வேண்டும்.

	I	II	III	IV
A	0	2	9	1
B	0	5	2	3
C	1	3	2	0
D	0	7	3	1

ஒவ்வொரு நிரல் மற்றும் நிரையில் குறைந்தபட்சம் ஒரு பூஜ்யமாவது இருக்கிறதா என்பதை பார்க்க. இல்லையெனில் படி 2 க்கு செல்க.

படி 2: படி (1)–ல் கிடைத்த அணியில், ஒவ்வொரு நிரலில் உள்ள மீச்சிறு மதிப்பை அந்த நிரலில் உள்ள அனைத்து மதிப்புகளிலிருந்தும் கழிக்க வேண்டும்.

	I	II	III	IV
A	0	0	7	1
B	0	3	0	3
C	1	1	0	0
D	0	5	1	1

ஒவ்வொரு நிரை மற்றும் நிரலிலும் குறைந்தபட்சம் ஒரு பூஜ்ஜியம் உள்ளதால் ஒதுக்கிடுகளை செய்யலாம்.

படி 3 (ஒதுக்கீடு):

ஒவ்வொரு நிரையாக ஒரே ஒரு பூஜ்யம் உள்ளதா என சோதிக்கவும். முதல் மூன்று நிரைகளிலும் ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட பூஜ்ஜியங்கள் உள்ளன. நிரை D–ல் ஒரே ஒரு பூஜ்ஜியம் உள்ளது. அந்த பூஜ்யத்தை □ ஆல் குறியிடுக. □ குறியிட்ட நிரலிலுள்ள மற்ற அனைத்து பூஜ்யங்களையும் $\times$ ஆல் குறியிடுக.

	I	II	III	IV
A	$\cancel{0}$	0	7	1
B	$\cancel{0}$	3	0	3
C	1	1	0	0
D	$\boxed{0}$	5	1	2

படி 4: ஒவ்வொரு நிரலாக ஒரே ஒரு பூஜ்யம் உள்ளதா என சோதிக்கவும். நிரல் I–ல் ஏற்கனவே ஒதுக்கீடு செய்யப்பட்டுள்ளதால் நிரல் II–க்குச் செல்லவும். அங்கு ஒரே ஒரு பூஜ்ஜியம் உள்ளது. அந்த பூஜ்யத்தை □ –ஆல் குறியிடுக. □ குறியிட்ட நிரையில் உள்ள மற்ற அனைத்து பூஜ்யங்களையும் × ஆல் குறியிடுக..

	I	II	III	IV
A	$\cancel{0}$	$\boxed{0}$	7	1
B	$\cancel{0}$	3	0	3
C	1	1	0	0
D	$\boxed{0}$	5	1	2

நிரல் III –ல் ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட பூஜ்ஜியங்கள் உள்ளன. நிரல் IV–ல் ஒரே ஒரு பூஜ்ஜியம் உள்ளதால் , அந்த பூஜ்யத்தை □ ஆல் குறியிடுக.. □ குறியிட்ட நிரையில் உள்ள மற்ற அனைத்து பூஜ்யங்களையும் × ஆல் குறியிடுக..

	I	II	III	IV
A	$\cancel{0}$	$\boxed{0}$	7	1
B	$\cancel{0}$	3	0	3
C	1	1	$\cancel{0}$	$\boxed{0}$
D	$\boxed{0}$	5	1	2

படி 5: மீண்டும் ஒவ்வொரு நிரையாக மேற்கண்ட முறையை தொடரவும். நிரை A–ல் ஏற்கனவே ஒதுக்கீடு செய்யப்பட்டுள்ளது. நிரை B –ல் ஒரே ஒரு பூஜ்ஜியம் உள்ளது. அந்த பூஜ்யத்தை □ –ஆல் குறியிடுக □ குறியிட்ட நிரையில் உள்ள மற்ற அனைத்து பூஜ்யங்களையும் × ஆல் குறியிடுக..

	I	II	III	IV
A	$\cancel{0}$	$\boxed{0}$	7	1
B	$\cancel{0}$	3	$\boxed{0}$	3
C	1	1	$\cancel{0}$	$\boxed{0}$
D	$\boxed{0}$	5	1	2

அனைத்து ஒதுக்கீடுகளும் செய்யப்பட்டுள்ளன. உகந்த ஒதுக்கீடு மற்றும் மொத்த செலவு (சிறுமசெலவு):

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 10.indd 208 09-05-2019 14:25:44

வேலைகள்	இயந்திரங்கள்	செலவு
A	II	12
B	III	7
C	IV	11
D	I	8
மொத்த செலவு		38

உகந்த ஒதுக்கீடு செலவு(சிறும செலவு)

$= ₹ 38$

எடுத்துக்காட்டு 10.8

5 வேலைகளை 5 நபர்களுக்கு ஒதுக்கீடு செய்யும் கணக்கைக் கருத்தில் கொள்க. ஒதுக்கீடு செலவுகள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன. உகந்த ஒதுக்கீடு மற்றும் மொத்த சிறும செலவைக் காண்க.

வேலை

		1	2	3	4	5
நபர்	*A*	8	4	2	6	1
	B	0	9	5	5	4
	C	3	8	9	2	6
	D	4	3	1	0	3
	E	9	5	8	9	5

தீர்வு:

இங்கு நிரல்களின் எண்ணிக்கையும் நிரைகளின் எண்ணிக்கையும் சமமாக உள்ளன. எனவே, கொடுக்கப்பட்ட கணக்கானது சமக்சீரான ஒதுக்கீடு கணக்காகும். தற்போது அதன் தீர்வைக் காணலாம்.

படி 1: ஒவ்வொரு நிரையில் உள்ள மீச்சிறு மதிப்பை அந்த நிரையில் உள்ள அனைத்து மதிப்புகளிலிருந்தும் கழிக்க வேண்டும்.

வேலை

		1	2	3	4	5
நபர்	*A*	7	3	1	5	0
	B	0	9	5	5	4
	C	1	6	7	0	4
	D	4	3	1	0	3
	E	4	0	3	4	0

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 10.indd 209 09-05-2019 14:25:44

ஒவ்வொரு நிரை மற்றும் நிரலிலும் குறைந்தபட்சம் ஒரு பூஜ்ஜியமாவது உள்ளதா என்பதை சோதிக்க. அவ்வாறு இல்லையெனில் படி 2 –க்கு செல்லவும்.

படி 2: படி (1)–ல் கிடைத்த அணியில், ஒவ்வொரு நிரலில் உள்ள மீச்சிறு மதிப்பை அந்த நிரலில் உள்ள அனைத்து மதிப்புகளிலிருந்தும் கழிக்க வேண்டும்.

வேலை

நபர்		1	2	3	4	5
	A	7	3	0	5	0
	B	0	9	4	5	4
	C	1	6	6	0	4
	D	4	3	0	0	3
	E	4	0	2	4	0

ஒவ்வொரு நிரை மற்றும் நிரலிலும் குறைந்தபட்சம் ஒரு பூஜ்ஜியம் உள்ளதால் ஒதுக்கிடுகளைச் செய்யலாம்.

படி 3 (ஒதுக்கீடு): (Assignment):

ஒவ்வொரு நிரையாக ஒரே ஒரு பூஜ்யம் உள்ளதா என சோதிக்கவும். முதல் நிரை A–ல் ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட பூஜ்ஜியங்கள் உள்ளன. நிரை B–ல் ஒரே ஒரு பூஜ்ஜியம் உள்ளது. அந்த பூஜ்யத்தை □–ஆல் குறியிடுக. □குறியிட்ட நிரலில் உள்ள மற்ற அனைத்து பூஜ்யங்களையும் × –ஆல் குறியிடுக.

வேலை

நபர்		1	2	3	4	5
	A	7	3	0	5	0
	B	[0]	9	4	5	4
	C	1	6	6	0	4
	D	4	3	0	0	3
	E	4	0	2	4	0

நிரை C–ல் ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட பூஜ்ஜியங்கள் உள்ளன. அந்த பூஜ்யத்தை □–ஆல் குறியிடுக. □ குறியிட்ட நிரலில் உள்ள மற்ற அனைத்து பூஜ்யங்களையும் ×–ஆல் குறியிடுக.

வேலை

நபர்		1	2	3	4	5
	A	7	3	0	5	0
	B	$\boxed{0}$	9	4	5	4
	C	1	6	6	$\boxed{0}$	4
	D	4	3	0	$\cancel{0}$	3
	E	4	0	2	4	0

நிரை D–ல் ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட பூஜ்ஜியங்கள் உள்ளன. அந்த பூஜ்யத்தை □–ஆல் குறியிடுக. □ குறியிட்ட நிரலில் உள்ள மற்ற அனைத்து பூஜ்யங்களையும் $\times$–ஆல் குறியிடுக.

வேலை

நபர்		1	2	3	4	5
	A	7	3	$\cancel{0}$	5	0
	B	$\boxed{0}$	9	4	5	4
	C	1	6	6	$\boxed{0}$	4
	D	4	3	$\boxed{0}$	$\cancel{0}$	3
	E	4	0	2	4	0

நிரை E–ல் ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட பூஜ்ஜியங்கள் உள்ளன. எனவே அடுத்து நாம் நிரலில் ஒதுக்கீடு செய்யலாம். நிரல் 1 ஒதுக்கீடு உள்ளது. நிரல் இரண்டில் ஒரே ஒரு பூச்சியம் உள்ளதால். அந்த பூஜ்யத்தை □–ஆல் குறியிடுக. □ குறியிட்ட நிரலில் உள்ள மற்ற அனைத்து பூஜ்யங்களையும் $\times$–ஆல் குறியிடுக.

வேலை

நபர்		1	2	3	4	5
	A	7	3	$\cancel{0}$	5	0
	B	$\boxed{0}$	9	4	5	4
	C	1	6	6	$\boxed{0}$	4
	D	4	3	$\boxed{0}$	$\cancel{0}$	3
	E	4	$\boxed{0}$	2	4	$\cancel{0}$

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 10.indd 211 09-05-2019 14:25:44

நிரல் 3 மற்றும் நிரல் 4–கில் ஒதுக்கீடு உள்ளது. எனவே 5–வது நிரலில் ஒரே ஒரு பூஜ்யம் உள்ளது. அந்த பூஜ்யத்தை □–ஆல் குறியிடுக. □குறியிட்ட நிரையில் உள்ள மற்ற அனைத்து பூஜ்யங்களையும் ×–ஆல் குறியிடுக.

வேலை

நபர்	1	2	3	4	5
A	7	3	$\not{0}$	5	$\boxed{0}$
B	$\boxed{0}$	9	4	5	4
C	1	6	6	$\boxed{0}$	4
D	4	3	$\boxed{0}$	$\not{0}$	3
E	4	$\boxed{0}$	2	4	$\not{0}$

அனைத்து ஒதுக்கீடுகளும் செய்யப்பட்டுள்ளன.

உகந்த ஒதுக்கீடு மற்றும் மொத்த சிறும செலவு:

நபர்	வேலை	செலவு
A	5	1
B	1	0
C	4	2
D	3	1
E	2	5
மொத்த செலவு		9

உகந்த ஒதுக்கீடு மொத்த செலவு(சிறும செலவு) = ₹ 9

எடுத்துக்காட்டு 10.9

கீழ்க்கண்ட ஒதுக்கீடுகணக்கினை தீர்க்க.

நபர்

வேலை	1	2	3
P	9	26	15
Q	13	27	6
R	35	20	15
S	18	30	20

தீர்வு:

நிரைகளின் எண்ணிக்கையைவிட நிரல்களின் எண்ணிக்கை குறைவாக உள்ளதால், கொடுக்கப்பட்ட கணக்கானது சமசீரற்ற ஒதுக்கீடு கணக்காகும். இதனை சமச்சீராக மாற்ற எல்லா மதிப்புகளும் பூச்சியமுள்ள ஒப்புக்கான நிரலை உருவாக்கவும். மாற்றியமைக்கப்பட்ட ஒதுக்கீடு கணக்கானது

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 10.indd 212 09-05-2019 14:25:45

		நபர்			
		1	2	3	d
வேலை	P	9	26	15	0
	Q	13	27	6	0
	R	35	20	15	0
	S	18	30	20	0

இங்கு 3 வேலையாட்களுக்கு 3 வேலைகளை ஒதுக்கவேண்டும்.

படி 1: ஒவ்வொரு நிரையிலும் பூச்சியம் இருப்பதால் படி 1 தேவையில்லை.

படி 2 : ஒவ்வொரு நிரலில் உள்ள மீச்சிறு மதிப்பை அந்த நிரலில் உள்ள அனைத்து மதிப்புகளிலிருந்தும் கழிக்க வேண்டும்.

		நபர்			
		1	2	3	d
வேலை	P	0	6	9	0
	Q	4	7	0	0
	R	26	0	9	0
	S	9	10	14	0

படி 3 ஒதுக்கீடு (Assignment) :

		நபர்			
		1	2	3	d
வேலை	P	[0]	6	9	~~0~~
	Q	4	7	[0]	~~0~~
	R	26	[0]	9	~~0~~
	S	9	10	14	[0]

ஒவ்வொரு நிரை மற்றும் நிரலில் சரியாக ஒரே ஒரு ஒதுக்கீடு உள்ளது. அனைத்து ஒதுக்கீடுகளும் செய்யப்பட்டுள்ளன. மூன்று நபர்களுக்கும் வேலைகள் ஒதுக்கப்பட்டுள்ளன. S என்ற வேலைக்கு எந்த நபரும் ஒதுக்கப்படவில்லை.

வேலை	நபர்	செலவு
P	1	9
Q	3	6
R	2	20
S	*d*	0
மொத்த செலவு		35

உகந்த ஒதுக்கீடு செலவு(சிறும செலவு) = ₹ 35

பயிற்சி 10.2

1. ஒதுக்கீடு கணக்கு என்றால் என்ன?

2. ஒதுக்கீடு கணக்கின் கணித வடிவம் தருக.

3. ஒதுக்கீடு கணக்கிற்கும் , போக்குவரத்து கணக்கிற்கும் இடையேயான வேறுபாடு என்ன?

4. A,B,C மூன்று வேலைகள் U,V, W என்ற இயந்திரங்களுக்கு ஒதுக்கீடு செய்யப்படவேண்டும். ஒவ்வொரு இயந்திரமும் ஒவ்வொரு வேலையை முடிக்க ஆகும் செலவு அணியானது கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது. மொத்த செலவை குறைக்குமாறு உகந்த ஒதுக்கீடுகளை காண்க.

		இயந்திரம்		
		U	*V*	*W*
வேலை	*A*	17	25	31
	B	10	25	16
	C	12	14	11

(ஒரு அலகுக்கான செலவு ₹–ல்)

5. ஒரு கணினி மையத்தில் மூன்று திட்டமிடும் நிபுணர்கள் உள்ளனர். அந்த மையத்தில் மூன்று பயன்பாட்டு திட்டங்கள் ஏற்படுத்தப்படவேண்டும். மையத்தின் தலைவர் திட்டங்களை கவனமாக பரிசீலித்து, மூன்று திட்டமிடல் நிபுணர்கள் எடுத்துக் கொள்ளும் கணினி நேரத்தை மதிப்பீடு செய்கிறார்.

		திட்டங்கள்		
		P	*Q*	*R*
திட்டநிபுணர்	1	120	100	80
	2	80	90	110
	3	110	140	120

மொத்த கணினி நேரத்தை குறைக்குமாறு திட்டங்களுக்கான திட்டநிபுணர்களை ஒதுக்கீடு செய்க

6. ஒரு பல்பொருள் அங்காடியின் தலைவரின் கீழ் பணிபுரியும் நான்கு பணியாளர்கள் நான்கு வேலைகளை செய்ய வேண்டும். ஒவ்வொரு பணியாளரும் ஒவ்வொரு வேலையையும் முடிக்கும் வேலைத்திறனில் மாறுபட்டுள்ளனர். ஒவ்வொரு பணியாளரும் ஒவ்வொரு வேலையையும் முடிக்க ஆகும் நேரம் (மணியில்) கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 10.indd 214 09-05-2019 14:25:45

		வேலை			
		1	2	3	4
பணியாளர்கள்	*P*	8	26	17	11
	Q	13	28	4	26
	R	38	19	18	15
	S	9	26	24	10

மொத்த நேரத்தை குறைக்குமாறு ஒவ்வொரு பணியாளருக்கும் எவ்வாறு பணிகளை ஒதுக்க வேண்டும்.

7. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள போக்குவரத்து கணக்கின் செலவு அணிக்கான உகந்த தீர்வை காண்க.

		இடம்			
		1	2	3	4
விற்பனையாளர்	*P*	11	17	8	16
	Q	9	7	12	6
	R	13	16	15	12
	S	14	10	12	11

8. A,B,C,D.E மற்றும் F என்ற திறந்தவெளி இடங்களுக்கு 1,2,3, மற்றும் 4 ஆகிய நான்கு வண்டிகள் சென்று நிறுத்த இடங்களை ஒதுக்கவேண்டும். நான்கு வண்டிகள் கொண்டு சென்று நிறுத்த ஆகும் பயண செய்த தூரம் குறைக்குமாறு ஒதுக்கீடு செய்க. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள அணியானது தூரத்தை குறிக்கிறது.

	1	2	3	4
A	4	7	3	7
B	8	2	5	5
C	4	9	6	9
D	7	5	4	8
E	6	3	5	4
F	6	8	7	3

10.3 தீர்மானக் கோட்பாடு (Decision Theory)

அறிமுகம்

தீர்மானக் கோட்பாட்டின் முதன்மையான தொடர்பானது மக்கள் மற்றும் அமைப்புகள் மேற்கொள்ளப்படும் தீர்வுகளுக்கு உதவி புரிதலாகும். இது தீர்வுகளுக்கான முக்கிய முடிவுகளை மேற்கொள்ள பொருள் தருகின்ற கருத்து உணர்வுகளை திரட்டித் தருகிறது. தீர்மானித்தல் என்பது எதனை குறிப்பிடுகிறது எனில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள சூழ்நிலையில் பல்வேறான செயற்பாங்குகளில் சிறந்ததொரு செயற்பாங்கினை தேர்வு செய்வதாகும்.

திட்டமிடுதல், அமைப்புகள், வழிகாட்டுதல், உத்திரவிடுதல் மற்றும் கட்டுப்படுத்துதல் என பல்வேறான தோற்றங்களை மேலாண்மையாளர்கள் கருத்தில் கொள்ள வேண்டும். பலவிதமான செயற்பாங்குகளைச் செயல்படுத்தும் போது மேலாண்மையாளர்கள் பல்வேறான சூழ்நிலைகளை எதிர்கொண்டு அவற்றில் சிறந்த ஒன்றைத் தேர்வு செய்தல் வேண்டும். இவ்வாறு சிறந்த ஒன்றைத் தேர்வு செய்தல் என்பதை தொழில் நுட்ப சொல்லால் கூறும் பொழுது தீர்மானம் மேற்கொள்வது அல்லது தீர்மானம் எடுத்துக் கொள்வது எனப்படும். தீர்மானம் மேற்கொள்வது என்பது "பல்வேறான செயற்பாங்குகளின் தொகுதியிலிருந்து சிறந்த செயற்பாங்கை தேர்வு செய்வதாகும்" என வரையறுக்கப்படுகிறது. அவ்வாறு தேர்வு செய்யப்பட்ட செயற்பாங்கு தீர்மானம் மேற்கொள்பவரின் நோக்கங்களைத் திருப்தி செய்வதாக எடுத்துக் கொள்ளப்படுகிறது.'

சிறந்த செயற்பாங்கினைத் தேர்வு செய்வதற்கு புள்ளியியல் அறிவு உத்திமுறை உதவி புரிகின்றது. ஐயப்பாட்டு நிலையில் உகந்ததொரு தீர்வினை தேர்வு செய்ய புள்ளியியல் தீர்மானக் கோட்பாடு வழிகாட்டுகிறது. இத்தகைய சூழ்நிலையில் நிகழ்தகவுக் கொள்கை இன்றியமையாத பங்கு வைக்கின்றது. ஐயப்பாட்டு நிலை மற்றும் இடையூறு உள்ள நிலையில் தீர்மானக் கோட்பாடு நிலைக்கு நிகழ்தகவு கொள்கை மிக அதிக அளவில் அடிக்கடி பயன்படுகிறது.

புள்ளியியல் தீர்மானக் கோட்பாடானது காரண காரியத் தொடர்புடைய பிரச்சினை அமைப்புகளை செயற்பாங்கின் மாற்று நடவடிக்கை, சூழ்நிலையின் நிலைப்பாடுகள், நிகழக் கூடிய விளைவுகள் மற்றும் ஒவ்வொரு விளைவுக்கான நிகழக் கூடிய அளித்தல்களையும் வெளிப்படுத்துகிறது. தற்பொழுது பிரச்சினைக்கான தீர்வினை தீர்மானக் கோட்பாடு அணுகு முறையில் தீர்வு காண அதன் தொடர்புடைய கருத்துக்களை விளக்குவோம்.

பொருள்

முடிவு எடுப்பவர் : முடிவு எடுப்பவர் என்பது ஒரு தனி நபரோ அல்லது ஒரு குழுவிலுள்ள நபர்களோ, கிடைக்கக் கூடிய செயற்பாங்கு நடவடிக்கைகளில் தகுந்ததொரு செயற்பாங்கு நடவடிக்கையை தேர்ந்தெடுப்பதற்கு பொறுப்பானவரை குறிப்பது ஆகும்.

செயற்பாங்கு (அல்லது செயற்பாங்கின் நடவடிக்கைகள்) : பிரச்சினைகளுக்கு தீர்மானக் கோட்பாட்டின் பங்கானது, மாற்று நடவடிக்கைகளைக் கொண்ட செயற்பாங்குகளிலிருந்து ஒரு செயற்பாங்கினைத் தேர்வு செய்தலாகும். இரண்டு அல்லது இரண்டிற்கு மேற்பட்ட செயற்பாங்குகளைக் கொண்ட பிரச்சனை சூழ்நிலையில் தீர்மானக் கோட்பாட்டைக் கொண்டு ஒரு செயற்பாங்கு நடவடிக்கையை தேர்வு செய்ய அவசியமாகிறது. $a_1, a_2, a_3, \ldots$ எனக் கொண்டுள்ள செயற்பாங்குகள் அல்லது செயல்கள் என எடுத்துக் கொண்டால், அனைத்து செயற்பாங்குகளின் மொத்தமானது 'செயற்பாங்குவெளி' (Action space) எனவும், இதனை A என குறிப்பிடப்படுகிறது.

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 10.indd 216 09-05-2019 14:25:45

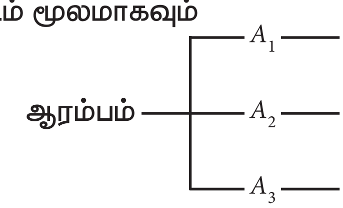
மூன்று செயற்பாங்குகள்e $a_1, a_2, a_3,\ldots$ எனில் A = செயற்பாங்குவெளி = $a_1, a_2, a_3)$ அல்லது $A = (A_1, A_2, A_3)$. செயற்பாங்குவெளி அல்லது செயற்பாங்குகளைக் கீழ்க்கண்ட அணி வாயிலாக நிரையாகவோ அல்லது நிரல்களாகவோ தெரிவு செய்யலாம்.

செயற்பாங்கு
A_1
A_2
…
A_n

(அ)

செயற்பாங்கு	A_1	A_2	…	A_n

செயற்பாங்கு அல்லது செயற்பாங்குகளை ஒரு மர வடிவ விளக்கப்படம் மூலமாகவும் காண்பிக்கலாம்.



நிகழ்ச்சிகள் (அல்லது சூழ்நிலைகளின் நிலைப்பாடு) :

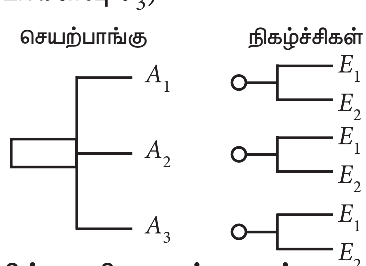
தீர்மானித்தலின் முடிவு எடுப்பவரின் கட்டுப்பாட்டிற்கு வெளியே உள்ள பொழுது கொடுக்கப்பட்டுள்ள செயற்பாங்கு எந்த அளவு வெற்றி அடைந்துள்ளது என்பதை நிர்ணயம் செய்ய நிகழ்கின்ற நிகழ்ச்சிகள் அடையாளம் காண்பிக்கின்றது. இத்தகைய நிகழ்ச்சிகளை சூழ்நிலைகளின் நிலைப்பாடு அல்லது விளைவுகள் என அழைக்கின்றோம். ஒரு குறிப்பிட்ட பொருளுக்கு நிர்ணயிக்கப்பட்ட கால அளவில் சந்தையில் தேவையின் அளவை நிகழ்ச்சி அல்லது சூழ்நிலையின் நிலைப்பாட்டிற்கு ஓர் எடுத்துக்காட்டாகும்.

ஒரு கணத்தின் வாயிலாக சூழ்நிலைகளின் நிலைப்பாட்டைக் கீழ்க்கண்ட ஏதேனும் ஒரு முறையில் தெரிவு செய்யலாம்.

$$\mathrm{S} = \{S_1, S_2, \ldots, S_n\} \text{ or } E = \{E_1, E_2, \ldots, E_n\} \text{ or } \Omega = \{\theta_1, \theta_2, \theta_3\}$$

எடுத்துக்காட்டாக ஒரு சந்தையில் சலவைத்தூள் விற்பனைக்கு வருகையில் அதனை அதிகப்படியான அளவில் விரும்புகின்றவர்களின் விளைவுகள் செல்லாதது (விளைவு θ_1) அல்லது வெளிப்பாடு வாடிக்கையாளர்கள் கவனத்திற்கு (விளைவு θ_2) அல்லது ஒரு சிறிய விகிதாச்சாரா வாடிக்கையாளர்களால் விரும்பப்படுவது அதனை 25% என்போம். (விளைவு θ_3)

ஆகவே $\Omega = \{\theta_1, \theta_2, \theta_3\}$. மர வடிவ விளக்கப்படத்தில் செயற்பாங்குகளுக்கு அடுத்த இடத்தில் குறிக்கப்படுகிறது ஏற்படுகின்ற நிகழ்ச்சிகள் மூலம் மற்றொரு செயற்பாங்கு நமக்குக் கிடைப்பதை கீழ்க்கண்டவாறு குறிப்பிடலாம்.



இதனை அணி வாயிலாக, இரு வழிகளில், ஏதேனும் ஒரு வழியில் தெரிவு செய்யலாம்.

சூழ்நிலையின் நிலைப்பாடுகள் → செயற்பாடுகள் ↓	S_1	S_2
A_1 A_2		

அல்லது

செயற்பாடுகள் → சூழ்நிலையின் நிலைப்பாடுகள் ↓	$A_1 A_2, \ldots A_n$
S_1 S_2	

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 10.indd 217 09-05-2019 14:25:45

அளித்தல்கள் (Pay-off): அளித்தல் என்பது ஒவ்வொரு சூழ்நிலையின் நிலைப்பாடுகளின் செயற்பாங்கு சேர்வுகளின் முடிவானது ஒவ்வொரு சூழ்நிலையின் நிலைப்பாடுகளின் விளைவு மற்றும் கணநேரமே நிலைக்கின்ற ஒவ்வொரு விளைவின் ஆதாயம் அல்லது இழப்பு ஆகும். இதை எண் அளவையில் குறிப்பிடப்பட வேண்டும் எனக் குறிக்கின்றது.

அளித்தல்கள் பண சேமிப்பு அல்லது நேர சேமிப்பு எனவும் குறிப்பிடப்படுகிறது. பொதுவாக மாற்று நடவடிக்கைகள் மற்றும் n சூழ்நிலையின் நிலைப்பாடுகள் இருக்குமானால் அதன் விளைவுகளானது $k \times n$ எண்ணிக்கை அல்லது அளித்தல்கள் ஆகும். இத்தகைய $k \times n$ அளித்தல்களை, மிக வசதியாக $k \times n$ அளித்தல்கள் அட்டவணையாகத் தெரிவு செய்யலாம்

சூழ்நிலையின் நிலைப்பாடுகள்	தீர்மானத்தின் மாற்ற நடவடிக்கை			
	A_1	A_2	....	A_k
E_1	a_{11}	a_{12}	....	a_{1k}
E_2	a_{21}	a_{22}	....	a_{2k}
.	.	.	....	.
.	.	.	....	.
	.	.	....	.
E_n	a_{n1}	a_{n2}	....	a_{nk}

மேற்கண்ட அளித்தல் அட்டவணையை அளித்தல் அணி எனக்கூறலாம். இங்கு a_{ij} என்பது j வது மாற்று உத்தியை தேர்வு செய்யும் பொழுது i வது நிகழ்வின் நிபந்தனை வெளிப்பாடாகும்.

10.3.4 சூழ்நிலை – நிச்சயமான சூழ்நிலை மற்றும் நிச்சமற்ற சூழ்நிலை (Situations- Certainty and uncertainty)

தீர்மானம் மேற்கொள்வதின் வகைகள் : கிடைக்கக்கூடிய நிகழ்ச்சிகளுக்கான விவரங்களை அடிப்படையாகக் கொண்டும் மற்றும் தீர்மானத்தின் சூழ்நிலைக்கு ஏற்றவாறும் தீர்மானம் மேற்கொள்ளப்படுகிறது. இரண்டு வகையான சூழ்நிலைகளில் தீர்மானம் மேற்கொள்ளப்படுகிறது. நிச்சயமான நிலை, நிச்சயமற்ற நிலை

நிச்சயமான சூழ்நிலையில் தீர்மானம் மேற்கொள்வது : இங்கு தீர்மானம் மேற்கொள்பவருக்கு தான் தேர்வு செய்யும் தீர்மானங்களுக்கு அதனால் ஏற்படும் விளைவுகளை பற்றிய முழுமையான தகவல்களை நிச்சயமாக தெரிந்திருப்பார். இத்தகைய தீர்மான அமைப்பில் ஒரே ஒரு சூழ்நிலையின் நிலைப்பாடு மட்டுமே நிகழக்கூடும் என அனுமானிக்கப்படுகிறது.

நிச்சயமற்ற நிலையில் தீர்மானம் எடுத்தல் (நிகழ்தகவு கொடுக்கப்படாமல் இருக்கையில்): நிபந்தனைகளின் அடிப்படையில் நிச்சயமற்ற நிலையில் அளித்தல்கள் மட்டுமே தெரியும் மற்றும் ஒவ்வொரு சூழ்நிலைப்பாட்டின் நிகழ்தகவுத் தன்மை தெரிவதில்லை. இத்தகைய சூழ்நிலை ஒரு புதிய பொருளை சந்தையில் அறிமுகப்படுத்தும் பொழுது அல்லது புதியதாக தொழிற்சாலையிலுள்ள ஒரு இயந்திரத் தொகுதியை நிறுவும் பொழுது ஏற்படலாம். நிபந்தனைகளின் அடிப்படையில் பல வகையான தீர்மானித்தல் அளவைகள் கீழ்க்கண்டவாறு நமக்கு கிடைக்கின்றது.

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 10.indd 218 09-05-2019 14:25:45

10.3.5 மீச்சிறுவின் மீப்பெரு மதிப்பு மற்றும் மீப்பெருவின் மீச்சிறு மதிப்பு (Maximin and Minimax strategy)

மீச்சிறுவின் மீப்பெரு மதிப்பு (Maximin criteria)

இந்த தீர்மான அளவையானது எடுக்கப்பட்ட செயற்பாங்கின் நடவடிக்கையில் நிகழக் கூடிய அளித்தல்களின் மீப்பெரு மதிப்புகளில் மீச்சிறு மதிப்பாகும். இத்தீர்மான அளவை மாற்று உத்திகளால் நிகழக் கூடிய மிகக் குறைந்த மதிப்பு குறிக்கின்றது. அதனால் இதனை பாதகமான தீர்மான அளவை எனவும் கூறப்படுகிறது. இதன் செயல் முறையானது

(i) ஒவ்வொரு மாற்று நடவடிக்கைக்கும் குறைந்த பட்ச விளைவை தீர்மானிக்க வேண்டும்.

(ii) இவற்றில் சிறந்தொரு தொடர்புடைய மாற்று நடவடிக்கையைத் தேர்ந்தெடுக்கவும்.

மீப்பெரு மதிப்பின் மீச்சிறு மதிப்பு (Minimax criteria)

இந்த தீர்மான அளவையானது எடுக்கப்பட்ட செயற்பாங்கின் நடவடிக்கையில் நிகழக் கூடிய அளித்தல்களில் மீச்சிறு மதிப்புகளில் மீப்பெரு மதிப்பாகும். இத்தீர்மான அளவை மாற்று உத்திகளால் நிகழக் கூடிய மிக அதிக மதிப்பு குறிக்கின்றது. இதன் செயல் முறையானது

(i) ஒவ்வொரு செயற்பாட்டிற்கும் (உத்திக்கும்) அதிக பட்ச மதிப்பை கண்டறிக.

(i) இவைகளில் மிகச்சிறிய மதிப்பைக் கொண்ட செயற்பாட்டை (மாறுபட்ட) தேர்வு செய்க.

எடுத்துக்காட்டு 10.10

கீழ்க்கண்ட அளித்தல் (இலாபம்) அணியை கருதுக.

செயற்பாடு	சூழ்நிலை (S_1)	(S_2)	(S_3)	(S_4)
A_1	5	10	18	25
A_2	8	7	8	23
A_3	21	18	12	21
A_4	30	22	19	15

சூழ்நிலைப்பாட்டின் நிகழ்தகவுகள் தெரியாத நிலையில், எனில் சிறந்த செயல்பாட்டை காண்க,

தீர்வு:

செயற்பாடு	சூழ்நிலை				மீச்சிறுமதிப்பு
	(S_1)	(S_2)	(S_3)	(S_4)	
A_1	5	10	18	25	5
A_2	8	7	8	23	7
A_3	21	18	12	21	12
A_4	30	22	19	15	15

(5,7,12,15) –இன் மீப்பெரு மதிப்பு =15 எனவே சிறந்த செயல்பாடு A4 ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 10.11

ஒரு வியாபாரி மூன்று மாற்று நடவடிக்கைகளைத் தேர்வு செய்வதற்கான வாய்ப்பு உள்ளது. ஒவ்வொரு மாற்று நடவடிக்கைக்கும் இயலக் கூடிய நான்கு நிகழ்வுகள் உள்ளன. ஒவ்வொரு செயல்–நிகழ்வு சேர்கைக்கான நிபந்தனை பங்களிப்பு கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

மாற்று நடவடிக்கை	அளித்தல்கள் – நிபந்தனை நிகழ்வுகள்			
	A	B	C	D
X	8	0	–10	6
Y	–4	12	18	–2
Z	14	6	0	8

வியாபாரி மீச்சிறுவின் மீப்பெரு கோட்பாட்டினை பின்பற்றுகிறார் எனில் அவர் எந்த மாற்று நடவடிக்கையை தேர்ந்தெடுக்கிறார் என்பதை கண்டுப்பிடிக்கவும்.

தீர்வு:

மாற்று நடவடிக்கை	அளித்தல்கள் – நிபந்தனை நிகழ்வுகள்				மீச்சிறு அளித்தல் கட்டுபாடு
	A	B	C	D	
X	8	0	–10	6	–10
Y	–4	12	18	-2	–4
Z	14	6	0	8	**0**

$(-10,-4,\ 0)$ இன் மீப்பெரு மதிப்பு $= 0$. எனவே Z என்ற மாற்று நடவடிக்கையை வியாபாரி தேர்ந்தெடுப்பார்.

எடுத்துக்காட்டு 10.12

கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள அளித்தல் கட்டுபாடு அணி

மாற்று நடவடிக்கை	அளித்தல்கள் – நிபந்தனை நிகழ்வுகள்			
	A_1	A_2	A_3	A_4
E_1	7	12	20	27
E_2	10	9	10	25
E_3	23	20	14	23
E_4	32	24	21	17

மீப்பெருவின் மீச்சிறு விதிப்படி சிறந்த மாற்று நடவடிக்கையை காண்க

தீர்வு:

மாற்று நடவடிக்கை	அளித்தல்கள் – நிபந்தனை நிகழ்வுகள்				மீச்சிறு அளித்தல் கட்டுபாடு
	A_1	A_2	A_3	A_4	
E_1	7	12	20	27	27
E_2	10	9	10	25	25
E_3	23	20	14	23	23
E_4	32	24	21	17	32

$(27, 25, 23, 32)$ இன் மீச்சிறு மதிப்பு $= 23$. எனவே $E3$ என்பது சிறந்த மாற்று நடவடிக்கையாகும்/

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 10.indd 220 09-05-2019 14:25:45

பயிற்சி 10.3

1. கொடுக்கப்பட்டுள்ள அணிக்கான உகந்த வியூகத்தை (i) மீச்சிறுவின் மீப்பெரு மற்றும் (ii) மீப்பெருவின் மீச்சிறு ஆகியவற்றை பயன்படுத்தி காண்க.

வியூகம்	சூழ்நிலைகளின் நிலைப்பாடுகள்	
	E_1	E_2
S_1	40	60
S_2	10	–20
S_3	–40	150

2. ஒரு விவசாயி தனது 100 ஏக்கர் பண்ணையில் மூன்று வகையான பயிர்களைப் பயிரிடத் திட்டமிட்டுள்ளார். இலாபமானது மழை மற்றும் பருவநிலையைப் சார்ந்திருக்கும். அந்த விவசாயி மழை அளவை அதிகம், சராசரி மற்றும் குறைவு என மூன்று வகையாக வகைப்படுத்துகிறார். ஒவ்வொரு வகையான பயிரிலும் அவர் எதிர்பார்க்கும் இலாபம் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

மழையளவு	மதிப்பிடப்பட்ட விற்பனை (அலகுகளில்)		
	பயிர் A	பயிர் B	பயிர் C
அதிகம்	8000	3500	5000
சராசரி	4500	4500	5000
குறைவு	2000	5000	4000

எந்த வகையான பயிரை அவர் பயிரிடுவார் என்பதை முடிவு செய்ய (i) மீச்சிறுவின் மீப்பெரு மற்றும் (ii) மீப்பெருவின் மீச்சிறு ஆகியவற்றை பயன்படுத்தி காண்க.

3. ஹிந்துஸ்தான் நிறுவனத்தின் ஆராய்ச்சி துறை மூன்று வகையான ஷாம்புகளை அறிமுகபடுத்த சந்தைப்படுத்தும் துறைக்கு நிதி ஒதுக்க பரித்துரைக்கிறது. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள வெவ்வேறான விற்பனை நிலையில் எதிர்பார்க்கப்படும் அளித்தல்களுக்கு ஏற்ப சாம்புகளை சந்தைப்படுத்துகிறது.

ஷாம்புகளின் வகைகள்	மதிப்பிடப்பட்ட விற்பனை (அலகுகளில்)		
	15000	10000	5000
முட்டை ஷாம்பு	30	10	10
கிளினிக் ஷாம்பு	40	15	5
டீலக்ஸ் ஷாம்பு	55	20	3

சந்ததைப்படுத்தும் மேலாளரின் முடிவு என்ன என்பதை (i) மீச்சிறுவின் மீப்பெரு மற்றும் (ii) மீப்பெருவின் மீச்சிறு ஆகியவற்றை பயன்படுத்தி காண்க.

4. கொடுக்கப்பட்ட அளித்தல் அணியின் உகந்த தீர்வை (i) மீச்சிறுவின் மீப்பெரு மற்றும் (ii) மீப்பெருவின் மீச்சிறு ஆகியவற்றைப் பயன்படுத்தி காண்க.

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 10.indd 221 09-05-2019 14:25:45

செயற்பாங்கு	சூழ்நிலைகளின் நிலைப்பாடுகள்			
	S_1	S_2	S_3	S_4
A_1	14	9	10	5
A_2	11	10	8	7
A_3	9	10	10	11
A_4	8	10	11	13

W5E48H

பயிற்சி 10.4

ஏற்புடைய விடையைத் தெரிவு செய்க:

1. போக்குவரத்து கணக்கு எப்பொழுது சமச்சீரானது.

   (a) மொத்த வழங்கல் ≠ மொத்த தேவை (b) மொத்த வழங்கல் = மொத்த தேவை

   (c) $m = n$ (d) $m+n-1$

2. சீரற்ற தீர்வில் ஒதுக்கீட்டு அறைகளின் எண்ணிக்கை ஆனது.

   (a) $m+n-1$ –க்கு சமம் (b) $m+n+1$–க்கு சமம்

   (c) $m+n-1$–க்கு சமமற்றது (d) $m+n+1$–க்கு சமமற்றது

3. சீரான தீர்வில் ஒதுக்கீட்டு அறைகளின் எண்ணிக்கை ஆனது

   (a) $m+n-1$–க்கு சமம் (b) $m+n+1$ –க்கு சமமற்றது

   (c) $m+n-1$ –ஐ விட சிறியது (d) $m+n+1$ –ஐ விட பெரியது

4. வோகலின் தோராய முறையில் உள்ள பெனாலிட்டி என்பது அந்த நிரை/நிரலுள்ள எதன் வித்தியாசத்தை குறிக்கிறது.

   (a) மிகப்பெரிய இரண்டு எண்கள் (b) மிகப்பெரிய மற்றும் மிகச்சிறிய எண்கள்

   (c) மிகச்சிறிய இரண்டு எண்கள் (d) இவற்றில் ஏதுவுமில்லை

5. ஒதுக்கீடு கணக்கில் எந்த ஒரு நிரை மற்றும் நிரலிலும் அடிப்படை ஒதுக்கீடுகளின் எண்ணிக்கை

   (a) ஒன்றும் மட்டும் (b) ஒன்றிக்கு மேல்

   (c) ஒன்றைவிட குறைவாக (d) இவற்றில் ஏதுவுமில்லை

6. வடமேற்கு மூலை என்பதனை குறிப்பது _________

   a) மேல் இடது மூலை (b) மேல் வலது மூலை

   (c) கீழ் வலது மூலை (d) கீழ் இடது மூலை

7. சில நேரங்களில் __________________ முறையானது போக்குவரத்து கணக்கின் உகந்த தீர்வாக அமையும்

   (a)வடமேற்கு மூலை முறை (b) மீச்சிறு மதிப்பு முறை

   (c) வோகலின் தோராய முறை (d) நிரையின் சிறும முறை

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 10.indd 222 09-05-2019 14:25:45

8. ஒதுக்கீட்டு கணக்கில் தீர்மான மாறி x_{ij} மதிப்பு __________.

(a) 1 (b) 0

(c) 1 அல்லது 0 (d) மேற்கூறிய எதுவுமில்லை

9. ஒதுக்கீடு கணக்கில் வழங்கல் மற்றும் சேருமிடம் சமமாக இல்லாவிட்டால் அவை

(a) சமமானது (b) சமச்சீரற்றது (c) சமச்சீர்ரானது (d) சமநிலையற்றது

10. ஒதுக்கீடு கணக்கில் ஒப்புக்கான நிரை அல்லது ஒப்புக்கான நிரல் உருவாக்குவதற்கான நோக்கம்

(a) தீர்வை சீர்குலைப்பதிலிருந்து தடுக்கிறது

(b) மொத்த செயல்கள் மற்றும் மொத்த வளங்களை சமப்படுத்த

(c) ஒப்புக்கான பிரச்சினையை பிரதிநிதிப்படுத்துவதற்கான ஒரு வழிமுறையை வழங்குகிறது

(d) மேலே கூறிய அனைத்தும்

11. ஒரு ஒதுக்கீடு கணக்கின் தீர்வானது உகந்த தீர்வாக இருக்க

(a) ஒவ்வொரு நிரை மற்றும் நிரலில் ஒதுக்கீடு இல்லை

(b) ஒவ்வொரு நிரை மற்றும் நிரலானது ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட ஒதுக்கீடு

(c) ஒவ்வொரு நிரை மற்றும் நிரலானது ஒன்றுக்கு குறைவான ஒதுக்கீடு

(d) ஒவ்வொரு நிரை மற்றும் நிரலில் ஒரே ஒரு ஒதுக்கீடு

12. மூன்று வேலைகள் மற்றும் நான்கு வேலையாட்கள் உள்ளடக்கிய ஒதுக்கீட்டு கணக்கில் சாத்தியமான ஒதுக்கீடுகளின் எண்ணிக்கை

(a) 4 (b) 3 (c) 7 (d) 12

13. தீர்மான கோட்பாடு எதன் தொடர்புடையது

(a) கிடைக்ககூடிய தகவல்களின் அளவு

(b) நம்பகத்தன்மை கொண்ட தீர்மானத்தை அளவீடு செய்வது

(c) வரிசைத் தொடர் பிரச்சினைகளுக்கு உகந்த தீர்மானங்களை தேர்ந்தெடுப்பது

(d) மேற்கூறிய அனைத்தும்

14. சூழ்நிலைகளில் தீர்மானம் மேற்கொள்வதின் வகை.

(a) நிச்சயமான (b) நிச்சயமற்ற (c) இடர்பாடு (d) மேலே கூறிய அனைத்தும்

இதரக் கணக்குகள்

1. S_1, S_2, S_3, S_4 என்ற நான்கு தொழிற்சாலைகளிலிருந்து $D1, D2, D3$ என்ற கிடங்களுக்கு அனுப்படும் பொருள்களுக்கான செலவு, அளிப்பு மற்றும் தேவை விவரங்கள் கீழே உள்ள அட்டவணையில் கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

	D_1	D_2	D_3	அளிப்பு
S_1	2	7	14	5
S_2	3	3	1	8
S_3	5	4	7	7
S_4	1	6	2	14
தேவை	7	9	18	

ஆரம்பத் தீர்வினை வடமேற்கு மூலை முறையை பயன்படுத்தி காண்க. இந்த தீர்வுக்கான மொத்த செலவையும் காண்க.

2. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள போக்குவரத்து கணக்கின் ஆரம்ப அடைப்படை ஏற்புடைய தீர்வினை (அ) மீச்சிறு செலவு முறை (ஆ) வோகலின் தோராயா முறையில் காண்க.

சேருமிடம்

	D_1	D_2	D_3	D_4	கிடைக்கபெறுவது
O_1	5	8	3	6	30
O_2	4	5	7	4	50
O_3	6	2	4	6	20
தேவையானவை	30	40	20	10	

3. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள போக்குவரத்து கணக்கின் ஆரம்ப அடிப்படை ஏற்புடைய தீர்வினை அ) வடமேற்கு மூலை விதி முறை (ஆ) மீச்சிறு செலவு முறை ஆகியவற்றில் காண்க.

சேருமிடம்

		D_1	D_2	D_3	அளிப்பு
வளங்கள்	S_1	9	8	5	25
	S_2	6	8	4	35
	S_3	7	6	9	40
	தேவையானவை	30	25	45	

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 10.indd 224 09-05-2019 14:25:45

4. கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள போக்குவரத்து கணக்கில் ஆரம்ப அடிப்படை ஏற்புடைய தீர்வினை வோகலின் தோராய முறையில் காண்க.

		சேருமிடம்				
		D_1	D_2	D_3	D_4	அளிப்பு
ஆரம்பிக்குமிடம்	O_1	2	3	11	7	6
	O_2	1	0	6	1	1
	O_3	5	8	15	9	10
	தேவை	7	5	3	2	

5. ஒரு வாடகை மகிழுந்து நிறுவனம் ஒரு மகிழுந்து நிறுத்த a,b,c,d மற்றும் e என்ற பணிமனைகள் உள்ளன. A,B,C,D மற்றும் E என்ற ஐந்து வளாகங்களில் உள்ள வடிக்கையாளர்கள் ஒவ்வொருக்கும் ஒரு மகிழுந்து தேவைப்படுகிறது. கீழே உள்ள தொலைவு அணியானது பணிமனை (ஆரம்பிக்குமிடம்) மற்றும் வளாகங்கள் (சென்றடையுமிடம்) ஆகியவற்றின் தொலைவு கொடுக்கப்படட்டுள்ளது.

	a	b	c	d	e
A	160	130	175	190	200
B	135	120	130	160	175
C	140	110	155	170	185
D	50	50	80	80	110
E	55	35	70	80	105

பயணதூரத்தைக் குறைக்கும் வகையில் வடிகையாளர்களுக்கு மகிழுந்துகளை எவ்வாறு ஒதுக்கவேண்டும்.

6. வாடகை டிரக் சேவை நிறுவனமானது நகரங்கள் 1,2,3,4,5 மற்றும் 6 என்ற நகரங்களில் தேவைக்கு அதிகமாக ஒரு டிரக் உள்ளது. மேலும் 7,8,9,10,11 மற்றும் 12 என்ற நகரங்களில் ஒரு டிரக் பற்றாக்குறை உள்ளது. டிரக் அதிகமாக உள்ள நகரங்களிலிருந்து பற்றாக்குறை உள்ள நகரங்களுக்கிடையான தொலைவு (கிலோ மீட்டரில்) கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

7.

		வரை					
		7	8	9	10	11	12
இருந்து	1	31	62	29	42	15	41
	2	12	19	39	55	71	40
	3	17	29	50	41	22	22
	4	35	40	38	42	27	33
	5	19	30	29	16	20	33
	6	72	30	30	50	41	20

பயணத்தின் மொத்த தூரத்தைக் குறைக்குமாறு டிரக் எவ்வாறு பிரிக்கப்படவேண்டும்

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 10.indd 225 09-05-2019 14:25:45

8. ஒரு நபர் பங்கு, பத்திரங்கள், மற்றும் கடன் பத்திரங்கள் ஆகிய மாற்று முதலீட்டுத் திட்டங்களில் ஏதேனும் ஒன்றில் முதலீடு செய்ய விரும்புகிறார். மூன்று சாத்தியமான பொருளாதார நிலைமைகளில் அடிப்படையில் பணம் செலுத்தும் அணி பின்வருமாறு கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

மாற்று	பொருளாதார நிலைமைகள்		
	அதிக வளர்ச்சி (ரூ.)	இயல்பான வளர்ச்சி(ரூ.)	மெதுவான வளர்ச்சி (ரூ.)
பங்குகள்	10000	7000	3000
பத்திரங்கள்	8000	6000	1000
கடன் பத்திரங்கள்	6000	6000	6000

பின்வரும் அளவுகோல்களைப் பயன்படுத்தி சிறந்த முதலீடு திட்டத்தைத் தீர்மானிக்க

(i) சிறுமத்தில் பெருமம் (ii) பெருமத்தில் சிறுமம்.

தொகுப்புரை

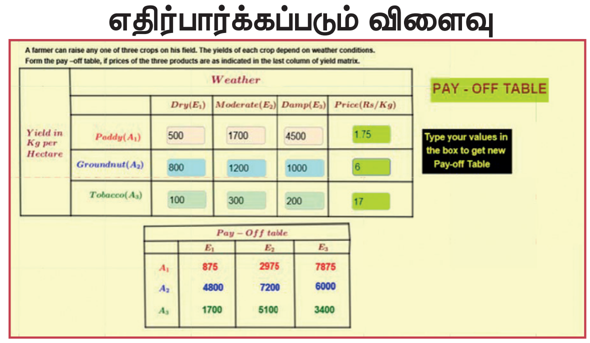
- ஒரு போக்குவரத்து கணக்கில் மொத்த அளிப்புகளும், மொத்த தேவைகளும் சமமாக இருந்தால் அது சமநிலை போக்குவரத்து கணக்காகும்.அவ்வாறு இல்லையெனில் அது சமநிலையற்ற போக்குவரத்து கணக்காகும்.
- **ஏற்புடையத் தீர்வுகள்**: கட்டுப்பாடுகளை பூர்த்தி செய்யக்கூடிய குறை குறியற்ற $x_{ij}(i=1,2,..,m,\ j=1,2,\ldots n)$ ன் மதிப்புகள் போக்குவரத்து கணக்குகளின் ஏற்புடையத் தீர்வுகளாகும்.
- **அடிப்படை ஏற்புடையத் தீர்வு**: m நிரைகள் மற்றும் n நிரல்கள் கொண்ட போக்குவரத்து கணக்கின் ஏற்புடையத் தீர்வு $m+n-1$ ஒதுக்கீடுகளுக்கு மிகாமல் இருந்தால் அது அடிப்படை ஏற்புடையத் தீர்வு எனப்படும்.
- **உகந்த தீர்வு**: மொத்த போக்குவரத்து செலவினை குறைக்கக் கூடிய ஏற்புடையத் தீர்வு என்பது உகந்த தீர்வு எனப்படும்.
- **சிதைவற்ற அடிப்படை ஏற்புடையத் தீர்வு:** சிதைவற்ற அடிப்படை தீர்வு என்பது போக்குவரத்து கணக்கின் ஏற்புடையத் தீர்வில் சரியாக ஒதுக்கீடுகள் ஒன்றை ஒன்று சாரா நிலையில் அமைந்ததாகும்.
- **சிதைந்த தீர்வு:** போக்குவரத்து கணக்கின் ஏற்புடையத் தீர்ப்பில் ஒதுக்கீடுகளின் எண்ணிக்கை m+n–1க்கு குறைவாக இருந்தால் அது சிதைந்த தீர்வு எனப்படும்
- ஒதுக்கீட்டு கணக்கில் நிரைகளின் எண்ணிக்கை மற்றும் நிரல்களின் எண்ணிக்கை சமமாக இருக்கவேண்டும்.
- ஒரு நிரை(நிரல்)–ல் உள்ள அனைத்து எண்களுடனும் ஒரு எண்ணைக் கூட்டினாலும் கழித்தாலும் ஒதுக்கீடு கணக்கின் உகந்த தீர்வு மாறாது.
- $C_{ij} > 0$ எனில், $\sum C_{ij}\, x_{ij} = 0$ என்பது (x_{ij}) ஆல் பூர்த்தி செய்யப்பட்டால் அது உகந்த தீர்வாகும்.

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 10.indd 226 09-05-2019 14:25:46

கலைச்சொற்கள் (Glossary)	
ஆரம்ப அடிப்படை ஏற்புடையத் தீர்வு	Initial basic feasible solution
இழப்பு ஈட்டியப்பு	Pay off
உகந்த தீர்வு	Optimum solution
உத்தி	Strategy
ஏற்புடையத் தீர்வு	Feasible solution
ஒதுக்கீடு கணக்குகள்	Assignment problems
குறைந்த விலை முறை	Least cost method
சிதைந்த	Degenerate
சிதைவற்ற	Non–degenerate
சேருமிடம்	Destination
தோராயமாக	Approximation
போக்குவரத்து செலவு	Transportation cost
போக்குவரத்து கணக்குகள்	Transportation problems
முடிவு கோட்பாடுகள்	Decision theory
வட மேற்கு மூலை முறை	North west– Conner method

இணையச் செயல்பாடு

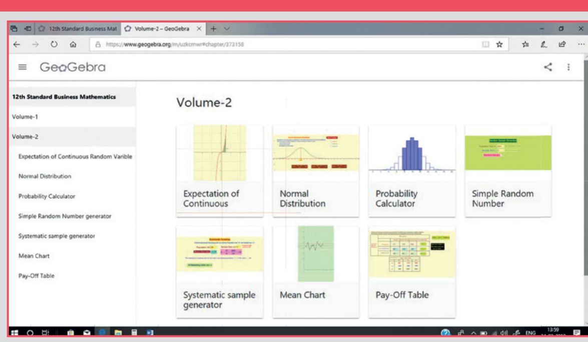
எதிர்பார்க்கப்படும் விளைவு



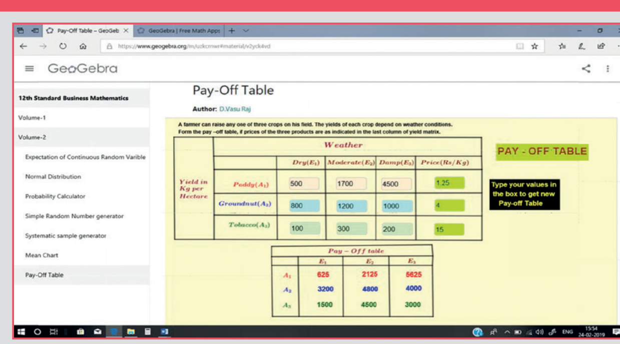
படி - 1 : கீழ்க்காணும் உரலி / விரைவுக் குறியீட்டைப் பயன்படுத்தி இச்செயல்பட்டிற்கான இணையப் பக்கத்திற்குச் செல்க. பின்பு "12th Standard Business Mathematics and statistics" என்னும் திரையில் "Volume–2" யை தெரிவு செய்யவும்.

படி - 2 : "Pay–Off Table " என்னும் பயிற்சித்தாளினை தெரிவு செய்துகொள்ளவும். கொடுக்கப்பட்டுள்ள பெட்டியில் தரவுகளை பதிவு செய்யவும். Pay–Off Table ஒன்று உருவாகும் அதனை கணக்கீடு செய்து கிடைக்கப்பெறும் விடையினை சரிபார்த்துக்கொள்ளவும்.

படி 1



படி 2



செயல்பாட்டிற்கான உரலி : **https://ggbm.at/uzkcrnwr**

அல்லது விரைவுக் குறியீடு **(QR Code)**

B247_12_BUS_MAT_TM

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 10.indd 227 09-05-2019 14:25:47

விடைகள்

6. சமவாய்ப்பு மாறி மற்றும் கணக்கியல் எதிர்பார்த்தல்

பயிற்சி 6.1

1.

$P(X\le k)$	0.3	0.5	0.9	1

2. $F_X(x)=\begin{cases}0 & , x<3\\ P_X(3)=0.3 & , 3\le x<5\\ P_X(3)+P_X(5)=0.5 & , 5\le x<8\\ P_X(3)+P_X(5)+P_X(8)=0.8 & , 8\le x<10\\ 1 & , x\ge 10\end{cases}$

5.

$X=x_1$	0	1	2
$P(X=x_1)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

6. (i) 1/10, (ii) 81/100, 19/100, 8/10 (iii) 4

7. குறிப்பு : $\int_{-3}^{3} f(x)dx=\int_{-3}^{-1} f(x)dx+\int_{-1}^{1} f(x)dx+\int_{1}^{3} f(x)dx$

8. $(i)k=\frac{1}{16},(ii)\ f(x)=\frac{1}{4}(x-1)^3, 1\le x\le 3$

9. $A=\frac{1}{5},(i)\frac{1}{e^2},(ii)\frac{e-1}{e},(iii)\frac{e-1}{e^2}$

10. (a) ஆம், $f(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \frac{1}{2}, & 0\le x<1\\ 0, & 1\le x<2\\ \frac{1}{4}, & 2\le x<4\\ 0, & x\ge 4\end{cases}$ b(i) $\frac{1}{4}$ (ii) $\frac{3}{4}$ (iii) $\frac{1}{4}$

பயிற்சி 6.2

1. 3.5 2. 1.8 3. 2.15 4. $\frac{2}{3}$ 5. $\frac{3}{2},\frac{3}{4}$ 6. ₹ 60

12. எதிர்பார்த்தல்: ₹ 200; மாறுபாடு: ₹ 21, 60,000; திட்ட விலக்கம்: ₹ 1,469.69

13. 30 (அல்லது 30,000 மைல்கள்) 14. எதிர்பார்த்தல்: 1; மாறுபாடு : 9 15. 20

XII Std - Business Maths & Stat TM Answers.indd 228 09-05-2019 14:26:19

பயிற்சி 6.3

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
(c)	(d)	(b)	(c)	(b)	(c)	(d)	(d)	(d)	(d)	(d)	(a)	(c)	(c)	(a)
16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
(b)	(b)	(a)	(d)	(b)	(b)	(c)	(c)	(a)	(b)	(c)	(b)	(b)	(b)	(b)

இதரக்கணக்குகள்

1. (i) ½ (ii) ¼ (iii) ½ (iv) ¾

2. (a) (i) 13/24 (ii) 0

(b) F ஆனது படிச்சார்பு இல்லை என்பதால் X என்பது சமவாய்ப்பு மாறியாக இருக்ககாது.

3. $\frac{1}{4}; \frac{1}{2}$ 4. (a) $\frac{1}{9}$ (b) $\frac{7}{9}$ 5. (i) $\frac{3}{5}, \frac{6}{5}$ (ii) $\frac{2}{25}$ 7. 2 9. $\frac{3}{4}, \frac{27}{80}$ 10. $\frac{1}{2}$

7. நிகழ்தகவு பரவல்கள்

பயிற்சி: 7.1

6. (a) 0.059 (b) 0.2642 (c) 0.0133 (d) சராசரி = 1 மற்றும் மாறுபாடு = 0.95

7. (i) 0.01008 (ii) 0.00262 (iii) 0.09935 8. 0.375 9. 0.5767

10. (i) 0.3969 (ii) 0.45212 (iii) 0.9797

11. 5 அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட சோதனைகள் 12. 0.7530

13. (i) 703 (ii) 516 (iii) 656 14. (i) 0.0634 (ii) 0.0634 (iii) 0.9729

15. 25/216 16. $\binom{25}{x}\left(\frac{1}{5}\right)^{x}\left(\frac{4}{5}\right)^{(25-x)}$ 17. $\frac{3}{4^{14}}$ 18. 0.2626 19. 0.8743

20. (i) $\frac{80}{243}$ (ii) $\frac{192}{243}$

பயிற்சி: 7.2

6. 0.2352 7. 0.0025 8. (i) 0.2231 (ii) 0.1912

9. (i)0.08208 (ii) 0.2138 (iii) 0.1089

10. (i) 2 நாள்கள் (ii) 91 நாள்கள் (iiii) 80 நாள்கள்

11. 0.0265 12. (i) 0.1353 (ii) 0.3235

XII Std - Business Maths & Stat TM Answers.indd 229 09-05-2019 14:26:23

பயிற்சி: 7.3

5. (i) 67 (ii) 134 (iii) 1637 6 (i) சராசரி = 60.48 (ii) திட்டவிலக்கம் = 19.78

7. (i) 0.9772 (ii) 0.49865 8. (a) 46 (b) 46 (c) 342

9. 0.719 10. (i) 0.2420 (ii) 0.8413

பயிற்சி 7.4

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
(b)	(c)	(c)	(c)	(c)	(a)	(b)	(a)	(c)	(d)	(a)	(a)	(d)	(b)
15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
(d)	(b)	(d)	(d)	(d)	(d)	(a)	(a)	(b)	(b)	(a)	(c)	(d)	(d)

இதரக்கணக்குகள்

1. (i) 0.89131 (ii) 0.34173 2. 0.03295 3. 0.98981

4. 0.0067379 அல்லது 6.7379×10^{-3} 5. 80.33%

6. a) 0.4013 (b) 0.3413 7. a) 30.85% b) 37.20% c) 10.56%

8. a) 0.9938 (b) 0.9878 (c) 0.3944 9. 0.2119 10. 7

8. கூறெடுப்பு முறைகளும் புள்ளியியல் அனுமானித்தலும்

பயிற்சி 8.1

17. 0.008 18. 0.9487 19. 0.2739 20. 0.6 21. 0.025

பயிற்சி 8.2

14. $|z| = 1.667$ 15. 1.2308 16. $|z| = 5$ 17. 3.536

பயிற்சி 8.3

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
(a)	(b)	(a)	(b)	(b)	(a)	(c)	(b)	(c)	(a)
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
(a)	(a)	(a)	(d)	(b)	(b)	(a)	(c)	(a)	(c)

இதரக்கணக்குகள்

5. 0.015 6. (a) (66.86, 68.04) (b) (66.67,68.22) 7. $|z| = 2.67$

XII Std - Business Maths & Stat TM Answers.indd 230 09-05-2019 14:26:23

9. பயன்பாட்டுப் புள்ளியியல்

பயிற்சி 9.1

13. பருவகால குறியீடுகள்

	I	II	III	IV
மொத்தம்	18.6	20.8	18.8	20.8
சராசரி	3.72	4.16	3.76	4.16
பருவகால குறியீடுகள்	94.1772	105.3165	95.1899	105.3165

மொத்த சராசரி = 3.95

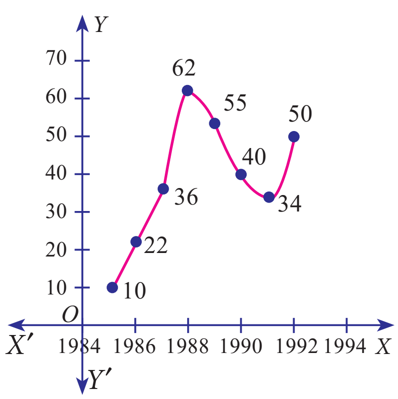
14. மூன்று ஆண்டு காலத்தைக் கொண்ட நகரும் சராசரி

ஆண்டு	1987	1988	1989	1990	1991	1992
மூன்று ஆண்டு நகரும் கூடுதல்	46410	52010	63040	79470	94050	102450
மூன்று ஆண்டு நகரும் சராசரி	15470	17336.666	21013.333	26490	31350	34150

15. ஐந்து ஆண்டு காலத்தைக் கொண்ட நகரும் சராசரி

ஆண்டு	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988
ஐந்து ஆண்டு நகரும் கூடுதல்	619	617	624	621	615	619	613	606
ஐந்து ஆண்டு நகரும் சராசரி	123.8	123.4	124.8	124.2	123	123.8	122.6	121.2

16. போக்குக்கோட்டின் வரைபட முறை



17. $a = 169.428$; $b = 3.285$; $Y = 169.428 + 3.285\,X$

18. $a = 54$; $b = 5.4$; $Y = 54 + 5.4\,X$

$X = 2000$ எனில், $\hat{Y} = 54 + 5.4\,(2000\text{-}2002) = 43.2$

$X = 2001$ எனில், $\hat{Y} = 54 + 5.4\,(2001\text{-}2002) = 48.6$

$X = 2002$ எனில், $\hat{Y} = 54 + 5.4\,(2002\text{-}2002) = 54$

$X = 2003$ எனில், $\hat{Y} = 54 + 5.4\,(2003\text{-}2002) = 59.4$

$X = 2004$ எனில், $\hat{Y} = 54 + 5.4\,(2004\text{-}2002) = 64.8$

19. பகுதி சராசரி I = 276.666

பகுதி சராசரி II = 213.333

20. மாதாந்திர சராசரி குறியீடுகள்

	ஜன	பிப்ர	மார்	ஏப்	மே	ஜுன்	ஜுலை	ஆகஸ்	செப்	அக்	நவம்	டிசம்
மாதாந்திர மொத்தம்	53	61	54	43	42	51	62	54	52	51	49	67
மாதாந்திர சராசரி	17.6	20.3	18	14.3	14	17	20.6	18	17.3	17	16.3	22.3
பருவகால குறியீட்டு	99.4	114.5	101.4	80.7	78.8	97.1	116.4	101.4	97.6	95.7	92	125.8

மொத்த சராசரி = 17.74

21.

	I	II	III	IV
மொத்தம்	372	358	362	364
சராசரி	74.4	71.6	72.4	72.8
பருவகால குறியீடுகள்	102.19	98.35	99.45	100

மொத்த சராசரி = 72.8

22. $a = 46.8$; $b = 3$; $Y = 46.8 + 3\,X$

$X = 1992$ எனில், $\hat{Y} = 46.8 + 3\,(1992\text{-}1994) = 40.8$

$X = 1993$ எனில், $\hat{Y} = 46.8 + 3\,(1993\text{-}1994) = 43.8$

$X = 1994$ எனில், $\hat{Y} = 46.8 + 3\,(1994\text{-}1994) = 46.8$

$X = 1995$ எனில், $\hat{Y} = 46.8 + 3\,(1995\text{-}1994) = 49.8$

XII Std - Business Maths & Stat TM Answers.indd 232 09-05-2019 14:26:24

$X = 1996$ எனில், $\hat{Y} = 46.8 + 3\,(1996\text{-}1994) = 52.8$

$X = 1997$ எனில், $\hat{Y} = 46.8 + 3\,(1997\text{-}1994) = 55.8$

பயிற்சி 9.2

14. லாஸ்பியர் குறியீட்டு எண் = 144.8 பாசி குறியீட்டு எண் = 144.4
15. லாஸ்பியர் குறியீட்டு எண் = 228.2 பாசி குறியீட்டு எண் = 225.4
16. லாஸ்பியர் குறியீட்டு எண் = 106.6 பாசி குறியீட்டு எண் = 106.8
    பிஷர் குறியீட்டு எண்= 106.7
17. பிஷர் குறியீட்டு எண் = 138.5 காலமாற்றுச் சோதனை= 1
    காரணி மாற்றுச் சோதனை = 1880/1560
18. பிஷர் குறியீட்டு எண் = 83
19. பிஷர் குறியீட்டு எண் = 103 காலமாற்றுச் சோதனை = 1
20. வாழ்க்கைத் தர குறியீட்டு எண் =2662.38
21. வாழ்க்கைத் தர குறியீட்டு எண் = 117.31
22. வாழ்க்கைத் தர குறியீட்டு எண் = 131.49

பயிற்சி 9.3

14.	$\overline{\overline{X}} = 16.2$,	UCL = 20.49,	CL = 16.2,	LCL = 11.91
	$\overline{R} = 7.4$,	UCL = 15.65,	CL = 7.4,	LCL = 0
15.	$\overline{\overline{X}} = 46.2$,	UCL = 50.14,	CL = 46.2,	LCL = 42.26
	$\overline{R} = 6.8$,	UCL = 14.38,	CL = 6.8,	LCL = 0
16.	$\overline{\overline{X}} = 37.71$,	UCL = 56.12,	CL = 37.71,	LCL = 19.29
	$\overline{R} = 18$,	UCL = 46.25,	CL = 18,	LCL = 0
17.	$\overline{\overline{X}} = 10.66$,	UCL = 14.31,	CL = 10.66,	LCL = 7.006
	$\overline{R} = 6.3$,	UCL = 13.32,	CL = 6.3,	LCL = 0
18.	$\overline{\overline{X}} = 12.5$,	UCL = 12.71,	CL = 12.5,	LCL = 12.28
	$\overline{R} = 0.37$,	UCL = 0.78,	CL = 0.37,	LCL = 0
19.	$\overline{\overline{X}} = 30.1$,	UCL = 44.77,	CL = 30.1,	LCL = 15.43
	$\overline{R} = 20.1$,	UCL = 45.83,	CL = 20.1,	LCL = 0

20. $\overline{\overline{X}} = 13.25$, UCL = 15.53, CL = 13.25, LCL = 10.97

$\overline{R} = 3.12$, UCL = 7.12, CL = 3.12, LCL = 0

21. $\overline{\overline{X}} = 24.8$, UCL = 27.12, CL = 24.8, LCL = 22.48

$\overline{R} = 4$, UCL = 8.44, CL = 4, LCL = 0

பயிற்சி 9.4

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
(d)	(b)	(d)	(d)	(c)	(a)	(c)	(b)	(b)	(b)	(a)	(d)	(c)
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	
(d)	(c)	(b)	(c)	(c)	(a)	(d)	(c)	(b)	(a)	(c)	(d)	

இதரக்கணக்குகள்

1. மூன்று ஆண்டு நகரும் சராசரி 148, 149.33, 152.33, 168.33, 253.33, 261.33, 281.67, 302.67, 327.
2. நான்கு ஆண்டு நகரும் சராசரி
   708.75, 729.25, 748.25, 768.25, 784.5
3. Y = 55.975+ 0.825X
4. லாஸ்பியர்= 49.9 பாசி = 50.32 பிஷர் = 50.09
5. பிஷர் =139.8
6. நுகர்வோர் விலை குறியீட்டு எண் = 118.77
7. வாழ்க்கைத்தர குறியீட்டுஎண் CLI = 126·10, 2011ஆம் ஆண்டை 2010 ஆண்டுடன் ஒப்பிடுகையில், வாழ்க்கை குறியீட்டு எண் 26.10% ஆக அதிகரித்துள்ளது.
8. சராசரி வரைபட கட்டுப்பாடு வரம்புகள்
   LCL = 47.56
   CL = 51.2
   UCL = 54.84

   வீச்சு விளக்கப்பட கட்டுப்பாடு வரம்புகள்
   LCL = 0
   CL = 6.3
   UCL = 13.32
9. சராசரி வரைபட கட்டுப்பாடு வரம்புகள்
   LCL = 1120.83
   CL = 1367.5
   UCL = 1614.17

   வீச்சு விளக்கப்பட கட்டுப்பாடு வரம்புகள்
   LCL = 0
   CL = 427.5
   UCL = 904.16
10. சராசரி வரைபட கட்டுப்பாடு வரம்புகள்
    LCL = 4.774
    CL = 4.982
    UCL = 5.19

    வீச்சு விளக்கப்பட கட்டுப்பாடு வரம்புகள்
    LCL = 0
    CL = 0.36
    UCL = 0.7614

XII Std - Business Maths & Stat TM Answers.indd 234 09-05-2019 14:26:24

10. செயல்முறைகள் ஆராய்ச்சி

பயிற்சி 10.1

5. $x_{11}=16, x_{12}=3, x_{22}=15, x_{23}=9, x_{33}=9, x_{34}=25$

   மொத்த செலவு = ₹ 580

6. $x_{11}=30, x_{21}=5, x_{22}=28, x_{23}=7, x_{33}=25, x_{34}=25$

   மொத்த செலவு = ₹ 1,076

7. $x_{11}=15, x_{13}=10, x_{23}=35, x_{31}=15, x_{32}=25,$

   மொத்த செலவு = ₹ 580

8. $x_{11}=1, x_{12}=5, x_{24}=1, x_{31}=6, x_{33}=3, x_{34}=1,$

   மொத்த செலவு = ₹ 102

9. $x_{11}=10, x_{13}=20, x_{21}=20, x_{22}=20, x_{24}=10, x_{32}=20$

   மொத்த செலவு = ₹ 370

10. $x_{11}=3, x_{12}=1, x_{22}=2, x_{23}=4, x_{24}=2, x_{34}=3, x_{35}=6$

    மொத்த செலவு = ₹ 153

11. (i) $x_{11}=7, x_{21}=3, x_{22}=9, x_{32}=1, x_{33}=10,$

    மொத்த செலவு = ₹ 94

    (ii) $x_{13}=7, x_{21}=10, x_{23}=2, x_{32}=10, x_{33}=1,$

    மொத்த செலவு = ₹ 61

    (iii) $x_{11}=7, x_{21}=2, x_{23}=10, x_{31}=1, x_{32}=10,$

    மொத்த செலவு = ₹ 40

12. $x_{11}=200, x_{21}=50, x_{22}=175, x_{23}=125, x_{32}=150, x_{33}=250$

    மொத்த செலவு = ₹ 12,200

பயிற்சி 10.2

4. 46 5. 280 6. 41 மணிகள் 7. 37 8. 12

பயிற்சி 10.3

1. (i) S_1 (ii) S_2 2. (a) பயிர் C (b) பயிர் B மற்றும் பயிர் C

3. (i) முட்டை ஷாம்பு (ii) முட்டை ஷாம்பு 4. (i) A_1 மற்றும் A_3 (ii) A_2 மற்றும் A_3

பயிற்சி 10.4

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
(a)	(a)	(c)	(c)	(a)	(a)	(c)	(c)	(d)	(b)	(d)	(b)	(d)	(d)

XII Std - Business Maths & Stat TM Answers.indd 235   09-05-2019 14:26:28

இதரக்கணக்குகள்

1. $x_{11} = 5\ x_{21} = 2, x_{22} = 6,\ x_{32} = 3,\ x_{33} = 4, x_{43} = 14$

   மொத்த செலவு = ₹ 102

2. (a) $x_{12} = 10\ x_{13} = 20, x_{21} = 30,\ x_{22} = 20,\ x_{24} = 10\ , x_{32} = 20$

   (b) $x_{11} = 10\ x_{13} = 20, x_{21} = 20,\ x_{22} = 20,\ x_{24} = 10\ , x_{32} = 20$

   மொத்த செலவு = ₹ 370

3. $x_{11} = 15\ x_{13} = 10, x_{23} = 35,\ x_{31} = 15,\ x_{32} = 25\ , x_{32} = 20$

   மொத்த செலவு = ₹ 560

4. $x_{12} = 1\ x_{12} = 5, x_{24} = 1,\ x_{31} = 6,\ x_{33} = 3\ , x_{34} = 1$

   மொத்த செலவு = ₹ 102

5. $\text{A} \to \text{e},\ \text{B} \to \text{c},\ \text{C} \to \text{b},\ \text{D} \to \text{a}, \text{E} \to \text{d}$

   குறைந்தபட்சம் தொலைவு =570 மைல்கள்

6. $1 \to 11,\ 2 \to 8,\ 3 \to 7,\ 4 \to 9, 5 \to 10, 6 \to 12$

   குறைந்தபட்சம் தொலைவு=125 கி.மீ

7. (i) கடன்பத்திரங்கள் : 6000

   (ii) பங்குகள் : 1000

XII Std - Business Maths & Stat TM Answers.indd 236 09-05-2019 14:26:32

மடக்கை அட்டவணை

										Mean Difference								
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.0	0.0000	0.0043	0.0086	0.0128	0.0170	0.0212	0.0253	0.0294	0.0334	0.0374	4	8	12	17	21	25	29	33	37
1.1	0.0414	0.0453	0.0492	0.0531	0.0569	0.0607	0.0645	0.0682	0.0719	0.0755	4	8	11	15	19	23	26	30	34
1.2	0.0792	0.0828	0.0864	0.0899	0.0934	0.0969	0.1004	0.1038	0.1072	0.1106	3	7	10	14	17	21	24	28	31
1.3	0.1139	0.1173	0.1206	0.1239	0.1271	0.1303	0.1335	0.1367	0.1399	0.1430	3	6	10	13	16	19	23	26	29
1.4	0.1461	0.1492	0.1523	0.1553	0.1584	0.1614	0.1644	0.1673	0.1703	0.1732	3	6	9	12	15	18	21	24	27
1.5	0.1761	0.1790	0.1818	0.1847	0.1875	0.1903	0.1931	0.1959	0.1987	0.2014	3	6	8	11	14	17	20	22	25
1.6	0.2041	0.2068	0.2095	0.2122	0.2148	0.2175	0.2201	0.2227	0.2253	0.2279	3	5	8	11	13	16	18	21	24
1.7	0.2304	0.2330	0.2355	0.2380	0.2405	0.2430	0.2455	0.2480	0.2504	0.2529	2	5	7	10	12	15	17	20	22
1.8	0.2553	0.2577	0.2601	0.2625	0.2648	0.2672	0.2695	0.2718	0.2742	0.2765	2	5	7	9	12	14	16	19	21
1.9	0.2788	0.2810	0.2833	0.2856	0.2878	0.2900	0.2923	0.2945	0.2967	0.2989	2	4	7	9	11	13	16	18	20
2.0	0.3010	0.3032	0.3054	0.3075	0.3096	0.3118	0.3139	0.3160	0.3181	0.3201	2	4	6	8	11	13	15	17	19
2.1	0.3222	0.3243	0.3263	0.3284	0.3304	0.3324	0.3345	0.3365	0.3385	0.3404	2	4	6	8	10	12	14	16	18
2.2	0.3424	0.3444	0.3464	0.3483	0.3502	0.3522	0.3541	0.3560	0.3579	0.3598	2	4	6	8	10	12	14	15	17
2.3	0.3617	0.3636	0.3655	0.3674	0.3692	0.3711	0.3729	0.3747	0.3766	0.3784	2	4	6	7	9	11	13	15	17
2.4	0.3802	0.3820	0.3838	0.3856	0.3874	0.3892	0.3909	0.3927	0.3945	0.3962	2	4	5	7	9	11	12	14	16
2.5	0.3979	0.3997	0.4014	0.4031	0.4048	0.4065	0.4082	0.4099	0.4116	0.4133	2	3	5	7	9	10	12	14	15
2.6	0.4150	0.4166	0.4183	0.4200	0.4216	0.4232	0.4249	0.4265	0.4281	0.4298	2	3	5	7	8	10	11	13	15
2.7	0.4314	0.4330	0.4346	0.4362	0.4378	0.4393	0.4409	0.4425	0.4440	0.4456	2	3	5	6	8	9	11	13	14
2.8	0.4472	0.4487	0.4502	0.4518	0.4533	0.4548	0.4564	0.4579	0.4594	0.4609	2	3	5	6	8	9	11	12	14
2.9	0.4624	0.4639	0.4654	0.4669	0.4683	0.4698	0.4713	0.4728	0.4742	0.4757	1	3	4	6	7	9	10	12	13
3.0	0.4771	0.4786	0.4800	0.4814	0.4829	0.4843	0.4857	0.4871	0.4886	0.4900	1	3	4	6	7	9	10	11	13
3.1	0.4914	0.4928	0.4942	0.4955	0.4969	0.4983	0.4997	0.5011	0.5024	0.5038	1	3	4	6	7	8	10	11	12
3.2	0.5051	0.5065	0.5079	0.5092	0.5105	0.5119	0.5132	0.5145	0.5159	0.5172	1	3	4	5	7	8	9	11	12
3.3	0.5185	0.5198	0.5211	0.5224	0.5237	0.5250	0.5263	0.5276	0.5289	0.5302	1	3	4	5	6	8	9	10	12
3.4	0.5315	0.5328	0.5340	0.5353	0.5366	0.5378	0.5391	0.5403	0.5416	0.5428	1	3	4	5	6	8	9	10	11
3.5	0.5441	0.5453	0.5465	0.5478	0.5490	0.5502	0.5514	0.5527	0.5539	0.5551	1	2	4	5	6	7	9	10	11
3.6	0.5563	0.5575	0.5587	0.5599	0.5611	0.5623	0.5635	0.5647	0.5658	0.5670	1	2	4	5	6	7	8	10	11
3.7	0.5682	0.5694	0.5705	0.5717	0.5729	0.5740	0.5752	0.5763	0.5775	0.5786	1	2	3	5	6	7	8	9	10
3.8	0.5798	0.5809	0.5821	0.5832	0.5843	0.5855	0.5866	0.5877	0.5888	0.5899	1	2	3	5	6	7	8	9	10
3.9	0.5911	0.5922	0.5933	0.5944	0.5955	0.5966	0.5977	0.5988	0.5999	0.6010	1	2	3	4	5	7	8	9	10
4.0	0.6021	0.6031	0.6042	0.6053	0.6064	0.6075	0.6085	0.6096	0.6107	0.6117	1	2	3	4	5	6	8	9	10
4.1	0.6128	0.6138	0.6149	0.6160	0.6170	0.6180	0.6191	0.6201	0.6212	0.6222	1	2	3	4	5	6	7	8	9
4.2	0.6232	0.6243	0.6253	0.6263	0.6274	0.6284	0.6294	0.6304	0.6314	0.6325	1	2	3	4	5	6	7	8	9
4.3	0.6335	0.6345	0.6355	0.6365	0.6375	0.6385	0.6395	0.6405	0.6415	0.6425	1	2	3	4	5	6	7	8	9
4.4	0.6435	0.6444	0.6454	0.6464	0.6474	0.6484	0.6493	0.6503	0.6513	0.6522	1	2	3	4	5	6	7	8	9
4.5	0.6532	0.6542	0.6551	0.6561	0.6571	0.6580	0.6590	0.6599	0.6609	0.6618	1	2	3	4	5	6	7	8	9
4.6	0.6628	0.6637	0.6646	0.6656	0.6665	0.6675	0.6684	0.6693	0.6702	0.6712	1	2	3	4	5	6	7	7	8
4.7	0.6721	0.6730	0.6739	0.6749	0.6758	0.6767	0.6776	0.6785	0.6794	0.6803	1	2	3	4	5	5	6	7	8
4.8	0.6812	0.6821	0.6830	0.6839	0.6848	0.6857	0.6866	0.6875	0.6884	0.6893	1	2	3	4	4	5	6	7	8
4.9	0.6902	0.6911	0.6920	0.6928	0.6937	0.6946	0.6955	0.6964	0.6972	0.6981	1	2	3	4	4	5	6	7	8
5.0	0.6990	0.6998	0.7007	0.7016	0.7024	0.7033	0.7042	0.7050	0.7059	0.7067	1	2	3	3	4	5	6	7	8
5.1	0.7076	0.7084	0.7093	0.7101	0.7110	0.7118	0.7126	0.7135	0.7143	0.7152	1	2	3	3	4	5	6	7	8
5.2	0.7160	0.7168	0.7177	0.7185	0.7193	0.7202	0.7210	0.7218	0.7226	0.7235	1	2	2	3	4	5	6	7	7
5.3	0.7243	0.7251	0.7259	0.7267	0.7275	0.7284	0.7292	0.7300	0.7308	0.7316	1	2	2	3	4	5	6	6	7
5.4	0.7324	0.7332	0.7340	0.7348	0.7356	0.7364	0.7372	0.7380	0.7388	0.7396	1	2	2	3	4	5	6	6	7

XII Std - Business Maths & Stat TM Log Table.indd 237 09-05-2019 14:27:02

											Mean Difference								
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5.5	0.7404	0.7412	0.7419	0.7427	0.7435	0.7443	0.7451	0.7459	0.7466	0.7474	1	2	2	3	4	5	5	6	7
5.6	0.7482	0.7490	0.7497	0.7505	0.7513	0.7520	0.7528	0.7536	0.7543	0.7551	1	2	2	3	4	5	5	6	7
5.7	0.7559	0.7566	0.7574	0.7582	0.7589	0.7597	0.7604	0.7612	0.7619	0.7627	1	2	2	3	4	5	5	6	7
5.8	0.7634	0.7642	0.7649	0.7657	0.7664	0.7672	0.7679	0.7686	0.7694	0.7701	1	1	2	3	4	4	5	6	7
5.9	0.7709	0.7716	0.7723	0.7731	0.7738	0.7745	0.7752	0.7760	0.7767	0.7774	1	1	2	3	4	4	5	6	7
6.0	0.7782	0.7789	0.7796	0.7803	0.7810	0.7818	0.7825	0.7832	0.7839	0.7846	1	1	2	3	4	4	5	6	6
6.1	0.7853	0.7860	0.7868	0.7875	0.7882	0.7889	0.7896	0.7903	0.7910	0.7917	1	1	2	3	4	4	5	6	6
6.2	0.7924	0.7931	0.7938	0.7945	0.7952	0.7959	0.7966	0.7973	0.7980	0.7987	1	1	2	3	3	4	5	6	6
6.3	0.7993	0.8000	0.8007	0.8014	0.8021	0.8028	0.8035	0.8041	0.8048	0.8055	1	1	2	3	3	4	5	5	6
6.4	0.8062	0.8069	0.8075	0.8082	0.8089	0.8096	0.8102	0.8109	0.8116	0.8122	1	1	2	3	3	4	5	5	6
6.5	0.8129	0.8136	0.8142	0.8149	0.8156	0.8162	0.8169	0.8176	0.8182	0.8189	1	1	2	3	3	4	5	5	6
6.6	0.8195	0.8202	0.8209	0.8215	0.8222	0.8228	0.8235	0.8241	0.8248	0.8254	1	1	2	3	3	4	5	5	6
6.7	0.8261	0.8267	0.8274	0.8280	0.8287	0.8293	0.8299	0.8306	0.8312	0.8319	1	1	2	3	3	4	5	5	6
6.8	0.8325	0.8331	0.8338	0.8344	0.8351	0.8357	0.8363	0.8370	0.8376	0.8382	1	1	2	3	3	4	4	5	6
6.9	0.8388	0.8395	0.8401	0.8407	0.8414	0.8420	0.8426	0.8432	0.8439	0.8445	1	1	2	2	3	4	4	5	6
7.0	0.8451	0.8457	0.8463	0.8470	0.8476	0.8482	0.8488	0.8494	0.8500	0.8506	1	1	2	2	3	4	4	5	6
7.1	0.8513	0.8519	0.8525	0.8531	0.8537	0.8543	0.8549	0.8555	0.8561	0.8567	1	1	2	2	3	4	4	5	5
7.2	0.8573	0.8579	0.8585	0.8591	0.8597	0.8603	0.8609	0.8615	0.8621	0.8627	1	1	2	2	3	4	4	5	5
7.3	0.8633	0.8639	0.8645	0.8651	0.8657	0.8663	0.8669	0.8675	0.8681	0.8686	1	1	2	2	3	4	4	5	5
7.4	0.8692	0.8698	0.8704	0.8710	0.8716	0.8722	0.8727	0.8733	0.8739	0.8745	1	1	2	2	3	4	4	5	5
7.5	0.8751	0.8756	0.8762	0.8768	0.8774	0.8779	0.8785	0.8791	0.8797	0.8802	1	1	2	2	3	3	4	5	5
7.6	0.8808	0.8814	0.8820	0.8825	0.8831	0.8837	0.8842	0.8848	0.8854	0.8859	1	1	2	2	3	3	4	5	5
7.7	0.8865	0.8871	0.8876	0.8882	0.8887	0.8893	0.8899	0.8904	0.8910	0.8915	1	1	2	2	3	3	4	4	5
7.8	0.8921	0.8927	0.8932	0.8938	0.8943	0.8949	0.8954	0.8960	0.8965	0.8971	1	1	2	2	3	3	4	4	5
7.9	0.8976	0.8982	0.8987	0.8993	0.8998	0.9004	0.9009	0.9015	0.9020	0.9025	1	1	2	2	3	3	4	4	5
8.0	0.9031	0.9036	0.9042	0.9047	0.9053	0.9058	0.9063	0.9069	0.9074	0.9079	1	1	2	2	3	3	4	4	5
8.1	0.9085	0.9090	0.9096	0.9101	0.9106	0.9112	0.9117	0.9122	0.9128	0.9133	1	1	2	2	3	3	4	4	5
8.2	0.9138	0.9143	0.9149	0.9154	0.9159	0.9165	0.9170	0.9175	0.9180	0.9186	1	1	2	2	3	3	4	4	5
8.3	0.9191	0.9196	0.9201	0.9206	0.9212	0.9217	0.9222	0.9227	0.9232	0.9238	1	1	2	2	3	3	4	4	5
8.4	0.9243	0.9248	0.9253	0.9258	0.9263	0.9269	0.9274	0.9279	0.9284	0.9289	1	1	2	2	3	3	4	4	5
8.5	0.9294	0.9299	0.9304	0.9309	0.9315	0.9320	0.9325	0.9330	0.9335	0.9340	1	1	2	2	3	3	4	4	5
8.6	0.9345	0.9350	0.9355	0.9360	0.9365	0.9370	0.9375	0.9380	0.9385	0.9390	1	1	2	2	3	3	4	4	5
8.7	0.9395	0.9400	0.9405	0.9410	0.9415	0.9420	0.9425	0.9430	0.9435	0.9440	0	1	1	2	2	3	3	4	4
8.8	0.9445	0.9450	0.9455	0.9460	0.9465	0.9469	0.9474	0.9479	0.9484	0.9489	0	1	1	2	2	3	3	4	4
8.9	0.9494	0.9499	0.9504	0.9509	0.9513	0.9518	0.9523	0.9528	0.9533	0.9538	0	1	1	2	2	3	3	4	4
9.0	0.9542	0.9547	0.9552	0.9557	0.9562	0.9566	0.9571	0.9576	0.9581	0.9586	0	1	1	2	2	3	3	4	4
9.1	0.9590	0.9595	0.9600	0.9605	0.9609	0.9614	0.9619	0.9624	0.9628	0.9633	0	1	1	2	2	3	3	4	4
9.2	0.9638	0.9643	0.9647	0.9652	0.9657	0.9661	0.9666	0.9671	0.9675	0.9680	0	1	1	2	2	3	3	4	4
9.3	0.9685	0.9689	0.9694	0.9699	0.9703	0.9708	0.9713	0.9717	0.9722	0.9727	0	1	1	2	2	3	3	4	4
9.4	0.9731	0.9736	0.9741	0.9745	0.9750	0.9754	0.9759	0.9763	0.9768	0.9773	0	1	1	2	2	3	3	4	4
9.5	0.9777	0.9782	0.9786	0.9791	0.9795	0.9800	0.9805	0.9809	0.9814	0.9818	0	1	1	2	2	3	3	4	4
9.6	0.9823	0.9827	0.9832	0.9836	0.9841	0.9845	0.9850	0.9854	0.9859	0.9863	0	1	1	2	2	3	3	4	4
9.7	0.9868	0.9872	0.9877	0.9881	0.9886	0.9890	0.9894	0.9899	0.9903	0.9908	0	1	1	2	2	3	3	4	4
9.8	0.9912	0.9917	0.9921	0.9926	0.9930	0.9934	0.9939	0.9943	0.9948	0.9952	0	1	1	2	2	3	3	4	4
9.9	0.9956	0.9961	0.9965	0.9969	0.9974	0.9978	0.9983	0.9987	0.9991	0.9996	0	1	1	2	2	3	3	3	4

XII Std - Business Maths & Stat TM Log Table.indd 238 09-05-2019 14:27:02

											Mean Difference								
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.00	1.000	1.002	1.005	1.007	1.009	1.012	1.014	1.016	1.019	1.021	0	0	1	1	1	1	2	2	2
0.01	1.023	1.026	1.028	1.030	1.033	1.035	1.038	1.040	1.042	1.045	0	0	1	1	1	1	2	2	2
0.02	1.047	1.050	1.052	1.054	1.057	1.059	1.062	1.064	1.067	1.069	0	0	1	1	1	1	2	2	2
0.03	1.072	1.074	1.076	1.079	1.081	1.084	1.086	1.089	1.091	1.094	0	0	1	1	1	1	2	2	2
0.04	1.096	1.099	1.102	1.104	1.107	1.109	1.112	1.114	1.117	1.119	0	1	1	1	1	2	2	2	2
0.05	1.122	1.125	1.127	1.130	1.132	1.135	1.138	1.140	1.143	1.146	0	1	1	1	1	2	2	2	2
0.06	1.148	1.151	1.153	1.156	1.159	1.161	1.164	1.167	1.169	1.172	0	1	1	1	1	2	2	2	2
0.07	1.175	1.178	1.180	1.183	1.186	1.189	1.191	1.194	1.197	1.199	0	1	1	1	1	2	2	2	2
0.08	1.202	1.205	1.208	1.211	1.213	1.216	1.219	1.222	1.225	1.227	0	1	1	1	1	2	2	2	3
0.09	1.230	1.233	1.236	1.239	1.242	1.245	1.247	1.250	1.253	1.256	0	1	1	1	1	2	2	2	3
0.10	1.259	1.262	1.265	1.268	1.271	1.274	1.276	1.279	1.282	1.285	0	1	1	1	1	2	2	2	3
0.11	1.288	1.291	1.294	1.297	1.300	1.303	1.306	1.309	1.312	1.315	0	1	1	1	2	2	2	2	3
0.12	1.318	1.321	1.324	1.327	1.330	1.334	1.337	1.340	1.343	1.346	0	1	1	1	2	2	2	2	3
0.13	1.349	1.352	1.355	1.358	1.361	1.365	1.368	1.371	1.374	1.377	0	1	1	1	2	2	2	3	3
0.14	1.380	1.384	1.387	1.390	1.393	1.396	1.400	1.403	1.406	1.409	0	1	1	1	2	2	2	3	3
0.15	1.413	1.416	1.419	1.422	1.426	1.429	1.432	1.435	1.439	1.442	0	1	1	1	2	2	2	3	3
0.16	1.445	1.449	1.452	1.455	1.459	1.462	1.466	1.469	1.472	1.476	0	1	1	1	2	2	2	3	3
0.17	1.479	1.483	1.486	1.489	1.493	1.496	1.500	1.503	1.507	1.510	0	1	1	1	2	2	2	3	3
0.18	1.514	1.517	1.521	1.524	1.528	1.531	1.535	1.538	1.542	1.545	0	1	1	1	2	2	2	3	3
0.19	1.549	1.552	1.556	1.560	1.563	1.567	1.570	1.574	1.578	1.581	0	1	1	1	2	2	3	3	3
0.20	1.585	1.589	1.592	1.596	1.600	1.603	1.607	1.611	1.614	1.618	0	1	1	1	2	2	3	3	3
0.21	1.622	1.626	1.629	1.633	1.637	1.641	1.644	1.648	1.652	1.656	0	1	1	2	2	2	3	3	3
0.22	1.660	1.663	1.667	1.671	1.675	1.679	1.683	1.687	1.690	1.694	0	1	1	2	2	2	3	3	3
0.23	1.698	1.702	1.706	1.710	1.714	1.718	1.722	1.726	1.730	1.734	0	1	1	2	2	2	3	3	4
0.24	1.738	1.742	1.746	1.750	1.754	1.758	1.762	1.766	1.770	1.774	0	1	1	2	2	2	3	3	4
0.25	1.778	1.782	1.786	1.791	1.795	1.799	1.803	1.807	1.811	1.816	0	1	1	2	2	2	3	3	4
0.26	1.820	1.824	1.828	1.832	1.837	1.841	1.845	1.849	1.854	1.858	0	1	1	2	2	3	3	3	4
0.27	1.862	1.866	1.871	1.875	1.879	1.884	1.888	1.892	1.897	1.901	0	1	1	2	2	3	3	3	4
0.28	1.905	1.910	1.914	1.919	1.923	1.928	1.932	1.936	1.941	1.945	0	1	1	2	2	3	3	4	4
0.29	1.950	1.954	1.959	1.963	1.968	1.972	1.977	1.982	1.986	1.991	0	1	1	2	2	3	3	4	4
0.30	1.995	2.000	2.004	2.009	2.014	2.018	2.023	2.028	2.032	2.037	0	1	1	2	2	3	3	4	4
0.31	2.042	2.046	2.051	2.056	2.061	2.065	2.070	2.075	2.080	2.084	0	1	1	2	2	3	3	4	4
0.32	2.089	2.094	2.099	2.104	2.109	2.113	2.118	2.123	2.128	2.133	0	1	1	2	2	3	3	4	4
0.33	2.138	2.143	2.148	2.153	2.158	2.163	2.168	2.173	2.178	2.183	0	1	1	2	2	3	3	4	4
0.34	2.188	2.193	2.198	2.203	2.208	2.213	2.218	2.223	2.228	2.234	1	1	2	2	3	3	4	4	5
0.35	2.239	2.244	2.249	2.254	2.259	2.265	2.270	2.275	2.280	2.286	1	1	2	2	3	3	4	4	5
0.36	2.291	2.296	2.301	2.307	2.312	2.317	2.323	2.328	2.333	2.339	1	1	2	2	3	3	4	4	5
0.37	2.344	2.350	2.355	2.360	2.366	2.371	2.377	2.382	2.388	2.393	1	1	2	2	3	3	4	4	5
0.38	2.399	2.404	2.410	2.415	2.421	2.427	2.432	2.438	2.443	2.449	1	1	2	2	3	3	4	4	5
0.39	2.455	2.460	2.466	2.472	2.477	2.483	2.489	2.495	2.500	2.506	1	1	2	2	3	3	4	5	5
0.40	2.512	2.518	2.523	2.529	2.535	2.541	2.547	2.553	2.559	2.564	1	1	2	2	3	4	4	5	5
0.41	2.570	2.576	2.582	2.588	2.594	2.600	2.606	2.612	2.618	2.624	1	1	2	2	3	4	4	5	5
0.42	2.630	2.636	2.642	2.649	2.655	2.661	2.667	2.673	2.679	2.685	1	1	2	2	3	4	4	5	6
0.43	2.692	2.698	2.704	2.710	2.716	2.723	2.729	2.735	2.742	2.748	1	1	2	3	3	4	4	5	6
0.44	2.754	2.761	2.767	2.773	2.780	2.786	2.793	2.799	2.805	2.812	1	1	2	3	3	4	4	5	6
0.45	2.818	2.825	2.831	2.838	2.844	2.851	2.858	2.864	2.871	2.877	1	1	2	3	3	4	5	5	6
0.46	2.884	2.891	2.897	2.904	2.911	2.917	2.924	2.931	2.938	2.944	1	1	2	3	3	4	5	5	6
0.47	2.951	2.958	2.965	2.972	2.979	2.985	2.992	2.999	3.006	3.013	1	1	2	3	3	4	5	5	6
0.48	3.020	3.027	3.034	3.041	3.048	3.055	3.062	3.069	3.076	3.083	1	1	2	3	4	4	5	6	6
0.49	3.090	3.097	3.105	3.112	3.119	3.126	3.133	3.141	3.148	3.155	1	1	2	3	4	4	5	6	6

XII Std - Business Maths & Stat TM Log Table.indd 239 09-05-2019 14:27:02

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Mean Difference 1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.50	3.162	3.170	3.177	3.184	3.192	3.199	3.206	3.214	3.221	3.228	1	1	2	3	4	4	5	6	7
0.51	3.236	3.243	3.251	3.258	3.266	3.273	3.281	3.289	3.296	3.304	1	2	2	3	4	5	5	6	7
0.52	3.311	3.319	3.327	3.334	3.342	3.350	3.357	3.365	3.373	3.381	1	2	2	3	4	5	5	6	7
0.53	3.388	3.396	3.404	3.412	3.420	3.428	3.436	3.443	3.451	3.459	1	2	2	3	4	5	6	6	7
0.54	3.467	3.475	3.483	3.491	3.499	3.508	3.516	3.524	3.532	3.540	1	2	2	3	4	5	6	6	7
0.55	3.548	3.556	3.565	3.573	3.581	3.589	3.597	3.606	3.614	3.622	1	2	2	3	4	5	6	7	7
0.56	3.631	3.639	3.648	3.656	3.664	3.673	3.681	3.690	3.698	3.707	1	2	3	3	4	5	6	7	8
0.57	3.715	3.724	3.733	3.741	3.750	3.758	3.767	3.776	3.784	3.793	1	2	3	3	4	5	6	7	8
0.58	3.802	3.811	3.819	3.828	3.837	3.846	3.855	3.864	3.873	3.882	1	2	3	4	4	5	6	7	8
0.59	3.890	3.899	3.908	3.917	3.926	3.936	3.945	3.954	3.963	3.972	1	2	3	4	5	5	6	7	8
0.60	3.981	3.990	3.999	4.009	4.018	4.027	4.036	4.046	4.055	4.064	1	2	3	4	5	6	6	7	8
0.61	4.074	4.083	4.093	4.102	4.111	4.121	4.130	4.140	4.150	4.159	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.62	4.169	4.178	4.188	4.198	4.207	4.217	4.227	4.236	4.246	4.256	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.63	4.266	4.276	4.285	4.295	4.305	4.315	4.325	4.335	4.345	4.355	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.64	4.365	4.375	4.385	4.395	4.406	4.416	4.426	4.436	4.446	4.457	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.65	4.467	4.477	4.487	4.498	4.508	4.519	4.529	4.539	4.550	4.560	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.66	4.571	4.581	4.592	4.603	4.613	4.624	4.634	4.645	4.656	4.667	1	2	3	4	5	6	7	9	10
0.67	4.677	4.688	4.699	4.710	4.721	4.732	4.742	4.753	4.764	4.775	1	2	3	4	5	7	8	9	10
0.68	4.786	4.797	4.808	4.819	4.831	4.842	4.853	4.864	4.875	4.887	1	2	3	4	6	7	8	9	10
0.69	4.898	4.909	4.920	4.932	4.943	4.955	4.966	4.977	4.989	5.000	1	2	3	5	6	7	8	9	10
0.70	5.012	5.023	5.035	5.047	5.058	5.070	5.082	5.093	5.105	5.117	1	2	4	5	6	7	8	9	11
0.71	5.129	5.140	5.152	5.164	5.176	5.188	5.200	5.212	5.224	5.236	1	2	4	5	6	7	8	10	11
0.72	5.248	5.260	5.272	5.284	5.297	5.309	5.321	5.333	5.346	5.358	1	2	4	5	6	7	9	10	11
0.73	5.370	5.383	5.395	5.408	5.420	5.433	5.445	5.458	5.470	5.483	1	3	4	5	6	8	9	10	11
0.74	5.495	5.508	5.521	5.534	5.546	5.559	5.572	5.585	5.598	5.610	1	3	4	5	6	8	9	10	12
0.75	5.623	5.636	5.649	5.662	5.675	5.689	5.702	5.715	5.728	5.741	1	3	4	5	7	8	9	10	12
0.76	5.754	5.768	5.781	5.794	5.808	5.821	5.834	5.848	5.861	5.875	1	3	4	5	7	8	9	11	12
0.77	5.888	5.902	5.916	5.929	5.943	5.957	5.970	5.984	5.998	6.012	1	3	4	5	7	8	10	11	12
0.78	6.026	6.039	6.053	6.067	6.081	6.095	6.109	6.124	6.138	6.152	1	3	4	6	7	8	10	11	13
0.79	6.166	6.180	6.194	6.209	6.223	6.237	6.252	6.266	6.281	6.295	1	3	4	6	7	9	10	11	13
0.80	6.310	6.324	6.339	6.353	6.368	6.383	6.397	6.412	6.427	6.442	1	3	4	6	7	9	10	12	13
0.81	6.457	6.471	6.486	6.501	6.516	6.531	6.546	6.561	6.577	6.592	2	3	5	6	8	9	11	12	14
0.82	6.607	6.622	6.637	6.653	6.668	6.683	6.699	6.714	6.730	6.745	2	3	5	6	8	9	11	12	14
0.83	6.761	6.776	6.792	6.808	6.823	6.839	6.855	6.871	6.887	6.902	2	3	5	6	8	9	11	13	14
0.84	6.918	6.934	6.950	6.966	6.982	6.998	7.015	7.031	7.047	7.063	2	3	5	6	8	10	11	13	15
0.85	7.079	7.096	7.112	7.129	7.145	7.161	7.178	7.194	7.211	7.228	2	3	5	7	8	10	12	13	15
0.86	7.244	7.261	7.278	7.295	7.311	7.328	7.345	7.362	7.379	7.396	2	3	5	7	8	10	12	13	15
0.87	7.413	7.430	7.447	7.464	7.482	7.499	7.516	7.534	7.551	7.568	2	3	5	7	9	10	12	14	16
0.88	7.586	7.603	7.621	7.638	7.656	7.674	7.691	7.709	7.727	7.745	2	4	5	7	9	11	12	14	16
0.89	7.762	7.780	7.798	7.816	7.834	7.852	7.870	7.889	7.907	7.925	2	4	5	7	9	11	13	14	16
0.90	7.943	7.962	7.980	7.998	8.017	8.035	8.054	8.072	8.091	8.110	2	4	6	7	9	11	13	15	17
0.91	8.128	8.147	8.166	8.185	8.204	8.222	8.241	8.260	8.279	8.299	2	4	6	8	9	11	13	15	17
0.92	8.318	8.337	8.356	8.375	8.395	8.414	8.433	8.453	8.472	8.492	2	4	6	8	10	12	14	15	17
0.93	8.511	8.531	8.551	8.570	8.590	8.610	8.630	8.650	8.670	8.690	2	4	6	8	10	12	14	16	18
0.94	8.710	8.730	8.750	8.770	8.790	8.810	8.831	8.851	8.872	8.892	2	4	6	8	10	12	14	16	18
0.95	8.913	8.933	8.954	8.974	8.995	9.016	9.036	9.057	9.078	9.099	2	4	6	8	10	12	15	17	19
0.96	9.120	9.141	9.162	9.183	9.204	9.226	9.247	9.268	9.290	9.311	2	4	6	8	11	13	15	17	19
0.97	9.333	9.354	9.376	9.397	9.419	9.441	9.462	9.484	9.506	9.528	2	4	7	9	11	13	15	17	20
0.98	9.550	9.572	9.594	9.616	9.638	9.661	9.683	9.705	9.727	9.750	2	4	7	9	11	13	16	18	20
0.99	9.772	9.795	9.817	9.840	9.863	9.886	9.908	9.931	9.954	9.977	2	5	7	9	11	14	16	18	20

XII Std - Business Maths & Stat TM Log Table.indd 240 09-05-2019 14:27:03

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.00	1.00000000	2.71828183	7.38905610	20.08553692	54.59815003	148.41315910	403.42879349	1096.63315843	2980.95798704	8103.08392758
0.01	1.01005017	2.74560102	7.46331735	20.28739993	55.14687056	149.90473615	407.48332027	1107.65450490	3010.91711288	8184.52127494
0.02	1.02020134	2.77319476	7.53832493	20.49129168	55.70110583	151.41130379	411.57859573	1118.78661775	3041.17733294	8266.77708126
0.03	1.03045453	2.80106583	7.61408636	20.69723259	56.26091125	152.93301270	415.71502938	1130.03061019	3071.74167327	8349.85957218
0.04	1.04081077	2.82921701	7.69060920	20.90524324	56.82634281	154.47001503	419.89303489	1141.38760663	3102.61319033	8433.77705601
0.05	1.05127110	2.85765112	7.76790111	21.11534442	57.39745705	156.02246449	424.11303004	1152.85874278	3133.79497129	8518.53792457
0.06	1.06183655	2.88637099	7.84596981	21.32755716	57.97431108	157.59051632	428.37543686	1164.44516577	3165.29013436	8604.15065402
0.07	1.07250818	2.91537950	7.92482312	21.54190268	58.55696259	159.17432734	432.68068157	1176.14803425	3197.10182908	8690.62380571
0.08	1.08328707	2.94467955	8.00446891	21.75840240	59.14546985	160.77405593	437.02919472	1187.96851851	3229.23323664	8777.96602703
0.09	1.09417428	2.97427407	8.08491516	21.97707798	59.73989170	162.38986205	441.42141115	1199.90780061	3261.68757023	8866.18605226
0.10	1.10517092	3.00416602	8.16616991	22.19795128	60.34028760	164.02190730	445.85777008	1211.96707449	3294.46807528	8955.29270348
0.11	1.11627807	3.03435839	8.24824128	22.42104440	60.94671757	165.67035487	450.33871517	1224.14754609	3327.57802989	9045.29489144
0.12	1.12749685	3.06485420	8.33113749	22.64637964	61.55924226	167.33536962	454.86469450	1236.45043347	3361.02074508	9136.20161642
0.13	1.13882838	3.09565650	8.41486681	22.87397954	62.17792293	169.01711804	459.43616068	1248.87696691	3394.79956514	9228.02196918
0.14	1.15027380	3.12676837	8.49943763	23.10386686	62.80282145	170.71576832	464.05357086	1261.42838910	3428.91786799	9320.76513183
0.15	1.16183424	3.15819291	8.58485840	23.33606458	63.43400030	172.43149032	468.71738678	1274.10595517	3463.37906548	9414.44037876
0.16	1.17351087	3.18993328	8.67113766	23.57059593	64.07152260	174.16445561	473.42807483	1286.91093291	3498.18660376	9509.05707757
0.17	1.18530485	3.22199264	8.75828404	23.80748436	64.71545211	175.91483748	478.18610609	1299.84460280	3533.34396362	9604.62469001
0.18	1.19721736	3.25437420	8.84630626	24.04675355	65.36585321	177.68281099	482.99195635	1312.90825825	3568.85466082	9701.15277293
0.19	1.20924960	3.28708121	8.93521311	24.28842744	66.02279096	179.46855293	487.84610621	1326.10320561	3604.72224646	9798.65097920
0.20	1.22140276	3.32011692	9.02501350	24.53253020	66.68633104	181.27224188	492.74904109	1339.43076439	3640.95030733	9897.12905874
0.21	1.23367806	3.35348465	9.11571639	24.77908622	67.35653981	183.09405819	497.70125129	1352.89226737	3677.54246627	9996.59685944
0.22	1.24607673	3.38718773	9.20733087	25.02812018	68.03348429	184.93418407	502.70323202	1366.48906071	3714.50238251	10097.06432815
0.23	1.25860001	3.42122954	9.29986608	25.27965697	68.71723217	186.79280352	507.75548350	1380.22250409	3751.83375209	10198.54151171
0.24	1.27124915	3.45561346	9.39333129	25.53372175	69.40785184	188.67010241	512.85851094	1394.09397087	3789.54030817	10301.03855791
0.25	1.28402542	3.49034296	9.48773584	25.79033992	70.10541235	190.56626846	518.01282467	1408.10484820	3827.62582144	10404.56571656
0.26	1.29693009	3.52542149	9.58308917	26.04953714	70.80998345	192.48149130	523.21894011	1422.25653720	3866.09410048	10509.13334045
0.27	1.30996445	3.56085256	9.67940081	26.31133934	71.52163562	194.41596245	528.47737788	1436.55045304	3904.94899215	10614.75188643
0.28	1.32312981	3.59663973	9.77668041	26.57577270	72.24044001	196.36987535	533.78866383	1450.98802511	3944.19438198	10721.43191645
0.29	1.33642749	3.63278656	9.87493768	26.84286366	72.96646850	198.34342541	539.15332908	1465.57069720	3983.83419453	10829.18409859
0.30	1.34985881	3.66929667	9.97418245	27.11263892	73.69979370	200.33680997	544.57191013	1480.29992758	4023.87239382	10938.01920817
0.31	1.36342511	3.70617371	10.07442466	27.38512547	74.44048894	202.35022839	550.04494881	1495.17718919	4064.31298371	11047.94812878
0.32	1.37712776	3.74342138	10.17567431	27.66035056	75.18862829	204.38388199	555.57299245	1510.20396976	4105.16000827	11158.98185341
0.33	1.39096813	3.78104339	10.27794153	27.93834170	75.94428657	206.43797416	561.15659385	1525.38177199	4146.41755226	11271.13148552
0.34	1.40494759	3.81904351	10.38123656	28.21912671	76.70753934	208.51271029	566.79631138	1540.71211367	4188.08974147	11384.40824018
0.35	1.41906755	3.85742553	10.48556972	28.50273364	77.47846293	210.60829787	572.49270901	1556.19652784	4230.18074313	11498.82344515
0.36	1.43332941	3.89619330	10.59095145	28.78919088	78.25713442	212.72494645	578.24635639	1571.83656296	4272.69476640	11614.38854204
0.37	1.44773461	3.93535070	10.69739228	29.07852706	79.04363170	214.86286770	584.05782889	1587.63378304	4315.63606270	11731.11508747
0.38	1.46228459	3.97490163	10.80490286	29.37077111	79.83803341	217.02227542	589.92770766	1603.58976783	4359.00892620	11849.01475419
0.39	1.47698079	4.01485005	10.91349394	29.66595227	80.64041898	219.20338555	595.85657969	1619.70611293	4402.81769423	11968.09933225
0.40	1.49182470	4.05519997	11.02317638	29.96410005	81.45086866	221.40641620	601.84503787	1635.98443000	4447.06674770	12088.38073022
0.41	1.50681779	4.09595540	11.13396115	30.26524426	82.26946350	223.63158768	607.89368106	1652.42634686	4491.76051155	12209.87097633
0.42	1.52196156	4.13712044	11.24585931	30.56941502	83.09628536	225.87912250	614.00311413	1669.03350774	4536.90345519	12332.58221972
0.43	1.53725752	4.17869919	11.35888208	30.87664275	83.93141691	228.14924542	620.17394801	1685.80757337	4582.50009296	12456.52673161
0.44	1.55270722	4.22069582	11.47304074	31.18695817	84.77494167	230.44218346	626.40679981	1702.75022115	4628.55498456	12581.71690655
0.45	1.56831219	4.26311452	11.58834672	31.50039231	85.62694400	232.75816591	632.70229281	1719.86314538	4675.07273551	12708.16526367
0.46	1.58407398	4.30595953	11.70481154	31.81697651	86.48750910	235.09742437	639.06105657	1737.14805735	4722.05799763	12835.88444790
0.47	1.59999419	4.34923514	11.82244685	32.13674244	87.35672301	237.46019276	645.48372697	1754.60668558	4769.51546949	12964.88723127
0.48	1.61607440	4.39294568	11.94126442	32.45972208	88.23467268	239.84670737	651.97094627	1772.24077593	4817.44989687	13095.18651418
0.49	1.63231622	4.43709552	12.06127612	32.78594771	89.12144588	242.25720686	658.52336322	1790.05209184	4865.86607325	13226.79532664
0.50	1.64872127	4.48168907	12.18249396	33.11545196	90.01713130	244.69193226	665.14163304	1808.04241446	4914.76884030	13359.72682966

XII Std - Business Maths & Stat TM Log Table.indd 241 09-05-2019 14:27:03

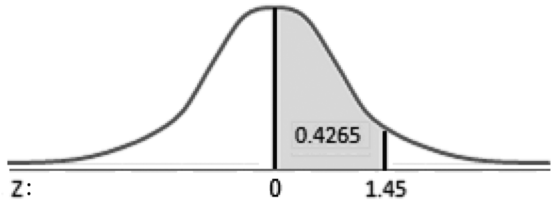
அடுக்குச்சார்புக்கான அட்டவணை

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.51	1.66529119	4.52673079	12.30493006	33.44826778	90.92181851	247.15112707	671.82641759	1826.21354282	4964.16308832	13493.99431650
0.52	1.68202765	4.57222520	12.42859666	33.78442846	91.83559798	249.63503719	678.57838534	1844.56729405	5014.05375679	13629.61121401
0.53	1.69893231	4.61817682	12.55350614	34.12396761	92.75856108	252.14391102	685.39821149	1863.10550356	5064.44583482	13766.59108401
0.54	1.71600686	4.66459027	12.67967097	34.46691919	93.69080012	254.67799946	692.28657804	1881.83002516	5115.34436165	13904.94762458
0.55	1.73325302	4.71147018	12.80710378	34.81331749	94.63240831	257.23755591	699.24417382	1900.74273134	5166.75442718	14044.69467150
0.56	1.75067250	4.75882125	12.93581732	35.16319715	95.58347983	259.82283632	706.27169460	1919.84551337	5218.68117245	14185.84619960
0.57	1.76826705	4.80664819	13.06582444	35.51659315	96.54410977	262.43409924	713.36984313	1939.14028156	5271.12979019	14328.41632413
0.58	1.78603843	4.85495581	13.19713816	35.87354085	97.51439421	265.07160579	720.53932925	1958.62896539	5324.10552531	14472.41930224
0.59	1.80398842	4.90374893	13.32977160	36.23407593	98.49443016	267.73561971	727.78086990	1978.31351375	5377.61367541	14617.86953434
0.60	1.82211880	4.95303242	13.46373804	36.59823444	99.48431564	270.42640743	735.09518924	1998.19589510	5431.65959136	14764.78156558
0.61	1.84043140	5.00281123	13.59905085	36.96605281	100.48414964	273.14423800	742.48301872	2018.27809772	5486.24867780	14913.17008727
0.62	1.85892804	5.05309032	13.73572359	37.33756782	101.49403213	275.88938323	749.94509711	2038.56212982	5541.38639368	15063.04993840
0.63	1.87761058	5.10387472	13.87376990	37.71281662	102.51406411	278.66211763	757.48217064	2059.05001984	5597.07825281	15214.43610708
0.64	1.89648088	5.15516951	14.01320361	38.09183673	103.54434758	281.46271848	765.09499302	2079.74381657	5653.32982444	15367.34373205
0.65	1.91554083	5.20697983	14.15403865	38.47466605	104.58498558	284.29146582	772.78432554	2100.64558942	5710.14673375	15521.78810420
0.66	1.93479233	5.25931084	14.29628910	38.86134287	105.63608216	287.14864256	780.55093713	2121.75742858	5767.53466250	15677.78466809
0.67	1.95423732	5.31216780	14.43996919	39.25190586	106.69774243	290.03453439	788.39560446	2143.08144525	5825.49934952	15835.34902351
0.68	1.97387773	5.36555597	14.58509330	39.64639407	107.77007257	292.94942992	796.31911202	2164.61977185	5884.04659134	15994.49692704
0.69	1.99371553	5.41948071	14.73167592	40.04484696	108.85317981	295.89362064	804.32225214	2186.37456223	5943.18224271	16155.24429358
0.70	2.01375271	5.47394739	14.87973172	40.44730436	109.94717245	298.86740097	812.40582517	2208.34799189	6002.91221726	16317.60719802
0.71	2.03399126	5.52896148	15.02927551	40.85380653	111.05215991	301.87106828	820.57063945	2230.54225819	6063.24248804	16481.60187677
0.72	2.05443321	5.58452846	15.18032224	41.26439411	112.16825267	304.90492296	828.81751148	2252.95958057	6124.17908811	16647.24472945
0.73	2.07508061	5.64065391	15.33288702	41.67910816	113.29556235	307.96926838	837.14726595	2275.60220079	6185.72811120	16814.55232047
0.74	2.09593551	5.69734342	15.48698510	42.09799016	114.43420168	311.06441098	845.56073585	2298.47238312	6247.89571226	16983.54138073
0.75	2.11700002	5.75460268	15.64263188	42.52108200	115.58428453	314.19066029	854.05876253	2321.57241461	6310.68810809	17154.22880929
0.76	2.13827622	5.81243739	15.79984295	42.94842598	116.74592590	317.34832892	862.64219579	2344.90460528	6374.11157799	17326.63167502
0.77	2.15976625	5.87085336	15.95863401	43.38006484	117.91924196	320.53773265	871.31189399	2368.47128836	6438.17246436	17500.76721836
0.78	2.18147227	5.92985642	16.11902095	43.81604174	119.10435004	323.75919042	880.06872411	2392.27482054	6502.87717335	17676.65285301
0.79	2.20339643	5.98945247	16.28101980	44.25640028	120.30136866	327.01302438	888.91356183	2416.31758219	6568.23217547	17854.30616767
0.80	2.22554093	6.04964746	16.44464677	44.70118449	121.51041752	330.29955991	897.84729165	2440.60197762	6634.24400628	18033.74492783
0.81	2.24790799	6.11044743	16.60991822	45.15043887	122.73161752	333.61912567	906.87080695	2465.13043529	6700.91926702	18214.98707751
0.82	2.27049984	6.17185845	16.77685067	45.60420832	123.96509078	336.97205363	915.98501008	2489.90540804	6768.26462527	18398.05074107
0.83	2.29331874	6.23388666	16.94546082	46.06253823	125.21096065	340.35867907	925.19081248	2514.92937342	6836.28681562	18582.95422504
0.84	2.31636698	6.29653826	17.11576554	46.52547444	126.46935173	343.77934066	934.48913473	2540.20483383	6904.99264036	18769.71601992
0.85	2.33964685	6.35981952	17.28778184	46.99306323	127.74038985	347.23438048	943.88090667	2565.73431683	6974.38897011	18958.35480204
0.86	2.36316069	6.42373677	17.46152694	47.46535137	129.02420211	350.72414402	953.36706749	2591.52037541	7044.48274457	19148.88943544
0.87	2.38691085	6.48829640	17.63701820	47.94238608	130.32091690	354.24898027	962.94856581	2617.56558819	7115.28097317	19341.33897375
0.88	2.41089971	6.55350486	17.81427318	48.42421507	131.63066389	357.80924171	972.62635979	2643.87255970	7186.79073580	19535.72266207
0.89	2.43512965	6.61936868	17.99330960	48.91088652	132.95357405	361.40528437	982.40141722	2670.44392068	7259.01918349	19732.05993893
0.90	2.45960311	6.68589444	18.17414537	49.40244911	134.28977968	365.03746787	992.27471561	2697.28232827	7331.97353916	19930.37043823
0.91	2.48432253	6.75308880	18.35679857	49.89895197	135.63941441	368.70615541	1002.24724229	2724.39046634	7405.66109828	20130.67399118
0.92	2.50929039	6.82095847	18.54128746	50.40044478	137.00261319	372.41171388	1012.31999453	2751.77104573	7480.08922969	20332.99062831
0.93	2.53450918	6.88951024	18.72763050	50.90697767	138.37951234	376.15451382	1022.49397962	2779.42680452	7555.26537625	20537.34058145
0.94	2.55998142	6.95875097	18.91584631	51.41860130	139.77024956	379.93492954	1032.77021496	2807.36050830	7631.19705565	20743.74428576
0.95	2.58570966	7.02868758	19.10595373	51.93536683	141.17496392	383.75333906	1043.14972818	2835.57495047	7707.89186111	20952.22238178
0.96	2.61169647	7.09932707	19.29797176	52.45732595	142.59379590	387.61012424	1053.63355724	2864.07295251	7785.35746218	21162.79571750
0.97	2.63794446	7.17067649	19.49191960	52.98453084	144.02688737	391.50567075	1064.22275054	2892.85736422	7863.60160548	21375.48535043
0.98	2.66445624	7.24274299	19.68781664	53.51703423	145.47438165	395.44036816	1074.91836700	2921.93106408	7942.63211550	21590.31254971
0.99	2.69123447	7.31553376	19.88568249	54.05488936	146.93642350	399.41460993	1085.72147619	2951.29695948	8022.45689535	21807.29879823

XII Std - Business Maths & Stat TM Log Table.indd 242 09-05-2019 14:27:03

திட்ட இயல்நிலை பரவல் அட்டவணை

இந்த அட்டவணையானது $Z = 0$ மற்றும் Z ன் எந்த மதிப்பிற்கும் இடையிலான பரப்பினை நிகழ்தகவு மதிப்பாக தருகிறது.
எடுத்துக்காட்டாக, $Z = 1.45$ எனில்,
பரப்பானது 0.4265 ஆகும்.



Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990
3.1	0.4990	0.4991	0.4991	0.4991	0.4992	0.4992	0.4992	0.4992	0.4993	0.4993
3.2	0.4993	0.4993	0.4994	0.4994	0.4994	0.4994	0.4994	0.4995	0.4995	0.4995
3.3	0.4995	0.4995	0.4995	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4997
3.4	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4998
3.5	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998
3.6	0.4998	0.4998	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999
3.7	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999
3.8	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999
3.9	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000

XII Std - Business Maths & Stat TM Log Table.indd 243 09-05-2019 14:27:03

துணை நூற்பட்டியல்

1. Introduction to Matrices, S.P. Gupta, S. Chand & Company.
2. Matrices, Shanthi Narayanan, S. Chand & Company.
3. Matrices and Determinants, P.N. Arora, S. Chand & Company.
4. Stochastic Processes, J. Medhi, New Age International Publishers.
5. A Text Book on Differential Calculus – S.K. Goyal - Jai Prakash Nath Publications.
6. A Text Book on Integral Calculus – S.K. Goyal - Jai Prakash Nath Publications.
7. Mathematics for Economics – Mehta, Madnani – Sultan Chand & Sons.
8. Differential and Integral Calculus - N. Piskunov - Mir Publishers, Moscow.
9. Differential and Integral Calculus - Schamum's Outline Series - Frank Ayres.
10. Calculus - S. Narayanan, T.K. Manicavachagom Pillay - S. Viswanathan - Printers and Publishers Pvt. Ltd.
11. Differential Equations and Its Applications - S. Narayanan, T. K. Manicavachagom Pillay.
12. Calculus (Volume I & II) - Tom. M. Apostol - John Wiley Publications.
13. Numerical Methods - P. Kandasamy, K. Thilagvathy, K. Gunavathi - S. Chand & Company.
14. Finite Differences and Numerical Analysis - H.C. Saxena, S. Chand & Company.
15. Applied Statistics by A. Chandrasekaran and A. Latha.
16. Basic Statistics : B.L. Agarwal, New Age International Publishers.
17. Business Statistics Problems and Solutions - J.K. Sharma, Vikas Publishing House Pvt Ltd.
18. Comprehensive Statistical Methods - P.N. Arora, Sumeet Arora and S. Arora.
19. Elements of Statistical Methods by P.N. Arora, Sumeet Arora.
20. Fundamentals of Statistics - S.C. Gupta, Himalaya Publishing House.
21. Fundamentals of Applied Statistics - S.C. Gupta and V.K. Kapoor, Sultan Chand & Sons.
22. Goon, A.M. Gupta M.K. and Das Gupta B (1977) An Outline of Statistical Theory, Vol I, 6/e, World Press, Calcutta.

XII Std - Business Maths & Stat TM Books for Ref.indd 244 09-05-2019 14:27:34

23. S.C. Gupta, V.K. Kapoor (2009) - Fundamentals of Mathematical Statistics, Sultan Chand & Sons, New Delhi.

24. Handbook of Basic Statistical Concepts for Scientists and Pharmacists by Shubha Rani.

25. Hogg. R.V. Craig. A.T. (1978) - Introduction to Mathematical Statistics, McGraw Hill Publishing Co. Inc. New York.

26. Introduction to Statistical Quality Control - Douglas C. Montgomery, Wiley Publications.

27. A.M. Mood, F.A. Graybill, D.C. Boes (1983) - Introduction to the Theory of Statistics. Third Edition, McGraw - Hill International Book Company.

28. Sanjay Arora and Bansilal (1989) - New Mathematical Statistics, Satyaprakashan, New Delhi.

29. Statistical Methods - S.P. Gupta, Sultan Chand & Sons.

30. Statistical Quality Control - Douglas C. Montgomery, Wiley Publications.

31. Statistical Quality Control - M. Mahajan, Dhanpat Rai & Co Publications.

32. Statistics Theory and Practice - R.S.N. Pillai and Bagavathi: S Chand.

33. Operations Research, Dr. S.P. Gupta, P.K. Gupta, Dr. Manmohan, Sultan Chand & Sons.

34. Operations Research, A. Ravindran, James J. Solberg, Willey Student Edition.

35. Operations Research, Frederick S. Hilton, Gerald J. Lieberman, Mc Graw Hill Education.

36. Operations Research – Dr. S.J. Venkatesan, Sri Krishna Publications, Chennai.

37. Business Mathematics and Statistics, H.S.C., First Year, Tamil Nadu Text Book Corporation.

38. Mathematics, H.S.C., First & Second Year, Tamil Nadu Text Book Corporation.

39. Statistics - H.S.C., First & Second Year, Tamil Nadu Text Book Corporation.

XII Std - Business Maths & Stat TM Books for Ref.indd 245 09-05-2019 14:27:34

வணிகக் கணிதம் மற்றும் புள்ளியியல் – மேல் நிலை இரண்டாமாண்டு
வல்லுநர்கள், மேலாய்வாளர்கள் மற்றும் நூலாசிரியர்கள் பெயர் பட்டியல்

பாடத் தயாரிப்புக்குழு தலைவர்

திரு. ந. இரமேஷ்
இணைப் பேராசிரியர் (ஓய்வு), கணிதத்துறை,
அரசு கலைக் கல்லூரி (ஆண்கள்),
நந்தனம், சென்னை.

மேலாய்வாளர்கள்

முனைவர் மா.ரெ. சீனிவாசன்
பேராசிரியர் மற்றும் துறைத் தலைவர்
புள்ளியியல் துறை, சென்னை பல்கலைக் கழகம்,
சென்னை.

முனைவர் தெ. அறிவுடைநம்பி
பேராசிரியர், கணிதத்துறை,
அண்ணா பல்கலைக் கழகம்,
சென்னை.

பாடப் பொருள் வல்லுநர்கள்

முனைவர் வேணு பிரகாஷ்
இணைப் பேராசிரியர் மற்றும் துறை தலைவர்,
புள்ளியியல் துறை,
மாநிலக் கல்லூரி , சென்னை.

முனைவர் இரா. திருமலைச்சாமி
இணைப் பேராசிரியர் மற்றும் துறைத் தலைவர்
கணிதத்துறை, அரசு கலைக் கல்லூரி (ஆண்கள்),
நந்தனம், சென்னை.

முனைவர் ச. ஜெ. வெங்கடேசன்
இணைப் பேராசிரியர்,
கணிதத்துறை, அரசு கலைக் கல்லூரி (ஆண்கள்),
நந்தனம், சென்னை.

திருமதி கி. கோகிலா
உதவி பேராசிரியர் மற்றும் துறைத் தலைவர்
புள்ளியியல் துறை,
டாக்டர் அம்பேத்கர் அரசினர் கலைக் கல்லூரி,
வியாசர்பாடி, சென்னை.

முனைவர் நா. சுந்தரம்
உதவி பேராசிரியர்,
புள்ளியியல் துறை,
மாநிலக் கல்லூரி , சென்னை.

முனைவர் லோ. பாரி தயாள்
உதவி பேராசிரியர், புள்ளியியல் துறை
சென்னை கிருத்துவக் கல்லூரி,
தாம்பரம், சென்னை.

திருமதி மே. திலகம்
உதவிப் பேராசிரியர் ,
புள்ளியியல் துறை,
மாநிலக் கல்லூரி, சென்னை.

பாடக்குழு பொறுப்பாளர்

திரு. இரவிக்குமார் ஆறுமுகம்
முதல்வர்
மாவட்ட ஆசிரியர் கல்வி மற்றும் பயிற்சி நிறுவனம்,
மாயனூர், கரூர் மாவட்டம்.

பாட நூல் ஒருங்கிணைப்பாளர்

திரு. பாபு சுப்பிரமணியன்
உதவி பேராசிரியர்
மாநிலக் கல்வியியல் ஆராய்ச்சி மற்றும் நிறுவனம்,
சென்னை.

நூலாசிரியர்கள்

திரு. இரா. வில்லவன்கோதை
தலைமை ஆசிரியர், அரசினர் மேல்நிலைப் பள்ளி,
கொருக்கை, நாகப்பட்டினம் மாவட்டம்.

திரு. தி.பி. சுவாமி நாதன்
முதுகலை கணித ஆசிரியர்,
மறைமலை அடிகளார் அரசு மேல்நிலைப் பள்ளி
பல்லாவரம், சென்னை.

திரு. ஹரி. வெங்கடேஷ்
முதுகலை கணித ஆசிரியர்,
சர் இராமசாமி முதலியார் மேல்நிலைப்பள்ளி,
அம்பத்தூர், சென்னை.

திருமதி சி. பகவதி
முதுகலைப் பட்டதாரி ஆசிரியர்,
ஸ்ரீ அகோபில மடம் ஓரியண்டல் மேல்நிலைப் பள்ளி,
மேற்கு மாம்பலம், சென்னை.

திரு. எஸ்.எப். சுலைமான்
முதுகலைப் பட்டதாரி ஆசிரியர்,
மறைமலை அடிகளார் அரசு மேல்நிலைப் பள்ளி
பல்லாவரம், சென்னை.

திரு. வீ. கலைச்செல்வன்
முதுகலைப் பட்டதாரி ஆசிரியர்,
அரசு மேல்நிலைப் பள்ளி, திருநின்றவூர், திருவள்ளூர் மாவட்டம்.

திரு. த. ராஜ சேகர்
முதுகலைப் பட்டதாரி ஆசிரியர்,
அரசு ஆண்கள் மேல்நிலைப் பள்ளி
குரோம் பேட்டை, காஞ்சிபுரம் மாவட்டம்.

திருமதி அ. சுகன்யா,
முதுகலை கணித ஆசிரியர், அரசு மேல்நிலைப் பள்ளி,
கோவிலம் பாக்கம், காஞ்சிபுரம் மாவட்டம்.

திரு. வெ. கணேசன்
முதுகலைப் பட்டதாரி ஆசிரியர்,
நேரு அரசினர் ஆண்கள் மேல்நிலைப் பள்ளி,
நங்கைநல்லூர், சென்னை.

திரு. ம.கோ. திரிலோகசந்திரன்
முதுகலை கணித ஆசிரியர், அரசு மேல்நிலைப் பள்ளி
மெய்யூர், திருவள்ளூர் மாவட்டம்.

ICT ஒருங்கிணைப்பாளர்

தா. வாசுராஜ்
முதுகலை கணித ஆசிரியர் மற்றும் துறைத் தலைவர்
கே. ஆர். எம்.பொதுப் பள்ளி, செம்மியம், சென்னை.

விரைவுக்குறியீடு மேலாண்மைக்குழு

இரா. ஜெகநாதன், இ.நி.ஆ., ஊ.ஒ.ந.நி.பள்ளி, கணேசபுரம், போளூர், திருவண்ணாமலை மாவட்டம். .

மு. சரவணன், ப.ஆ, அ.ம.மே.நி.பள்ளி, புதுப்பாளையம், வாழப்பாடி, சேலம்.

ம. முருகேசன், ப.ஆ, ஊ.ஒ.ந.நி.பள்ளி, பெத்தவேளாண்கோட்டகம், முத்துப்பேட்டை, திருவாரூர்.

புத்தக வடிவமைப்பாளர்

ஜாய் கிரா.ஃபிக்ஸ், சென்னை.

அட்டை வடிவமைப்பாளர்

கதிர் ஆறுமுகம்.

In-House QC

ராஜேஷ் தங்கப்பன், ஜெரால்டு வில்சன்

ஒருங்கிணைப்பாளர்

ரமேஷ் முனிசாமி

தட்டச்சு

கே. நாகவேலு

இந்நூல் 80ஜி.எஸ்.எம். எலிகண்ட் மேப்லித்தோ தாளில் அச்சிடப்பட்டுள்ளது.
ஆப்செட் முறையில் அச்சிட்டோர்:

XII Std - Business Maths & Stat TM Books for Ref.indd 246 09-05-2019 14:27:34

குறிப்புகள்

குறிப்புகள்

XII Std - Business Maths & Stat TM Books for Ref.indd 248 09-05-2019 14:27:34