প্ৰথম অধ্যায়

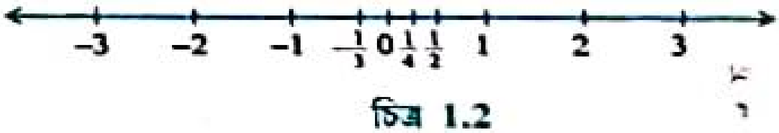
সংখ্যা প্ৰণালী (Number System)

1.1 অৱতাৰণা (Introduction) :

আগৰ শ্ৰেণীত তোমালোকে সংখ্যাৰেখাৰ বিষয়ে আৰু এই সংখ্যাৰেখাত বিভিন্ন প্ৰকাৰৰ সংখ্যা কি দৰে উপস্থাপন কৰিব পাৰি সেই সম্পৰ্কে শিকিছা। (চিত্ৰ 1.1 চোৱা)

চিত্ৰ 1.1 : সংখ্যাৰেখা

এই সংখ্যাৰেখাৰ ওপৰেদি শূন্যৰপৰা ৰেখাডালৰ ধনাত্মক দিশে খোজ কাঢ়ি গৈ আছা বুলি ভাবাচোন। এনে অৱস্থাত তোমাৰ দৃষ্টিৰে ঢুকি পোৱালৈকে মাথো সংখ্যা, সংখ্যা আৰু সংখ্যাকেই দেখা পাবা।



চিত্ৰ 1.2

এতিয়া ধৰি লোৱা, সংখ্যাৰেখাডালেৰে খোজকাঢ়ি গৈ থাকোতে কিছুমান সংখ্যা বুটলি গৈ আছা। এইবোৰ ভৰাবলৈ মোনা এটা সাজু কৰা।

প্ৰথমে তুমি নিশ্চয় 1, 2, 3, ... আদি স্বাভাৱিক সংখ্যাবোৰহে বুটলিবা। তুমি জানা যে এই তালিকাখনৰ কেতিয়াও অন্ত নপৰে। (এই কথাটো কিয় সত্য?) গতিকে তোমাৰ মোনাত এতিয়া অসীম সংখ্যক স্বাভাৱিক সংখ্যা আছে। মনত পেলোৱা যে এই সংখ্যাবোৰক N প্ৰতীকটোৰে সূচিত কৰা হয়।

এতিয়া তুমি অহা বাটেৰে উভতিবলৈ আৰম্ভ কৰা আৰু আহোঁতে যেতিয়া শূন্যটো পাবাহি তেতিয়া শূন্যটোকো মোনাত ভৰাই লোৱা। তোমাৰ মোনাত এইদৰে গোটখোৱা আটাইবোৰ সংখ্যাই পূৰ্ণসংখ্যা (Whole numbers) যিবোৰক W প্ৰতীকেৰে সূচিত কৰা হয়।

উভতনি যাত্ৰাত তোমাৰ সন্মুখত শূন্যৰ বাওঁফালে দীঘলীয়াকৈ শাৰী পাতি আছে অসংখ্য ঋণাত্মক অখণ্ড সংখ্যা। এই গোটেইবোৰ ঋণাত্মক অখণ্ড সংখ্যা মোনাত ভৰাই লোৱা। মোনাটোত এতিয়া গোটখোৱা এই সংখ্যাবোৰ কি? মনত পেলোৱা যে এনেদৰে গোটখোৱা এই সংখ্যাবোৰেই 'অখণ্ড সংখ্যা' (Integer) আৰু এইবোৰক Z প্ৰতীকেৰে সূচিত কৰা হয়।

সংখ্যাৰেখাডালত এতিয়া বাকী কিবা সংখ্যা ৰৈ গ'ল নেকি? নিশ্চয় ৰৈছে। $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}$ বা $\frac{-2005}{2006}$ ৰ

নিচিনা বহু সংখ্যা হৈ গৈছে। যদি এই ধৰণৰ সকলো সংখ্যাকে মোনাটোত ভৰাই লোৱা হয় তেনেহ'লে মোনাটোত গোট খোৱা এই আটাইবোৰেই সংখ্যা হ'ল 'পৰিমেয় সংখ্যা' (Rational numbers)। পৰিমেয় সংখ্যাবোৰৰ সংগ্ৰহক Qৰে সূচিত কৰা হয়। 'Rational' শব্দটো 'Ratio'ৰ পৰা আহিছে আৰু Quotient ৰ পৰা Q লোৱা হৈছে।

তোমালোকে পৰিমেয় সংখ্যাৰ সংজ্ঞা মনত পেলাব পাৰা—

এটা সংখ্যা 'r' ক পৰিমেয় সংখ্যা বুলি কোৱা হয় যদিহে ইয়াক $\frac{p}{q}$ আৰ্হিত প্ৰকাশ কৰিব পাৰি য'ত p, q অখণ্ড সংখ্যা আৰু $q \neq 0$। ($q \neq 0$ বুলি কিয় জোৰ দিয়া হৈছে?)

লক্ষ্য কৰা যে এতিয়া মোনাৰ ভিতৰত থকা সকলোবোৰ সংখ্যাক $\frac{p}{q}$ আকাৰত (ইয়াত p, q অখণ্ড সংখ্যা আৰু $q \neq 0$) প্ৰকাশ কৰিব পাৰি। উদাহৰণ স্বৰূপে, -25, ক $\frac{-25}{1}$ ৰূপত প্ৰকাশ কৰিব পাৰি (ইয়াত p = -25, q = 1) । গতিকে পৰিমেয় সংখ্যাৰ সংগ্ৰহটোত স্বাভাৱিক সংখ্যা,পূৰ্ণ সংখ্যা আৰু অখণ্ড সংখ্যাবিলাকো সোমাই আছে।

তোমালোকে ইয়াকো জানা যে পৰিমেয় সংখ্যাবিলাক প্ৰকাশ কৰাৰ এই $\frac{p}{q}$ আৰ্হিটো (ইয়াত p, q অখণ্ড সংখ্যা আৰু $q \neq 0$) অদ্বিতীয় নহয়। উদাহৰণ স্বৰূপে, $\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{10}{20}=\frac{25}{50}=\frac{47}{94}$ ইত্যাদি। এইবিলাক সমতুল্য পৰিমেয় সংখ্যা (বা ভগ্নাংশ)। সেয়ে হ'লেও, আমি যেতিয়া কওঁ যে $\frac{p}{q}$ এটা পৰিমেয় সংখ্যা, অথবা $\frac{p}{q}$ ক যেতিয়া সংখ্যাৰেখাত উপস্থাপন কৰা হয়, তেতিয়া আমি ধৰি লওঁ যে $q \neq 0$ আৰু p আৰু q ৰ মাজত 1 ৰ বাহিৰে অন্য সাধাৰণ উৎপাদক নাই (অৰ্থাৎ p আৰু q পৰস্পৰ মৌলিক)। সেই কাৰণে $\frac{1}{2}$ ৰ অসীম সংখ্যক সমতুল্য ভগ্নাংশৰ মাজৰ পৰা এই আটাইবোৰকে প্ৰতিনিধিত্ব কৰাকৈ সংখ্যাৰেখাত উপস্থাপন কৰি দেখুওৱাৰ ক্ষেত্ৰত $\frac{1}{2}$ কেই লোৱা হয়।

এতিয়া, তোমালোকে আগৰ শ্ৰেণীত শিকি অহা বিভিন্ন প্ৰকাৰৰ সংখ্যা সম্পৰ্কত কিছুমান উদাহৰণ সমাধান কৰোঁ আহাঁ।

উদাহৰণ 1 : যুক্তি দৰ্শাই তলৰ উক্তিবিলাক সঁচা নে মিছা লিখা—

(i) প্ৰতিটো পূৰ্ণ সংখ্যাই এটা স্বাভাৱিক সংখ্যা।

(ii) প্ৰতিটো অখণ্ড সংখ্যাই এটা পৰিমেয় সংখ্যা।

(iii) প্ৰতিটো পৰিমেয় সংখ্যাই এটা অখণ্ড সংখ্যা।

সমাধান : (i) উক্তিটো মিছা। কাৰণ শূন্যটো পূৰ্ণসংখ্যা হয়, কিন্তু স্বাভাৱিক সংখ্যা নহয়।

(ii) উক্তিটো সত্য। কাৰণ প্ৰতিটো অখণ্ড সংখ্যা m ক $\frac{m}{1}$ আৰ্হিত প্ৰকাশ কৰিব পাৰি আৰু সেয়ে ই পৰিমেয়।

(iii) উক্তিটো মিছা, কাৰণ $\frac{3}{5}$ সংখ্যাটো অখণ্ড সংখ্যা নহয়।

উদাহৰণ 2 : 1 আৰু 2 মাজত থকা পাঁচটা পৰিমেয় সংখ্যা উলিওৱা।

এই অংকটো অতি কমেও দুটা বিভিন্ন পদ্ধতিৰে সমাধান কৰিব পাৰি।

প্ৰথম সমাধান : মনত পেলোৱা যে r আৰু s ৰ মাজত এটা পৰিমেয় সংখ্যাৰ বাবে r আৰু s ক যোগ কৰি এই যোগফলক 2 ৰে হৰণ কৰিব পাৰা। অৰ্থাৎ r আৰু s ৰ মাজত $\frac{r+s}{2}$ থাকে। গতিকে $\frac{3}{2}$ সংখ্যাটো 1 আৰু 2 ৰ মাজত থাকে। এই ধৰণেৰে আগবাঢ়ি তোমালোকে 1 আৰু 2 ৰ মাজত থকা আৰু চাৰিটা পৰিমেয় সংখ্যা উলিয়াব পাৰিবা। এই চাৰিটা পৰিমেয় সংখ্যা হ'ল $\frac{5}{4}, \frac{11}{8}, \frac{13}{8}$ আৰু $\frac{7}{4}$।

দ্বিতীয় সমাধান : এই পদ্ধতিত পাঁচটা পৰিমেয় সংখ্যাৰ আটাইকেইটাকে একেবাৰতে উলিয়াব পাৰি। আমাক যিহেতু পাঁচটা সংখ্যা লাগে, গতিকে 1 আৰু 2 ক $5 + 1$ হৰযুক্ত পৰিমেয় সংখ্যা হিচাপে প্ৰকাশ কৰিম। অৰ্থাৎ $1 = \frac{6}{6}$ আৰু $2 = \frac{12}{6}$ হ'ব। এতিয়া তুমি ভালকৈ চালে বুজিবা যে $\frac{7}{6}, \frac{8}{6}, \frac{9}{6}, \frac{10}{6}$ আৰু $\frac{11}{6}$ এই আটাইকেইটা 1 আৰু 2 ৰ মাজত থকা পৰিমেয় সংখ্যা। গতিকে উলিয়াবলগীয়া পাঁচটা পৰিমেয় সংখ্যা হ'ল $\frac{7}{6}, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}$ আৰু $\frac{11}{6}$।

মন্তব্য : মন কৰা যে উদাহৰণ-2 ত তোমাক 1 আৰু 2 ৰ মাজত থকা পাঁচটা পৰিমেয় সংখ্যা উলিয়াবলৈ কৈছে। কিন্তু তুমি নিশ্চয় অনুমান কৰিব পাৰিছা যে 1 আৰু 2 ৰ মাজত প্ৰকৃততে

অসীম সংখ্যক পৰিমেয় সংখ্যা আছে। সাধাৰণতে যিকোনো দুটা প্ৰদত্ত পৰিমেয় সংখ্যাৰ মাজত অসীম সংখ্যক পৰিমেয় সংখ্যা থাকে।

আমি আকৌ সংখ্যাৰেখালৈ মন কৰো। তুমি সংখ্যাৰেখাৰ পৰা আটাইবোৰ সংখ্যা বুটলি ল'ব পাৰিলানে? নিশ্চয় পৰা নাই। আচল কথাটো হ'ল যে সংখ্যাৰেখাডালত এতিয়াও অসীম সংখ্যক সংখ্যা বৈ গৈছে। ইতিমধ্যে তুমি বুটলি লোৱা সংখ্যাবিলাকৰ মাজত এটা বা দুটাই নহয়, অসীম সংখ্যক ব্যৱধানেই বৈ গৈছে। আশ্চৰ্যজনক কথাটো হ'ল যে এনে ধৰণৰ যিকোনো দুটা ব্যৱধানৰ মাজতো অসীম সংখ্যক সংখ্যা আছে।

গতিকে এতিয়া তলৰ প্ৰশ্নকেইটা আমাৰ সন্মুখত বৈ গৈছে—

1. সংখ্যাৰেখাত যিবোৰ সংখ্যা বৈ গৈছে সেইবোৰক কি বুলি কোৱা হয়?
2. এইবোৰক কেনেকৈ চিনাক্ত কৰিব পাৰিম? অৰ্থাৎ এই সংখ্যাবোৰক পৰিমেয় সংখ্যাবিলাকৰ পৰা কেনেকৈ পৃথক কৰিম?

পৰৱৰ্তী অনুচ্ছেদত এই প্ৰশ্নসমূহৰ উত্তৰ আগবঢ়োৱা হ'ব।

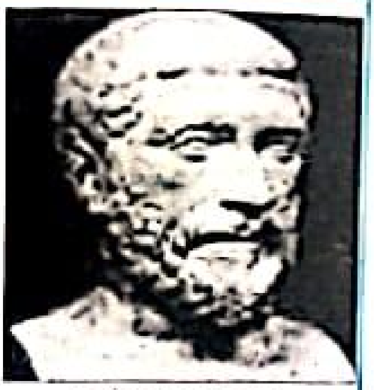
অনুশীলন 1.1

1. শূন্যটো পৰিমেয় সংখ্যা হয়নে? ইয়াক $\frac{p}{q}$ আৰ্হিত (ইয়াত p, q অখণ্ড সংখ্যা আৰু $(q \neq 0)$ প্ৰকাশ কৰিব পাৰিনে?
2. 3 আৰু 4 ৰ মাজত থকা ছটা পৰিমেয় সংখ্যা উলিওৱা।
3. $\frac{3}{5}$ আৰু $\frac{4}{5}$ ৰ মাজত থকা পাঁচটা পৰিমেয় সংখ্যা উলিওৱা।
4. তলৰ উক্তিসমূহ সঁচানে মিছা লিখা। উত্তৰ সমূহৰ সমৰ্থনত যুক্তি উল্লেখ কৰিবা।
   (i) প্ৰতিটো স্বাভাৱিক সংখ্যাই এটা পূৰ্ণ সংখ্যা।
   (ii) প্ৰতিটো অখণ্ড সংখ্যাই এটা পূৰ্ণ সংখ্যা।
   (iii) প্ৰতিটো পৰিমেয় সংখ্যাই এটা পূৰ্ণ সংখ্যা।

1.2 অপৰিমেয় সংখ্যা (Irrational Numbers) ঃ

আগৰ অনুচ্ছেদত দেখিলো যে সংখ্যাৰেখাডালত কিছুমান এনে সংখ্যা থাকিব পাৰে যিবোৰ পৰিমেয় সংখ্যা নহয়। এই অনুচ্ছেদত সেই সংখ্যাবোৰৰ অনুসন্ধান কৰিম। এতিয়ালৈকে যিবোৰ সংখ্যা তুমি পালা সেই বিলাক $\frac{p}{q}$ আৰ্হিৰ, য'ত p, q অখণ্ড সংখ্যা আৰু $q \neq 0$। গতিকে তুমি প্ৰশ্ন কৰিব পাৰা যে এই আৰ্হিত নথকা সংখ্যা আছে নে? বাস্তৱিকতে তেনে ধৰণৰ সংখ্যা আছে।

বিখ্যাত গণিতজ্ঞ আৰু দাৰ্শনিক পাইথাগোৰাচৰ অনুগামী গ্ৰীচদেশৰ পাইথাগোৰীয়সকলে খৃষ্টপূৰ্ব 400 মানত পোন প্ৰথম সেই ধৰণৰ সংখ্যা আবিষ্কাৰ কৰিছিল যি বিলাক পৰিমেয় সংখ্যা নহয়। এই সংখ্যাবোৰক অপৰিমেয় সংখ্যা বুলি কোৱা হয়, কাৰণ এইবিলাকক দুটা অখণ্ড সংখ্যাৰ অনুপাত হিচাপে প্ৰকাশ কৰিব নোৱাৰি। পাইথাগোৰাচৰ অনুগামী ক্ৰ'টনৰ হিপ্পাকাচে (Hippacus of Croton) অপৰিমেয় সংখ্যাৰ আবিষ্কাৰ কৰা সম্পৰ্কত অনেক প্ৰবাদ জড়িত হৈ আছে। এই প্ৰবাদ সমূহৰ মতে, $\sqrt{2}$ যে অপৰিমেয় সেই কথা আবিষ্কাৰ কৰাৰ বাবে অথবা $\sqrt{2}$ সম্পৰ্কীয় গুপুত কথা বিলাক গুপ্ত পাইথাগোৰীয় চক্ৰটোৰ বাহিৰৰ মানুহক জনোৱাৰ বাবে হিপ্পাকাচৰ জীৱনৰ কৰুণ পৰিসমাপ্তি ঘটিছিল।



পাইথাগোৰাচ
(খৃষ্টপূৰ্ব 569-479)
চিত্ৰ 1.3

এতিয়া আমি আনুষ্ঠানিকভাৱে এই সংখ্যাবিলাকৰ সংজ্ঞা দিম।

'এটা সংখ্যা 's' ক অপৰিমেয় বুলি কোৱা হয় যদিহে ইয়াক $\frac{p}{q}$ আৰ্হিত, (ইয়াত p, q অখণ্ড সংখ্যা আৰু $q \neq 0$) প্ৰকাশ কৰিব নোৱাৰি।'

তুমি ইতিমধ্যে জানাই যে পৰিমেয় সংখ্যা অসীম সংখ্যক আছে। দেখা যায় যে অপৰিমেয় সংখ্যাও অসীম সংখ্যক আছে। অপৰিমেয় সংখ্যাৰ কিছুমান উদাহৰণ হ'ল—

$\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{15}$, π, 0.10110111011110....... আদি।

মন্তব্য : মনত পেলোৱা যে, যেতিয়া আমি '$\sqrt{\ }$' প্ৰতীকটো ব্যৱহাৰ কৰো তেতিয়া আমি ধৰি লওঁ যে ই সংখ্যাটোৰ ধনাত্মক বৰ্গমূল। গতিকে $\sqrt{4} = 2$, যদিও 2 আৰু -2 দুয়োটাই 4 ৰ বৰ্গমূল। ওপৰত উল্লেখ কৰা অপৰিমেয় সংখ্যাবিলাকৰ কিছুমান তোমাৰ পৰিচিত। উদাহৰণ স্বৰূপে তুমি ওপৰত দিয়া ধৰণৰ বহুতো বৰ্গমূল ইতিমধ্যে পাইছা আৰু π ৰ বিষয়েও শিকিছা।

পাইথাগোৰীয়সকলে প্ৰমাণ কৰিছিল যে $\sqrt{2}$ অপৰিমেয়। পৰৱৰ্তী সময়ত, প্ৰায় 425 খৃষ্টপূৰ্বত, চিৰিনৰ থিয়'ড'ৰাচে (Theodorus of Cyrene) দেখুৱাইছিল যে $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{11}$, $\sqrt{12}$, $\sqrt{13}$, $\sqrt{14}$, $\sqrt{15}$, আৰু $\sqrt{17}$ এই সংখ্যাবিলাকো অপৰিমেয়। $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, আদিৰ অপৰিমেয়তাৰ প্ৰমাণবিলাক দশম শ্ৰেণীত আলোচনা কৰা হ'ব। বিভিন্ন সংস্কৃতিৰ লগত বহু হাজাৰ বছৰ ধৰি পৰিচিত π যে অপৰিমেয় সংখ্যা তাৰ প্ৰমাণ সোতৰ শতিকাৰ শেষৰ

ফালে লেম্বাৰ্ট (Lambert) আৰু লিজেণ্ডাৰে (Legendre) দাঙি ধৰিছিল। 0.10110111011110... আৰু π যে অপৰিমেয় সেই বিষয়ে পিছৰ অনুচ্ছেদত আলোচনা কৰা হ'ব।

এতিয়া আমি, আগৰ অনুচ্ছেদৰ শেষত উল্লেখ কৰা প্ৰশ্ন সমূহলৈ উভতি যাওঁ। পৰিমেয় সংখ্যা থকা মোনাটোলৈ মনত পেলোৱা। যদিহে অপৰিমেয় সংখ্যাবিলাকো মোনাটোত সুমুৱাই দিয়া হয়, তেতিয়া হ'লে সংখ্যাৰেখাডালত কিবা সংখ্যা বৈ যাবনে? দেখিম যে নাই। ইয়াৰ পৰা ওলাই পৰিল যে পৰিমেয় আৰু অপৰিমেয় সংখ্যাবিলাক লগ হৈ হোৱা সংগ্ৰহটোৱেই হ'ল আমি কোৱা বাস্তৱ সংখ্যা (Real numbers) ৰ সংগ্ৰহ যাক R প্ৰতীকেৰে বুজোৱা হয়। গতিকে এটা বাস্তৱ সংখ্যা হয় পৰিমেয় অথবা অপৰিমেয় হ'ব। সেই বাবেই আমি ক'ব পাৰো যে 'প্ৰতিটো পৰিমেয় বাস্তৱ সংখ্যাকেই সংখ্যাৰেখাডালত থকা এটা অদ্বিতীয় বিন্দুৱে প্ৰতিনিধিত্ব কৰে।' আকৌ 'সংখ্যাৰেখাডালৰ প্ৰতিটো বিন্দুৰ বাবে এটা অদ্বিতীয় বাস্তৱ সংখ্যা আছে।' এই কাৰণেই আমি সংখ্যাৰেখাডালক 'বাস্তৱ সংখ্যাৰেখা' বুলি কওঁ।

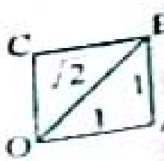
আৰ ডেডেকিণ্ড
(1831-1916)
চিত্ৰ 1.4

1870 চনত কেণ্টৰ আৰু ডেডেকিণ্ড নামৰ দুজন জাৰ্মান গণিতজ্ঞই দেখুৱাইছিল যে 'প্ৰতিটো বাস্তৱ সংখ্যাৰ অনুৰূপে সংখ্যাৰেখাডালত এটা বিন্দু আছে, আৰু সেইদৰে সংখ্যাৰেখাৰ প্ৰতিটো বিন্দুৰ অনুৰূপে এটা অদ্বিতীয় বাস্তৱ সংখ্যা আছে।'

জি কেণ্টৰ
(1845-1918)
চিত্ৰ 1.5

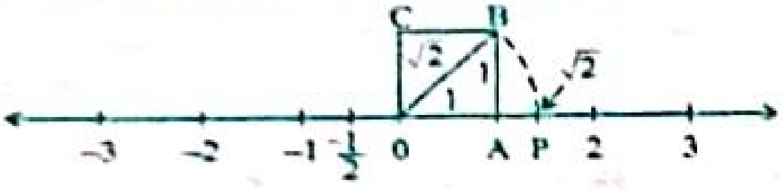
এতিয়া কেইটামান অপৰিমেয় সংখ্যাৰ অৱস্থান সংখ্যাৰেখাত কেনেকৈ নিৰূপণ কৰিব পাৰি চাওঁ।

উদাহৰণ-3 : সংখ্যাৰেখাত $\sqrt{2}$ ৰ অৱস্থান নিৰ্ণয় কৰা।



চিত্ৰ 1.6

সমাধান : গ্ৰীকসকলে কেনেকৈনো $\sqrt{2}$ আৱিষ্কাৰ কৰিব পাৰিছিল সেয়া সহজে কৰি চাব পৰা যায়। এটা একক বৰ্গক্ষেত্ৰ OABC লোৱা যাৰ প্ৰতিটো বাহুৰ দৈৰ্ঘ্য এক একক (চিত্ৰ 1.6 চোৱা)। ইয়াৰ পৰা পাইথাগোৰাচৰ সূত্ৰ ব্যৱহাৰ কৰিলে পাবা যে $OB = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$ । এতিয়া সংখ্যাৰেখাত $\sqrt{2}$ ক কেনেকৈ দেখুৱাবা?

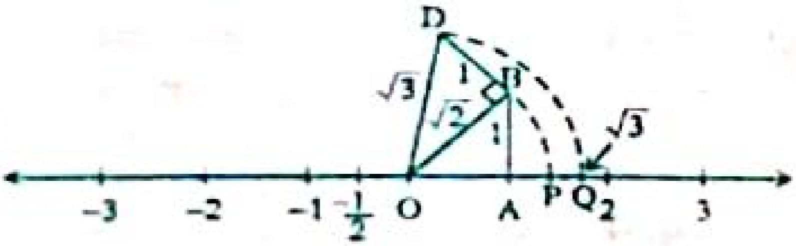


চিত্র 1.7

পদ্ধতিটো অতি সহজ। 1.6 চিত্রটো সংখ্যাৰেখাৰ ওপৰত এনেকৈ অংকন কৰা যাতে O শীৰ্ষবিন্দুটো সংখ্যাৰেখাৰ শূন্যৰ ওপৰতে থাকে (চিত্র 1.7 চোৱা)। ইতিমধ্যে পালো যে OB = $\sqrt{2}$ । এতিয়া কম্পাচৰ সহায়ত O বিন্দুক কেন্দ্ৰ ধৰি আৰু OB ক ব্যাসাৰ্ধ হিচাপে লৈ এটা বৃত্তৰ চাপ অংকন কৰা। এই চাপে সংখ্যাৰেখাক P বিন্দুত ছেদ কৰিছে। এই P বিন্দুটোৱেই সংখ্যাৰেখাত $\sqrt{2}$ ৰ অৱস্থান নিৰ্দেশ কৰে।

উদাহৰণ 4 : সংখ্যাৰেখাত $\sqrt{3}$ ৰ অৱস্থান নিৰূপণ কৰা।

সমাধান : চিত্র 1.7 লৈ উভতি যোৱা।



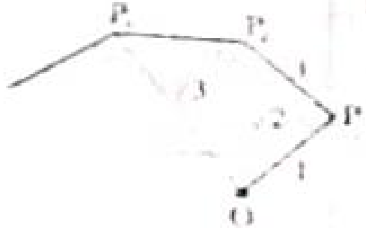
চিত্র 1.8

এক একক দৈৰ্ঘ্যৰ BD ৰেখাখণ্ড OB ৰ ওপৰত লম্ব হিচাপে অংকন কৰা। (চিত্র 1.8 ত দেখুওৱাৰ দৰে)। এতিয়া পাইথাগোৰাচৰ উপপাদ্য ব্যৱহাৰ কৰিলে পাওঁ যে OD = $\sqrt{\left(\sqrt{2}^2\right)+1^2} = \sqrt{3}$ কম্পাচৰ সহায়ত O বিন্দুক কেন্দ্ৰ আৰু OD ক ব্যাসাৰ্ধ হিচাপে লৈ এটা বৃত্তৰ চাপ অংকন কৰিলে এই চাপে সংখ্যাৰেখাক Q বিন্দুত ছেদ কৰিব। এই Q বিন্দুৱেই $\sqrt{3}$ ৰ অৱস্থান নিৰ্দেশ কৰে।

এইদৰেই, কোনো ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা n ৰ বাবে, $\sqrt{n-1}$ ৰ অৱস্থান জনাৰ পিছত $\sqrt{n}$ ৰ অৱস্থান নিৰ্ণয় কৰিব পাৰিবা।

অনুশীলনী 1.2

1. তলৰ উক্তি বিলাক সত্য নে অসত্য উল্লেখ কৰা। তোমাৰ উত্তৰৰ যথাৰ্থতা প্ৰতিপন্ন কৰা।
   (i) প্ৰতিটো অপৰিমেয় সংখ্যাই এটা বাস্তৱ সংখ্যা।
   (ii) সংখ্যাৰেখাৰ প্ৰতিটো বিন্দুৱেই $\sqrt{m}$ আৰ্হিৰ, য'ত m এটা স্বাভাৱিক সংখ্যা।
   (iii) প্ৰতিটো বাস্তৱ সংখ্যাই এটা অপৰিমেয় সংখ্যা।
2. সকলো ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যাৰ বৰ্গমূল অপৰিমেয় নে? যদি নহয়, তেনেহ'লে এটা সংখ্যাৰ উদাহৰণ দিয়া যাৰ বৰ্গমূল এটা পৰিমেয় সংখ্যা।
3. সংখ্যাৰেখাত কিদৰে $\sqrt{5}$ ক সূচিত কৰিব পাৰি দেখুওৱা।
4. **শ্ৰেণীকক্ষত কৰিবলগীয়া কাৰ্য** ('বৰ্গমূল কুণ্ডলী' গঠন) :
   এখিলা ডাঙৰ কাগজ লোৱা আৰু তলত দিয়া ধৰণেৰে এটা 'বৰ্গমূল কুণ্ডলী' গঠন কৰা। O বিন্দুক আদি বিন্দু হিচাপে লৈ এক একক দৈৰ্ঘ্যৰ OP_1 ৰেখাখণ্ড অংকন কৰা। P_1P_2 ৰেখাখণ্ডক এক একক দৈৰ্ঘ্যৰ জোখত লৈ OP_1ৰ ওপৰত লম্বভাৱে আঁকা (চিত্ৰ 1.9 চোৱা)। এতিয়া P_2P_3 ৰেখাখণ্ডক এক একক দৈৰ্ঘ্য ধৰি OP_2 ৰ ওপৰত লম্বভাৱে অংকন কৰা। P_3P_4 ক একক দৈৰ্ঘ্যৰ লৈ OP_3ৰ ওপৰত লম্বভাৱে লোৱা। এই ধৰণেৰে একেৰাহে অংকন কৰি গৈ থাকিলে OP_{n-1}ৰ ওপৰত লম্বহৈ থকাকৈ এক একক দৈৰ্ঘ্যৰ $P_{n-1}P_n$ ৰেখাখণ্ড আঁকিব পৰা যাব। এই পদ্ধতিৰে $P_2, P_3, P_4, \ldots P_n, \ldots$ ইত্যাদি যিবিলাক বিন্দু পাবা সেই প্ৰতিটোকে O ৰ লগত ৰেখাখণ্ডৰে সংযুক্ত কৰি $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \ldots$ ৰ সুন্দৰ কুণ্ডলী সাজিব পাৰিবা।



চিত্ৰ 1.9 : **বৰ্গমূল কুণ্ডলী গঠন**

1.3 বাস্তৱ সংখ্যা আৰু সেইবিলাকৰ দশমিক বিস্তৃতি (Real Numbers and their Decimal Expansions) :

এই অনুচ্ছেদত আমি পৰিমেয় আৰু অপৰিমেয় সংখ্যাৰ বিষয়ে অন্য এটা দৃষ্টিকোণৰ পৰা আলোচনা কৰিম। ইয়াত বাস্তৱ সংখ্যা বিলাকৰ দশমিক বিস্তৃতি লক্ষ্য কৰিম আৰু তাৰ সহায়ত পৰিমেয় আৰু অপৰিমেয় সংখ্যাবিলাকৰ মাজৰ প্ৰভেদ নিৰ্ণয় কৰিব পাৰি নেকি চোৱা হ'ব। ইয়াৰ লগতে দশমিক বিস্তৃতিৰ সহায়ত সংখ্যাৰেখাত বাস্তৱ সংখ্যাবিলাকৰ উপস্থাপন কিদৰে দৃশ্যমান কৰিব পাৰি সেই বিষয়েও ব্যাখ্যা কৰা হ'ব। যিহেতু পৰিমেয় সংখ্যাবিলাক আমাৰ বেছি পৰিচিত, গতিকে এই বিলাকেৰেই আলোচনা আৰম্ভ কৰা হওক। তিনিটা উদাহৰণ লওঁ : $\frac{10}{3}, \frac{7}{8}, \frac{1}{7}$ ভাগশেষবিলাকলৈ বিশেষ দৃষ্টি দিয়া আৰু সেইবিলাকৰ কিবা আৰ্হি বিচাৰি পোৱা নেকি মন কৰা।

উদাহৰণ 5 : $\frac{10}{3}, \frac{7}{8},$ আৰু $\frac{1}{7}$ ৰ দশমিক বিস্তৃতি নিৰ্ণয় কৰা।

সমাধান :

$$
\begin{array}{r|l}
 & 3.333... \\ \hline
3 & 10 \\
 & \underline{9} \\
 & 10 \\
 & \underline{9} \\
 & 10 \\
 & \underline{9} \\
 & 10 \\
 & \underline{9} \\
 & 1
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
 & 0.875 \\ \hline
8 & 7.0 \\
 & \underline{64} \\
 & 60 \\
 & \underline{56} \\
 & 40 \\
 & \underline{40} \\
 & 0
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
 & 0.142857... \\ \hline
7 & 1.0 \\
 & \underline{7} \\
 & 30 \\
 & \underline{28} \\
 & 20 \\
 & \underline{14} \\
 & 60 \\
 & \underline{56} \\
 & 40 \\
 & \underline{35} \\
 & 50 \\
 & \underline{49} \\
 & 1
\end{array}
$$

ভাগশেষ : 1, 1, 1, 1, 1...
ভাজক : 3

ভাগশেষ : 6, 4, 0....
ভাজক : 8

ভাগশেষ : 3, 2, 6, 4, 5, 1, 3, 2, 6, 4, 5, 1, ...
ভাজক : 7

তোমালোকে কি দেখিলা? তোমালোকে অতি কমেও তিনিটা বস্তু দেখা পাব লাগে :

(i) এটা নিৰ্দ্দিষ্ট পৰ্যায়ৰ পিছত ভাগশেষ 0 হয় অথবা সিহঁতৰ পুনৰাবৃত্তি হয়।

(ii) ভাগশেষৰ পুনৰাবৰ্তন তন্ত্ৰী (Repeating String) ডালত থকা প্ৰবৃষ্টিৰ সংখ্যা ভাজকতকৈ সৰু ($\frac{1}{3}$ ৰ ক্ষেত্ৰত এটা সংখ্যাৰ পুনৰাবৃত্তি হয় আৰু ইয়াত ভাজক 3, $\frac{1}{7}$ ৰ ক্ষেত্ৰত ভাগশেষৰ পুনৰাবৰ্তন তন্ত্ৰী ডালত 3, 2, 6, 4, 5, 1 এই ছটা প্ৰবৃষ্টি আছে আৰু ভাজক 7)

(iii) যদি ভাগশেষবিলাকৰ পুনৰাবৃত্তি ঘটে, তেনেহ'লে ভাগফলত পুনৰাবৰ্তিত অংকৰ গোট দেখা যায় ($\frac{1}{3}$ ৰ ক্ষেত্ৰত ভাগফলত 3 ৰ পুনৰাবৃত্তি হয় আৰু $\frac{1}{7}$ ৰ ক্ষেত্ৰত ভাগফলত পুনৰাবৰ্তিত অংকৰ গোট 142857 পোৱা যায়)।

যদিও ওপৰত দিয়া কেইটামান উদাহৰণৰ ক্ষেত্ৰতহে এই আৰ্হি দেখা গৈছে, কিন্তু $\frac{p}{q} (q \neq 0)$

আকাৰত থকা সকলো পৰিমেয় সংখ্যাৰ ক্ষেত্ৰতেই এই কথা সত্য। P ক q বে হৰণ কৰিলে দুটা প্ৰধান ঘটনা সংঘটিত হয়— হয়তো ভাগশেষ শূন্য হয় নাইবা ভাগশেষ কেতিয়াও শূন্য নহয় আৰু এই ক্ষেত্ৰত ভাগশেষৰ পুনৰাবৰ্ত্তন তন্ত্ৰী এড়াল পোৱা যায়। এতিয়া এই অৱস্থা দুটাৰ প্ৰতিটোকে পৃথক ভাবে চোৱা যাওঁক।

অৱস্থা (i) : ভাগশেষ শূন্য হয়

$\frac{7}{8}$ ৰ ক্ষেত্ৰত পালো যে কেইটামান ঢাপৰ পিছত ভাগশেষ শূন্য হয় আৰু দশমিক বিস্তৃতিত $\frac{7}{8} = 0.875$। অন্য কেইটামান উদাহৰণ হ'ল $\frac{1}{2} = 0.5$, $\frac{639}{250} = 2.556$। এই সকলো কেইটা উদাহৰণত কেইটামান নিৰ্দ্দিষ্ট ঢাপৰ পিছত দশমিক বিস্তৃতিৰ অন্ত পৰে। এই ধৰণৰ সংখ্যা বিলাকৰ দশমিক বিস্তৃতিক পৰিসমাপ্ত (terminating) বুলি কোৱা হয়।

অৱস্থা (ii) : ভাগশেষ কেতিয়াও শূন্য নহয়

$\frac{1}{3}$ আৰু $\frac{1}{7}$ ৰ উদাহৰণ দুটাত লক্ষ্য কৰিছো যে কেইটামান নিৰ্দ্দিষ্ট ঢাপৰ পিছত ভাগশেষবিলাকৰ পুনৰাবৃত্তি ঘটে আৰু সেইবাবেই দশমিক বিস্তৃতি অনন্ত কাললৈ চলি থাকে। অন্য ধৰণেৰে ক'বলৈ হ'লে ভাগফলত অংকৰ পুনৰাবৰ্ত্তিত গোট দেখা যায়। এই ধৰণৰ বিস্তৃতিক অবিৰত পৌনঃপুনিক বা নিৰবধি পুনৰাবৃত্ত (non-terminating recurring) বুলি কোৱা হয়। উদাহৰণ স্বৰূপে

$\frac{1}{3} = 0.3333.........$ আৰু $\frac{1}{7} = 0.142857142857142857......$

সচৰাচৰ $\frac{1}{3}$ ৰ ভাগফলত 3 ৰ পুনৰাবৃত্তিক $0.\bar{3}$ বে দেখুওৱা হয়। সেইদৰে $\frac{1}{7}$ ৰ ভাগফলত 142857 এই অংকৰ গোটটোৰ পুনৰাবৃত্তি ঘটে কাৰণে $\frac{1}{7}$ ৰ দশমিক বিস্তৃতিক $0.\overline{142857}$ ৰূপত লিখা হয়। ইয়াত অংককেইটাৰ ওপৰৰ মাত্ৰাডালে (Bar) সেই অংককেইটাৰ পুনৰাবৃত্তি হোৱা বুজাইছে। তদুপৰি, 3.57272....... ক $3.5\overline{72}$ ৰূপত লিখা হয়। গতিকে এই বিলাক অবিৰত পৌনঃপুনিক দশমিক বিস্তৃতিৰ উদাহৰণ।এনেদৰে আমি দেখিলো যে পৰিমেয় সংখ্যাৰ দশমিক বিস্তৃতিৰ দুটাই বিকল্প থাকেঃ পৰিসমাপ্তি ঘটে অথবা অবিৰত পৌনঃপুনিক হয়।

অন্যহাতেদি, ধৰিলোৱা সংখ্যাৰেখাৰ ওপৰেদি খোজ কাঢ়ি গৈ থাকোতে 3.142678 ধৰণৰ এটা সংখ্যা পালা যাৰ দশমিক বিস্তৃতিৰ পৰিসমাপ্তি ঘটিছে, অথবা 1.272727... অৰ্থাৎ $1.\overline{27}$ ধৰণৰ এটা সংখ্যা পালা যাৰ দশমিক বিস্তৃতি অবিৰত পৌনঃপুনিক। এই সংখ্যাবিলাক পৰিমেয় বুলি ক'ব

পাৰিবানে? উত্তৰ হ'ব 'হয় ক'ব পাৰি'।

আমি এই কথাটো প্ৰমাণ নকৰো, কিন্তু কেইটামান উদাহৰণৰ সহায়ত ব্যাখ্যা কৰিম। পৰিসমাপ্তি ঘটা অৱস্থা বিলাক সহজ।

উদাহৰণ 6 : দেখুওৱা যে 3.142678 এটা পৰিমেয় সংখ্যা। অন্য ধৰণেৰে ক'ব পাৰি, 3.142678 ক $\frac{p}{q}$ আৰ্হিত, য'ত p আৰু q অখণ্ড সংখ্যা আৰু $q \neq 0$, প্ৰকাশ কৰা।

সমাধান : ইয়াত $3.142678 = \frac{3142678}{1000000}$ আৰু সেয়ে ই এটা পৰিমেয় সংখ্যা।

এতিয়া আমি অবিৰত পুনৰাবৰ্ত্তিত দশমিক বিস্তৃতিৰ পৰিঘটনাটো বিবেচনা কৰিম।

উদাহৰণ 7 : দেখুওৱা যে $0.3333... = 0.\bar{3}$ ক $\frac{p}{q}$ আকাৰত, য'ত p আৰু q অখণ্ড সংখ্যা আৰু $q \neq 0$, প্ৰকাশ কৰিব পাৰি।

সমাধান : যিহেতু $0.\bar{3}$ কি আমি নেজানো, গতিকে ইয়াক x বুলি ধৰো। গতিকে $x = 0.3333...$

এতিয়া এইখিনিতেই বুদ্ধিটো খটুৱাব লাগে। মন কৰা যে

$10x = 10 \times (0.3333...) = 3.3333...$

আকৌ $3.333... = 3 + x$ (কাৰণ, $x = 0.3333...$) গতিকে $10x = 3 + x$

xৰ বাবে সমাধান কৰি পাওঁ $9x = 3$ অৰ্থাৎ $x = \frac{1}{3}$

উদাহৰণ 8 : দেখুওৱা যে $1.272727.... = 1.\overline{27}$ ক $\frac{p}{q}$ আৰ্হিত , য'ত p আৰু q অখণ্ড সংখ্যা আৰু $q \neq 0$, প্ৰকাশ কৰিব পাৰি।

সমাধান : ধৰা হ'ল, $x = 1.272727...$ । ইয়াত দুটা অংকৰ পুনৰাবৃত্তি ঘটিছে, গতিকে 100 ৰে পূৰণ কৰিলে পাওঁ, $100x = 127.2727..........$

সেয়ে $100x = 126 + 1.272727... = 126 + x$

গতিকে $100x - x = 126$ অৰ্থাৎ $99x = 126$

অৰ্থাৎ $x = \frac{126}{99} = \frac{14}{11}$

তোমালোকে ওলোটাকৈ কৰি চালে পাবা যে $\frac{14}{11} = 1.\overline{27}$

উদাহৰণ 9 : দেখুওৱা যে $0.2353535....... = 0.2\overline{35}$ ক $\frac{p}{q}$ আৰ্হিত , য'ত p আৰু q অখণ্ড সংখ্যা আৰু $q \neq 0$, প্ৰকাশ কৰিব পাৰি।

সমাধান : ধৰা হ'ল, $x = 0.2\overline{35}$। মনকৰিবা যে ইয়াত 2 ৰ পুনৰাবৃত্তি হোৱা নাই, কিন্তু 35 গোটটোৰ পুনৰাবৃত্তি ঘটিছে, গতিকে x ক 100 ৰে পূৰণ কৰিলে পাম যে

$100x = 23.53535...........$

সেয়ে, $100x = 23.3 + 0.23535........ = 23.3 + x$

গতিকে $99x = 23.3$

অৰ্থাৎ $99x = \frac{233}{10}$, ইয়াৰ পৰা পাওঁ যে $x = \frac{233}{990}$

তোমালোকে ওলোটাকৈ কৰি চালে দেখিবা যে $\frac{233}{990} = 0.2\overline{35}$

গতিকে,প্ৰতিটো অবিৰত পৌনঃপুনিক দশমিক বিস্তৃতি থকা সংখ্যাক $\frac{p}{q}(q \neq 0)$ আৰ্হিত, য'ত p আৰু q অখণ্ড সংখ্যাত প্ৰকাশ কৰিব পাৰি। আমাৰ এই ফলাফল সমূহৰ সংক্ষিপ্তসাৰ তলত দিয়া হ'ল—

'এটা পৰিমেয় সংখ্যাৰ দশমিক বিস্তৃতি পৰিসমাপ্ত অথবা অবিৰত পুনৰাবৰ্তিত। তদুপৰি, যদি এটা সংখ্যাৰ দশমিক বিস্তৃতি পৰিসমাপ্ত অথবা অবিৰত পুনৰাবৰ্তিত, তেনেহ'লে সেই সংখ্যাটো পৰিমেয়।'

গতিকে, এতিয়া আমি পৰিমেয় সংখ্যা এটাৰ দশমিক বিস্তৃতি কি হ'ব পাৰে জানিলো। অপৰিমেয় সংখ্যাবিলাকৰ দশমিক বিস্তৃতি কি হ'ব? ওপৰৰ ধৰ্মৰ পৰা আমি এটা সিদ্ধান্তলৈ আহিব পাৰো যে অপৰিমেয় সংখ্যাৰ দশমিক বিস্তৃতি অবিৰত অপুনৰাবৰ্তিত। ওপৰত পৰিমেয় সংখ্যাৰ ধৰ্ম উল্লেখ কৰাৰ দৰে, অপৰিমেয় সংখ্যাৰ ধৰ্ম হ'ল—

'এটা অপৰিমেয় সংখ্যাৰ দশমিক বিস্তৃতি অবিৰত অপুনৰাবৰ্তিত। তদুপৰি, যদি এটা সংখ্যাৰ দশমিক বিস্তৃতি অবিৰত অপুনৰাবৰ্তিত তেনেহ'লে সেই সংখ্যাটো অপৰিমেয়।'

আগৰ অনুচ্ছেদৰ পৰা মনত পেলোৱা যে, S = 0.10110111011110........। মন কৰা যে ই অবিৰত অপুনৰাবৰ্তিত। গতিকে ওপৰৰ ধৰ্মৰ পৰা ক'ব পাৰি যে ই এটা অপৰিমেয় সংখ্যা। তদুপৰি মন কৰা যে S ৰ লগত সাদৃশ্য থকা অসীম সংখ্যক অপৰিমেয় সংখ্যা তোমালোকে উলিয়াব পাৰিবা।

$\sqrt{2}$, আৰু π এই সুখ্যাত অপৰিমেয় সংখ্যা দুটাৰ অৱস্থা কেনে? নিৰ্দিষ্ট পৰ্যালৈকে ইহঁতৰ

দশমিক বিস্তৃতি তলত দিয়া হ'ল—

$\sqrt{2} = 1.41421356237309504880168872420096$……………………

$\pi = 3.14159265358979323846264338327950$……………………

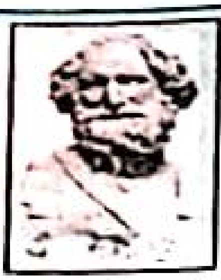
(লক্ষ্য কৰিবা যে, আমি প্ৰায়েই, π ৰ এটা মোটামুটিমান(আসন্ন মান) $\frac{22}{7}$ বুলি লওঁ। কিন্তু $\pi \neq \frac{22}{7}$)

পৰবৰ্তী সময়ত গণিতজ্ঞসকলে অপৰিমেয় সংখ্যাৰ দশমিক বিস্তৃতিত অধিক সংখ্যক অংক উলিয়াবলৈ নানা পদ্ধতি উদ্ভাৱন কৰিছে। উদাহৰণ স্বৰূপে,তোমালোকে হৰণ পদ্ধতিৰে $\sqrt{2}$ ৰ দশমিক বিস্তৃতিত থকা অংকবিলাক উলিয়াবলৈ নিশ্চয় শিকিছা। এইটো বৰ আকৰ্ষণীয় কথা যে বৌদ্ধিক যুগৰ (800BC-500BC) এক গাণিতিক নিবন্ধ শুল্বসূত্ৰ (জ্যাৰ বিধি) $\sqrt{2}$ ৰ আসন্ন মানৰ উল্লেখ আছে। ইয়াক তলত দিয়া হ'ল।

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{4} \times \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{34} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{3}\right) = 1.4142156$$

মন কৰা যে এই মান ওপৰত দিয়া মানৰ প্ৰথম পাঁচটা দশমিক স্থানলৈকে একে। π ৰ দশমিক বিস্তৃতিত থকা অংকবিলাক উলিয়াবলৈ কৰা প্ৰচেষ্টাৰ কাহিনী বৰ আমোদজনক।

গ্ৰীক মণিষী আৰ্কিমিডিছেই π ৰ দশমিক বিস্তৃতিত থকা অংক সমূহ পোন প্ৰথমে গণনা কৰিছিল। তেওঁ দেখুৱাইছিল যে $3.140845 < \pi < 3.142857$ । বিশিষ্ট ভাৰতীয় গণিতজ্ঞ আৰু জ্যোতিৰ্বিদ আৰ্যভট্টই (476AD-550AD) π ৰ চতুৰ্থ দশমিক স্থানলৈ শুদ্ধ মান উলিয়াইছিল (এই মান 3.1416]। এতিয়া উচ্চ বেগী কম্পিউটাৰ আৰু উন্নত এলগৰিথিম (Algorithm) ৰ সহায়ত π ৰ মান 1.24 ট্ৰিলিয়ন(Trillion) দশমিক স্থানলৈ গণনা কৰি উলিয়াব পৰা হৈছে।



আৰ্কিমিডিছ (খৃষ্টপূৰ্ব 287-212)

চিত্ৰ 1.10

এতিয়া কি দৰে অপৰিমেয় সংখ্যাবিলাক উলিয়াব পাৰি চোৱা যাওক।

উদাহৰণ 10 : $\frac{1}{7}$ আৰু $\frac{2}{7}$ ৰ মাজত থকা এটা অপৰিমেয় সংখ্যা উলিওৱা।

সমাধান : আমি পাই আহিছো যে $\frac{1}{7} = 0.\overline{142857}$ । ইয়াৰ পৰা সহজে পাওঁ যে $\frac{2}{7} = 0.\overline{285714}$

গতিকে $\frac{1}{7}$ আৰু $\frac{2}{7}$ ৰ মাজত থকা অপৰিমেয় সংখ্যা এটা পাবলৈ ইহঁতৰ মাজত থকা এটা অবিৰত অপুনৰাবৰ্তিত সংখ্যা উলিয়ালেই হ'ল। অৱশ্যে তোমালোকে অসীম সংখ্যক এনেধৰণৰ সংখ্যা উলিয়াব পাৰিবা।

এনে সংখ্যাৰ এটা উদাহৰণ হ'ল 0.150150015000150000..........

অনুশীলনী 1.3

1. তলত দিয়া সংখ্যা বিলাকক দশমিক বিস্তৃতিত প্ৰকাশ কৰা আৰু প্ৰতিটোৱে দশমিক বিস্তৃতি কি ধৰণৰ উল্লেখ কৰা—

   (i) $\frac{36}{100}$ (ii) $\frac{1}{11}$ (iii) $4\frac{1}{8}$ (iv) $\frac{3}{13}$ (v) $\frac{2}{11}$ (vi) $\frac{329}{400}$

2. তোমালোকে জানা যে $\frac{1}{7} = 0.\overline{142857}$। দীঘলীয়া হৰণ নকৰাকৈ $\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{4}{7}, \frac{5}{7}, \frac{6}{7}$ ৰ দশমিক বিস্তৃতি কি হ'ব ধাৰণা কৰিব পাৰিবানে? যদি পাৰিবা, কেনেকৈ?

   (ইংগিত : $\frac{1}{7}$ ৰ মান উলিয়াওঁতে পোৱা ভাগশেষবোৰ লক্ষ্য কৰা)

3. তলত দিয়া বিলাক $\frac{p}{q}$ আৰ্হিত প্ৰকাশ কৰা, য'ত p আৰু q অখণ্ড সংখ্যা আৰু $q \neq 0$

   (i) $0.\overline{6}$ (ii) $0.\overline{47}$ (iii) $0.\overline{001}$

4. 0.99999.........ক $\frac{p}{q}$ আৰ্হিত প্ৰকাশ কৰা। তোমাৰ উত্তৰ দেখি আচৰিত হৈছা নেকি? তোমাৰ শিক্ষক আৰু সহপাঠীসকলৰ লগত এই উত্তৰ কিয় অৰ্থবহ আলোচনা কৰা।

5. $\frac{1}{17}$ ৰ দশমিক বিস্তৃতিৰ পুনৰাবৰ্তিত গোটটোত আটাইতকৈ বেছি কিমানটা অংক থাকিব? হৰণ পদ্ধতি অবলম্বন কৰি উত্তৰৰ সত্যতা পৰীক্ষা কৰা।

6. যদি p আৰু q অখণ্ড সংখ্যা যাৰ 1ৰ বাহিৰে অন্য সাধাৰণ উৎপাদক নাই তেনেহ'লে $\frac{p}{q}$ ($q \neq 0$) আৰ্হিত থকা বিভিন্ন পৰিমেয় সংখ্যা লোৱা যিবিলাকৰ দশমিক বিস্তৃতি পৰিসমাপ্ত আৰু পৰ্যবেক্ষণ কৰা। qয়ে কি চৰ্ত সিদ্ধ কৰিব অনুমান কৰিব পাৰিবানে?

7. তিনিটা সংখ্যা লিখা যাৰ দশমিক বিস্তৃতি অবিৰত আৰু অপুনৰাবৰ্তিত।

8. $\frac{5}{7}$ আৰু $\frac{9}{11}$ ৰ মাজত থকা তিনিটা ভিন্ন অপৰিমেয় সংখ্যা উলিওৱা।

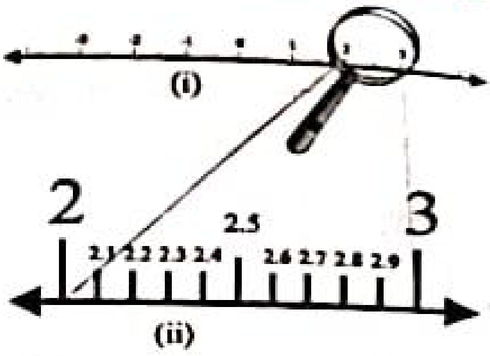
9. তলৰ সংখ্যা কেইটাক পৰিমেয় আৰু অপৰিমেয় হিচাপে শ্ৰেণী বিভক্ত কৰা :

(i) $\sqrt{23}$ (ii) $\sqrt{225}$ (iii) 0.3796

(iv) 7.478478... (v) 1.101001000100001........

1.4 সংখ্যাৰেখাত বাস্তৱ সংখ্যাৰ উপস্থাপন (Representing Real Numbers on the Number Line) :

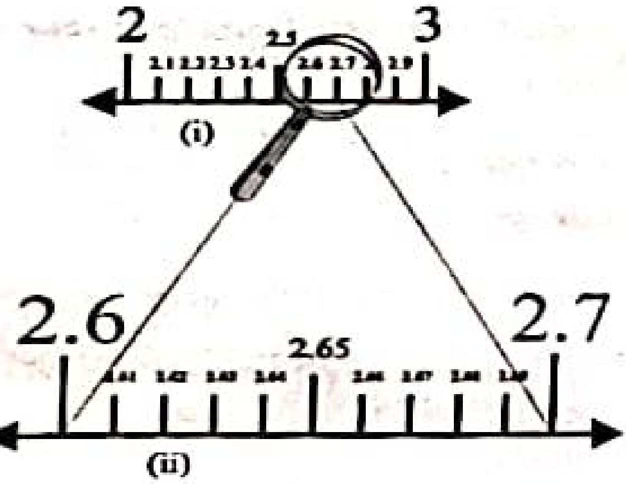
আগৰ অনুচ্ছেদত তোমালোকে দেখিছা যে যিকোনো বাস্তৱ সংখ্যাৰেখাৰেই দশমিক বিস্তৃতি আছে। এইটোৱে সংখ্যাটো সংখ্যাৰেখাত উপস্থাপন কৰাত সহায় কৰে। কেনেকৈনো পাৰি তাকে চোৱা যাওঁক।



চিত্ৰ 1.11

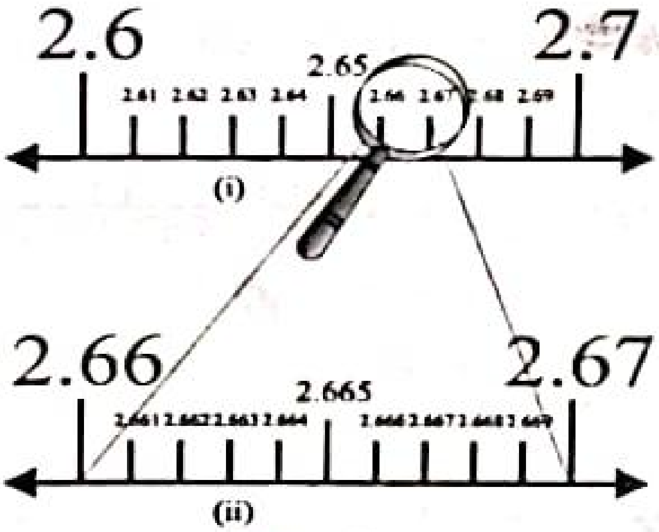
ধৰাহ'ল, সংখ্যাৰেখাত 2.665 ৰ অৱস্থান নিৰ্ণয় কৰিব লাগে। আমি জানো যে ই 2 আৰু 3ৰ মাজত থাকে।

গতিকে আমি সংখ্যাৰেখাৰ 2 আৰু 3 ৰ মাজৰ অংশটো সুক্ষ্ম ভাৱে নিৰীক্ষণ কৰিম। ধৰা হ'ল এই অংশটো 10 টা সমান ভাগত বিভক্ত কৰা হ'ল আৰু 1.11(i) চিত্ৰত দিয়াৰ দৰে ভাগ কৰা প্ৰতিটো বিন্দুত দাগ দিয়া হ'ল। এতিয়া 2 ৰ সোঁহাতৰ প্ৰথম দাগটোৱে 2.1 বুজাব, দ্বিতীয়টোৱে 2.2 বুজাব ইত্যাদি। 1.11(i) চিত্ৰত দিয়া 2 আৰু 3 ৰ মাজৰ বিন্দুবোৰ চাওঁতে তোমালোকৰ অসুবিধা হ'ব পাৰে।সেয়ে এখন বিবৰ্ধক কাঁচ (Magnifying glass) ৰ সহায়ত এই অংশটো চাব পাৰা। তেতিয়া তোমালোকে চিত্ৰ 1.11(ii) ত দিয়াৰ দৰে বিন্দুবোৰ দেখা পাবা।



চিত্ৰ 1.12

এতিয়া 2.665 সংখ্যাটো 2.6 আৰু 2.7 ৰ মাজত থাকিব। গতিকে আমাৰ দৃষ্টি এতিয়া 2.6 আৰু 2.7 ৰ মাজৰ অংশটোত নিবদ্ধ কৰিম। [চিত্ৰ 1.12(i) চোৱা]। এই অংশটো আকৌ দহটা ভাগত বিভক্ত কৰা হৈছে বুলি কল্পনা কৰা। ইয়াৰে প্ৰথম দাগটোৱে 2.61 নিৰ্দেশ কৰিব, দ্বিতীয়টোৱে 2.62, ইত্যাদি। স্পষ্টকৈ চাবৰ বাবে এই অংশটো চিত্ৰ 1.12(ii) ত পৰিবৰ্ধন কৰি দেখুওৱা হৈছে।



চিত্ৰ 1.13

আকৌ, 2.665 বিন্দুটো 2.66 আৰু 2.67 ৰ মাজত থাকে। সেয়ে আমাৰ দৃষ্টি এতিয়া সংখ্যাৰেখাৰ এই অংশটোত নিবদ্ধ কৰিম [চিত্ৰ 1.13(i) চোৱা]। এই অংশটো আকৌ দহভাগ কৰা হৈছে বুলি কল্পনা কৰা। এই অংশটো ভালকৈ দেখা পাবলৈ চিত্ৰ 1.13(ii) ত দিয়াৰ দৰে পৰিবৰ্ধন কৰা হ'ল। ইয়াৰ প্ৰথম দাগটোৱে 2.661 বুজায়, দ্বিতীয়টোৱে বুজায় 2.662, ইত্যাদি। গতিকে এই উপঅংশটোৰ পঞ্চম দাগটোৱেই 2.665 বুজাব।

সংখ্যাৰেখাত বিবৰ্ধক কাঁচৰ সহায়ত সংখ্যাৰ অৱস্থান নিৰীক্ষণৰ এই পদ্ধতিটোক 'ক্ৰমাগত পৰিবৰ্ধন পদ্ধতি (Process of successive magnification) বোলা হয়।

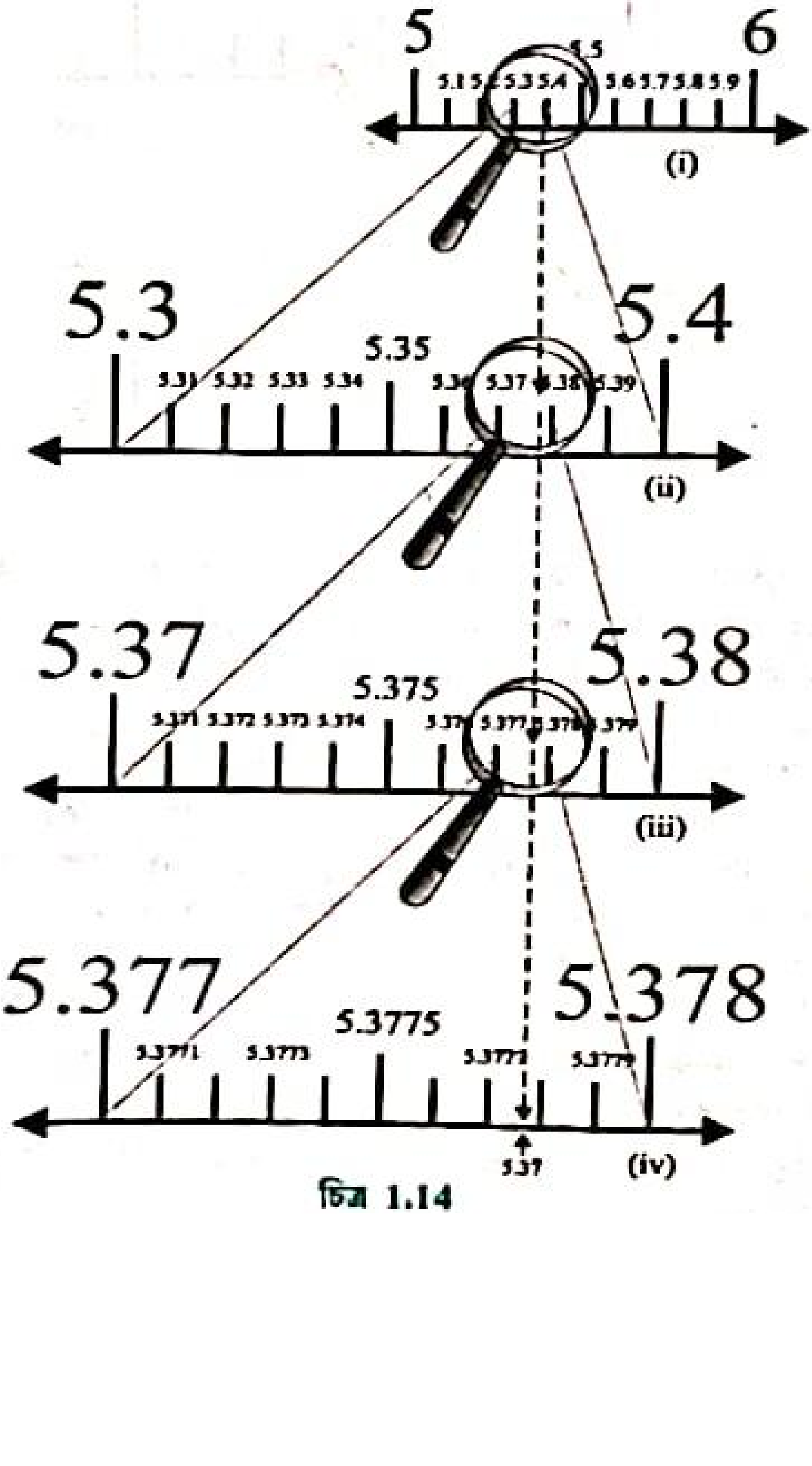
গতিকে দেখিলো যে উপযুক্ত ক্ৰমাগত পৰিবৰ্ধনৰ সহায়ত পৰিসমাপ্ত দশমিক বিস্তৃতি থকা বাস্তৱ সংখ্যা এটাক সংখ্যাৰেখাত উপস্থাপন কৰিব পাৰি।

এতিয়া আমি অবিৰত পুনৰাবৰ্তিত দশমিক বিস্তৃতি থকা বাস্তৱ সংখ্যা এটাৰ স্থান সংখ্যাৰেখাত প্ৰদৰ্শন কৰিব পাৰি নেকি যত্ন কৰি চাম। যথানুৰূপ অণুবীক্ষণত বিবৰ্ধক দাপোনৰ সহায়ত লক্ষ্য কৰি আৰু ক্ৰমাগত পৰিবৰ্ধন পদ্ধতিৰদ্বাৰা সংখ্যাৰেখাত সংখ্যাটোৰ স্থান নিৰীক্ষণ কৰিব পাৰি।

উদাহৰণ 11 : $5.3\overline{7}$ সংখ্যাটো পাঁচ দশমিক স্থানলৈকে অৰ্থাৎ 5.37777 লৈকে ধৰি সংখ্যাৰেখাত স্থাপন কৰি দেখুওৱা।

সমাধান : আকৌ এবাৰ ক্ৰমাগত পৰিবৰ্ধনৰ সহায়ত আগবাঢ়িম আৰু সংখ্যাৰেখাত $5.3\bar{7}$ সংখ্যাটো থকা অংশৰ দৈৰ্ঘ ক্ৰমান্বয়ে কমাই গৈ থাকিম।

- প্ৰথম লক্ষ্য কৰিছোঁ যে $5.3\bar{7}$ সংখ্যাটো 5 আৰু 6 ৰ মাজত থাকে। দ্বিতীয় খোজত 5.3 আৰু 5.4 ৰ মাজত $5.3\bar{7}$ ৰ স্থান নিৰূপণ কৰিম। এই অৱস্থান সূক্ষ্মভাৱে চাবৰ বাবে এই অংশটো দহটা ভাগত বিভক্ত কৰা হ'ল আৰু বিবৰ্ধক কাঁচৰ সহায়ত 5.37 আৰু 5.38 ৰ মাজত $5.3\bar{7}$



চিত্ৰ 1.14

ৰ স্থান লক্ষ্য কৰা হ'ল। $5.3\bar{7}$ ক বেছি সঠিককৈ চাবৰ বাবে 5.37 আৰু 5.38 ৰ মাজৰ অংশক পুনৰ দহটা সমান ভাগত ভগোৱা হ'ল আৰু বিবৰ্ধক কাঁচৰ সহায়ত 5.377 আৰু 5.378 ৰ মাজত $5.3\bar{7}$ ৰ স্থান লক্ষ্য কৰা হ'ল। $5.3\bar{7}$ ক ইয়াতকৈয়ো বেছি নিখুঁতকৈ চাবৰ বাবে 5.377 আৰু 5.378 ৰ মাজৰ অংশ আকৌ 10 টা সমান ভাগত ভগোৱা হ'ল আৰু চিত্ৰ 1.14(iv) ত দিয়াৰ দৰে $5.3\bar{7}$ সংখ্যাটো লক্ষ্য কৰা হ'ল। মন কৰা যে $5.3\bar{7}$ সংখ্যাটো 5.3777 তকৈ 5.3778 ৰ বেছি ওচৰত অৱস্থিত [চিত্ৰ 1.14(iv) চোৱা]।

মন্তব্য : এখন বিবৰ্ধক কাঁচেৰে নিৰীক্ষণ কৰি আৰু একে সময়তে সংখ্যাৰেখাত $5.3\bar{7}$ থকা অংশটোৰ দৈৰ্ঘ কমি গৈ থকা বুলি কল্পনা কৰি এই পদ্ধতিৰে বিৰামহীন ভাবে আগুৱাই গৈ থাকিব পাৰি। সংখ্যাটোৰ অৱস্থানৰ শুদ্ধতা কি মাত্ৰালৈ চাব বিচাৰো তাৰ ওপৰত সংখ্যাৰেখাডালৰ নিৰ্দিষ্ট অংশৰ দীঘ নিৰ্ভৰ কৰে।

এতিয়া নিশ্চয় বুজিছা যে এই একে পদ্ধতি অৱলম্বন কৰিয়েই অবিৰত অপুনৰাবৰ্তিত দশমিক বিস্তৃতি থকা বাস্তৱ সংখ্যা এটাৰ অৱস্থান সংখ্যাৰেখাত দেখুৱাব পাৰি।

ওপৰৰ আলোচনা আৰু প্ৰদৰ্শনৰ ভিত্তিত আকৌ ক'ব পাৰি যে 'প্ৰতিটো বাস্তৱ সংখ্যাকেই সংখ্যাৰেখাত এটা অদ্বিতীয় বিন্দুৰে উপস্থাপন কৰিব পাৰি। তদুপৰি, সংখ্যাৰেখাৰ প্ৰতিটো বিন্দুৱেই এটা আৰু এটাই বাস্তৱ সংখ্যা প্ৰতিনিধিত্ব কৰে।'

অনুশীলনী 1.4

1. ক্ৰমাগত পৰিবৰ্ধনৰ সহায়ত 3.765 সংখ্যাটো সংখ্যাৰেখাত প্ৰদৰ্শন কৰা।
2. $4.2\bar{6}$ সংখ্যাটো চতুৰ্থ দশমিক স্থানলৈ সংখ্যাৰেখাত প্ৰদৰ্শন কৰা।

1.5 বাস্তৱ সংখ্যাৰ বিভিন্ন প্ৰক্ৰিয়া (Operations on Real Numbers) :

তোমালোকে আগৰ শ্ৰেণীত শিকি আহিছা যে পৰিমেয় সংখ্যাই যোগ আৰু পূৰণ সাপেক্ষে ক্ৰমবিনিময়, সহযোগ আৰু বিতৰণ বিধি মানি চলে। তদুপৰি, যদি দুটা পৰিমেয় সংখ্যা যোগ, বিয়োগ, পূৰণ বা হৰণ (0 ৰে হৰণ নিষিদ্ধ) কৰা হয় তেনেহ'লে আকৌ এটা পৰিমেয় সংখ্যাই পোৱা যায় (অৰ্থাৎ, যোগ, বিয়োগ, পূৰণ, হৰণ সাপেক্ষে পৰিমেয় সংখ্যাবিলাক 'আবদ্ধ')। দেখা যায় যে অপৰিমেয় সংখ্যাবিলাকেও যোগ আৰু পূৰণৰ অধীনত ক্ৰমবিনিময়, সহযোগ আৰু বিতৰণ বিধি মানি চলে। কিন্তু অপৰিমেয় সংখ্যাবিলাকৰ যোগফল, বিয়োগফল, ভাগফল আৰু পূৰণফল সদায় অপৰিমেয় নহ'বও পাৰে। উদাহৰণ স্বৰূপে, $(\sqrt{6})+(-\sqrt{6})$, $(\sqrt{2})-(\sqrt{2})$, $(\sqrt{3}).(\sqrt{3})$ আৰু $\frac{\sqrt{17}}{\sqrt{17}}$ পৰিমেয় সংখ্যা।

এতিয়া এটা অপৰিমেয় সংখ্যাৰ লগত এটা পৰিমেয় সংখ্যা যোগ আৰু পূৰণ কৰিলে কি হয় চোৱা যাওক। উদাহৰণ স্বৰূপে $\sqrt{3}$ অপৰিমেয়। তেনেহ'লে $2+\sqrt{3}$ আৰু $2\sqrt{3}$ কি হব? যিহেতু $\sqrt{3}$ ৰ দশমিক বিস্তৃতি অবিৰত আৰু অপুনৰাবৰ্তিত, সেয়ে $2+\sqrt{3}$ আৰু $2\sqrt{3}$ ৰ বেলিকাও কথাটো সত্য। সেইবাবে $2+\sqrt{3}$ আৰু $2\sqrt{3}$ দুয়োটাই অপৰিমেয় সংখ্যা।

উদাহৰণ 12 : $7\sqrt{5}$, $\frac{7}{\sqrt{5}}$, $\sqrt{2}+21$, $\pi-2$ সংখ্যাকেইটা অপৰিমেয় হয় নে নহয় চোৱা।

সমাধান : $\sqrt{5} = 2.236..........$, $\sqrt{2} = 1.4142..........$, $\pi = 3.1415.........$

গতিকে, $7\sqrt{5} = 15.652..........$ $\frac{7}{\sqrt{5}} = \frac{7\sqrt{5}}{\sqrt{5}\sqrt{5}} = \frac{7\sqrt{5}}{5} = 3.1304........$,

$\sqrt{2}+21 = 22.4142.......$, $\pi - 2 = 1.1415...........$

এই আটাইবোৰেই অবিৰত আৰু অপুনৰাবৰ্তিত দশমিকত আছে। সেয়ে এই আটাইবোৰেই অপৰিমেয় সংখ্যা।

এতিয়া, অপৰিমেয় সংখ্যাৰ যোগ, বিয়োগ, পূৰণ, হৰণ কৰিলে, অথবা এনে সংখ্যাৰ বৰ্গমূল আৰু আনকি n তম মূল ল'লে (n এটা স্বাভাৱিক সংখ্যা) সাধাৰণতে কি হয় চোৱা যাওক। কেইটামান উদাহৰণ লক্ষ্য কৰা যাওক।

উদাহৰণ 13 : $2\sqrt{2}+5\sqrt{3}$ আৰু $\sqrt{2}-3\sqrt{3}$ যোগ কৰা।

সমাধান :

$$(2\sqrt{2}+5\sqrt{3}) + (\sqrt{2}-3\sqrt{3})$$
$$= (2\sqrt{2}+\sqrt{2}) + (5\sqrt{3}-3\sqrt{3})$$
$$= (2+1)\sqrt{2} + (5-3)\sqrt{3}$$
$$= 3\sqrt{2}+2\sqrt{3}$$

উদাহৰণ 14 : $6\sqrt{5}$ ক $2\sqrt{5}$ ৰে পূৰণ কৰা।

সমাধান : $6\sqrt{5}\times 2\sqrt{5} = 6\times 2\times \sqrt{5}\times\sqrt{5} = 12\times 5 = 60$

উদাহৰণ 15 : $8\sqrt{15}$ ক $2\sqrt{3}$ ৰে হৰণ কৰা।

সমাধান :

$$8\sqrt{15}\div 2\sqrt{3} = \frac{8\sqrt{3}\times\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}$$
$$= 4\sqrt{5}$$

এই উদাহৰণ বিলাকৰ পৰা তোমালোকে তলৰ বাক্যকেইটা পাবা বুলি আশা কৰিব পাৰি, যিকেইটা সত্য :

(i) এটা পৰিমেয় আৰু এটা অপৰিমেয় সংখ্যাৰ যোগফল বা বিয়োগফল অপৰিমেয়।

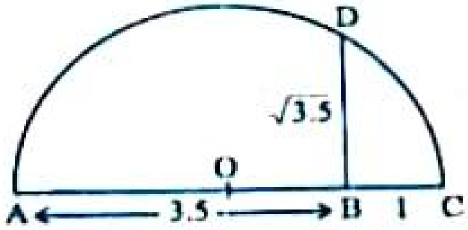
(ii) এটা অশূন্য পৰিমেয় সংখ্যাৰে এটা অপৰিমেয় সংখ্যাৰ পুৰণফল বা ভাগফল অপৰিমেয়।

(iii) যদি দুটা অপৰিমেয় সংখ্যা যোগ, বিয়োগ, পুৰণ বা হৰণ কৰা হয় তেনেহ'লে সেই ফলাফল পৰিমেয় বা অপৰিমেয় হ'ব।

আমি এতিয়া বাস্তৱ সংখ্যাৰ বৰ্গমূল উলিওৱা প্ৰক্ৰিয়ালৈ লক্ষ্য কৰিম। মনত পেলোৱা যে, a এটা স্বাভাৱিক সংখ্যা তেনেহলে $\sqrt{a} = b$ৰ অৰ্থ হ'ল $b^2 = a$ আৰু b>0 । এই একেটা সংজ্ঞাকেই ধনাত্মক বাস্তৱ সংখ্যালৈ প্ৰসাৰিত কৰিব পাৰি।

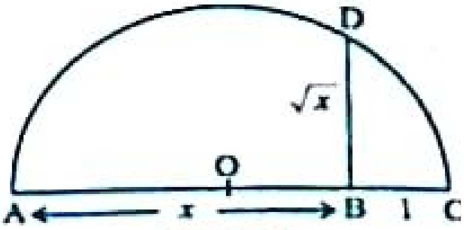
ধৰা হ'ল $a > 0$ এটা বাস্তৱ সংখ্যা। তেনেহ'লে $\sqrt{a} = b$ৰ অৰ্থ হ'ল $b^2 = a$ আৰু $b > 0$ ।

কোনো এটা ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা n ৰ বাবে $\sqrt{n}$ ক সংখ্যাৰেখাত কেনেকৈ উপস্থাপন কৰিব পাৰি সেই বিষয়ে 1.2 অনুচ্ছেদত আমি পাইছোঁ। এতিয়া এটা ধনাত্মক বাস্তৱ সংখ্যা x ৰ ক্ষেত্ৰত $\sqrt{x}$ ক জ্যামিতিৰ সহায়ত কেনেকৈ উলিয়াব পাৰি দেখুৱাম। উদাহৰণ স্বৰূপে $x = 3.5$ ৰ ক্ষেত্ৰত এইটো উলিয়াম, অৰ্থাৎ জ্যামিতিৰ সহায়ত $\sqrt{3.5}$ আমি উলিয়াম।



চিত্ৰ 1.15

এটা স্থিৰ বিন্দু A ৰ পৰা এডাল ৰেখাত 3.5 একক দূৰত্বত এটা দাগ দি ইয়াত B লোৱা হ'ল যাতে AB = 3.5 একক (চিত্ৰ 1.15 চোৱা)। B ৰ পৰা 1 একক দূৰত্বত এটা দাগ দিয়া হ'ল আৰু এই বিন্দুটো C বুলি লোৱা হ'ল। AC ৰ মধ্য বিন্দুটো উলিয়াই সেইটোক O বুলি লোৱা হ'ল। O বিন্দুক কেন্দ্ৰ ধৰি আৰু OC ক ব্যাসাৰ্ধ হিচাপে লৈ এটা অৰ্ধবৃত্ত অংকন কৰা হ'ল। AC ৰ ওপৰত B ৰে যোৱাকৈ আৰু অৰ্ধবৃত্তটোক D বিন্দুত ছেদ কৰাকৈ এডাল লম্ব টনা হ'ল।



চিত্ৰ 1.16

এতিয়া BD $= \sqrt{3.5}$ ।

অধিক সাধাৰণকৈ, যিকোনো ধনাত্মক বাস্তৱ সংখ্যা x ৰ বাবে, $\sqrt{x}$ উলিয়াবলৈ এটা বিন্দু B লোৱা হ'ল যাতে AB = x একক আৰু C লোৱা হ'ল যাতে BC = 1 একক (চিত্ৰ 1.16 ত দিয়াৰ দৰে)। এতিয়া x = 3.5 লৈ কৰাৰ দৰে, আমি পাইথাগোৰাচৰ সূত্ৰৰ সহায়ত এই ফল প্ৰমাণ কৰিব পাৰো।

চিত্ৰ 1.16 ত লক্ষ্য কৰা যে ΔOBD এটা সমকোণী ত্ৰিভুজ। তদুপৰি, বৃত্তটোৰ ব্যাসাৰ্ধ হ'ল $\frac{x+1}{2}$ একক।

গতিকে $OC = OD = OA = \frac{x+1}{2}$ একক

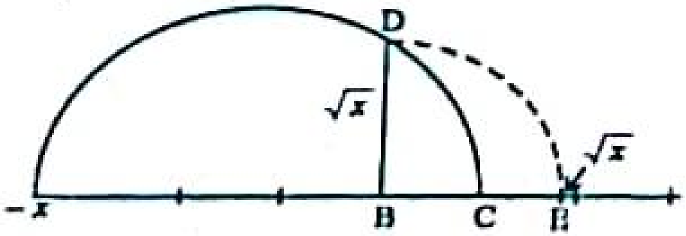
এতিয়া $OB = x - \left(\frac{x+1}{2}\right) = \frac{x-1}{2}$

সেয়ে, পাইথাগোৰাচৰ সূত্ৰৰ পৰা আমি পাওঁ

$$BD^2 = OD^2 - OB^2 = \left(\frac{x+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{x-1}{2}\right)^2 = \frac{4x}{4} = x$$

ইয়াৰপৰা দেখা যায় যে BD = $\sqrt{x}$

এই অংকন প্ৰণালী সকলো বাস্তৱ সংখ্যা x>0 ৰ বাবে $\sqrt{x}$ ৰ অৱস্থিতি প্ৰদৰ্শন কৰাৰ এক চাক্ষুষ আৰু জ্যামিতীয় পদ্ধতি। যদি সংখ্যাৰেখাত $\sqrt{x}$ ৰ অৱস্থান জানিব খোজা, তেনেহ'লে B ক শূন্য, C ক 1, ইত্যাদি, ধৰি B ক কেন্দ্ৰ ধৰি আৰু BD ক ব্যাসাৰ্ধ লৈ বৃত্তৰ এটা চাপ আঁকিলে এই সংখ্যাৰেখাত E বিন্দুত ছেদ কৰিব (চিত্ৰ 1.17 দ্ৰষ্টব্য)। এতিয়া E বিন্দুৱে $\sqrt{x}$ বুজাব।



চিত্ৰ 1.17

বৰ্গমূলৰ ধাৰণাটো এতিয়া আমি ঘনমূল, চতুৰ্থমূল আৰু সাধাৰণভাৱে n তম মূল (n এটা ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা) পৰ্যন্ত প্ৰসাৰিত কৰিব বিচাৰিছোঁ। বৰ্গমূল, ঘনমূল সম্পৰ্কে আগৰ শ্ৰেণীত পোৱা কথাবিলাক মনত পেলোৱা।

$\sqrt[3]{8}$ মানে কি? নিশ্চয় ই এটা ধনাত্মক সংখ্যা হ'ব লাগিব যাৰ ঘনফল 8 আৰু তোমালোকে অনুমান কৰিব পাৰিছা যে $\sqrt[3]{8} = 2$। এতিয়া $\sqrt[5]{243}$ কি হ'ব চেষ্টা কৰা যাওক। তোমালোকে এনে কোনো এটা সংখ্যা b জানানে যাতে $b^5 = 243$ হয়? উত্তৰটো হ'ল 3। গতিকে $\sqrt[5]{143} = 3$।

এই উদাহৰণ বিলাকৰ পৰা $a > 0$ এটা বাস্তৱ সংখ্যা আৰু n এটা ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা হ'লে $\sqrt[n]{a}$ ৰ সংজ্ঞা দিব পাৰিবানে? ধৰাহ'ল $a > 0$ এটা বাস্তৱ সংখ্যা আৰু n এটা ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা। তেনেহ'লে $\sqrt[n]{a} = b$ হ'ব যদিহে $b^n = a$ আৰু $b > 0$। মন কৰিবা যে $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{8}$, $\sqrt[n]{a}$ আদিত ব্যৱহাৰ কৰা '$\sqrt{\ }$' এই চিনটোক 'মূল চিহ্ন' (Radical Sign) বোলা হয়।

এতিয়া আমি বিভিন্ন ক্ষেত্ৰত প্ৰয়োজনীয় বৰ্গমূল সম্পৰ্কীয় অভেদ কিছুমান উল্লেখ কৰিম। আগৰ শ্ৰেণীত পোৱা এনে কিছুমান অভেদ ইতিমধ্যে তোমালোকৰ বাবে পৰিচিত। অৱশিষ্ট কেইটা অভেদ বাস্তৱ সংখ্যাৰ যোগৰ ওপৰত পূৰণৰ বিতৰণ বিধি আৰু $(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$ অভেদৰপৰা পোৱা যায় (ইয়াত x আৰু y বাস্তৱ সংখ্যা)।

ধৰা a আৰু b ধনাত্মক বাস্তৱ সংখ্যা। তেনেহ'লে

(i) $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\,\sqrt{b}$ (ii) $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

(iii) $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = a - b$ (iv) $(a + \sqrt{b})(a - \sqrt{b}) = a^2 - b$

(v) $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{c} + \sqrt{d}) = \sqrt{ac} + \sqrt{ad} + \sqrt{bc} + \sqrt{bd}$

(vi) $\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^2 = a + 2\sqrt{ab} + b$

এই অভেদবিলাকৰ কেইটামান বিশেষ উদাহৰণ লক্ষ্য কৰা যাওক।

উদাহৰণ 16 : তলৰ ৰাশিবিলাক সৰল কৰা।

(i) $(5 + \sqrt{7})(2 + \sqrt{5})$ (ii) $(5 + \sqrt{5})(5 - \sqrt{5})$

(iii) $\left(\sqrt{3} + \sqrt{7}\right)^2$ (iv) $(\sqrt{11} - \sqrt{7})(\sqrt{11} + \sqrt{7})$

সমাধান : (i) $(5 + \sqrt{7})(2 + \sqrt{5}) = 10 + 5\sqrt{5} + 2\sqrt{7} + \sqrt{35}$

(ii) $(5 + \sqrt{5})(5 - \sqrt{5}) = 5^2 - \left(\sqrt{5}\right)^2 = 25 - 5 = 20$

(iii) $\left(\sqrt{3} + \sqrt{7}\right)^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2 + 2\sqrt{3}\sqrt{7} + \left(\sqrt{7}\right)^2 = 3 + 2\sqrt{21} + 7 = 10 + 2\sqrt{21}$

(iv) $(\sqrt{11} - \sqrt{7})(\sqrt{11} + \sqrt{7}) = \left(\sqrt{11}\right)^2 - \left(\sqrt{7}\right)^2 = 11 - 7 = 4$

মন্তব্য : ওপৰৰ উদাহৰণত সৰল কৰা বোলোতে প্ৰতিটো ৰাশিক এটা পৰিমেয় আৰু এটা অপৰিমেয় সংখ্যাৰ যোগ হিচাপে প্ৰকাশ কৰিবলগাটোহে বুজাইছে।

তলৰ উদাহৰণ কেইটা বিবেচনা কৰিয়েই এই অনুচ্ছেদৰ সামৰণি মৰা হ'ব। $\frac{1}{\sqrt{2}}$ লৈ লক্ষ্য কৰা। সংখ্যাৰেখাত ইয়াৰ স্থান ক'ত হ'ব ক'ব পাৰিবানে? তোমালোকে জনা যে ই অপৰিমেয়। হৰটো পৰিমেয় সংখ্যা হোৱাহেঁতেন সম্ভৱতঃ কামটো সহজ হ'লহেঁতেন। আমি হৰৰ পৰিমেয়কৰণ হয় নেকি চাওঁ, অৰ্থাৎ হৰটো পৰিমেয় সংখ্যা কৰিব পাৰি নেকি চোৱা যাওক। এইটো কৰিবলৈ বৰ্গমূল জড়িত থকা অভেদৰ প্ৰয়োজন হ'ব। কেনেকৈ কৰা হয় চাওঁ আহা।

উদাহৰণ 17 : $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ৰ হৰ পৰিমেয় কৰা।

সমাধান : $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ৰ এটা সমতুল্য ৰাশিলৈ নিব লাগে যাৰ হৰটো এটা পৰিমেয় সংখ্যা। আমি জানো যে $\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}$ পৰিমেয়। আমি ইয়াকো জানো যে $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ক $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ ৰে পূৰণ কৰিলে এটা সমতুল্য ৰাশি পোৱা যায়, কাৰণ $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$। সেয়ে এই দুটা তথ্যকে একেলগ কৰিলে পাওঁ

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

এই আৰ্হিত $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ৰ স্থান সংখ্যাৰেখাত উলিয়াবলৈ সহজ। এই সংখ্যাটো 0 আৰু $\sqrt{2}$ ৰ মধ্যস্থানত থাকিব।

উদাহৰণ 18 : $\frac{1}{2+\sqrt{3}}$ ৰ হৰ পৰিমেয় কৰা।

সমাধান : ইয়াত আগতে পোৱা অভেদ (iv) ব্যৱহাৰ কৰিম। $\frac{1}{2+\sqrt{3}}$ ক $2-\sqrt{3}$ ৰে পূৰণ আৰু হৰণ কৰিলে পাম যে

$$\frac{1}{2+\sqrt{3}} = \frac{1}{2+\sqrt{3}} \times \frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} = \frac{2-\sqrt{3}}{4-3} = 2-\sqrt{3}$$

উদাহৰণ 19 : $\frac{5}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}$ ৰ হৰ পৰিমেয় কৰা।

সমাধান : ইয়াত আগতে দিয়া অভেদ (iii) ব্যৱহাৰ কৰিম।

গতিকে, $\frac{5}{\sqrt{3}-\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{3}-\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} = \frac{5(\sqrt{3}+\sqrt{5})}{3-5}$

$= \left(\frac{-5}{2}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)$

উদাহৰণ 20 : $\frac{1}{7+3\sqrt{2}}$ ৰ হৰ পৰিমেয় কৰা।

সমাধান : $\frac{1}{7+3\sqrt{2}} = \frac{1}{7+3\sqrt{2}} \times \left(\frac{7-3\sqrt{2}}{7-3\sqrt{2}}\right) = \frac{7-3\sqrt{2}}{49-18} = \frac{7-3\sqrt{2}}{31}$

গতিকে যেতিয়া এটা ৰাশিৰ হৰটোত বৰ্গমূল থকা পদ (বা মূল চিহ্নযুক্ত সংখ্যা) এটা থাকে তেতিয়া এই ৰাশিটোৰ হৰক পৰিমেয় সংখ্যালৈ ৰূপান্তৰ কৰি এটা সমতুল্য ৰাশি গঠন কৰা পদ্ধতিটোক 'হৰ পৰিমেয় কৰণ' পদ্ধতি (Rationalising the denominator) বুলি কোৱা হয়।

অনুশীলনী 1.5

1. তলৰ সংখ্যাবোৰ পৰিমেয় আৰু অপৰিমেয় হিচাপে শ্ৰেণীভুক্ত কৰা।

   (i) $2-\sqrt{5}$ (ii) $(3+\sqrt{23})-\sqrt{23}$ (iii) $\frac{2\sqrt{7}}{7\sqrt{7}}$

   (iv) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (v) 2π

2. তলৰ প্ৰতিটো ৰাশি সৰল কৰা।

   (i) $\left(3+\sqrt{3}\right)\left(2+\sqrt{2}\right)$ (ii) $\left(3+\sqrt{3}\right)\left(3-\sqrt{3}\right)$

   (iii) $\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)^2$ (iv) $\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)$

3. মনত পেলোৱা যে π ৰ সংজ্ঞা দিওঁতে ইয়াক এটা বৃত্তৰ পৰিধি (ধৰা c) আৰু সেই বৃত্তৰ ব্যাসৰ (ধৰা d) অনুপাত বুলি কোৱা হৈছিল। অৰ্থাৎ $\pi = \frac{c}{d}$। দেখা গৈছে যে এই কথাই π যে অপৰিমেয় সেই তথ্যৰ বিৰোধিতা কৰিছে। এই বিৰোধিতা কিদৰে মীমাংসা কৰিবা?

4. $\sqrt{9.3}$ ক সংখ্যাৰেখাত উপস্থাপন কৰা।

5. তলৰ ৰাশিৰ হৰ বিলাক পৰিমেয় কৰা।

(i) $\frac{1}{\sqrt{7}}$ (ii) $\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}}$ (iii) $\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}$ (iv) $\frac{1}{\sqrt{7}-2}$

1.6 বাস্তৱ সংখ্যাৰ ক্ষেত্ৰত সূচকৰ বিধি (Laws of Exponents for Real Numbers) :

তলৰ ৰাশিবিলাক কেনেকৈ সৰল কৰে মনত আছেনে?

(i) $17^2.17^5 =$ (ii) $\left(5^2\right)^7 =$ (iii) $\frac{23^{10}}{23^7} =$ (iv) $7^3.9^3 =$

উত্তৰ বিলাক পালানে? সেইবিলাক হ'ল—

(i) $17^2.17^5 = 17^7$ (ii) $\left(5^2\right)^7 = 5^{14}$ (iii) $\frac{23^{10}}{23^7} = 23^3$ (iv) $7^3.9^3 = 63^3$

এই উত্তৰবিলাক উলিয়াওঁতে তোমালোকে তলত দিয়া সূচকৰ বিধিবিলাক, যিবিলাক আগৰ শ্ৰেণীত পাইছিলা, ব্যৱহাৰ কৰিব লগা হৈছে। (ইয়াত a, n আৰু m স্বাভাৱিক সংখ্যা। মনত ৰাখিবা যে a ক ভূমি আৰু m আৰু n সূচক বুলি কোৱা হয়)

(i) $a^m a^n = a^{m+n}$ (ii) $\left(a^m\right)^n = a^{mn}$

(iii) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$, m>n (iv) $a^m b^m = (ab)^m$

$(a)^0$ ৰ মান কি? ইয়াৰ মান 1। গতিকে আমি শিকিলো যে $(a)^0 = 1$। সেয়ে (iii) ব্যৱহাৰ কৰি পাওঁ যে $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$। এতিয়া আমি এই বিধিবিলাক ঋণাত্মক সূচকলৈ সম্প্ৰসাৰিত কৰিব পাৰিম।

সেয়ে, উদাহৰণ স্বৰূপে :

(i) $17^2.17^{-5} = 17^{-3} = \frac{1}{17^3}$ (ii) $\left(5^2\right)^{-7} = 5^{-14}$

(iii) $\frac{23^{-10}}{23^7} = 23^{-17}$ (iv) $(7)^{-3}.(9)^{-3} = (63)^{-3}$

ধৰা আমি তলৰ কেইটা সৰল কৰিব বিচাৰো :

(i) $2^{\frac{2}{3}}.2^{\frac{1}{3}}$ (ii) $\left(3^{\frac{1}{5}}\right)^4$ (iii) $\dfrac{7^{\frac{1}{5}}}{7^{\frac{1}{3}}}$ (iv) $13^{\frac{1}{5}}.17^{\frac{1}{5}}$

এইকেইটা কেনেকৈ কৰিম? দেখা যায় যে আগতে শিকা সূচকৰ বিধিকেইটা ভূমি ধনাত্মক বাস্তৱ সংখ্যা আৰু সূচক পৰিমেয় সংখ্যা হ'লেও প্ৰসাৰিত কৰিব পৰা যায়। (পিচত পঢ়িবলৈ পাবা যে এই বিধিকেইটা বাস্তৱ সংখ্যাযুক্ত সূচক পৰ্যন্ত প্ৰসাৰিত কৰিব পাৰি।) এই বিধিবিলাক উল্লেখ কৰাৰ আগতে আৰু বিধিবিলাক বোধগম্য হ'বৰ বাবে আমি প্ৰথমে অন্য কিছু কথা জনাৰ প্ৰয়োজন। উদাহৰণ স্বৰূপে $4^{\frac{3}{2}}$ কি? গতিকে আমাৰ কিছুমান কাম কৰিবলগীয়া আছে।

1.4 অনুচ্ছেদত বাস্তৱ সংখ্যা আৰু $a > 0$ ৰ বাবে $\sqrt[n]{a}$ ৰ সংজ্ঞা দিয়া হৈছিল যে :

ধৰা $a > 0$ এটা বাস্তৱ সংখ্যা আৰু n এটা ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা। তেতিয়া $\sqrt[n]{a} = b$ যদি $b^n = a$ আৰু $b > 0$

সূচকৰ ভাষাত আমি কওঁ $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$। সেয়ে, নিৰ্দিষ্টভাবে, $\sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}}$।

গতিকে $4^{\frac{3}{2}}$ ক দুই প্ৰকাৰে চাব পাৰি।

$$4^{\frac{3}{2}} = \left(4^{\frac{1}{2}}\right)^3 = 2^3 = 8$$

$$4^{\frac{3}{2}} = \left(4^3\right)^{\frac{1}{2}} = (64)^{\frac{1}{2}} = 8$$

সেয়েহে আমি তলৰ সংজ্ঞাটো দিব পাৰো :

ধৰো $a > 0$ এটা বাস্তৱ সংখ্যা। ধৰো m আৰু n এনে দুটা অখণ্ড সংখ্যা যে সিহঁতৰ 1ৰ বাহিৰে অন্য সাধাৰণ উৎপাদক নাই, আৰু $n > 0$। তেন্তে

$$a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$$

এতিয়া আমি বিস্তাৰিত ৰূপত তলত দিয়া সূচকৰ বিধিকেইটা পাওঁ :

ধৰো $a > 0$ এটা বাস্তৱ সংখ্যা আৰু p আৰু q পৰিমেয় সংখ্যা। তেনেহ'লে আমি পাওঁ

(i) $a^p.a^q = a^{p+q}$ (ii) $\left(a^p\right)^q = a^{pq}$

(iii) $\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$ (iv) $a^p b^p = (ab)^p$

এতিয়া এই বিধিকেইটা ব্যৱহাৰ কৰি আগতে দিয়া প্ৰশ্নকেইটাৰ উত্তৰ তোমালোকে কৰিব পাৰিবা।

উদাহৰণ 21 : সৰল কৰা :

(i) $2^{\frac{2}{3}}.2^{\frac{1}{3}}$ (ii) $\left(3^{\frac{1}{5}}\right)^4$ (iii) $\frac{7^{\frac{1}{5}}}{7^{\frac{1}{3}}}$ (iv) $13^{\frac{1}{5}}.17^{\frac{1}{5}}$

সমাধান : (i) $2^{\frac{2}{3}}.2^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}} = 2^{\frac{3}{3}} = 2^1 = 2$

(ii) $\left(3^{\frac{1}{5}}\right)^4 = 3^{\frac{4}{5}}$

(iii) $\frac{7^{\frac{1}{5}}}{7^{\frac{1}{3}}} = 7^{\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3}\right)} = 7^{\frac{3-5}{15}} = 7^{\frac{-2}{15}}$

(iv) $13^{\frac{1}{5}}.17^{\frac{1}{5}} = (13\times 17)^{\frac{1}{5}} = (221)^{\frac{1}{5}}$

অনুশীলনী 1.6

1. মান উলিওৱা :

(i) $64^{\frac{1}{2}}$ (ii) $32^{\frac{1}{5}}$ (iii) $125^{\frac{1}{3}}$

2. মান উলিওৱা :

(i) $9^{\frac{3}{2}}$ (ii) $32^{\frac{2}{5}}$ (iii) $16^{\frac{3}{4}}$ (iv) $125^{\frac{-1}{3}}$

3. সৰল কৰা :

(i) $2^{\frac{2}{3}}.2^{\frac{1}{5}}$ (ii) $\left(\frac{1}{3^3}\right)^7$ (iii) $\frac{11^{\frac{1}{2}}}{11^{\frac{1}{4}}}$ (iv) $7^{\frac{1}{2}}.8^{\frac{1}{2}}$

1.7 সাৰাংশ (Summary) :

এই অধ্যায়ত তোমালোকে তলৰ কথাকেইটা পঢ়িলা :

1. এটা সংখ্যা r ক পৰিমেয় সংখ্যা বুলি কোৱা হয় যদি ইয়াক $\frac{p}{q}$ আৰ্হিত লিখিব পাৰি য'ত p আৰু q অখণ্ড সংখ্যা আৰু $q \neq 0$।
2. এটা সংখ্যা s ক অপৰিমেয় সংখ্যা বুলি কোৱা হয় যেতিয়া ইয়াক $\frac{p}{q}$ আৰ্হিত লিখিব পৰা নেযায় য'ত p আৰু q অখণ্ড সংখ্যা $q \neq 0$।
3. এটা পৰিমেয় সংখ্যাৰ দশমিক বিস্তৃতি হয় পৰিসমাপ্ত হ'ব নহ'লে অবিৰত পুনৰাবৰ্তিত হ'ব। তদুপৰি যদি এটা সংখ্যাৰ দশমিক বিস্তৃতি পৰিসমাপ্ত অথবা অবিৰত পুনৰাবৰ্তিত সেই সংখ্যাটো পৰিমেয়।
4. এটা অপৰিমেয় সংখ্যাৰ দশমিক বিস্তৃতি অবিৰত অপুনৰাবৰ্তিত। তদুপৰি, এটা সংখ্যাৰ দশমিক বিস্তৃতি অবিৰত অপুনৰাবৰ্তিত হ'লে সংখ্যাটো অপৰিমেয়।
5. সকলো পৰিমেয় আৰু অপৰিমেয় সংখ্যা একেলগ হৈ বাস্তৱ সংখ্যাৰ সংগ্ৰহটো গঠন কৰে।
6. সংখ্যাৰেখাত প্ৰতিটো বিন্দুৰ অনুৰূপ এটা অদ্বিতীয় বাস্তৱ সংখ্যা আছে। তদুপৰি, প্ৰতিটো বাস্তৱ সংখ্যাৰ অনুৰূপে সংখ্যাৰেখাত এটা অদ্বিতীয় বিন্দু আছে।
7. যদি r পৰিমেয় আৰু s অপৰিমেয় তেনেহ'লে $r + s$ আৰু $r - s$ অপৰিমেয় হ'ব। তদুপৰি rs আৰু $\frac{r}{s}$ অপৰিমেয় য'ত $r \neq 0$।
8. ধনাত্মক বাস্তৱ সংখ্যা a আৰু b ৰ ক্ষেত্ৰত তলৰ অভেদবোৰ সত্য হয়।

   (i) $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ (ii) $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ (iii) $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right) = a - b$

   (iv) $\left(a+\sqrt{b}\right)\left(a-\sqrt{b}\right) = a^2 - b$ (v) $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2 = a + 2\sqrt{ab} + b$
9. a আৰু b অখণ্ড সংখ্যা হ'লে $\frac{1}{\sqrt{a}+b}$ ৰ হৰ পৰিমেয়কৰণৰ বাবে ইয়াক $\frac{\sqrt{a}-b}{\sqrt{a}-b}$ ৰে পূৰণ কৰা হয়।
10. ধৰো $a > 0$ এটা বাস্তৱ সংখ্যা আৰু p আৰু q পৰিমেয় সংখ্যা। তেনেহ'লে

    (i) $a^p a^q = a^{p+q}$ (ii) $\left(a^p\right)^q = a^{pq}$

    (iii) $\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$ (iv) $a^p b^p = (ab)^p$