10. 25 ਵਿਦਿਆਰਥੀਆਂ ਦੀ ਇੱਕ ਜਮਾਤ ਵਿੱਚੋਂ 10 ਦੀ ਚੋਣ ਇੱਕ ਸੈਰ ਸਪਾਟਾ ਪਾਰਟੀ ਦੇ ਲਈ ਕੀਤੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। 3 ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਹਨ, ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਨੇ ਇਹ ਫੈਸਲਾ ਕੀਤਾ ਹੈ ਕਿ ਜਾਂ ਤਾਂ ਉਹ ਤਿੰਨੇ ਦਲ ਵਿੱਚ ਸ਼ਾਮਿਲ ਹੋਣਗੇ, ਜਾਂ ਤਿੰਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ ਕੋਈ ਵੀ ਦਲ ਵਿੱਚ ਸ਼ਾਮਿਲ ਨਹੀਂ ਹੋਵੇਗਾ। ਸੈਰ ਸਪਾਟਾ ਪਾਰਟੀ ਦਲ ਦੀ ਚੋਣ ਕਿੰਨੇ ਤਰੀਕਿਆਂ ਨਾਲ ਕੀਤੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ ?

11. ਸ਼ਬਦ ASSASSINATION ਦੇ ਅੱਖਰਾਂ ਦੇ ਕਿੰਨੀਆਂ ਤਰਤੀਬਾਂ ਬਣਾਏ ਜਾ ਸਕਦੇ ਹਨ, ਜੇਕਰ ਸਾਰੇ S ਇਕੱਠੇ ਰਹਿਣ ?

ਸਾਰ-ਅੰਸ਼

- ਗਣਨਾ ਦਾ ਮੂਲਭੂਤ ਸਿਧਾਂਤ (Fundamental Principle of Counting) ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਘਟਨਾ m ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਤਰੀਕਿਆਂ ਨਾਲ ਘੱਟਦੀ ਹੈ, ਇਸ ਉਪਰੰਤ ਦੂਸਰੀ ਘਟਨਾ n ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਤਰੀਕਿਆਂ ਨਾਲ ਘੱਟਦੀ ਹੈ ਤਾਂ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਕ੍ਰਮ ਵਿੱਚ ਘਟਨਾ ਘਟਣ ਦੀ ਗਿਣਤੀ $m \times n$ ਹੈ।
- n ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਵਸਤੂਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਸਮੇਂ r ਨੂੰ ਲੈ ਕੇ ਬਣਨ ਵਾਲੇ ਕ੍ਰਮ ਸੰਚਣ ਦੀ ਗਿਣਤੀ, ਜਦਕਿ ਦੁਹਰਾਏ ਜਾਣ ਦੀ ਇਜਾਜ਼ਤ ਨਹੀਂ ਹੈ ਨੂੰ ${}^nP_r$ ਨਾਲ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ${}^nP_r = \dfrac{n!}{(n-r)!}$, ਜਿੱਥੇ $0 \le r \le n$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।
- $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n$
- $n! = n \times (n-1)!$
- n ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਵਸਤੂਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਸਮੇਂ ਤੇ r ਨੂੰ ਲੈ ਕੇ ਬਣਨ ਵਾਲੇ ਕ੍ਰਮ ਸੰਚਣ ਦੀ ਗਿਣਤੀ n^r ਹੈ, ਜਦੋਂ ਦੁਹਰਾਏ ਜਾਣ ਦੀ ਇਜਾਜ਼ਤ ਹੈ।
- n ਵਸਤੂਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਸਾਰਿਆਂ ਨੂੰ ਇਕੱਠੇ ਲੈ ਕੇ ਬਣਨ ਵਾਲੇ ਕ੍ਰਮ ਸੰਚਣ ਦੀ ਗਿਣਤੀ $\dfrac{n!}{p_1!\, p_2! \ldots p_k!}$ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ p_1 ਵਸਤੂਆਂ ਇੱਕ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ, p_2 ਵਸਤੂਆਂ ਦੂਸਰੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ, ... p_k ਵਸਤੂਆਂ kਵੇਂ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਅਤੇ ਬਾਕੀ ਸਾਰੀਆਂ ਵਸਤੂਆਂ, ਜੇਕਰ ਕੋਈ ਹੈ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਹਨ।
- n ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਵਸਤੂਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਸਮੇਂ ਤੇ r ਨੂੰ ਲੈ ਕੇ ਬਣਨ ਵਾਲੇ ਸੰਯੋਜਨ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਨੂੰ ${}^nC_r$ ਨਾਲ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ ਅਤੇ ${}^nC_r = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$, $0 \le r \le n$

ਇਤਿਹਾਸਿਕ ਨੋਟ

ਭਾਰਤ ਵਿੱਚ ਕ੍ਰਮ ਸੰਚਣ ਅਤੇ ਸੰਯੋਜਨ ਦੀ ਧਾਰਨਾ ਜੈਨ ਧਰਮ ਅਤੇ ਸੰਭਾਵੀ ਤੌਰ 'ਤੇ ਇਸ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਹੋਈ ਹੈ। ਫਿਰ ਵੀ ਇਸਦਾ ਸਿਹਰਾ ਜੈਨੀਆਂ ਨੂੰ ਹੀ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੈ, ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਨੇ 'ਵਿਕਲਪ' ਨਾਮ ਦੇ ਤਹਿਤ ਇਸਦੇ ਵਿਸ਼ਾ ਵਸਤੂ ਨੂੰ ਗਣਿਤ ਦੇ ਸਵੈ-ਸੰਪੰਨ ਵਿਸ਼ੇ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਵਿਕਸਿਤ ਕੀਤਾ।

ਜੈਨੀਆਂ ਵਿੱਚ ਮਹਾਂਵੀਰ (ਸੰਨ 850 ਈ. ਦੇ ਲਗਭਗ) ਸੰਭਾਵੀ ਤੌਰ 'ਤੇ ਵਿਸ਼ਵ ਦੇ ਪਹਿਲੇ ਗਣਿਤ ਸ਼ਾਸ਼ਤਰੀ ਹਨ, ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਨੇ ਕ੍ਰਮ ਸੰਚਣ ਅਤੇ ਸੰਯੋਜਨ ਦੇ ਸੂਤਰਾਂ ਨੂੰ ਦੇ ਕੇ ਸਰਾਹਨਾ ਭਰਪੂਰ ਕੰਮ ਕੀਤਾ।

ਈਸਾ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ 6 ਸ਼ਤਾਬਦੀ ਵਿੱਚ, Sushruta ਨੇ ਆਪਣੇ ਔਸ਼ਧੀ ਵਿਗਿਆਨ ਦੇ ਕੰਮ ਦੀ ਸੁਪਰਸਿੱਧ ਪੁਸਤਕ 'Sushruta Samhita' ਦੇ ਵਿੱਚ ਲਿਖਿਆ ਕਿ 6 ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਰਸਾਂ ਨੂੰ ਇੱਕ ਸਮੇਂ ਇੱਕ, ਦੋ .... ਆਦਿ ਲੈ ਕੇ 63 ਸੰਯੋਜਨ ਬਣਾਏ ਜਾ ਸਕਦੇ ਹਨ। ਈਸਾ ਤੋਂ ਤਿੰਨ ਸ਼ਤਾਬਦੀ ਪਹਿਲਾਂ ਸੰਸਕ੍ਰਿਤ ਦੇ ਵਿਦਵਾਨ Pingala" ਨੇ ਆਪਣੇ ਪ੍ਰਸਿੱਧ ਕੰਮ "Chhandra Sutra" ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਅੱਖਰਾਂ ਦੇ ਸਮੂਹ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ, ਦੋ ... ਆਦਿ ਲੈ ਕੇ ਬਣਨ ਵਾਲੇ ਸੰਯੋਜਨ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਬਾਰੇ ਵਰਣਨ ਕੀਤਾ ਹੈ। ਭਾਸਕਰਾਚਾਰਿਆ (ਜਨਮ 1114 ਈ:) ਨੇ ਆਪਣੀ ਪ੍ਰਸਿੱਧ ਪੁਸਤਕ ਲੀਲਾਵਤੀ ਵਿੱਚ 'Anka

Pasha' (ਅੰਕ ਪਾਸ) ਨਾਮ ਹੇਠਾਂ ਕ੍ਰਮ ਸੰਚਣ ਅਤੇ ਸੰਯੋਜਨ ਤੇ ਮਹੱਤਵਪੂਰਣ ਕੰਮ ਕੀਤਾ। ਮਹਾਂਵੀਰ ਦੁਆਰਾ ^nC_r ਅਤੇ ^nP_r ਦੇਂ ਪਹਿਲਾਂ ਦਿੱਤੇ ਸੂਤਰਾਂ ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ ਭਸਕਰਾਚਾਰਯ ਨੇ ਵਿਸ਼ੇ ਪ੍ਰਤੀ ਅਨੇਕਾਂ ਪ੍ਰਮੇਯ ਅਤੇ ਪਰਿਣਾਮਾਂ ਦਾ ਜਿਕਰ ਕੀਤਾ ਹੈ।

ਭਾਰਤ ਤੋਂ ਬਾਹਰ ਕ੍ਰਮ ਸੰਚਣ ਅਤੇ ਸੰਯੋਜਨ ਸੰਬੰਧੀ ਵਿਸ਼ਾ ਵਸਤੂ ਦੇ ਕੰਮ ਦਾ ਸ਼ੁਭ ਅਰੰਭ ਚੀਨੀ ਗਣਿਤ ਸ਼ਾਸ਼ਤਰੀਆਂ ਦੁਆਰਾ ਉਹਨਾਂ ਦੀ ਪ੍ਰਸਿੱਧ ਪੁਸਤਕ I–King ਵਿੱਚ ਵਰਣਿਤ ਹੈ। ਇਸ ਕੰਮ ਦਾ ਅੰਦਾਜਨ ਸਮਾਂ ਦੱਸਣਾ ਮੁਸ਼ਕਿਲ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ 213 ਈਸਵੀ ਪੂਰਵ ਵਿੱਚ ਉਸ ਸਮੇਂ ਦੇ ਸਮਰਾਟ ਨੇ ਆਦੇਸ਼ ਦਿੱਤਾ ਸੀ ਕਿ ਸਾਰੀਆਂ ਪੁਸਤਕਾਂ ਅਤੇ ਹੱਥ ਲਿਖਤ ਪਾਂਡੂਲਿਪੀਆਂ ਸਾੜ ਦਿੱਤੀਆਂ ਜਾਣ। ਸੌਭਾਗ ਨਾਲ ਇਸਦਾ ਪੂਰਣ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਪਾਲਣ ਨਹੀਂ ਹੋਇਆ। ਯੂਨਾਨੀ ਅਤੇ ਬਾਅਦ ਵਿੱਚ ਲੈਟਿਨ ਗਣਿਤ ਸ਼ਾਸ਼ਤਰੀਆਂ ਨੇ ਵੀ ਕ੍ਰਮ ਸੰਚਣ ਅਤੇ ਸੰਯੋਜਨ ਦੇ ਸਿਧਾਂਤ ਤੇ ਕੁੱਛ ਛਿਟਪੁਟ ਕੰਮ ਕੀਤੇ ਹਨ।

ਕੁਝ ਅਰਬੀ ਅਤੇ ਹੇਬ੍ਰੋ ਲੇਖਕਾਂ ਨੇ ਵੀ ਕ੍ਰਮ ਸੰਚਣ ਅਤੇ ਸੰਯੋਜਨ ਦੀਆਂ ਸੰਕਲਪਨਾਵਾਂ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਜੋਤਿਸ਼ ਦੇ ਅਧਿਐਨ ਲਈ ਕੀਤੀ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ 'ਤੇ : Rabbi ben Ezra ਨੇ ਜਿਹੜੇ ਗ੍ਰਹਿ ਪਤਾ ਸਨ ਉਹਨਾਂ ਨੂੰ ਇੱਕ ਵਾਰ ਇੱਕ, ਦੋ ... ਆਦਿ ਲੈ ਕੇ ਬਣਾਏ ਸੰਯੋਜਨ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਪਤਾ ਕੀਤੀ। ਇਹ ਕੰਮ 1140 ਈਸਵੀ ਪੂਰਵ ਵਿੱਚ ਹੋਇਆ ਲੱਗਦਾ ਹੈ ਕਿ Robbi ben Ezra ਨੂੰ ^nC_r ਦਾ ਸੂਤਰ ਪਤਾ ਨਹੀਂ ਸੀ, ਫਿਰ ਵੀ ਉਹਨਾਂ ਨੂੰ ਇਹ ਪਤਾ ਸੀ ਕਿ n ਅਤੇ r ਦੇ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਮੁੱਲਾਂ ਲਈ $^nC_r = {}^nC_{n-r}$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਸੰਤ 1321 ਈ ਵਿੱਚ ਹੀਬਰੂ ਲੇਖਕ Levi Ben Gerson ਨੇ ^nP_r, ^nP_n ਦੇ ਸੂਤਰਾਂ ਦੇ ਨਾਲ ^nC_r ਦੇ ਵਿਆਪਕ ਸੂਤਰਾਂ ਨੂੰ ਦੱਸਿਆ।

Ars Conjectandi, ਪਹਿਲੀ ਕਿਤਾਬ ਹੈ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਕ੍ਰਮ ਸੰਚਣ ਅਤੇ ਸੰਯੋਜਨ ਵਿਸ਼ੇ ਤੇ ਪੂਰਣ ਅਤੇ ਕ੍ਰਮਬੱਧ ਕੰਮ ਹੋਇਆ ਹੈ। ਇਸਦੇ ਲੇਖਕ ਸਿਵਸ ਗਣਿਤ ਵਿਗਿਆਨੀ *Jacob Bernoulli* (1654 – 1705 ਈ) ਹਨ। ਇਸਦਾ ਪ੍ਰਕਾਸ਼ਨ ਉਹਨਾਂ ਦੀ ਮੌਤ ਤੋਂ ਬਾਅਦ 1713 ਈ. ਵਿੱਚ ਹੋਇਆ। ਇਸ ਪੁਸਤਕ ਵਿੱਚ ਕ੍ਰਮ ਸੰਚਣ ਅਤੇ ਸੰਯੋਜਨ ਦੇ ਸਿਧਾਂਤਾਂ ਦਾ ਉਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੀ ਵਰਣਨ ਹੈ ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਿ ਅੱਜ-ਕੱਲ ਜਾਣਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਅਧਿਆਇ **8**

ਦੋ ਪਦੀ ਪਰਿਮੇਯ

(Binomial Theorem)

❖*Mathematics is a most exact science ਅਤੇ its conclusions are capable of absolute proofs. – C.P. STEINMETZ*❖

8.1 ਭੂਮਿਕਾ

Blaise Pascal
(1623-1662)

ਪਿਛਲੀਆਂ ਜਮਾਤਾਂ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ $a + b$ ਅਤੇ $a - b$ ਵਰਗੀਆਂ ਦੋ ਪਦੀਆਂ ਦਾ ਵਰਗ ਅਤੇ ਘਣ ਕਰਨਾ ਸਿੱਖਿਆ ਹੈ। ਇਹਨਾਂ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਨਾਲ ਅਸੀਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਵਰਗਾਂ ਅਤੇ ਘਣਾਂ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ, ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $(98)^2 = (100 - 2)^2$, $(999)^3 = (1000 - 1)^3$ ਆਦਿ ਅਤੇ ਫਿਰ ਵੀ, ਵੱਡੀਆਂ ਘਾਤਾਂ ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $(98)^5$, $(101)^6$ ਆਦਿ ਦੀ ਗਣਨਾ ਲਈ ਵਾਰ-ਵਾਰ ਗੁਣਾ ਕਰਨ ਕਾਫ਼ੀ ਮੁਸ਼ਕਿਲ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਮੁਸ਼ਕਿਲ ਨੂੰ ਦੋ ਪਦੀ ਪ੍ਰਮੇਯ (Binomial Theorem) ਦੁਆਰਾ ਦੂਰ ਕੀਤਾ ਗਿਆ। ਇਸ ਨਾਲ $(a + b)^n$ ਜਿੱਥੇ n ਸੰਪੂਰਨ ਜਾਂ ਪਰਿਮੇਯ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਨੂੰ ਅਸਾਨੀ ਨਾਲ ਖੋਜਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਕੇਵਲ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਲਈ ਹੀ ਦੋ ਪਦੀ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰਾਂਗੇ।

8.2 ਧਨ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਘਾਤ ਲਈ ਦੋ ਪਦੀ ਪ੍ਰਮੇਯ (Binomial Theorem for Positive Integral Indices)

ਆਉ ਪਹਿਲਾਂ ਤੋਂ ਪੜ੍ਹੀਆਂ ਇਹਨਾਂ ਸਰਵਸਮਤਾਵਾਂ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ

$$(a+b)^0 = 1 \qquad a + b \neq 0$$
$$(a+b)^1 = a + b$$
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a+b)^4 = (a+b)^3 (a+b) = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

ਇਹਨਾਂ ਪ੍ਰਸਾਰਾਂ (expansions) ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

(i) ਪ੍ਰਸਾਰ ਵਿੱਚ ਪਦਾਂ ਦੀ ਕੁੱਲ ਸੰਖਿਆ, ਘਾਤ ਤੋਂ 1 ਵੱਧ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ 'ਤੇ $(a + b)^2$ ਦੇ ਪ੍ਰਸਾਰ ਵਿੱਚ ਪਦਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਤਿੰਨ ਹੈ, ਜਦੋਂ ਕਿ $(a + b)^2$ ਦੀ ਘਾਤ 2 ਹੈ।

(ii) ਪ੍ਰਸਾਰ ਵਿੱਚ ਪਹਿਲੇ ਪਦ (ਰਾਸ਼ੀ) 'a' ਦੀ ਘਾਤ 1 ਦੇ ਕ੍ਰਮ ਨਾਲ ਘੱਟਦੀ ਹੈ ਜਦੋਂ ਕਿ ਦੂਸਰੇ ਪਦ (ਰਾਸ਼ੀ) 'b' ਦੀ ਘਾਤ 1 ਦੇ ਕ੍ਰਮ ਨਾਲ ਵੱਧਦੀ ਹੈ, ਹਰ ਇੱਕ ਅੱਗੇ ਆਉਣ ਵਾਲੇ ਪਦ ਲਈ।

(iii) ਪ੍ਰਸਾਰ ਦੇ ਹਰ ਇੱਕ ਪਦ ਵਿੱਚ a ਅਤੇ b ਦੀਆਂ ਘਾਤਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਇੱਕੋ-ਜਿਹਾ ਰਹਿੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਹ $a + b$ ਦੀ ਘਾਤ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

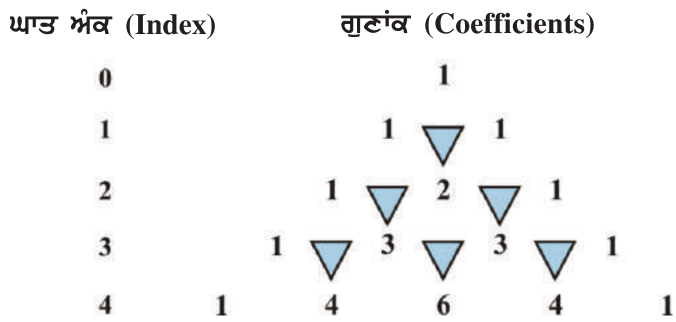
ਹੁਣ ਅਸੀਂ $a + b$ ਦੇ ਪ੍ਰਸਾਰ ਦੇ ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਪਦਾਂ ਦੇ ਗੁਣਾਂਕਾਂ ਨੂੰ ਹੇਠਾਂ ਤਰ੍ਹਾਂ ਤਰਤੀਬ ਕਰਦੇ ਹਾਂ (ਚਿੱਤਰ 8.1)

ਘਾਤ ਅੰਕ	ਗੁਣਾਂਕ
0	1
1	1 1
2	1 2 1
3	1 3 3 1
4	1 4 6 4 1

ਚਿੱਤਰ 8.1

ਕੀ ਅਸੀਂ ਇਸ ਸਾਰਣੀ ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਨਮੂਨਾ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਜੋ ਸਾਨੂੰ ਅਗਲੀ ਪੰਗਤੀ ਲਿਖਣ ਵਿੱਚ ਮਦਦ ਕਰੇ ? ਹਾਂ, ਇਹ ਦੇਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਕਿ ਘਾਤ 1 ਦੀ ਪੰਗਤੀ ਵਿੱਚ ਲਿਖੇ 1 ਅਤੇ 1 ਦਾ ਜੋੜ ਘਾਤ 2 ਦੀ ਪੰਗਤੀ ਲਈ 2 ਦਿੰਦਾ ਹੈ। ਘਾਤ 2 ਦੀ ਪੰਗਤੀ ਵਿੱਚ ਲਿਖੇ 1, 2 ਲਈ ਅਤੇ 2, 1 ਦਾ ਜੋੜ ਘਾਤ 3 ਦੀ ਪੰਗਤੀ ਦੇ ਲਈ 3 ਅਤੇ 3 ਦਿੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅੱਗੇ ਵੀ ਘਾਤ 3 ਦੀ ਪੰਗਤੀ ਲਈ ਅਤੇ ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅੱਗੇ ਵੀ ਹਰ ਇੱਕ ਪੰਗਤੀ ਦੇ ਸ਼ੁਰੂ ਅਤੇ ਖ਼ਤਮ ਹੋਣ ਤੇ 1 ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਪ੍ਰਕਿਰਿਆ ਨੂੰ ਇੱਛਾ ਅਨੁਸਾਰ ਕਿਸੇ ਵੀ ਘਾਤ ਦੇ ਲਈ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਅਸੀਂ ਚਿੱਤਰ 8.2 ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਨਮੂਨੇ ਨੂੰ ਕੁਝ ਹੋਰ ਪੰਗਤੀਆਂ ਲਿਖ ਕੇ ਅੱਗੇ ਵਧਾ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।



ਚਿੱਤਰ 8.2

ਪਾਸਕਲ ਤ੍ਰਿਭੁਜ (Pascal's Triangle)

ਚਿੱਤਰ 8.2 ਵਿੱਚ ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਨਮੂਨਾ ਇੱਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦਿਖਾਈ ਦਿੰਦਾ ਹੈ, ਜਿਸਦੇ ਉਪਰਲੇ ਸਿਰੇ ਤੇ 1 ਹੈ ਅਤੇ ਦੋ ਤਿਰਛੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਨਾਲ ਥੱਲੇ ਨੂੰ ਆ ਰਿਹਾ ਹੈ। ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਇਸ ਰਚਨਾ ਨੂੰ ਪਾਸਕਲ ਦੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ, ਇਹ ਨਾਮ ਫਰਾਂਸੀਸੀ ਗਣਿਤ ਸ਼ਾਸ਼ਤਰੀ Blaise Pascal ਦੇ ਨਾਮ ਤੋਂ ਹੈ। ਇਸ ਨੂੰ ਪਿੰਗਲ ਦਾ ਮੇਰੂ ਪਰਾਸਤਾਰਾ (Meru Prastara) ਵੀ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

ਦੋ ਪਦੀ ਦੀਆਂ ਵੱਡੀਆਂ ਘਾਤਾਂ ਦੇ ਪ੍ਰਸਾਰ ਵੀ ਪਾਸਕਲ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਨਾਲ ਸੰਭਵ ਹੈ। ਆਉ $(2x + 3y)^5$ ਦਾ ਪ੍ਰਸਾਰ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਨਾਲ ਕਰੀਏ 1 ਘਾਤ 5 ਨਾਲ ਪੰਗਤੀ ਹੈ :

1 5 10 10 5 1

ਇਸ ਪੰਗਤੀ ਅਤੇ ਉੱਪਰ (i), (ii) ਅਤੇ (iii) ਪਰਿਣਾਮਾਂ ਜਾਂ ਸਿਟਿਆਂ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ, ਸਾਨੂੰ

$$(2x + 3y)^5 = (2x)^5 + 5(2x)^4 (3y) + 10(2x)^3 (3y)^2 + 10 (2x)^2 (3y)^3 + 5(2x)(3y)^4 + (3y)^5$$

$$= 32x^5 + 240x^4y + 720x^3y^2 + 1080x^2y^3 + 810xy^4 + 243y^5$$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਹੁਣ ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ $(2x + 3y)^{12}$ ਦਾ ਪ੍ਰਸਾਰ ਕਰਨਾ ਚਾਹੁੰਦੇ ਹਾਂ, ਤਾਂ ਸਾਨੂੰ ਪਹਿਲਾਂ ਘਾਤ ਅੰਕ 12 ਲਈ ਪੰਗਤੀ ਲਿਖਣੀ ਪਵੇਗੀ। ਇਸ ਨੂੰ ਪਾਸਕਲ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀਆਂ ਘਾਤ 12 ਤੱਕ ਦੀਆਂ ਸਾਰੀਆਂ ਪੰਗਤੀਆਂ ਲਿਖ ਕੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਿ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਇਹ ਪ੍ਰਕਿਰਿਆ ਵੱਡੀਆਂ ਘਾਤਾਂ ਦੇ ਪ੍ਰਸਾਰ ਲਈ ਲੰਬੀ ਅਤੇ ਕਠਿਨ ਹੋਵੇਗੀ।

ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ਇੱਕ, ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦਾ ਨਿਯਮ ਲੱਭਣ ਦੀ ਕੋਸ਼ਿਸ਼ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਜਿਸ ਨਾਲ ਪਾਸਕਲ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਵਾਲੀ ਪੰਗਤੀ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਵਾਲੀਆਂ ਪੰਗਤੀਆਂ ਲਿਖੇ ਬਿਨਾਂ ਹੀ ਦੋ ਪਦੀ ਦੇ ਕਿਸੇ ਵੀ ਘਾਤ ਦਾ ਪ੍ਰਸਾਰ ਹੋ ਸਕੇ।

ਇਸਦੇ ਲਈ ਅਸੀਂ ਪਹਿਲਾਂ ਪੜ੍ਹ ਚੁੱਕੇ ਸੰਯੋਜਨ ਦੀ ਧਾਰਨਾ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਕੇ, ਪਾਸਕਲ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਵਿੱਚ ਲਿਖੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਫਿਰ ਤੋਂ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ। ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ${}^nC_r = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$, $0 \le r \le n$ ਅਤੇ n ਇੱਕ ਅ-ਰਿਣਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ। ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਪਾਸਕਲ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਨੂੰ ਦੁਬਾਰਾ (ਚਿੱਤਰ 8.3) ਵਿੱਚ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

ਘਾਤ ਅੰਕ (Index)	ਗੁਣਾਂਕ (Coefficients)
0	${}^0C_0$ (=1)
1	${}^1C_0$ (=1) ${}^1C_1$ (=1)
2	${}^2C_0$ (=1) ${}^2C_1$ (=2) ${}^2C_2$ (=1)
3	${}^3C_0$ (=1) ${}^3C_1$ (=3) ${}^3C_2$ (=3) ${}^3C_3$ (=1)
4	${}^4C_0$ (=1) ${}^4C_1$ (=4) ${}^4C_2$ (=6) ${}^4C_3$ (=4) ${}^4C_4$ (=1)
5	${}^5C_0$ (=1) ${}^5C_1$ (=5) ${}^5C_2$ (=10) ${}^5C_3$ (=10) ${}^5C_4$ (=5) ${}^5C_5$ (=1)

ਚਿੱਤਰ 8.3 ਪਾਸਕਲ ਤ੍ਰਿਭੁਜ

ਉਪਰੋਕਤ ਨਮੂਨੇ ਨੂੰ ਦੇਖਦੇ ਹੋਏ, ਪਹਿਲਾਂ ਦੀਆਂ ਪੰਗਤੀਆਂ ਲਿਖੇ ਬਿਨਾਂ ਹੀ ਅਸੀਂ ਪਾਸਕਲ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀ ਕਿਸੇ ਵੀ ਘਾਤ ਲਈ ਪੰਗਤੀ ਨੂੰ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ ’ਤੇ ਘਾਤ 7 ਲਈ ਪੰਗਤੀ

$${}^7C_0 \quad {}^7C_1 \quad {}^7C_2 \quad {}^7C_3 \quad {}^7C_4 \quad {}^7C_5 \quad {}^7C_6 \quad {}^7C_7$$ ਹੋਵੇਗੀ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਇਸ ਪੰਗਤੀ ਅਤੇ ਸਿੱਟਿਆਂ (i), (ii) ਅਤੇ (iii) ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ, ਸਾਨੂੰ

$(a+b)^7 = {}^7C_0\, a^7 + {}^7C_1 a^6 b + {}^7C_2 a^5 b^2 + {}^7C_3 a^4 b^3 + {}^7C_4 a^3 b^4 + {}^7C_5 a^2 b^5 + {}^7C_6 a b^6 + {}^7C_7 b^7$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਹਨਾਂ ਸਿੱਟਿਆਂ ਨੂੰ ਦੇਖਦੇ ਹੋਏ ਇੱਕ ਦੋ ਪਦੀ ਦੇ ਕਿਸੇ ਵੀ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਘਾਤ n ਲਈ ਪ੍ਰਸਾਰ ਦਿਖਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਦੋ ਪਦੀ ਦੇ ਕਿਸੇ ਵੀ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਘਾਤ ਦੇ ਪ੍ਰਸਾਰ ਨੂੰ ਲਿਖਣ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਹਾਂ।

8.2.1 *ਕਿਸੇ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ n ਲਈ ਦੋ ਪਦੀ ਪ੍ਰਮੇਯ (Binomial theorem for any positive integer n)*

$$(a+b)^n = {}^nC_0 a^n + {}^nC_1 a^{n-1} b + {}^nC_2 a^{n-2} b^2 + \ldots + {}^nC_{n-1} a . b^{n-1} + {}^nC_n b^n$$

ਸਬੂਤ : ਇਸ ਪਰਿਮੇਯ ਦਾ ਸਬੂਤ ਗਣਿਤਿਕ ਨਿਗਮਨ ਦੇ ਸਿਧਾਂਤ ਦੁਆਰਾ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਮੰਨ ਲਓ ਦਿੱਤਾ ਹੋਇਆ ਕਥਨ P(n) ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੈ :

$$P(n) : (a+b)^n = {}^nC_0 a^n + {}^nC_1 a^{n-1} b + {}^nC_2 a^{n-2} b^2 + \ldots + {}^nC_{n-1} a . b^{n-1} + {}^nC_n b^n$$

$n = 1$ ਲਈ

$$P(1) : (a+b)^1 = {}^1C_0 a^1 + {}^1C_1 b^1 = a + b$$

ਇਸ ਲਈ P(1) ਸੱਚ ਹੈ।

ਮੰਨ ਲਓ ਕਿਸੇ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ k ਲਈ P(k) ਸੱਚ (ਠੀਕ) ਹੈ,

ਭਾਵ $(a+b)^k = {}^kC_0 a^k + {}^kC_1 a^{k-1} b + {}^kC_2 a^{k-2} b^2 + \ldots + {}^kC_k b^k$ ... (1)

ਅਸੀਂ ਹੁਣ ਸਿੱਧ ਕਰਾਂਗੇ ਕਿ P(k + 1) ਵੀ ਸੱਚ ਹੈ, ਭਾਵ

$$(a+b)^{k+1} = {}^{k+1}C_0\, a^{k+1} + {}^{k+1}C_1\, a^k b + {}^{k+1}C_2\, a^{k-1} b^2 + \ldots + {}^{k+1}C_{k+1}\, b^{k+1}$$

ਹੁਣ $(a+b)^{k+1} = (a+b)(a+b)^k$

$= (a+b)\left({}^kC_0\, a^k + {}^kC_1 a^{k-1} b + {}^kC_2\, a^{k-2} b^2 + \ldots + {}^kC_{k-1}\, a b^{k-1} + {}^kC_k\, b^k\right)$ [(1) ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ]

$= {}^kC_0\, a^{k+1} + {}^kC_1\, a^k b + {}^kC_2 a^{k-1} b^2 + \ldots + {}^kC_{k-1}\, a^2 b^{k-1} + {}^kC_k\, a b^k + {}^kC_0\, a^k b$

$+ {}^kC_1 a^{k-1} b^2 + {}^kC_2 a^{k-2} b^3 + \ldots + {}^kC_{k-1} a b^k + {}^kC_k b^{k+1}$ [ਅਸਲ ਗੁਣਾ ਨਾਲ]

$$= {}^{k}C_0 a^{k+1} + ({}^{k}C_1 + {}^{k}C_0)\, a^k b + ({}^{k}C_2 + {}^{k}C_1) a^{k-1} b^2 + \ldots + ({}^{k}C_k + {}^{k}C_{k-1})\, ab^k + {}^{k}C_k b^{k+1}$$

[ਇੱਕੋ-ਜਿਹੇ ਪਦਾਂ ਨੂੰ ਇਕੱਠਾ ਕਰਕੇ]

$$= {}^{k+1}C_0 a^{k+1} + {}^{k+1}C_1 a^k b + {}^{k+1}C_2\, a^{k-1} b^2 + \ldots + {}^{k+1}C_k ab^k + {}^{k+1}C_{k+1}\, b^{k+1}$$

(${}^{k+1}C_0 = 1$, ${}^{k}C_r + {}^{k}C_{r-1} = {}^{k+1}C_r$ ਅਤੇ ${}^{k}C_k = 1 = {}^{k+1}C_{k+1}$ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਕੇ)

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਇਹ ਸਿੱਧ ਹੋ ਗਿਆ ਹੈ ਕਿ ਜਦੋਂ P(k) ਸੱਚ (ਠੀਕ) ਹੈ ਤਾਂ P(k + 1) ਵੀ ਸੱਚ (ਠੀਕ) ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਗਣਿਤਿਕ ਨਿਗਮਨ ਦੇ ਸਿਧਾਂਤ ਤੋਂ P(n) ਹਰ ਇੱਕ ਧਨ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ n ਲਈ ਸੱਚ (ਠੀਕ) ਹੈ।

ਇਸ ਪ੍ਰਮੇਯ ਨੂੰ ਅਸੀਂ $(x + 2)^6$ ਦਾ ਪ੍ਰਸਾਰ ਕਰਕੇ ਸਪੱਸ਼ਟ ਕਰਾਂਗੇ :

$$(x+2)^6 = {}^{6}C_0 x^6 + {}^{6}C_1 x^5.2 + {}^{6}C_2 x^4 2^2 + {}^{6}C_3 x^3.2^3 + {}^{6}C_4 x^2.2^4 + {}^{6}C_5 x.2^5 + {}^{6}C_6.2^6$$

$$= x^6 + 12x^5 + 60x^4 + 160x^3 + 240x^2 + 192x + 64$$

ਇਸ ਲਈ $(x + 2)^6 = x^6 + 12x^5 + 60x^4 + 160x^3 + 240x^2 + 192x + 64$

ਸਿੱਟੇ (Observations)

1. ਸੰਕੇਤ $\sum_{k=0}^{n} {}^{n}C_k\, a^{n-k} b^k$ ਤੋਂ ਭਾਵ

${}^{n}C_0 a^n b^0 + {}^{n}C_1 a^{n-1} b^1 + \ldots + {}^{n}C_r a^{n-r} b^r + \ldots + {}^{n}C_n a^{n-n} b^n$ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ $b^0 = 1 = a^{n-n}$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪ੍ਰਮੇਯ ਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਵੀ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} {}^{n}C_k\, a^{n-k} b^k$$

2. ਦੋ ਪਦੀ ਪ੍ਰਮੇਯ ਵਿੱਚ ਆਉਣ ਵਾਲੇ ਗੁਣਾਂਕਾਂ (coefficients) ${}^{n}C_r$ ਨੂੰ ਦੋ ਪਦੀ ਗੁਣਾਂਕ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

3. $(a+b)^n$ ਦੇ ਪ੍ਰਸਾਰ ਵਿੱਚ ਪਦਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ (n + 1) ਭਾਵ ਘਾਤ ਅੰਕ ਤੋਂ ਇੱਕ ਵੱਧ ਹੋਵੇਗੀ।

4. ਪ੍ਰਸਾਰ ਵਿੱਚ ਅੱਗੇ ਆਉਣ ਵਾਲੇ ਪਦਾਂ ਵਿੱਚ a ਦੀ ਘਾਤ 1 ਨਾਲ ਘੱਟਦੀ ਜਾਵੇਗੀ। ਪਹਿਲੇ ਪਦ ਵਿੱਚ ਇਹ n ਦੂਸਰੇ ਵਿੱਚ (n–1) ਅਤੇ ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅੱਗੇ ਵੀ ਅੰਤਿਮ ਪਦ ਵਿੱਚ ਇਹ ਸਿਫ਼ਰ ਹੋਵੇਗੀ। ਇਸੇ ਸਮੇਂ ਹੀ b ਦੀ ਘਾਤ ਇੱਕ ਨਾਲ ਵੱਧਦੀ ਜਾਵੇਗੀ। ਪਹਿਲੇ ਪਦ ਵਿੱਚ 0 ਤੋਂ ਸ਼ੁਰੂ ਹੋ ਕੇ, ਦੂਸਰੇ ਵਿੱਚ 1 ਅਤੇ ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅੱਗੇ ਵੀ, ਅੰਤਿਮ ਪਦ ਵਿੱਚ ਇਹ n ਹੋਵੇਗੀ।

5. $(a+b)^n$ ਦੇ ਪ੍ਰਸਾਰ ਵਿੱਚ, a ਅਤੇ b ਦੇ ਘਾਤ ਅੰਕਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਪਹਿਲੇ ਪਦ ਵਿੱਚ $n + 0 = n$ ਦੂਸਰੇ ਪਦ ਵਿੱਚ $(n - 1) + 1 = n$ ਅਤੇ ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਗਲੇ ਪਦਾਂ ਵਿੱਚ, ਅੰਤਿਮ ਪਦ ਵਿੱਚ $0 + n = n$ ਹੋਵੇਗਾ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ a ਅਤੇ b ਦੇ ਘਾਤ ਅੰਕਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਪ੍ਰਸਾਰ ਦੇ ਹਰ ਇੱਕ ਪਦ ਵਿੱਚ n ਹੋਵੇਗਾ।

8.2.2 *$(a + b)^n$ ਦੇ ਪ੍ਰਸਾਰ ਵਿੱਚ ਕੁਝ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਸਥਿਤੀਆਂ (Some special cases)*

(i) $a = x$ ਅਤੇ $b = -y$ ਨੂੰ ਲੈ ਕੇ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ

$$(x-y)^n = [x + (-y)]^n$$

$$= {}^{n}C_0 x^n + {}^{n}C_1 x^{n-1}(-y) + {}^{n}C_2 x^{n-2}(-y)^2 + {}^{n}C_3 x^{n-3}(-y)^3 + \ldots + {}^{n}C_n\, (-y)^n$$

$$= {}^{n}C_0 x^n - {}^{n}C_1 x^{n-1} y + {}^{n}C_2 x^{n-2} y^2 - {}^{n}C_3 x^{n-3} y^3 + \ldots + (-1)^n\, {}^{n}C_n\, y^n$$

ਇਸ ਲਈ $(x - y)^n = {}^{n}C_0 x^n - {}^{n}C_1 x^{n-1} y + {}^{n}C_2 x^{n-2} y^2 + \ldots + (-1)^n\, {}^{n}C_n\, y^n$

ਇਸ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ, ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ

$$(x-2y)^5 = {}^{5}C_0 x^5 - {}^{5}C_1 x^4 (2y) + {}^{5}C_2 x^3\, (2y)^2 - {}^{5}C_3 x^2\, (2y)^3 + {}^{5}C_4\, x(2y)^4 - {}^{5}C_5 (2y)^5$$

$$= x^5 - 10x^4 y + 40x^3 y^2 - 80x^2 y^3 + 80xy^4 - 32y^5$$

(ii) $a = 1$ ਅਤੇ $b = x$ ਲੈ ਕੇ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ

$$(1+x)^n = {}^{n}C_0 (1)^n + {}^{n}C_1 (1)^{n-1} x + {}^{n}C_2 (1)^{n-2} x^2 + \ldots + {}^{n}C_n x^n$$

$$= {}^nC_0 + {}^nC_1x + {}^nC_2x^2 + {}^nC_3x^3 + \ldots + {}^nC_nx^n$$

ਇਸ ਲਈ $(1 + x)^n = {}^nC_0 + {}^nC_1x + {}^nC_2x^2 + {}^nC_3x^3 + \ldots + {}^nC_nx^n$

ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਤੌਰ 'ਤੇ $x = 1$ ਲਈ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ

$$2^n = {}^nC_0 + {}^nC_1 + {}^nC_2 + \ldots + {}^nC_n$$

(iii) $a = 1$ ਅਤੇ $b = -x$ ਲੈਣ ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :

$$(1-x)^n = {}^nC_0 - {}^nC_1x + {}^nC_2x^2 - \ldots + (-1)^n\, {}^nC_nx^n$$

ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਤੌਰ 'ਤੇ $x = 1$ ਲਈ, ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ

$$0 = {}^nC_0 - {}^nC_1 + {}^nC_2 - \ldots + (-1)^n\, {}^nC_n$$

ਉਦਾਹਰਣ 1 : $\left(x^2 + \frac{3}{x}\right)^4$, $x \neq 0$ ਦਾ ਪ੍ਰਸਾਰ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਦੋ ਪਦੀ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ, ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ :

$$\left(x^2 + \frac{3}{x}\right)^4 = {}^4C_0(x^2)^4 + {}^4C_1(x^2)^3\left(\frac{3}{x}\right) + {}^4C_2(x^2)^2\left(\frac{3}{x}\right)^2 + {}^4C_3(x^2)\left(\frac{3}{x}\right)^3 + {}^4C_4\left(\frac{3}{x}\right)^4$$

$$= x^8 + 4.x^6 . \frac{3}{x} + 6.x^4 . \frac{9}{x^2} + 4.x^2 . \frac{27}{x^3} + \frac{81}{x^4}$$

$$= x^8 + 12x^5 + 54x^2 + \frac{108}{x} + \frac{81}{x^4}$$

ਉਦਾਹਰਣ 2 : $(98)^5$ ਦੀ ਗਣਨਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ 98 ਨੂੰ ਦੋ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਜਾਂ ਅੰਤਰ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲਿਖਾਂਗੇ, ਜਿਨ੍ਹਾ ਦਾ ਘਾਤ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਅਸਾਨ ਹੋਵੇ ਅਤੇ ਫਿਰ ਅਸੀਂ ਦੋ ਪਦੀ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਾਂਗੇ।

$98 = (100 - 2)$ ਲਿਖੋ

ਹੁਣ $(98)^5 = (100 - 2)^5$

$$= {}^5C_0\,(100)^5 - {}^5C_1\,(100)^4.2 + {}^5C_2\,(100)^3 2^2 - {}^5C_3\,(100)^2\,(2)^3 + {}^5C_4\,(100)\,(2)^4 - {}^5C_5\,(2)^5$$

$$= 10000000000 - 5 \times 100000000 \times 2 + 10 \times 1000000 \times 4 - 10 \times 10000 \times 8 + 5 \times 100 \times 16 - 32$$

$$= 10040008000 - 1000800032 = 9039207968$$

ਉਦਾਹਰਣ 3 : $(1.01)^{1000000}$ ਜਾਂ 10,000 ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਹੜੀ ਸੰਖਿਆ ਵੱਡੀ ਹੈ ?

ਹੱਲ : 1.01 ਨੂੰ ਦੋ ਪਦਾਂ ਵਿੱਚ ਲਿਖ ਕੇ ਅਤੇ ਫਿਰ ਦੋ ਪਦੀ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਪਹਿਲੇ ਕੁਝ ਪਦਾਂ ਨੂੰ ਲਿਖ ਕੇ ਸਾਨੂੰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ :

$(1.01)^{1000000} = (1 + 0.01)^{1000000}$

$= {}^{1000000}C_0 + {}^{1000000}C_1(0.01)$ + ਹੋਰ ਧਨਾਤਮਕ ਪਦ

$= 1 + 1000000 \times 0.01$ + ਹੋਰ ਧਨਾਤਮਕ ਪਦ

$= 1 + 10000$ + ਹੋਰ ਧਨਾਤਮਕ ਪਦ

> 10000

ਇਸ ਲਈ $(1.01)^{1000000} > 10000$

ਉਦਾਹਰਣ 4 : ਦੋ ਪਦੀ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $6^n - 5n$ ਨੂੰ ਜਦੋਂ 25 ਨਾਲ ਭਾਗ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਹਮੇਸ਼ਾ 1 ਬਾਕੀ ਬੱਚਦਾ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਦੋ ਸੰਖਿਆਵਾਂ a ਅਤੇ b ਲਈ, ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ q ਅਤੇ r ਲੱਭ ਸਕੀਏ ਤਾਂ ਜੋ $a = bq + r$, ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ a ਨੂੰ b ਨਾਲ ਭਾਗ ਕਰਨ ਤੇ q ਭਾਗਫਲ ਅਤੇ r ਬਾਕੀ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਇਹ ਸਿੱਧ ਕਰਨ ਲਈ ਕਿ $6^n - 5n$ ਨੂੰ 25 ਨਾਲ ਭਾਗ ਕਰਨ ’ਤੇ 1 ਬਾਕੀ ਬੱਚਦਾ ਹੈ, ਸਾਨੂੰ ਸਿੱਧ ਕਰਨਾ ਪਵੇਗਾ, $6^n - 5n = 25k + 1$, ਜਿੱਥੇ k ਇੱਕ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ

$$(1 + a)^n = {}^nC_0 + {}^nC_1 a + {}^nC_2 a^2 + ... + {}^nC_n a^n$$

$a = 5$ ਰੱਖਣ ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ।

$$(1 + 5)^n = {}^nC_0 + {}^nC_1 5 + {}^nC_2 5^2 + ... + {}^nC_n 5^n$$

ਜਾਂ $\quad (6)^n = 1 + 5n + 5^2.{}^nC_2 + 5^3.{}^nC_3 + ... + 5^n$

ਜਾਂ $\quad 6^n - 5n = 1 + 5^2 ({}^nC_2 + {}^nC_3 5 + ... + 5^{n-2})$

ਜਾਂ $\quad 6^n - 5n = 1 + 25 ({}^nC_2 + 5 .{}^nC_3 + ... + 5^{n-2})$

ਜਾਂ $\quad 6^n - 5n = 25k + 1$ ਜਿੱਥੇ $k = {}^nC_2 + 5 .{}^nC_3 + ... + 5^{n-2}$.

ਇਹ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ ਕਿ $6^n - 5n$ ਨੂੰ 25 ਨਾਲ ਭਾਗ ਕਰਨ ’ਤੇ ਬਾਕੀ 1 ਬੱਚਦਾ ਹੈ।

ਅਭਿਆਸ 8.1

ਅਭਿਆਸ 1 ਤੋਂ 5 ਤੱਕ ਹਰ ਇੱਕ ਵਿਅੰਜਕ ਦਾ ਪ੍ਰਸਾਰ ਕਰੋ :

1. $(1 - 2x)^5$ **2.** $\left(\frac{2}{x} - \frac{x}{2}\right)^5$ **3.** $(2x - 3)^6$ **4.** $\left(\frac{x}{3} + \frac{1}{x}\right)^5$

5. $\left(x + \frac{1}{x}\right)^6$

ਦੋ ਪਦੀ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ, ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤਿਆਂ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ :

6. $(96)^3$ **7.** $(102)^5$ **8.** $(101)^4$ **9.** $(99)^5$

10. ਦੋ ਪਦੀ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਦੱਸੋ ਕਿ $(1.1)^{10000}$ ਅਤੇ 1000 ਵਿੱਚੋਂ ਕਿਹੜੀ ਸੰਖਿਆ ਵੱਡੀ ਹੈ।

11. $(a + b)^4 - (a - b)^4$ ਪਤਾ ਕਰੋ ਅਤੇ ਇਸ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਕੇ $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^4 - (\sqrt{3} - \sqrt{2})^4$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ?

12. $(x + 1)^6 + (x - 1)^6$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਅਤੇ ਇਸਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਕੇ ਜਾਂ ਵਰਤੋਂ ਕੀਤੇ ਬਿਨਾਂ $(\sqrt{2} + 1)^6 + (\sqrt{2} - 1)^6$ ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

13. ਦਿਖਾਉ ਕਿ $9^{n+1} - 8n - 9$, 64 ਨਾਲ ਭਾਗਯੋਗ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ n ਇੱਕ ਧਨ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

14. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $\sum_{r=0}^{n} 3^r \, {}^nC_r = 4^n$

8.3 ਆਮ ਜਾਂ ਵਿਆਪਕ ਅਤੇ ਮੱਧ ਪਦ (General and Middle Terms)

1. ਦੋ ਪਦੀ $(a + b)^n$ ਦੇ ਪ੍ਰਸਾਰ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਦੇਖਿਆ ਹੈ ਕਿ ਪਹਿਲਾ ਪਦ ${}^nC_0 a^n$, ਦੂਸਰਾ ਪਦ ${}^nC_1 a^{n-1} b$, ਤੀਸਰਾ ਪਦ ${}^nC_2 a^{n-2} b^2$ ਅਤੇ ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅੱਗੇ ਵੀ। ਆਉਣ ਵਾਲੇ ਪਦਾਂ ਦੇ ਨਮੂਨੇ ਨੂੰ ਦੇਖਦੇ ਹੋਏ ਅਸੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $(r + 1)$ਵਾਂ ਪਦ ${}^nC_r a^{n-r} b^r$ ਹੋਵੇਗਾ। $(r + 1)$ਵਾਂ ਪਦ ਨੂੰ ਅਸੀਂ $(a + b)^n$ ਦੇ ਪ੍ਰਸਾਰ ਦਾ ਵਿਆਪਕ ਪਦ ਵੀ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਨੂੰ T_{r+1} ਨਾਲ ਲਿਖਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ $T_{r+1} = {}^nC_r \, a^{n-r} b^r$

2. $(a + b)^n$ ਦੇ ਪ੍ਰਸਾਰ ਦੇ ਮੱਧ ਪਦ ਬਾਰੇ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ :

(i) ਜੇਕਰ n ਜਿਸਤ ਹੈ, ਤਾਂ ਪ੍ਰਸਾਰ ਵਿੱਚ ਪਦਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ $n + 1$ ਹੋਵੇਗੀ। ਕਿਉਂਕਿ n ਜਿਸਤ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ $n + 1$ ਟਾਂਕ ਹੋਵੇਗਾ। ਇਸ ਲਈ ਮੱਧ ਪਦ $\left(\frac{n+1+1}{2}\right)$ਵਾਂ ਭਾਵ $\left(\frac{n}{2}+1\right)$ਵਾਂ ਪਦ ਹੋਵੇਗਾ।

ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ 'ਤੇ $(x + 2y)^8$ ਦੇ ਪ੍ਰਸਾਰ ਵਿੱਚ ਮੱਧ ਪਦ $\left(\frac{8}{2}+1\right)$ਵਾਂ ਭਾਵ 5ਵਾਂ ਪਦ ਹੋਵੇਗਾ।

(ii) ਜੇਕਰ n ਟਾਂਕ ਹੋਵੇ ਤਾਂ $n + 1$ ਜਿਸਤ ਹੋਵੇਗਾ, ਇਸ ਲਈ ਪ੍ਰਸਾਰ ਵਿੱਚ ਦੋ ਮੱਧ ਪਦ ਹੋਣਗੇ, ਜੋ $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ਵਾਂ ਅਤੇ $\left(\frac{n+1}{2}+1\right)$ਵਾਂ ਪਦ ਹਨ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $(2x - y)^7$, ਦੇ ਪ੍ਰਸਾਰ ਵਿਚੱ ਦੋ ਮੱਧ ਪਦ ਹਨ ਜਿਹੜੇ ਕਿ $\left(\frac{7+1}{2}\right)$ਵਾਂ ਭਾਵ 4 ਅਤੇ $\left(\frac{7+1}{2}+1\right)$ਵਾਂ ਭਾਵ 5ਵਾਂ ਪਦ ਹਨ।

3. $\left(x+\frac{1}{x}\right)^{2n}$, ਜਿੱਥੇ $x \neq 0$ ਦੇ ਪ੍ਰਸਾਰ ਵਿੱਚ $\left(\frac{2n+1+1}{2}\right)$ਵਾਂ ਪਦ, ਮੱਧ ਪਦ ਹੈ ਭਾਵ $(n + 1)$ਵਾਂ ਪਦ, ਕਿਉਂਕਿ $2n$ ਇੱਕ ਜਿਸਤ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਇਹ ${}^{2n}C_n x^n \left(\frac{1}{x}\right)^n = {}^{2n}C_n$ (ਅਚੱਲ) ਹੋਵੇਗਾ।

ਇਸ ਪਦ ਨੂੰ x ਤੋਂ ਸੁਤੰਤਰ ਪਦ ਜਾਂ ਅਚੱਲ ਪਦ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ 5 : a ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੇਕਰ $(2 + a)^{50}$ ਦੇ ਵਿਸਤ੍ਰਿਤ ਰੂਪ ਵਿੱਚ 17ਵਾਂ ਅਤੇ 18ਵਾਂ ਪਦ ਬਰਾਬਰ ਹੋਵੇ।

ਹੱਲ : $(x + y)^n$ ਦੇ ਪ੍ਰਸਾਰ ਵਿੱਚ $(r + 1)$ਵਾਂ ਪਦ ਹੈ $T_{r+1} = {}^nC_r x^{n-r} y^r$

17ਵੇਂ ਪਦ ਲਈ, $r + 1 = 17$ ਭਾਵ $r = 16$ ਹੋਵੇਗਾ।

ਇਸ ਲਈ $T_{17} = T_{16+1} = {}^{50}C_{16}\,(2)^{50-16}\,a^{16}$

$= {}^{50}C_{16}\,2^{34}\,a^{16}.$

ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ $T_{18} = {}^{50}C_{17}\,2^{33}\,a^{17}$

ਦਿੱਤਾ ਹੈ $T_{17} = T_{18}$

ਇਸ ਲਈ ${}^{50}C_{16}\,(2)^{34}\,a^{16} = {}^{50}C_{17}\,(2)^{33}\,a^{17}$

ਇਸ ਤੋਂ $$\frac{{}^{50}C_{16}\,.\,2^{34}}{{}^{50}C_{17}\,.\,2^{33}} = \frac{a^{17}}{a^{16}}$$

ਭਾਵ $$a = \frac{{}^{50}C_{16} \times 2}{{}^{50}C_{17}} = \frac{50!}{16!\,34!} \times \frac{17!\,.\,33!}{50!} \times 2 = 1$$

ਉਦਾਹਰਣ 6 : ਦਿਖਾਉ ਕਿ $(1 + x)^{2n}$ ਦੇ ਪ੍ਰਸਾਰ ਵਿੱਚ $\frac{1.3.5...(2n-1)}{n!}\, 2^n\, x^n$ ਮੱਧ ਪਦ ਹੋਵੇਗਾ, ਜਿੱਥੇ n ਇੱਕ ਧਨ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਕਿਉਂਕਿ $2n$ ਇੱਕ ਜਿਸਤ ਸੰਖਿਆ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ $(1 + x)^{2n}$ ਦੇ ਪ੍ਰਸਾਰ ਵਿੱਚ $\left(\frac{2n}{2}+1\right)$ਵਾਂ ਪਦ ਭਾਵ $(n + 1)$ਵਾਂ ਪਦ ਮੱਧ ਪਦ ਹੋਵੇਗਾ, ਜੋ ਕਿ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੈ;

$$T_{n+1} = {}^{2n}C_n (1)^{2n-n}(x)^n = {}^{2n}C_n x^n = \frac{(2n)!}{n!\ n!}x^n$$

$$= \frac{2n\,(2n-1)\ \ (2n-2)\ \ ...4.3.2.1}{n!\ n!}x^n$$

$$= \frac{1.2.3.4...(2n-2)\,(2n-1)\,(2n)}{n!n!}x^n$$

$$= \frac{[1.3.5...(2n-1)][2.4.6...(2n)]}{n!n!}\ x^n$$

$$= \frac{[1.3.5...(2n-1)]2^n\,[1.2.3...n]}{n!n!}x^n$$

$$= \frac{[1.3.5...(2n-1)]\,n!}{n!\ n!}2^n.\,x^n$$

$$= \frac{1.3.5...(2n-1)}{n!}\ 2^n\ x^n$$

ਉਦਾਹਰਣ 7 : $(x + 2y)^9$ ਦੇ ਪ੍ਰਸਾਰ ਵਿੱਚ x^6y^3 ਦਾ ਗੁਣਾਂਕ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ $(x + 2y)^9$ ਦੇ ਪ੍ਰਸਾਰ ਵਿੱਚ x^6y^3, $(r + 1)$ਵਾਂ ਪਦ ਵਿੱਚ ਆਉਂਦਾ ਹੈ।

ਹੁਣ $\quad T_{r+1} = {}^9C_r\, x^{9-r}\,(2y)^r = {}^9C_r\, 2^r\, .\, x^{9-r}\, .\, y^r\, .$

T_{r+1} ਅਤੇ x^6y^3 ਵਿੱਚ x ਅਤੇ y ਦੇ ਘਾਤ ਅੰਕਾਂ ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਕਰਨ ਤੇ ਸਾਨੂੰ $r = 3$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ, x^6y^3 ਦਾ ਗੁਣਾਂਕ

$${}^9C_3\, 2^3 = \frac{9!}{3!\,6!}.2^3 = \frac{9.8.7}{3.2}.2^3 = 672$$

ਉਦਾਹਰਣ 8 : ਦੋ ਪਦੀ ਪ੍ਰਸਾਰ $(x + a)^n$ ਵਿੱਚ ਦੂਸਰਾ, ਤੀਸਰਾ ਅਤੇ ਚੌਥਾ ਪਦ ਕ੍ਰਮਵਾਰ 240, 720 ਅਤੇ 1080 ਹੈ। x, a ਅਤੇ n ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤਾ ਹੈ, ਦੂਸਰਾ ਪਦ $T_2 = 240$

ਪਰ $\quad T_2 = {}^nC_1 x^{n-1}\,.\,a$

ਇਸ ਲਈ $\quad {}^nC_1 x^{n-1}\,.\,a = 240 \quad$ ... (1)

ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ $\quad {}^nC_2 x^{n-2}\,a^2 = 720 \quad$ ... (2)

ਅਤੇ $\quad {}^nC_3 x^{n-3}\,a^3 = 1080 \quad$ ... (3)

(2) ਨੂੰ (1) ਨਾਲ ਭਾਗ ਕਰਨ 'ਤੇ, ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ :

$$\frac{{}^nC_2 x^{n-2} a^2}{{}^nC_1 x^{n-1} a} = \frac{720}{240} \quad \text{ਭਾਵ} \quad \frac{(n-1)!}{(n-2)!} \cdot \frac{a}{x} = 6$$

ਜਾਂ

$$\frac{a}{x} = \frac{6}{(n-1)} \quad \ldots (4)$$

(3) ਨੂੰ (2) ਨਾਲ ਭਾਗ ਕਰਨ ਤੇ ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ :

$$\frac{a}{x} = \frac{9}{2(n-2)} \quad \ldots (5)$$

(4) ਅਤੇ (5) ਤੋਂ

$$\frac{6}{n-1} = \frac{9}{2(n-2)} \quad \text{ਇਸ ਲਈ } n = 5$$

ਹੁਣ (1) ਤੋਂ $5x^4a = 240$, ਅਤੇ (4) ਤੋਂ $\frac{a}{x} = \frac{3}{2}$

a ਅਤੇ x ਲਈ ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਤੇ $x = 2$ ਅਤੇ $a = 3$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 9 : $(1 + a)^n$ ਦੇ ਪ੍ਰਸਾਰ ਵਿੱਚ ਤਿੰਨ ਲਗਾਤਾਰ ਪਦਾਂ ਦੇ ਗੁਣਾਂਕਾਂ ਦਾ ਅਨੁਪਾਤ 1 : 7 : 42 ਹੈ, n ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਓ $(1 + a)^n$ ਦੇ ਪ੍ਰਸਾਰ ਦੇ ਤਿੰਨ ਲਗਾਤਾਰ $(r - 1)$ਵਾਂ, rਵਾਂ ਅਤੇ $(r + 1)$ਵਾਂ ਪਦ ਹਨ। $(r - 1)$ਵਾਂ ਪਦ ${}^nC_{r-2}\, a^{r-2}$, ਅਤੇ ਇਸਦਾ ਗੁਣਾਂਕ ${}^nC_{r-2}$ ਹੈ। ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ rਵੇਂ ਅਤੇ $(r + 1)$ਵੇਂ ਪਦ ਦਾ ਗੁਣਾਂਕ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ${}^nC_{r-1}$ ਅਤੇ ${}^nC_r$ ਹੋਵੇਗਾ।

ਕਿਉਂਕਿ ਗੁਣਾਂਕਾਂ ਦਾ ਅਨੁਪਾਤ 1 : 7 : 42 ਹੈ, ਇਸ ਲਈ

$$\frac{{}^nC_{r-2}}{{}^nC_{r-1}} = \frac{1}{7}, \text{ ਭਾਵ } n - 8r + 9 = 0 \quad \ldots (1)$$

ਅਤੇ

$$\frac{{}^nC_{r-1}}{{}^nC_r} = \frac{7}{42}, \text{ ਭਾਵ } n - 7r + 1 = 0 \quad \ldots (2)$$

(1) ਅਤੇ (2) ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਤੇ $n = 55$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਅਭਿਆਸ 8.2

ਗੁਣਾਂਕ ਪਤਾ ਕਰੋ :

1. x^5 ਦਾ $(x + 3)^8$ ਵਿੱਚ

2. a^5b^7 ਦਾ $(a - 2b)^{12}$ ਵਿੱਚ

ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਦੋ ਪਦੀ ਦੇ ਪ੍ਰਸਾਰਾਂ ਵਿੱਚ ਵਿਆਪਕ ਪਦ ਪਤਾ ਕਰੋ :

3. $(x^2 - y)^6$

4. $(x^2 - yx)^{12}, x \neq 0$

5. $(x - 2y)^{12}$ ਦੇ ਪ੍ਰਸਾਰ ਵਿੱਚੋਂ ਚੌਥਾ ਪਦ ਪਤਾ ਕਰੋ।

6. $\left(9x - \frac{1}{3\sqrt{x}}\right)^{18}$ ਦੇ ਪ੍ਰਸਾਰ ਵਿੱਚੋਂ 13ਵਾਂ ਪਦ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿੱਥੇ $x \neq 0$

ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਦੋ ਪਦੀ ਦੇ ਪ੍ਰਸਾਰਾਂ ਵਿੱਚ ਮੱਧ ਪਦ ਪਤਾ ਕਰੋ :

7. $\left(3-\dfrac{x^3}{6}\right)^7$ **8.** $\left(\dfrac{x}{3}+9y\right)^{10}$

9. $(1 + a)^{m+n}$ ਦੇ ਪ੍ਰਸਾਰ ਵਿੱਚ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ a^m ਅਤੇ a^n ਦੇ ਗੁਣਾਂਕ ਬਰਾਬਰ ਹਨ।

10. $(x + 1)^n$ ਦੇ ਪ੍ਰਸਾਰ ਵਿੱਚ $(r – 1)$ਵੇਂ, rਵੇਂ ਅਤੇ $(r + 1)$ਵੇਂ ਪਦਾਂ ਦੇ ਗੁਣਾਂਕਾਂ ਦਾ ਅਨੁਪਾਤ 1 : 3 : 5 ਹੈ, n ਅਤੇ r ਪਤਾ ਕਰੋ।

11. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $(1 + x)^{2n}$ ਦੇ ਪ੍ਰਸਾਰ ਵਿੱਚ x^n ਦਾ ਗੁਣਾਂਕ, $(1 + x)^{2n-1}$ ਦੇ ਪ੍ਰਸਾਰ ਵਿੱਚ x^n ਦੇ ਗੁਣਾਂਕ ਤੋਂ ਦੋ ਗੁਣਾ ਹੈ।

12. m ਦਾ ਧਨਾਤਮਕ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਦੋਂ $(1 + x)^m$ ਦੇ ਪ੍ਰਸਾਰ ਵਿੱਚ x^2 ਦਾ ਗੁਣਾਂਕ 6 ਹੋਵੇ।

ਫੁਟਕਲ ਉਦਾਹਰਣਾਂ

ਉਦਾਹਰਣ 10 : $\left(\dfrac{3}{2}x^2-\dfrac{1}{3x}\right)^6$ ਦੇ ਪ੍ਰਸਾਰ ਵਿੱਚ x ਤੋਂ ਸੁਤੰਤਰ ਪਦ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ $T_{r+1} = {}^6C_r\left(\dfrac{3}{2}x^2\right)^{6-r}\left(-\dfrac{1}{3x}\right)^r$

$$= {}^6C_r\left(\frac{3}{2}\right)^{6-r}\left(x^2\right)^{6-r}(-1)^r\left(\frac{1}{x}\right)^r\left(\frac{1}{3^r}\right)$$

$$= (-1)^r\ {}^6C_r\ \frac{(3)^{6-2r}}{(2)^{6-r}}\ x^{12-3r}$$

x ਤੋਂ ਸੁਤੰਤਰ ਪਦ ਲਈ x ਦਾ ਘਾਤ ਅੰਕ 0 ਹੋਣਾ ਚਾਹੀਦਾ ਹੈ ਭਾਵ $12 – 3r = 0$, ਇਸ ਲਈ $r = 4$

ਇਸ ਲਈ 5ਵਾਂ ਪਦ x ਤੋਂ ਸੁਤੰਤਰ ਹੈ ਅਤੇ ਇਹ $(-1)^4\ {}^6C_4\ \dfrac{(3)^{6-8}}{(2)^{6-4}} = \dfrac{5}{12}$ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 11 : ਜੇਕਰ $(1 + a)^n$ ਦੇ ਪ੍ਰਸਾਰ ਵਿੱਚ a^{r-1}, a^r ਅਤੇ a^{r+1} ਦੇ ਗੁਣਾਂਕ ਅੰਕਗਣਿਤਿਕ ਲੜੀ ਵਿੱਚ ਹੋਣ ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ $n^2 – n(4r + 1) + 4r^2 – 2 = 0$

ਹੱਲ : $(1 + a)^n$ ਦੇ ਪ੍ਰਸਾਰ ਵਿੱਚ $(r + 1)$ਵਾਂ ਪਦ ${}^nC_r a^r$ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਇਹ ਦੇਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ ਕਿ a^r, $(r + 1)$ਵੇਂ ਪਦ ਵਿੱਚ ਆਉਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸਦਾ ਗੁਣਾਂਕ ${}^nC_r$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ a^{r-1}, a^r ਅਤੇ a^{r+1} ਦੇ ਗੁਣਾਂਕ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ${}^nC_{r-1}$, ${}^nC_r$ ਅਤੇ ${}^nC_{r+1}$ ਹੋਣਗੇ। ਕਿਉਂਕਿ ਇਹ ਗੁਣਾਂਕ ਅੰਕਗਣਿਤਿਕ ਲੜੀ ਵਿੱਚ ਹਨ, ਇਸ ਲਈ ${}^nC_{r-1} + {}^nC_{r+1} = 2.{}^nC_r$ ਹੋਵੇਗਾ, ਇਸ ਤੋਂ

$$\frac{n!}{(r-1)!(n-r+1)!}+\frac{n!}{(r+1)!(n-r-1)!} = 2\times\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

ਭਾਵ $$\frac{1}{(r-1)!(n-r+1)(n-r)(n-r-1)!}+\frac{1}{(r+1)(r)(r-1)!(n-r-1)!}$$

$$=2\times\frac{1}{r(r-1)!(n-r)(n-r-1)!}$$

ਜਾਂ $\frac{1}{(r-1)!\ (n-r-1)!}\left[\frac{1}{(n-r)\,(n-r+1)}+\frac{1}{(r+1)\ \ (r)}\right]$

$$= 2\times\frac{1}{(r-1)!\ (n-r-1)![r(n-r)]}$$

ਭਾਵ $\frac{1}{(n-r+1)(n-r)}+\frac{1}{r(r+1)}=\frac{2}{r(n-r)}$,

ਜਾਂ $\frac{r(r+1)+(n-r)(n-r+1)}{(n-r)(n-r+1)r(r+1)}=\frac{2}{r(n-r)}$

ਜਾਂ $r(r + 1) + (n - r)(n - r + 1) = 2(r + 1)(n - r + 1)$

ਜਾਂ $r^2 + r + n^2 - nr + n - nr + r^2 - r = 2(nr - r^2 + r + n - r + 1)$

ਜਾਂ $n^2 - 4nr - n + 4r^2 - 2 = 0$

ਭਾਵ $n^2 - n(4r + 1) + 4r^2 - 2 = 0$

ਉਦਾਹਰਣ 12 : ਦਿਖਾਉ ਕਿ $(1 + x)^{2n}$ ਦੇ ਪ੍ਰਸਾਰ ਵਿੱਚ ਮੱਧ ਪਦ ਦਾ ਗੁਣਾਂਕ $(1 + x)^{2n-1}$ ਦੇ ਪ੍ਰਸਾਰ ਦੇ ਦੋ ਮੱਧ ਪਦਾਂ ਦੇ ਗੁਣਾਂਕਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੋਵੇਗਾ।

ਹੱਲ : ਕਿਉਂਕਿ $2n$ ਜਿਸਤ ਹੈ ਇਸ ਲਈ $(1 + x)^{2n}$ ਦੇ ਪ੍ਰਸਾਰ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਹੀ ਮੱਧ ਪਦ ਹੋਵੇਗਾ ਜੋ ਕਿ $\left(\frac{2n}{2}+1\right)$ਵਾਂ ਭਾਵ $(n + 1)$ਵਾਂ ਪਦ ਹੈ।

$(n + 1)$ਵਾਂ ਪਦ ${}^{2n}C_n x^n$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ x^n ਦਾ ਗੁਣਾਂਕ ${}^{2n}C_n$ ਹੈ।

ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ $(2n - 1)$ ਟਾਂਕ ਹੈ, ਦੂਸਰੇ ਪ੍ਰਸਾਰ ਵਿੱਚ ਦੋ ਮੱਧ ਪਦ ਹੋਣਗੇ, $\left(\frac{2n-1+1}{2}\right)$ਵਾਂ ਅਤੇ $\left(\frac{2n-1+1}{2}+1\right)$ਵਾਂ ਭਾਵ nਵਾਂ ਅਤੇ $(n + 1)$ਵਾਂ ਪਦ। ਇਹਨਾਂ ਪਦਾਂ ਦੇ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਗੁਣਾਂਕ ${}^{2n-1}C_{n-1}$ ਅਤੇ ${}^{2n-1}C_n$ ਹਨ।

ਹੁਣ

${}^{2n-1}C_{n-1} + {}^{2n-1}C_n = {}^{2n}C_n$ [ਕਿਉਂਕਿ ${}^{n}C_{r-1} + {}^{n}C_r = {}^{n+1}C_r$] ਜਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਿ ਲੋੜੀਂਦਾ ਸੀ।

ਉਦਾਹਰਣ 13 : $(1 + 2a)^4 (2 - a)^5$ ਦੀ ਗੁਣਾ ਵਿੱਚ a^4 ਦਾ ਗੁਣਾਂਕ, ਦੋ ਪਦੀ ਪ੍ਰਮੇਯ ਨੂੰ ਵਰਤਦੇ ਹੋਏ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਪਹਿਲਾਂ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਗੁਣਾ ਵਿੱਚ ਹਰ ਇੱਕ ਗੁਣਨਖੰਡ ਦਾ ਪ੍ਰਸਾਰ ਦੋ ਪਦੀ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਕਰਾਂਗੇ, ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ :

$$(1 + 2a)^4 = {}^4C_0 + {}^4C_1(2a) + {}^4C_2(2a)^2 + {}^4C_3(2a)^3 + {}^4C_4(2a)^4$$
$$= 1 + 4(2a) + 6(4a^2) + 4(8a^3) + 16a^4$$
$$= 1 + 8a + 24a^2 + 32a^3 + 16a^4$$

ਅਤੇ $(2 - a)^5 = {}^5C_0(2)^5 - {}^5C_1(2)^4(a) + {}^5C_2(2)^3(a)^2 - {}^5C_3(2)^2(a)^3 + {}^5C_4(2)(a)^4 - {}^5C_5(a)^5$
$$= 32 - 80a + 80a^2 - 40a^3 + 10a^4 - a^5$$

ਇਸ ਲਈ $(1 + 2a)^4 (2 - a)^5$

$$= (1 + 8a + 24a^2 + 32a^3 + 16a^4)(32 - 80a + 80a^2 - 40a^3 + 10a^4 - a^5)$$

ਸਾਨੂੰ ਦੋਹਾਂ ਦੀ ਪੂਰੀ ਗੁਣਾਂ ਕਰਨ ਅਤੇ ਸਾਰੇ ਪਦ ਲਿਖਣ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਨਹੀਂ। ਅਸੀਂ ਸਿਰਫ ਉਹ ਹੀ ਪਦ ਲਿਖਾਂਗੇ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਵਿੱਚ a^4 ਆਉਂਦਾ ਹੈ। ਇਹ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ $a^r. a^{4-r} = a^4$ ਇਸ ਲਈ ਉਹ ਪਦ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਵਿੱਚ a^4 ਆਉਂਦਾ ਹੈ, ਉਹ ਹਨ :
$1(10a^4) + (8a)(-40a^3) + (24a^2)(80a^2) + (32a^3)(-80a) + (16a^4)(32) = -438a^4$

ਇਸ ਲਈ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਗੁਣਨਫਲ ਵਿੱਚ a^4 ਦਾ ਗੁਣਾਂਕ -438 ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 14 : $(x + a)^n$ ਦੇ ਪ੍ਰਸਾਰ ਵਿੱਚ ਅੰਤ ਵਾਲੇ ਪਾਸੇ ਤੋਂ rਵਾਂ ਪਦ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : $(x + a)^n$ ਦੇ ਪ੍ਰਸਾਰ ਵਿੱਚ $(n + 1)$ ਪਦ ਹੋਣਗੇ। ਪਦਾਂ ਨੂੰ ਦੇਖਦੇ ਹੋਏ ਅਸੀਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਅੰਤ ਵਾਲੇ ਪਾਸੇ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾ ਪਦ, ਅੰਤਿਮ ਪਦ ਹੈ ਭਾਵ ਪ੍ਰਸਾਰ ਵਿੱਚ $(n + 1)$ਵਾਂ ਪਦ ਹੈ ਅਤੇ $n + 1 = (n + 1) - (1 - 1)$। ਅੰਤ ਵਾਲੇ ਪਾਸੇ ਤੋਂ ਦੂਸਰਾ ਪਦ, ਪ੍ਰਸਾਰ ਦਾ nਵਾਂ ਪਦ ਹੈ ਅਤੇ $n = (n + 1) - (2 - 1)$। ਅੰਤ ਵਾਲੇ ਪਾਸੇ ਤੋਂ ਤੀਸਰਾ ਪਦ ਪ੍ਰਸਾਰ ਦਾ $(n - 1)$ਵਾਂ ਪਦ ਹੈ ਅਤੇ $n - 1 = (n + 1) - (3 - 1)$ ਅਤੇ ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ। ਇਸ ਲਈ ਅੰਤ ਵਾਲੇ ਪਾਸੇ ਤੋਂ rਵਾਂ ਪਦ, ਪ੍ਰਸਾਰ ਦਾ $(n + 1) - (r - 1) = (n - r + 2)$ਵਾਂ ਪਦ ਹੋਵੇਗਾ ਅਤੇ $(n - r + 2)$ਵਾਂ ਪਦ ${}^nC_{n-r+1}\, x^{r-1}\, a^{n-r+1}$ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 15 : $\left(\sqrt[3]{x} + \dfrac{1}{2\sqrt[3]{x}}\right)^{18}$, $x > 0$ ਦੇ ਪ੍ਰਸਾਰ ਵਿੱਚ x ਤੋਂ ਸੁਤੰਤਰ ਪਦ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਪ੍ਰਸਾਰ ਦਾ ਵਿਆਪਕ ਪਦ $T_{r+1} = {}^{18}C_r \left(\sqrt[3]{x}\right)^{18-r} \left(\dfrac{1}{2\sqrt[3]{x}}\right)^r$

$$= {}^{18}C_r\, x^{\frac{18-r}{3}} \cdot \frac{1}{2^r . x^{\frac{r}{3}}} = {}^{18}C_r \frac{1}{2^r} . x^{\frac{18-2r}{3}} \text{ ਹੈ।}$$

ਕਿਉਂਕਿ ਅਸੀਂ x ਤੋਂ ਸੁਤੰਤਰ ਪਦ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਹੈ, ਭਾਵ ਉਹ ਪਦ ਜਿਸ ਵਿੱਚ x ਨਾਂ ਹੋਵੇ ਅਸੀਂ $\dfrac{18-2r}{3} = 0$ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ, ਇਸ ਤੋਂ ਸਾਨੂੰ $r = 9$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਲੋੜੀਂਦਾ ਪਦ ${}^{18}C_9 \dfrac{1}{2^9}$ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 16 : $\left(x - \dfrac{3}{x^2}\right)^m$, $x \neq 0$, ਤੇ m ਪ੍ਰਾਕਿਤਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ, ਦੇ ਪ੍ਰਸਾਰ ਵਿੱਚ ਪਹਿਲੇ ਤਿੰਨ ਪਦਾਂ ਦੇ ਗੁਣਾਂਕਾਂ ਦਾ ਜੋੜ 559 ਹੈ। ਪ੍ਰਸਾਰ ਵਿੱਚ x^3 ਵਾਲਾ ਪਦ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : $\left(x - \dfrac{3}{x^2}\right)^m$ ਦੇ ਪ੍ਰਸਾਰ ਵਿੱਚ ਪਹਿਲੇ ਤਿੰਨ ਪਦਾਂ ਦੇ ਗੁਣਾਂਕ, ${}^mC_0$, $(-3)\ {}^mC_1$ ਅਤੇ $9\ {}^mC_2$ ਹਨ। ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਸ਼ਰਤ ਅਨੁਸਾਰ, ਸਾਨੂੰ ਮਿਲਦਾ ਹੈ :

${}^mC_0 - 3\ {}^mC_1 + 9\ {}^mC_2 = 559$, ਭਾਵ $1 - 3m + \dfrac{9m(m-1)}{2} = 559$

ਜਿਸ ਤੋਂ ਸਾਨੂੰ $m = 12$ ਮਿਲਦਾ ਹੈ (ਕਿਉਂਕਿ m ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ)

ਹੁਣ $$T_{r+1} = {}^{12}C_r\, x^{12-r} \left(-\frac{3}{x^2}\right)^r = {}^{12}C_r\,(-3)^r \cdot x^{12-3r}$$

ਕਿਉਂਕਿ ਸਾਨੂੰ ਉਸ x^3 ਪਦ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ $12 - 3r = 3$ ਲਉ ਇਸ ਤੋਂ $r = 3$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਲਈ ਲੋੜੀਂਦਾ ਪਦ ${}^{12}C_3\,(-3)^3\, x^3$, ਭਾਵ $-5940\ x^3$ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 17 : $(1 + x)^{34}$ ਦੇ ਪ੍ਰਸਾਰ ਵਿੱਚ $(r - 5)$ਵੇਂ ਅਤੇ $(2r - 1)$ਵੇਂ ਪਦਾਂ ਦੇ ਗੁਣਾਂਕ ਬਰਾਬਰ ਹਨ। r ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : $(1 + x)^{34}$ ਦੇ ਪ੍ਰਸਾਰ ਵਿੱਚ $(r - 5)$ਵੇਂ ਅਤੇ $(2r - 1)$ਵੇਂ ਪਦ ਦੇ ਗੁਣਾਂਕ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ${}^{34}C_{r-6}$ ਅਤੇ ${}^{34}C_{2r-2}$ ਹਨ। ਕਿਉਂਕਿ ਇਹ ਦੋਵੇਂ ਬਰਾਬਰ ਦਿੱਤੇ ਹਨ, ਇਸ ਲਈ ${}^{34}C_{r-6} = {}^{34}C_{2r-2}$ ਇਸ ਤੋਂ

ਜਾਂ ਤਾਂ $r - 6 = 2r - 2$ ਜਾਂ $r - 6 = 34 - (2r - 2)$

[ਇਸ ਤੱਥ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਕਿ ਜੇਕਰ ${}^nC_r = {}^nC_p$, ਤਾਂ ਜਾਂ ਤਾਂ $r = p$ ਅਤੇ ਜਾਂ $r = n - p$]

ਇਸ ਤੋਂ $r = -4$ ਜਾਂ $r = 14$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਕਿਉਂਕਿ r ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ ਇਸ ਲਈ $r = -4$ ਨਹੀਂ ਹੋ ਸਕਦਾ, ਇਸ ਲਈ $r = 14$

ਅਧਿਆਇ 8 'ਤੇ ਫੁਟਕਲ ਅਭਿਆਸ

1. a, b ਅਤੇ n ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੇਕਰ $(a + b)^n$ ਦੇ ਪ੍ਰਸਾਰ ਵਿੱਚ ਪਹਿਲੇ ਤਿੰਨ ਪਦ ਕ੍ਰਮਵਾਰ 729, 7290 ਅਤੇ 30375 ਹੋਣ।
2. a ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੇਕਰ $(3 + ax)^9$ ਦੇ ਪ੍ਰਸਾਰ ਵਿੱਚ x^2 ਅਤੇ x^3 ਦੇ ਗੁਣਾਂਕ ਬਰਾਬਰ ਹੋਣ।
3. $(1 + 2x)^6 (1 - x)^7$ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਵਿੱਚ ਦੋ ਪਦੀ ਪ੍ਰਮੇਯ ਵਰਤਦੇ ਹੋਏ, x^5 ਦਾ ਗੁਣਾਂਕ ਪਤਾ ਕਰੋ।
4. ਜੇਕਰ a ਅਤੇ b ਅਲੱਗ-ਅਲੱਗ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹੋਣ, ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $a - b$, $a^n - b^n$ ਦਾ ਗੁਣਨਖੰਡ ਹੈ ਜਿੱਥੇ n ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।
   [**ਸੰਕੇਤ :** $a^n = (a - b + b)^n$ ਲਿਖੋ ਅਤੇ ਪ੍ਰਸਾਰ ਕਰੋ]
5. ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^6 - \left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^6$
6. ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ $\left(a^2+\sqrt{a^2-1}\right)^4 + \left(a^2-\sqrt{a^2-1}\right)^4$
7. ਪ੍ਰਸਾਰ ਦੇ ਪਹਿਲੇ ਤਿੰਨਾਂ ਪਦਾਂ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ $(0.99)^5$ ਦਾ ਲਗਭਗ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।
8. n ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੇਕਰ $\left(\sqrt[4]{2}+\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right)^n$ ਦੇ ਪ੍ਰਸਾਰ ਵਿੱਚ ਸ਼ੁਰੂ ਤੋਂ ਪੰਜਵੇਂ ਪਦ ਅਤੇ ਆਖਿਰ ਵਾਲੇ ਪਾਸੇ ਤੋਂ ਪੰਜਵੇਂ ਪਦ ਦਾ ਅਨੁਪਾਤ $\sqrt{6}:1$ ਹੋਵੇ।
9. ਦੋ ਪਦੀ ਪ੍ਰਮੇਯ ਵਰਤਦੇ ਹੋਏ $\left(1+\frac{x}{2}-\frac{2}{x}\right)^4, x \neq 0$ ਦਾ ਪ੍ਰਸਾਰ ਕਰੋ।
10. ਦੋ ਪਦੀ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ $(3x^2 - 2ax + 3a^2)^3$ ਦਾ ਪ੍ਰਸਾਰ ਕਰੋ।

ਸਾਰ-ਅੰਸ਼

- ਇੱਕ ਦੋ ਪਦੀ ਦਾ ਕਿਸੇ ਵੀ ਧਨ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ n ਲਈ ਪ੍ਰਸਾਰ ਦੋ ਪਦੀ ਪਰਿਮੇਯ ਦੁਆਰਾ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਪ੍ਰਮੇਯ ਅਨੁਸਾਰ $(a + b)^n = {}^nC_0 a^n + {}^nC_1 a^{n-1}b + {}^nC_2 a^{n-2}b^2 + ... + {}^nC_{n-1} a.b^{n-1} + {}^nC_n b^n$
- ਪ੍ਰਸਾਰ ਦੇ ਪਦਾਂ ਦੇ ਗੁਣਾਂਕ ਇੱਕ ਨਮੂਨੇ ਵਿੱਚ ਜੋੜੇ ਜਾਂਦੇ ਹਨ, ਜਿਸ ਨੂੰ ਪਾਸਕਲ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।
- $(a + b)^n$ ਦੇ ਪ੍ਰਸਾਰ ਦਾ ਵਿਆਪਕ ਪਦ $T_{r+1} = {}^nC_r a^{n-r}. b^r$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।
- $(a + b)^n$ ਦੇ ਪ੍ਰਸਾਰ ਵਿੱਚ ਜੇਕਰ n ਜਿਸਤ ਹੈ ਤਾਂ $\left(\frac{n}{2}+1\right)$ ਵਾਂ ਪਦ, ਮੱਧ ਪਦ ਹੈ ਅਤੇ ਜੇਕਰ n ਟਾਂਕ ਹੈ ਤਾਂ $\left(\frac{n+1}{2}\right)$ ਵਾਂ ਅਤੇ $\left(\frac{n+1}{2}+1\right)$ ਵਾਂ, ਦੋ ਮੱਧ ਪਦ ਹਨ।

ਇਤਿਹਾਸਿਕ ਨੋਟ

ਪ੍ਰਾਚੀਨ ਭਾਰਤੀ ਗਣਿਤ ਵਿਗਿਆਨੀ $(x + y)^n$ ਦੇ ਪ੍ਰਸਾਰ ਵਿੱਚ $0 \leq n \leq 7$ ਲਈ ਗੁਣਾਂਕਾਂ ਬਾਰੇ ਜਾਣਦੇ ਸਨ। ਇਹਨਾਂ ਗੁਣਾਂਕਾਂ ਦੀ ਤਰਤੀਬ ਇੱਕ ਚਿੱਤਰ ਵਾਂਗ ਸੀ ਜਿਸ ਨੂੰ *Meru-Prastara* ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ, Pinga ਦੁਆਰਾ ਉਸਦੀ ਕਿਤਾਬ *Chandra shastra* (200B.C.) ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੀ ਗਈ। ਇਹ ਤ੍ਰਿਭੁਜੀ ਤਰਤੀਬ ਇੱਕ ਚਾਈਨੀਜ਼ ਗਣਿਤ ਵਿਗਿਆਨੀ Chu-shi-kie ਦੇ ਕੰਮ ਵਿੱਚ 1303 ਵਿੱਚ ਪਤਾ ਲੱਗੀ। ਸ਼ਬਦ ਦੋ ਪਦੀ ਗੁਣਾਂਕ ਦੀ ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾਂ ਵਰਤੋਂ ਜਰਮਨ ਗਣਿਤ ਵਿਗਿਆਨੀ Michael Stipel (1486-1567) ਦੁਆਰਾ ਲਗਭਗ 1544 ਵਿੱਚ ਕੀਤੀ ਗਈ। Bombelli (1572) ਦੁਆਰਾ ਵੀ $(a + b)^n$, ਦੇ ਪ੍ਰਸਾਰ ਵਿੱਚ $n = 1,2 ...,7$ ਲਈ ਗੁਣਾਂਕ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਅਤੇ Oughtred (1631) ਨੇ ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ $n = 1, 2,..., 10$ ਲਈ ਦਿੱਤਾ। ਇਹ ਅੰਕਗਣਿਤਕ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਜਿਸ ਨੂੰ ਆਮ ਤੌਰ ’ਤੇ ਪਾਸਕਲ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਜਿਹੜੀ Pinga ਦੇ Meru Prastara ਵਰਗੀ ਹੈ, French ਗਣਿਤ ਵਿਗਿਆਨੀ Blaise Pascal (1623-1662) ਦੁਆਰਾ 1665 ਵਿੱਚ ਬਣਾਈ ਗਈ।

ਦੋ ਪਦੀ ਪ੍ਰਮੇਯ ਦਾ ਮੌਜੂਦਾ ਰੂਪ n ਦੇ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆ ਮੁੱਲਾਂ ਲਈ *Trate du triange arithmetic* ਵਿੱਚ Pascal ਦੁਆਰਾ ਲਿਖੀ posthumously ਕਿਤਾਬ ਵਿੱਚ 1665 ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਕਾਸ਼ਿਤ ਹੋਇਆ।

ਅਧਿਆਇ 9

ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਅਤੇ ਲੜੀਆਂ
(Sequence and Series)

❖*Natural numbers are the product of human spirit. – DEDEKIND*❖

9.1 ਭੂਮਿਕਾ

ਗਣਿਤ ਵਿਚ, ਸ਼ਬਦ 'ਅਨੁਕ੍ਰਮ' ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਸਧਾਰਨ ਪੰਜਾਬੀ ਦੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕੀਤੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਜਦੋਂ ਅਸੀਂ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਸਮੂਹ ਦੀਆਂ ਵਸਤੂਆਂ (objects) ਨੂੰ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਵਿਚ ਸੂਚੀਬੱਧ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ ਤਾਂ ਕਹਿਣ ਦਾ ਭਾਵ ਹੈ ਕਿ ਸਮੂਹ ਨੂੰ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਲੜੀਬੱਧ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ ਕਿ ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ ਪਹਿਲਾ ਮੈਂਬਰ, ਦੂਜਾ ਮੈਂਬਰ, ਤੀਜਾ ਮੈਂਬਰ ਆਦਿ ਨਾਲ ਪਹਿਚਾਣ ਸਕਦੇ ਹਾਂ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ 'ਤੇ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਸਮੇਂ ਮਨੁੱਖ ਜਾਂ ਬੈਕਟੀਰੀਆ ਦੀ ਜਨਸੰਖਿਆ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਦੀ ਰਚਨਾ ਕਰਦੇ ਹਨ। ਕੋਈ ਧੱਨਰਾਸ਼ੀ ਜੋ ਬੈਂਕ ਖਾਤੇ ਵਿਚ ਜਮ੍ਹਾਂ ਕਰਵਾ ਦਿੱਤੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ, ਕੁਝ ਸਾਲਾਂ ਮਗਰੋਂ ਇੱਕ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਦਾ ਨਿਰਮਾਣ ਕਰਦੀ ਹੈ। ਕਿਸੇ ਵਸਤੂ ਦੀ ਘੱਟਦੀ ਹੋਈ ਕੀਮਤ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਬਣਾਉਂਦੀ ਹੈ। ਮਨੁੱਖੀ ਕਿਰਿਆਵਾਂ ਦੇ ਕਈ ਖੇਤਰਾਂ ਵਿੱਚ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਦਾ ਉਪਯੋਗ ਮਹੱਤਵਪੂਰਣ ਹੈ।

Fibonacci
(1175-1250)

ਖਾਸ ਨਮੂਨਿਆ (Pattern) 'ਤੇ ਅਧਾਰਿਤ ਅਨੁਕ੍ਰਮ, ਲੜੀ (Progression) ਅਖਵਾਉਂਦੀ ਹੈ। ਪਿਛਲੀ ਸ਼੍ਰੇਣੀ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਅੰਕਗਣਿਤਿਕ ਲੜੀ (A.P.) ਬਾਰੇ ਪੜ੍ਹ ਚੁੱਕੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿਚ ਅੰਕਗਣਿਤਿਕ ਲੜੀ (A.P.) ਬਾਰੇ ਹੋਰ ਵੱਧ ਚਰਚਾ ਕਰਨ ਦੇ ਨਾਲ ਨਾਲ ਅਸੀਂ, ਅੰਕਗਣਿਤਕ ਮੱਧਮਾਨ (A.M.) ਜਿਮਾਇਤੀ ਮੱਧਮਾਨ (G.M.), ਅੰਕਗਣਿਤਿਕ ਮੱਧਮਾਨ ਅਤੇ ਜਿਮਾਇਤੀ ਮੱਧਮਾਨ ਵਿੱਚ ਸੰਬੰਧ, ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਦੇ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ, n ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਵਰਗਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਅਤੇ n ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਘਣਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਦਾ ਵੀ ਅਧਿਐਨ ਕਰਾਂਗੇ।

9.2 ਅਨੁਕ੍ਰਮ (Sequence)

ਆਉ, ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਉਦਾਹਰਣਾਂ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ —

ਮੰਨ ਲਉ ਪੀੜ੍ਹੀਆਂ ਦਾ ਅੰਤਰ 30 ਸਾਲ ਹੈ, ਸਾਨੂੰ ਵਿਅਕਤੀ ਦੇ 300 ਸਾਲਾਂ ਵਿੱਚ ਪੂਰਵਜਾਂ ਅਰਥਾਤ ਮਾਤਾ-ਪਿਤਾ, ਦਾਦਾ-ਦਾਦੀ, ਪੜਦਾਦਾ-ਪੜਦਾਦੀ ਆਦਿ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਕਿਹਾ ਹੈ ।

ਇੱਥੇ ਪੀੜ੍ਹੀਆਂ ਦੀ ਕੁੱਲ ਸੰਖਿਆ $= \dfrac{300}{30} = 10$

ਪਹਿਲੀ, ਦੂਜੀ, ਤੀਜੀ, ..., ਦਸਵੀਂ ਪੀੜ੍ਹੀ ਦੇ ਲਈ ਵਿਅਕਤੀ ਦੇ ਪੂਰਵਜਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਕ੍ਰਮਵਾਰ: 2, 4, 8, 16, 32, …, 1024 ਹੈ। ਇਹ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਦਾ ਨਿਰਮਾਣ ਕਰਦੀਆਂ ਹਨ, ਇਹ ਅਸੀਂ ਕਹਿੰਦੇ ਹਾਂ।

10 ਨੂੰ 3 ਨਾਲ ਭਾਗ ਦਿੰਦੇ ਸਮੇਂ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਚਰਣਾਂ (ਪਗਾਂ) ਦੇ ਬਾਅਦ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਭਾਗਫਲ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ। ਇਸ ਪ੍ਰਕ੍ਰਿਆ ਵਿਚ ਅਸੀਂ ਕ੍ਰਮਵਾਰ 3,3.3,3.33,3.333, ... ਆਦਿ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਇਹ ਭਾਗਫਲ ਵੀ ਇੱਕ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਦਾ ਨਿਰਮਾਣ ਕਰਦੇ ਹਨ। ਇਕ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਵਿੱਚ ਜੋ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਆਉਂਦੀਆਂ ਹਨ ਉਹ ਇਸਦੇ ਪਦ (Terms) ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਦੇ ਪਦਾਂ ਨੂੰ ਅਸੀਂ $a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$ਆਦਿ ਨਾਲ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਾਂ। ਹਰੇਕ ਪਦ ਨਾਲ ਲੱਗੀ ਹੋਈ ਸੰਖਿਆ ਨੂੰ ਪਦ-ਅੰਕ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ, ਪਦ ਦਾ ਸਥਾਨ ਦੱਸਦੀ ਹੈ। ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਦਾ nਵਾਂ ਪਦ, nਵੇਂ ਸਥਾਨ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਨੂੰ a_n ਰਾਹੀਂ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਇਸ ਨੂੰ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਦਾ ਆਮ ਪਦ (General term) ਜਾਂ ਵਿਆਪਕ ਪਦ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਵਿਅਕਤੀ ਦੀ ਪੂਰਵਜਾਂ ਦੇ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਦੇ ਪਦਾਂ ਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਾਂ।

$$a_1 = 2, a_2 = 4, a_3 = 8, \ldots, a_{10} = 1024$$

ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਨਿਰੰਤਰ ਭਾਗਫਲਾਂ ਵਾਲੇ ਉਦਾਹਰਣ ਵਿੱਚ

$$a_1 = 3, a_2 = 3.3, a_3 = 3.33, \ldots, a_6 = 3.33333, \text{ ਆਦਿ}$$

ਉਹ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਜਿਸ ਵਿਚ ਪਦਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਸੀਮਿਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ, ਉਸ ਨੂੰ ਸੀਮਿਤ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ 'ਤੇ ਪੂਰਵਜਾਂ ਦਾ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਸੀਮਿਤ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਹੈ, ਕਿਉਂਕਿ ਉਸ ਵਿਚ 10 ਪਦ ਹਨ (ਸੀਮਿਤ ਸੰਖਿਆ)।

ਇੱਕ ਅਨੁਕ੍ਰਮ, ਅਸੀਮਿਤ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ, ਜਿਸ ਵਿਚ ਪਦਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਸੀਮਿਤ ਨਾ ਹੋਵੇ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ ਤੇ ਉੱਪਰ ਦਰਸਾਏ ਨਿਰੰਤਰ ਭਾਗਫਲਾਂ ਦਾ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਇੱਕ ਅਸੀਮਿਤ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਹੈ, ਅਸੀਮਿਤ ਦਾ ਅਰਥ ਜਿਸ ਦਾ ਕੋਈ ਅੰਤ ਨਹੀਂ।

ਅਕਸਰ, ਇਹ ਸੰਭਵ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਕਿ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਦੇ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਪਦਾਂ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਣ ਦੇ ਨਿਯਮ ਨੂੰ ਬੀਜ ਗਣਿਤਿਕ ਸੂਤਰ ਦੁਆਰਾ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ 'ਤੇ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਜਿਸਤ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਅਨੁਕ੍ਰਮ 2, 4, 6……. ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ।

ਇੱਥੇ

$$a_1 = 2 = 2 \times 1 \quad a_2 = 4 = 2 \times 2$$
$$a_3 = 6 = 2 \times 3 \quad a_4 = 8 = 2 \times 4$$
$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$
$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$
$$a_{23} = 46 = 2 \times 23, a_{24} = 48 = 2 \times 24, \text{ ਅਤੇ ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੋਰ।}$$

ਅਸਲ ਵਿਚ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਦਾ nਵਾਂ ਪਦ $a_n = 2n$ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ, ਜਦੋਂ ਕਿ 'n' ਇੱਕ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ। ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਟਾਂਕ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਅਨੁਕ੍ਰਮ 1,3,5, …, ਵਿੱਚ nਵੇਂ ਪਦ ਦੇ ਸੂਤਰ ਨੂੰ $a_n = 2n - 1$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿਚ ਨਿਰੂਪਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ n ਇੱਕ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆ ਹੈ।

ਕਈ ਵਾਰ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਤਰਤੀਬ 1, 1, 2, 3, 5, 8,.. ਦਾ ਕੋਈ ਖਾਸ **ਨਮੂਨਾ** ਦਿਖਾਈ ਨਹੀਂ ਦਿੰਦਾ, ਪ੍ਰੰਤੂ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਦੀ ਰਚਨਾ ਦੁਹਰਾਉਣ ਦੇ ਸੰਬੰਧ ਦੁਆਰਾ ਦਰਸਾਈ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ, ਜਿਵੇਂ

$$a_1 = a_2 = 1$$
$$a_3 = a_1 + a_2$$
$$a_n = a_{n-2} + a_{n-1}, n > 2$$

ਇਸ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਨੂੰ ਫ਼ਿੱਬੋਨਾਕੀ (Fibonacci) ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਅਨੁਕ੍ਰਮ 2,3,5,7,…, ਵਿਚ nਵੀਂ ਅਭਾਜ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਕੋਈ ਸੂਤਰ ਨਹੀਂ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੇ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਨੂੰ ਬੋਲ ਕੇ ਨਿਰੂਪਿਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਹਰੇਕ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਵਿਚ ਇਹ ਜ਼ਰੂਰੀ ਨਹੀਂ ਕਿ ਉਸ ਦਾ ਕੋਈ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਸੂਤਰ ਹੋਵੇਗਾ। ਪ੍ਰੰਤੂ ਫਿਰ ਵੀ ਅਜਿਹੇ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਦੇ ਨਿਰਮਾਣ ਲਈ ਕੋਈ ਨਾ ਕੋਈ ਸਿਧਾਂਤਕ ਯੋਜਨਾ ਜਾਂ ਨਿਯਮ ਦੀ ਉਮੀਦ ਤਾਂ ਕੀਤੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ ਜੋ ਪਦਾਂ $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ ਨੂੰ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਕਰ ਸਕੇ।

ਉਪਰੋਕਤ ਤੱਥਾਂ ਦੇ ਅਧਾਰ 'ਤੇ ਅਨੁਕ੍ਰਮਾਂ ਨੂੰ ਅਸੀਂ ਇੱਕ **ਫਲਨ** (function) ਦੇ ਤੌਰ 'ਤੇ ਲੈ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਜਿਸਦਾ **ਪ੍ਰਾਂਤ** (Domain) ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੈ ਜਾਂ ਉਸਦਾ ਉਪ ਸਮੂਹ $\{1, 2, 3, \ldots, k\}$ ਦੇ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦਾ ਹੋਵੇ। ਕਈ ਵਾਰ ਅਸੀਂ ਫਲਨ (function) ਦੇ ਸੰਕੇਤ a_n ਦੇ ਲਈ $a(n)$ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

9.3 ਲੜੀ (Series)

ਮੰਨ ਲਉ $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$, ਦਿੱਤਾ ਗਿਆ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਹੈ, ਤਾਂ ਵਿਅੰਜਕ

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$$

ਸੰਬੰਧਿਤ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਤੋਂ ਬਣੀ ਲੜੀ ਅਖਵਾਉਂਦੀ ਹੈ। ਲੜੀ ਸੀਮਿਤ ਜਾਂ ਅਸੀਮਿਤ ਹੋਵੇਗੀ, ਜੇਕਰ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਸੀਮਿਤ ਜਾਂ ਅਸੀਮਿਤ ਹੈ। ਲੜੀ ਨੂੰ ਅਕਸਰ **ਸੰਖੇਪ** (Compact) ਰੂਪ ਵਿਚ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਜਿਸਨੂੰ ਸਿਗਮਾ ਸੰਕੇਤ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਜਿਸ ਲਈ ਗਰੀਕ ਅੱਖਰ ਸੰਕੇਤ $\sum$ (ਸਿਗਮਾ) ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਜਿਸ ਦਾ ਅਰਥ ਹੈ ਜੋੜਨਾ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲੜੀ $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$ ਦਾ ਸੰਖੇਪ ਰੂਪ $\sum_{k=1}^{n} a_k$ ਹੈ।

ਟਿੱਪਣੀ— ਲੜੀ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ, ਜੋੜ ਲਈ ਨਹੀਂ, ਸਗੋਂ ਨਿਰੂਪਿਤ ਜੋੜ ਲਈ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ 'ਤੇ $1 + 3 + 5 + 7$ ਚਾਰ ਪਦਾਂ ਵਾਲੀ ਸੀਮਿਤ ਸ਼੍ਰੇਣੀ ਹੈ। ਜਦੋਂ ਅਸੀਂ 'ਸ਼੍ਰੇਣੀ ਦਾ ਜੋੜ' ਸ਼ਬਦ ਸਮੂਹ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹਾਂ, ਤਾਂ ਇਸ ਦਾ ਅਰਥ ਉਸ ਸੰਖਿਆ

ਤੋਂ ਹੈ ਜੋ ਪਦਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ, ਇਸ ਸ਼੍ਰੇਣੀ ਦਾ ਜੋੜ 16 ਹੈ।

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਣਾਂ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ—

ਉਦਾਹਰਣ 1 : ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਅਨੁਸਾਰ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹਰੇਕ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਦੇ ਪਹਿਲੇ ਤਿੰਨ ਪਦ ਲਿਖੋ।

(i) $a_n = 2n + 5$ (ii) $a_n = \dfrac{n-3}{4}$

ਹੱਲ : (i) ਇੱਥੇ $a_n = 2n + 5$

$n = 1, 2, 3,$ ਰੱਖਣ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ

$a_1 = 2(1) + 5 = 7, a_2 = 9, a_3 = 11$

ਇਸ ਲਈ ਲੋੜੀਂਦੇ ਪਦ 7, 9 ਅਤੇ 11 ਹਨ।

(ii) ਇੱਥੇ $a_n = \dfrac{n-3}{4}$ ਤਾਂ $a_1 = \dfrac{1-3}{4} = -\dfrac{1}{2}, a_2 = -\dfrac{1}{4}, a_3 = 0$

ਇਸ ਲਈ ਪਹਿਲੇ ਤਿੰਨ ਪਦ $-\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{4}$ ਅਤੇ 0 ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ 2 : $a_n = (n – 1) (2 – n) (3 + n)$ ਦੁਆਰਾ ਦਰਸਾਏ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਦਾ 20ਵਾਂ ਪਦ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : $n = 20$, ਭਰਨ 'ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ

$$a_{20} = (20 – 1) (2 – 20) (3 + 20)$$
$$= 19 \times (– 18) \times (23) = – 7866$$

ਉਦਾਹਰਣ 3 : ਮੰਨ ਲਉ ਅਨੁਕ੍ਰਮ a_n ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਅਨੁਸਾਰ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ

$$a_1 = 1,\ a_n = a_{n-1} + 2 \text{ ਲਈ } n \geq 2$$

ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਦੇ ਪਹਿਲੇ ਪੰਜ ਪਦ ਪਤਾ ਕਰੋ ਅਤੇ ਸੰਗਤ ਸ਼੍ਰੇਣੀ ਲਿਖੋ।

ਹੱਲ : ਸਾਡੇ ਕੋਲ

$$a_1 = 1, a_2 = a_1 + 2 = 1 + 2 = 3, a_3 = a_2 + 2 = 3 + 2 = 5,$$
$$a_4 = a_3 + 2 = 5 + 2 = 7, a_5 = a_4 + 2 = 7 + 2 = 9$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਦੇ ਪਹਿਲੇ ਪੰਜ ਪਦ 1,3,5,7 ਅਤੇ 9 ਹੈ ਅਤੇ ਸੰਗਤ ਸ਼੍ਰੇਣੀ 1 + 3 + 5 + 7 + 9 +... ਹੈ।

ਅਭਿਆਸ 9.1

ਪ੍ਰਸ਼ਨ 1 ਤੋਂ 6 ਤੱਕ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਦੇ ਦਿੱਤੇ nਵੇਂ ਪਦ ਤੋਂ ਹਰੇਕ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਦੇ ਪਹਿਲੇ ਪੰਜ ਪਦ ਲਿਖੋ।

1. $a_n = n (n + 2)$ **2.** $a_n = \dfrac{n}{n+1}$ **3.** $a_n = 2^n$ **4.** $a_n = \dfrac{2n-3}{6}$

5. $a_n = (–1)^{n–1} 5^{n+1}$ **6.** $a_n = n\dfrac{n^2+5}{4}$

ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਨੰ: 7 ਤੋਂ 10 ਤੱਕ ਦੇ ਅਨੁਕ੍ਰਮਾਂ ਵਿਚ ਹਰੇਕ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਪਦ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸਦਾ nਵਾਂ ਪਦ ਦਿੱਤਾ ਹੈ।

7. $a_n = 4n – 3;\ a_{17}, a_{24}$ **8.** $a_n = \dfrac{n^2}{2^n}; a_7$ **9.** $a_n = (–1)^{n-1} n^3;\ a_9$ **10.** $a_n = \dfrac{n(n-2)}{n+3}; a_{20}$

ਪ੍ਰਸ਼ਨ 11 ਤੋਂ 13 ਤੱਕ ਹਰੇਕ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਦੇ ਪੰਜ ਪਦ ਲਿਖੋ ਅਤੇ ਸੰਗਤ ਸ਼੍ਰੇਣੀ ਪਤਾ ਕਰੋ

11. $a_1 = 3, a_n = 3a_{n-1} + 2 \ \forall \ n > 1$

12. $a_1 = -1, a_n = \frac{a_{n-1}}{n}, n \geq 2$

13. $a_1 = a_2 = 2, a_n = a_{n-1} - 1, n > 2$

14. ਫ਼ਿੱਬੋਨਾਕੀ (Fibonacci) ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਅਨੁਸਾਰ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ $1 = a_1 = a_2$ ਅਤੇ $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, n > 2$ ਤਾਂ $\frac{a_{n+1}}{a_n}$, $n = 1, 2, 3, 4, 5$ ਲਈ ਪਤਾ ਕਰੋ।

9.4 ਅੰਕਗਣਿਤਿਕ ਲੜੀ (Arithmetic Progression (A.P.))

ਆਉ ਪਹਿਲਾ ਪੜ੍ਹੇ, ਹੋਏ ਸੂਤਰਾਂ ਅਤੇ ਗੁਣਾਂ ਨੂੰ ਯਾਦ ਕਰੀਏ।

ਇੱਕ ਅਨੁਕ੍ਰਮ $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ ਨੂੰ ਅੰਕਗਣਿਤਿਕ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਜਾਂ ਅੰਕਗਣਿਤਕ ਲੜੀ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਜੇਕਰ $a_{n+1} = a_n + d$, $n \in \mathbf{N}$, a_1 ਨੂੰ ਪਹਿਲਾ ਪਦ ਅਤੇ ਸਥਿਰ ਪਦ d ਨੂੰ A.P. ਦਾ ਸਾਂਝਾ ਅੰਤਰ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

ਮੰਨ ਲਉ ਇੱਕ ਅੰਕਗਣਿਤਿਕ ਲੜੀ (ਪ੍ਰਮਾਣਿਤ ਰੂਪ ਵਿੱਚ) ਜਿਸਦਾ ਪਹਿਲਾ ਪਦ 'a' ਅਤੇ ਸਾਂਝਾ ਅੰਤਰ d ਹੈ, $a, a + d, a + 2d, \ldots$ ਹੈ।

ਤਾਂ ਇਸ ਅੰਕਗਣਿਤਿਕ ਲੜੀ ਦਾ nਵਾਂ ਪਦ (ਆਮ ਰੂਪ ਜਾਂ ਵਿਆਪਕ ਰੂਪ) $a_n = a + (n - 1) d$ ਹੈ।

ਅਸੀਂ ਅੰਕਗਣਿਤਿਕ ਲੜੀ ਦੀਆਂ ਆਮ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾਵਾਂ ਦਾ ਪਰੀਖਣ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ—

(i) ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ ਅੰਕਗਣਿਤਿਕ ਲੜੀ ਦੇ ਹਰੇਕ ਪਦ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਸਥਿਰ ਅੰਕ ਜੋੜਿਆ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਨਵਾਂ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਅੰਕਗਣਿਤਿਕ ਲੜੀ ਹੀ ਹੋਵੇਗੀ।

(ii) ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ ਅੰਕਗਣਿਤਿਕ ਲੜੀ ਦੇ ਹਰੇਕ ਪਦ ਵਿੱਚੋਂ ਇੱਕ ਸਥਿਰ ਅੰਕ ਘਟਾਇਆ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਨਵਾਂ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਅੰਕਗਣਿਤਿਕ ਲੜੀ ਹੀ ਹੋਵੇਗੀ।

(iii) ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ ਅੰਕਗਣਿਤਿਕ ਲੜੀ ਦੇ ਹਰੇਕ ਪਦ ਨੂੰ ਸਥਿਰ ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕੀਤੀ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਨਵਾਂ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਅੰਕਗਣਿਤਿਕ ਲੜੀ ਹੀ ਹੋਵੇਗੀ।

(iv) ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ ਅੰਕਗਣਿਤਿਕ ਲੜੀ ਦੇ ਹਰੇਕ ਪਦ ਨੂੰ ਕਿਸੇ ਗੈਰ ਸਿਫ਼ਰ (non zero) ਸਥਿਰ ਅੰਕ ਨਾਲ ਭਾਗ ਕੀਤਾ ਜਾਵੇ ਤਾਂ ਨਵਾਂ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਅੰਕਗਣਿਤਿਕ ਲੜੀ ਹੀ ਹੋਵੇਗੀ।

ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ ਅੰਕਗਣਿਤਿਕ ਲੜੀ ਲਈ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਸੰਕੇਤਾਂ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਾਂਗੇ :

a = ਪਹਿਲਾ ਪਦ, l = ਆਖਰੀ ਪਦ, d = ਸਾਂਝਾ ਅੰਤਰ

n = ਪਦਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ

S_n = A.P. ਦੇ n ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜ

ਮੰਨ ਲਉ $a, a + d, a + 2d, \ldots, a + (n - 1) d$ ਇੱਕ A.P. ਹੈ, ਤਾਂ

$$l = a + (n - 1) d$$

$$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

ਅਸੀਂ ਲਿਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ $$S_n = \frac{n}{2}[a + l]$$

ਆਉ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਵੇਖਦੇ ਹਾਂ।

ਉਦਾਹਰਣ 4 : ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ ਅੰਕਗਣਿਤਿਕ ਲੜੀ ਦਾ mਵਾਂ ਪਦ n ਅਤੇ nਵਾਂ ਪਦ m ਹੈ, ਜਿੱਥੇ $m \neq n$ ਹੈ ਤਾਂ pਵਾਂ ਪਦ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਸਾਡੇ ਕੋਲ $a_m = a + (m - 1) d = n$ ... (1)

ਅਤੇ $a_n = a + (n - 1) d = m$ ... (2)

(1) ਅਤੇ (2) ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ 'ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ

$(m - n) d = n - m$ ਜਾਂ $d = -1$ ... (3)

ਅਤੇ $a = n + m - 1$ ... (4)

ਇਸ ਲਈ $a_p = a + (p - 1)d$

$= n + m - 1 + (p - 1)(-1) = n + m - p$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ pਵਾਂ ਪਦ $n + m - p$ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 5 : ਜੇਕਰ ਇੱਕ AP ਦੇ n ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜ $nP + \frac{1}{2}n(n-1)Q$, ਜਿੱਥੇ P ਅਤੇ Q ਸਥਿਰ ਅੰਕ ਹਨ, ਤਾਂ ਸਾਂਝਾ ਅੰਤਰ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ਇੱਕ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ A.P. ਹੈ। ਤਾਂ

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n = nP + \frac{1}{2}n(n-1)Q$$

ਇਸ ਲਈ $S_1 = a_1 = P,\ S_2 = a_1 + a_2 = 2P + Q$

ਇਸ ਲਈ $a_2 = S_2 - S_1 = P + Q$

ਸਾਂਝਾ ਅੰਤਰ $d = a_2 - a_1$

$= (P + Q) - P = Q$, ਦੁਆਰਾ ਦਿੱਤਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 6 : ਦੋ ਅੰਕਗਣਿਤਿਕ ਲੜੀਆਂ ਦੇ n ਪਦਾਂ ਦੇ ਜੋੜਾ ਦਾ ਅਨੁਪਾਤ $(3n + 8) : (7n + 15)$ ਹੈ। ਉਹਨਾਂ ਦੇ 12ਵੇਂ ਪਦਾਂ ਦਾ ਅਨੁਪਾਤ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ a_1, a_2 ਅਤੇ d_1, d_2 ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਪਹਿਲੀ ਅਤੇ ਦੂਜੀ ਅੰਕਗਣਿਤਿਕ ਲੜੀਆਂ ਦੇ ਪਹਿਲੇ ਪਦ ਅਤੇ ਸਾਂਝਾ ਅੰਤਰ ਹਨ ਤਾਂ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਸ਼ਰਤ ਅਨੁਸਾਰ ਸਾਡੇ ਕੋਲ

$$\frac{\text{ਪਹਿਲੀ A.P. ਦੇ } n \text{ ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜ}}{\text{ਦੂਜੀ A.P. ਦੇ } n \text{ ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜ}} = \frac{3n+8}{7n+15}$$

ਜਾਂ
$$\frac{\frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d_1]}{\frac{n}{2}[2a_2 + (n-1)d_2]} = \frac{3n+8}{7n+15}$$

ਜਾਂ
$$\frac{2a_1 + (n-1)d_1}{2a_2 + (n-1)d_2} = \frac{3n+8}{7n+15} \quad \ldots (1)$$

ਹੁਣ
$$\frac{\text{ਪਹਿਲੀ A.P. ਦਾ 12ਵਾਂ ਪਦ}}{\text{ਦੂਜੀ A.P. ਦਾ 12ਵਾਂ ਪਦ}} = \frac{a_1 + 11d_1}{a_2 + 11d_2}$$

$$\frac{2a_1 + 22d_1}{2a_2 + 22d_2} = \frac{3 \times 23 + 8}{7 \times 23 + 15}$$ [(1) ਵਿੱਚ $n = 23$ ਰੱਖਣ 'ਤੇ]

ਇਸ ਲਈ
$$\frac{a_1 + 11d_1}{a_2 + 11d_2} = \frac{\text{ਪਹਿਲੀ A.P. ਦਾ 12 ਵਾਂ ਪਦ}}{\text{ਦੂਜੀ A.P. ਦਾ 12 ਵਾਂ ਪਦ.}} = \frac{7}{16}$$

ਤਾਂ ਲੋੜੀਂਦਾ ਅਨੁਪਾਤ 7 : 16 ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 7 : ਇੱਕ ਵਿਅਕਤੀ ਦੀ ਪਹਿਲੇ ਸਾਲ ਦੀ ਆਮਦਨ 3,00,000 ਰੁਪਏ ਅਤੇ ਉਸ ਦੀ ਆਮਦਨ 10,000 ਰੁਪਏ ਹਰ ਸਾਲ ਅਗਲੇ 19 ਸਾਲਾਂ ਤੱਕ ਵੱਧਦੀ ਹੈ ਤਾਂ ਉਸ ਦੁਆਰਾ 20 ਸਾਲਾਂ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤੀ ਕੁੱਲ ਆਮਦਨ ਦੀ ਰਾਸ਼ੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ ਅੰਕਗਣਿਤਿਕ ਲੜੀ (A.P.) ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਜਿਸ ਵਿਚ $a = 3{,}00{,}000$, $d = 10{,}000$, ਅਤੇ $n = 20$ ਹੈ ਜੋੜ ਦੇ ਸੂਤਰ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਕੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ :

$$S_{20} = \frac{20}{2}[600000 + 19 \times 10000] = 10\,(790000) = 79{,}00{,}000$$

ਇਸ ਲਈ 20 ਸਾਲਾਂ ਦੇ ਅੰਤ ਤੱਕ ਵਿਅਕਤੀ 79,00,000 ਰੁਪਏ ਕੁੱਲ ਆਮਦਨ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦਾ ਹੈ।

9.4.1 *ਅੰਕਗਣਿਤਿਕ ਮੱਧ (Arithmetic Mean) :* ਦੋ ਸੰਖਿਆਵਾਂ a ਅਤੇ b ਦਿੱਤੀਆਂ ਹਨ। ਇਹਨਾਂ ਦੋ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਵਿਚਕਾਰ ਇਕ ਹੋਰ ਸੰਖਿਆ A ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲਈ ਕਿ a, A, b ਅੰਕਗਣਿਤਿਕ ਲੜੀ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ A ਨੂੰ ਸੰਖਿਆਵਾਂ a ਅਤੇ b ਦਾ ਅੰਕਗਣਿਤਿਕ ਮੱਧਮਾਨ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਸਥਿਤੀ ਵਿਚ ਧਿਆਨ ਦਿਓ ਕਿ ਸਾਡੇ ਕੋਲ;

$$A - a = b - A, \quad \text{ਭਾਵ, } A = \frac{a+b}{2} \text{ ਹੈ}$$

ਅੰਕਗਣਿਤਿਕ ਮੱਧ (A.M.) ਨੂੰ ਦੋ ਸੰਖਿਆਵਾਂ a ਅਤੇ b ਦੇ ਔਸਤ $\frac{a+b}{2}$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ 'ਤੇ 4 ਅਤੇ 16 ਦਾ A.M. 10 ਹੈ। ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਸੀਂ ਇਕ ਸੰਖਿਆ 10 ਨੂੰ 4 ਅਤੇ 16 ਦੇ ਮੱਧ ਵਿਚ ਰੱਖ ਕੇ 4, 10, 16 ਅੰਕਗਣਿਤਿਕ ਲੜੀ (A.P.) ਦੀ ਰਚਨਾ ਕੀਤੀ ਹੈ। ਹੁਣ ਇੱਕ ਪ੍ਰਸ਼ਨ ਹੈ ਕਿ ਦਿੱਤੀਆਂ ਹੋਈਆਂ ਦੋ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਦੋ ਜਾਂ ਇਸ ਤੋਂ ਵੱਧ ਅੰਕ ਰੱਖਣ ਤੇ A.P. ਤਿਆਰ ਹੋ ਸਕੇਗੀ ? ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਦੋ ਸੰਖਿਆਵਾਂ 8 ਅਤੇ 12 ਨੂੰ 4 ਅਤੇ 16 ਵਿਚਕਾਰ ਰੱਖਣ 'ਤੇ 4, 8, 12, 16 ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਅੰਕਗਣਿਤਿਕ ਲੜੀ (A.P.) ਬਣਦੀ ਹੈ।

ਆਮ ਤੌਰ 'ਤੇ ਦਿੱਤੀਆਂ ਦੋ ਸੰਖਿਆਵਾਂ a ਅਤੇ b ਵਿਚਕਾਰ ਕਿੰਨੀਆਂ ਵੀ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨੂੰ ਰੱਖ ਕੇ ਅੰਕਗਣਿਤਿਕ ਲੜੀ (A.P.) ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਮੰਨ ਲਉ $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$, a ਅਤੇ b ਵਿਚਕਾਰ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹਨ ਕਿ $a, A_1, A_2, A_3, ..., A_n, b$ ਅੰਕਗਣਿਤਿਕ ਲੜੀ ਹੈ

ਇਥੇ b, $(n + 2)$ ਵਾਂ ਪਦ ਹੈ, ਭਾਵ, $b = a + [(n + 2) - 1]d = a + (n + 1)\, d$

ਇਸ ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ
$$d = \frac{b-a}{n+1}$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ, a ਅਤੇ b ਵਿੱਚ n ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਅਨੁਸਾਰ ਹਨ

$$A_1 = a + d = a + \frac{b-a}{n+1}$$

$$A_2 = a + 2d = a + \frac{2(b-a)}{n+1}$$

$$A_3 = a + 3d = a + \frac{3(b-a)}{n+1}$$

....

....

$$A_n = a + nd = a + \frac{n(b-a)}{n+1}.$$

ਉਦਾਹਰਣ 8 : 6 ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਨੂੰ 3 ਅਤੇ 24 ਵਿਚਕਾਰ ਰੱਖਣ 'ਤੇ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਇਕ ਅੰਕਗਣਿਤਿਕ ਲੜੀ ਬਣ ਜਾਵੇ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 ਅਤੇ A_6, 3 ਅਤੇ 24 ਵਿਚਕਾਰ ਛੇ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹਨ ਕਿ 3, $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$, 24 A.P. ਹੈ। ਇੱਥੇ, $a = 3$, $b = 24$, $n = 8$

ਇਸ ਲਈ, $24 = 3 + (8 - 1)\, d$, ਤਾਂ $d = 3$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $A_1 = a + d = 3 + 3 = 6;$ $A_2 = a + 2d = 3 + 2 \times 3 = 9;$

$A_3 = a + 3d = 3 + 3 \times 3 = 12;$ $A_4 = a + 4d = 3 + 4 \times 3 = 15;$

$A_5 = a + 5d = 3 + 5 \times 3 = 18;$ $A_6 = a + 6d = 3 + 6 \times 3 = 21.$

ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ 3 ਅਤੇ 24 ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ 6, 9, 12, 15, 18 ਅਤੇ 21 ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਹਨ।

ਅਭਿਆਸ 9.2

1. 1 ਤੋਂ 2001 ਤੱਕ ਟਾਂਕ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਪਤਾ ਕਰੋ।
2. 100 ਤੋਂ 1000 ਵਿਚਕਾਰ ਉਹਨਾਂ ਸਾਰੀਆਂ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੋ 5 ਦੀਆਂ ਗੁਣਜ ਹਨ।
3. ਕਿਸੇ ਅੰਕਗਣਿਤਿਕ ਲੜੀ (A.P.) ਦਾ ਪਹਿਲਾ ਪਦ 2 ਹੈ। ਉਸਦੇ ਪਹਿਲੇ ਪੰਜ ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਅਗਲੇ ਪੰਜ ਪਦਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਦਾ ਇੱਕ ਚੋਥਾਈ ਹੈ। ਦਰਸਾਉ ਕਿ 20ਵਾਂ ਪਦ –112 ਹੈ।
4. ਅੰਕਗਣਿਤਿਕ ਲੜੀ (A.P.) $-6, -\frac{11}{2}, -5, \ldots$ ਦੇ ਕਿੰਨੇ ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜ –25 ਹੈ ?
5. ਕਿਸੇ ਅੰਕਗਣਿਤਿਕ ਲੜੀ (A.P.) ਦਾ pਵਾਂ ਪਦ $\frac{1}{q}$ ਅਤੇ qਵਾਂ ਪਦ $\frac{1}{p}$ ਹੈ, ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਪਹਿਲੇ pq ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜ $\frac{1}{2}(pq+1)$ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ $p \neq q$ ਹੈ।
6. ਜੇਕਰ A.P. 25, 22, 19, … ਦੇ ਕੁਝ ਪਦਾਂ ਜਾ ਜੋੜ 116 ਹੈ ਤਾਂ ਆਖ਼ਰੀ ਪਦ ਪਤਾ ਕਰੋ।
7. ਉਸ A.P. ਦੇ n ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸਦਾ kਵਾਂ ਪਦ $5k + 1$ ਹੈ।
8. ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ A.P. ਦੇ n ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜਫਲ $(pn + qn^2)$ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ p ਅਤੇ q ਸਥਿਰ ਹਨ, ਤਾਂ ਸਾਂਝਾ ਅੰਤਰ ਪਤਾ ਕਰੋ।
9. ਦੋ ਅੰਕਗਣਿਤਿਕ ਲੜੀਆਂ ਦੇ n ਪਦਾਂ ਦੇ ਜੋੜਫਲ ਦਾ ਅਨੁਪਾਤ $(5n + 4) : (9n + 6)$ ਹੈ ਤਾਂ ਇਹਨਾਂ ਦੇ 18ਵੇਂ ਪਦਾਂ ਦਾ ਅਨੁਪਾਤ ਪਤਾ ਕਰੋ।
10. ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ A.P. ਦੇ ਪਹਿਲੇ p ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜ, ਪਹਿਲੇ q ਪਦਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਦੇ ਬਰਾਬਰ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਪਹਿਲੇ $(p + q)$ ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।
11. ਕਿਸੇ A.P. ਦੇ ਪਹਿਲੇ p, q ਅਤੇ r ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਕ੍ਰਮਵਾਰ a, b ਅਤੇ c ਹੈ।

    ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ $\frac{a}{p}(q-r)+\frac{b}{q}(r-p)+\frac{c}{r}(p-q)=0$ ਹੈ।
12. ਕਿਸੇ A.P. ਦੇ m ਅਤੇ n ਪਦਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਦਾ ਅਨੁਪਾਤ $m^2 : n^2$ ਹੈ ਤਾਂ ਦਿਖਾਉ ਕਿ mਵੇਂ ਅਤੇ nਵੇਂ ਪਦਾਂ ਦਾ ਅਨੁਪਾਤ $(2m - 1) : (2n - 1)$ ਹੈ।
13. ਕਿਸੇ A.P. ਦੇ n ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜ $3n^2 + 5n$ ਅਤੇ mਵਾਂ ਪਦ 164 ਹੈ ਤਾਂ m ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।
14. 5 ਅਤੇ 26 ਵਿਚਕਾਰ ਅਜਿਹੀਆਂ ਪੰਜ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੱਸੋ ਤਾਂ ਕਿ ਪ੍ਰਾਪਤ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਇੱਕ A.P. ਹੋਵੇ।
15. ਜੇਕਰ a ਅਤੇ b ਦਾ ਅੰਕਗਣਿਤਿਕ ਮੱਧ (A.M.) $\frac{a^n + b^n}{a^{n-1} + b^{n-1}}$ ਹੈ ਤਾਂ n ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।
16. m ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਨੂੰ 1 ਅਤੇ 31 ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਰੱਖਣ 'ਤੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਇੱਕ A.P. ਹੈ ਅਤੇ 7ਵੀਂ ਅਤੇ $(m - 1)$ ਵੀਂ ਸੰਖਿਆ ਦਾ ਅਨੁਪਾਤ 5 : 9 ਹੈ। m ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।
17. ਇੱਕ ਵਿਅਕਤੀ ਕਰਜ਼ ਦਾ ਭੁਗਤਾਨ 100 ਰੁਪਏ ਦੀ ਪਹਿਲੀ ਕਿਸ਼ਤ ਨਾਲ ਸ਼ੁਰੂ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਉਹ ਹਰੇਕ ਕਿਸ਼ਤ ਵਿਚ 5 ਰੁਪਏ ਪ੍ਰਤੀ ਮਹੀਨਾ ਵਧਾਉਂਦਾ ਹੋਵੇ ਤਾਂ 30 ਵੀਂ ਕਿਸ਼ਤ ਦੀ ਰਾਸ਼ੀ ਕਿੰਨੀ ਹੋਵੇਗੀ।
18. ਇੱਕ ਬਹੁਭੁਜ ਦੇ ਦੋ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਅੰਦਰਲੇ ਕੋਣਾਂ ਦਾ ਅੰਤਰ 5° ਹੈ। ਜੇਕਰ ਸਭ ਤੋਂ ਛੋਟਾ ਕੋਣ 120° ਹੋਵੇ, ਤਾਂ ਬਹੁਭਜ ਦੀਆਂ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।

9.5 ਜਿਮਾਇਤੀ ਲੜੀ (Geometric Progression (G.P.))

ਆਉ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਅਨੁਕ੍ਰਮਾ ਨੂੰ ਵੇਖੀਏ :

(i) 2,4,8,16,... (ii) $\frac{1}{9}, \frac{-1}{27}, \frac{1}{81}, \frac{-1}{243}...$ (iii) .01,.0001,.000001,...

ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚ ਹਰੇਕ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਦੇ ਪਦ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਵੱਧਦੇ ਹਨ ? ਹਰੇਕ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਪਹਿਲੇ ਪਦ ਨੂੰ ਛੱਡ ਕੇ ਬਾਕੀ ਇੱਕ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਕ੍ਰਮ ਵਿਚ ਵੱਧਦੇ ਹਨ।

(i) ਵਿੱਚ ਸਾਡੇ ਕੋਲ $a_1 = 2, \frac{a_2}{a_1} = 2, \frac{a_3}{a_2} = 2, \frac{a_4}{a_3} = 2$ ਅਤੇ ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ

(ii) ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਵੇਖਦੇ ਹਾਂ $a_1 = \frac{1}{9}, \frac{a_2}{a_1} = \frac{-1}{3}, \frac{a_3}{a_2} = \frac{-1}{3}, \frac{a_4}{a_3} = \frac{-1}{3}$ ਅਤੇ ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ

ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦਿਖਾਉ ਕਿ (iii) ਵਿੱਚ ਪਦ ਕਿਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਅੱਗੇ ਵੱਧਦੇ ਹਨ ? ਇਹ ਵੇਖਿਆ ਗਿਆ ਕਿ ਹਰੇਕ ਸਥਿਤੀ ਵਿਚ ਪਹਿਲੇ ਪਦ ਨੂੰ ਛੱਡ ਕੇ, ਹਰੇਕ ਅਗਲਾ ਪਦ ਪਿਛਲੇ ਪਦ ਨਾਲ ਸਥਿਰ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਵੱਧਦਾ ਹੈ। (i) ਵਿੱਚ ਇਹ ਸਥਿਰ ਅਨੁਪਾਤ 2 ਹੈ (ii) ਵਿੱਚ ਇਹ $-\frac{1}{3}$ ਹੈ (*iii*) ਵਿੱਚ ਇਹ ਸਥਿਰ ਅਨੁਪਾਤ 0.01 ਹੈ। ਅਜਿਹੇ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਨੂੰ ਜਿਮਾਇਤੀ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਜਾਂ ਜਿਮਾਇਤੀ ਲੜੀ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਸੰਖੇਪ ਵਿਚ G.P. ਲਿਖਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇੱਕ ਅਨੁਕ੍ਰਮ $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ ਨੂੰ ਜਿਮਾਇਤੀ ਲੜੀ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਜੇਕਰ ਹੇਰਕ ਪਦ ਗੈਰ-ਸਿਫ਼ਰ (ਭਾਵ ਸਿਫ਼ਰ ਨਾ ਹੋਵੇ) ਅਤੇ $\frac{a_{k+1}}{a_k} = r$ (ਸਥਿਰ ਅੰਕ) ਹੈ। $k \geq 1$ ਦੇ ਲਈ।

$a_1 = a$ ਮੰਨਣ 'ਤੇ G.P. ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ : $a, ar, ar^2, ar^3, \ldots$, ਜਿੱਥੇ a, G.P. ਦਾ ਪਹਿਲਾ ਪਦ ਅਤੇ r, G.P. ਦਾ ਸਾਂਝਾ ਅਨੁਪਾਤ ਹੈ। (i), (ii) ਅਤੇ (iii) ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੀ G.P. ਦਾ ਕ੍ਰਮਵਾਰ 2, $-\frac{1}{3}$, 0.01 ਸਾਂਝਾ ਅਨੁਪਾਤ ਹੈ।

ਜਿਵੇਂ ਕਿ ਅੰਕਗਣਿਤਿਕ ਲੜੀ ਵਿੱਚ, ਉਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਜਿਮਾਇਤੀ ਲੜੀ ਦਾ nਵਾਂ ਪਦ ਲੱਭਣ ਦੀ ਸਮੱਸਿਆ ਜਾਂ ਜਿਮਾਇਤੀ ਲੜੀ ਦੇ n ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜ, ਜਿਸ ਵਿਚ ਬਹੁਤ ਸਾਰੇ ਪਦ ਹੋਣ, ਨੂੰ ਬਿਨਾਂ ਸੂਤਰ ਹੱਲ ਕਰਨਾ ਔਖਾ ਹੈ। ਇਹਨਾਂ ਸੂਤਰਾਂ ਦੀ ਸਥਾਪਨਾ ਅਸੀਂ ਅਗਲੇ ਭਾਗ ਵਿੱਚ ਕਰਾਂਗੇ।

ਇਹਨਾਂ ਸੂਤਰਾਂ ਦੇ ਨਾਲ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਸੰਕੇਤਾਂ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਾਂਗੇ।

a = ਪਹਿਲਾ ਪਦ, r = ਸਾਂਝਾ ਅਨੁਪਾਤ, l = ਆਖਰੀ ਪਦ,

n = ਪਦਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ

S_n = ਪਹਿਲੇ n ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜ

9.5.1 ***G.P. ਦਾ ਆਮ ਪਦ ਜਾਂ ਵਿਆਪਕ ਪਦ (General term of G.P.)*** ਮੰਨ ਲਉ ਇੱਕ G.P. ਜਿਸਦਾ ਪਹਿਲਾ ਪਦ ਗੈਰ-ਸਿਫ਼ਰ 'a' ਅਤੇ ਸਾਂਝਾ ਅਨੁਪਾਤ 'r' ਹੈ ਨੂੰ ਵਿਚਾਰੀਏ। ਇਸ ਦੇ ਕੁਝ ਪਦਾਂ ਨੂੰ ਲਿਖੋ। ਦੂਜਾ ਪਦ, ਪਹਿਲੇ ਪਦ ਨੂੰ ਸਾਂਝੇ ਅਨੁਪਾਤ r ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰਨ 'ਤੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਰਥਾਤ $a_2 = ar$, ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਤੀਸਰਾ ਪਦ a_2 ਨੂੰ r ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰਨ 'ਤੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਅਰਥਾਤ $a_3 = a_2r = ar^2$ ਅਤੇ ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਅਸੀਂ ਹੇਠਾਂ ਇਨ੍ਹਾਂ ਨੂੰ ਤੇ ਕੁਝ ਹੋਰ ਪਦ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ।

ਪਹਿਲਾ ਪਦ $= a_1 = a = ar^{1-1}$, ਦੂਜਾ ਪਦ $= a_2 = ar = ar^{2-1}$

ਤੀਸਰਾ ਪਦ $= a_3 = ar^2 = ar^{3-1}$

ਚੌਥਾ ਪਦ $= a_4 = ar^3 = ar^{4-1}$

5ਵਾਂ ਪਦ $= a_5 = ar^4 = ar^{5-1}$

ਕੀ ਤੁਸੀਂ ਇੱਕ ਨਮੂਨਾ ਦੇਖਦੇ ਹੋ ? 16ਵਾਂ ਪਦ ਕੀ ਹੋਵੇਗਾ

$$a_{16} = ar^{16-1} = ar^{15}$$

ਇਸ ਲਈ ਨਮੂਨਾ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ ਕਿ G.P. ਦਾ nਵਾਂ ਪਦ $a_n = ar^{n-1}$ ਹੈ। ਅਰਥਾਤ ਜਿਮਾਇਤੀ ਲੜੀ ਇਸ ਰੂਪ ਵਿਚ ਲਿਖੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਹੈ :

$a, ar, ar^2, ar^3, \ldots ar^{n-1}$; $a, ar, ar^2, \ldots, ar^{n-1} \ldots$; ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਲੜੀ ਸੀਮਿਤ ਹੋਵੇ ਜਾਂ ਅਸੀਮਿਤ ਹੋਵੇ।

ਲੜੀ $a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1}$ ਜਾਂ $a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1} + \ldots$ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਲੜੀ ਸੀਮਿਤ ਹੋਵੇ ਜਾਂ ਅਸੀਮਿਤ ਜਿਮਾਇਤੀ ਲੜੀ ਅਖਵਾਉਂਦੀ ਹੈ।

9.5.2. *G.P.* ਦੇ *n* ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜ

ਮੰਨ ਲਉ G.P. ਦਾ ਪਹਿਲਾ ਪਦਾਂ, a ਅਤੇ ਸਾਂਝਾ ਅਨੁਪਾਤ.r ਹੈ। G.P. ਦੇ n ਪਦਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਨੂੰ S_n ਨਾਲ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ ਤਾਂ

$$S_n = a + ar + ar^2 + ... + ar^{n-1} \quad ... (1)$$

ਸਥਿਤੀ 1 ਜੇਕਰ $r = 1$, ਸਾਡੇ ਕੋਲ $S_n = a + a + a + ... + a$ (n ਪਦ) $= na$

ਸਥਿਤੀ 2 ਜੇਕਰ $r \neq 1$, (1) ਨੂੰ r ਨਾਲ ਗੁਣਾ ਕਰਨ 'ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ

$$rS_n = ar + ar^2 + ar^3 + ... + ar^n \quad ... (2)$$

(2) ਨੂੰ (1), ਵਿੱਚੋਂ ਘਟਾਉਣ 'ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ $(1 - r)\, S_n = a - ar^n = a(1 - r^n)$

ਇਸ ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ $S_n = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$ ਜਾਂ $S_n = \dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$

ਉਦਾਹਰਣ 9 : G.P. 5, 25, 125 ਦਾ 10ਵਾਂ ਅਤੇ nਵਾਂ ਪਦ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ $a = 5$ ਅਤੇ $r = 5$ ਅਰਥਾਤ, $a_{10} = 5(5)^{10-1} = 5(5)^9 = 5^{10}$

ਅਤੇ $a_n = ar^{n-1} = 5(5)^{n-1} = 5^n$

ਉਦਾਹਰਣ 10 : G.P., 2,8,32, ... ਦਾ ਕਿਹੜਾ ਪਦ 131072 ਹੈ ?

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ 131072 ਦਿੱਤੀ G.P. ਦਾ nਵਾਂ ਪਦ ਹੈ। ਇੱਥੇ $a = 2$, $r = 4$ ਹੈ । ਇਸ ਲਈ $131072 = a_n = 2(4)^{n-1}$ ਜਾਂ $65536 = 4^{n-1}$

ਇਸ ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ $4^8 = 4^{n-1}$

ਇਸ ਲਈ $n - 1 = 8$, ਭਾਵ, $n = 9$ ਅਰਥਾਤ 131072 G.P. ਦਾ 9ਵਾਂ ਪਦ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 11 : G.P. ਦਾ ਤੀਸਰਾ ਪਦ 24 ਅਤੇ 6ਵਾਂ ਪਦ 192 ਹੈ। ਇਸ ਦਾ 10ਵਾਂ ਪਦ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ, $a_3 = ar^2 = 24 \quad ... (1)$

ਅਤੇ $a_6 = ar^5 = 192 \quad ... (2)$

(2) ਨੂੰ (1) ਨਾਲ ਭਾਗ ਕਰਨ 'ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ $r = 2$

$r = 2$ ਨੂੰ (1) ਵਿੱਚ ਰੱਖਣ 'ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ $a = 6$.

ਇਸ ਲਈ $a_{10} = 6\,(2)^9 = 3072$

ਉਦਾਹਰਣ 12 : G.P. $1+\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+...$ ਦੇ ਪਹਿਲੇ n ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਅਤੇ ਪਹਿਲੇ 5 ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ $a = 1$ ਅਤੇ $r = \frac{2}{3}$ ਇਸ ਲਈ

$$S_n = \frac{a\,(1-r^n)}{1-r} = \frac{\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]}{1-\frac{2}{3}} = 3\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]$$

ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਤੌਰ 'ਤੇ, $S_5 = 3\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^5\right] = 3\times\frac{211}{243} = \frac{211}{81}$

ਉਦਾਹਰਣ 13 : G.P. $3, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, ...$ ਦੇ ਕਿੰਨੇ ਪਦਾਂ ਦੀ ਲੋੜ ਹੈ ਤਾਂ ਜੋ ਇਹਨਾਂ ਦਾ ਜੋੜ $\frac{3069}{512}$ ਹੋ ਜਾਵੇ ?

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ n ਪਦਾਂ ਦੀ ਜ਼ਰੂਰਤ ਹੈ। ਦਿੱਤਾ ਹੈ ਕਿ $a = 3$, $r = \frac{1}{2}$ ਅਤੇ $S_n = \frac{3069}{512}$

ਕਿਉਂਕਿ $$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

ਇਸ ਲਈ $$\frac{3069}{512} = \frac{3(1-\frac{1}{2^n})}{1-\frac{1}{2}} = 6\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$$

ਜਾਂ $$\frac{3069}{3072} = 1-\frac{1}{2^n}$$

ਜਾਂ $$\frac{1}{2^n} = 1-\frac{3069}{3072} = \frac{3}{3072} = \frac{1}{1024}$$

ਜਾਂ $2^n = 1024 = 2^{10}$, ਜਿਸ ਤੋਂ $n = 10$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 14 : G.P. ਦੇ ਪਹਿਲੇ ਤਿੰਨ ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜ $\frac{13}{12}$ ਹੈ ਅਤੇ ਗੁਣਾ -1 ਹੈ। ਸਾਂਝਾ ਅਨੁਪਾਤ ਅਤੇ ਪਦ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ $\frac{a}{r}$, a, ar G.P. ਦੇ ਪਹਿਲੇ ਤਿੰਨ ਪਦ ਹਨ ਤਾਂ

$$\frac{a}{r} + ar + a = \frac{13}{12} \quad \text{... (1)}$$

ਅਤੇ $$\left(\frac{a}{r}\right)(a)(ar) = -1 \quad \text{... (2)}$$

(2) ਤੋਂ, ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ $a^3 = -1$, ਭਾਵ, $a = -1$ (ਕੇਵਲ ਵਾਸਤਵਿਕ ਮੂਲ ਲੈਣ 'ਤੇ)

$a = -1$ ਨੂੰ (1) ਵਿਚ ਰੱਖਣ 'ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ

$$-\frac{1}{r} - 1 - r = \frac{13}{12} \text{ ਜਾਂ } 12r^2 + 25r + 12 = 0$$

ਇਹ r ਵਿਚ ਦੋ ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ ਜਿਸ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ 'ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ $r = -\frac{3}{4}$ ਜਾਂ $-\frac{4}{3}$

ਇਸ ਲਈ G.P. ਦੇ ਤਿੰਨ ਪਦ : $\frac{4}{3}, -1, \frac{3}{4}$, $r = \frac{-3}{4}$ ਲਈ ਅਤੇ $\frac{3}{4}, -1, \frac{4}{3}$, $r = \frac{-4}{3}$ ਲਈ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ 15 : ਅਨੁਕ੍ਰਮ 7, 77, 777, 7777, ... ਦੇ n ਪਦਾਂ ਦਾਂ ਜੋੜ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਇਹ G.P. ਨਹੀਂ ਹੈ ਫਿਰ ਵੀ ਇਸ ਨੂੰ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਢੰਗ ਨਾਲ ਲਿਖ ਕੇ G.P. ਵਿੱਚ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

$$S_n = 7 + 77 + 777 + 7777 + \ldots n \text{ ਪਦਾਂ ਤੱਕ}$$

$$= \frac{7}{9}[9+99+999+9999+ \ldots n \text{ ਪਦਾਂ ਤੱਕ}]$$

$$= \frac{7}{9}[(10-1)+(10^2-1)+(10^3-1)+(10^4-1)+\ldots n \text{ ਪਦਾਂ ਤੱਕ}]$$

$$= \frac{7}{9}[(10 + 10^2 + 10^3 + ... n \text{ ਪਦਾਂ ਤੱਕ}) - (1+1+1+... n \text{ ਪਦਾਂ ਤੱਕ})]$$

$$= \frac{7}{9}\left[\frac{10(10^n - 1)}{10-1} - n\right] = \frac{7}{9}\left[\frac{10\,(10^n - 1)}{9} - n\right]$$

ਉਦਾਹਰਣ 16 : ਇੱਕ ਵਿਅਕਤੀ ਦੇ 2 ਮਾਤਾ-ਪਿਤਾ, 4 ਦਾਦਾ-ਦਾਦੀ, 8 ਪੜਦਾਦਾ-ਪੜਦਾਦੀ ਆਦਿ ਹਨ। ਉਸਦੀ ਦਸਵੀਂ ਪੀੜ੍ਹੀ ਤੱਕ ਪੂਰਵਜਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ $a = 2$, $r = 2$ ਅਤੇ $n = 10$

ਜੋੜ ਦਾ ਸੂਤਰ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ $S_n = \frac{a\,(r^n - 1)}{r - 1}$

ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ $\quad S_{10} = 2(2^{10} - 1) = 2046$

ਇਸ ਲਈ ਵਿਅਕਤੀ ਦੇ ਪੂਰਵਜਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ 2046 ਹੈ।

9.5.3 *ਜਿਮਾਇਤੀ ਮੱਧ (Geometric Mean (G.M.))* ਦੋ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ a ਅਤੇ b ਦਾ ਜਿਮਾਇਤੀ ਮੱਧ (G.M.) ਸੰਖਿਆ $\sqrt{ab}$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ 2 ਅਤੇ 8 ਦਾ ਜਿਮਾਇਤੀ ਮੱਧ 4 ਹੈ। ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਤਿੰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ 2, 4, 8 ਜਿਮਾਇਤੀ ਲੜੀ ਦੇ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਪਦ ਹਨ। ਇਹ ਦੋ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਜਿਮਾਇਤੀ ਮੱਧ ਦੀ ਧਾਰਣਾ ਦੇ ਵਿਆਪੀਕਰਣ (Generalise) ਦੇ ਵੱਲ ਵਧਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਦੋ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ a ਅਤੇ b ਦਿੱਤੀਆ ਗਈਆਂ ਹਨ ਤਾਂ ਇਹਨਾਂ ਵਿਚਕਾਰ ਇੱਛਾ ਅਨੁਸਾਰ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਰੱਖ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਤਾਂ ਕਿ ਪ੍ਰਾਪਤ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਇੱਕ ਜਿਮਾਇਤੀ ਲੜੀ ਬਣ ਜਾਵੇ।

ਮੰਨ ਲਉ ਦੋ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ a ਅਤੇ b ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ n ਸੰਖਿਆਵਾਂ $G_1, G_2, ..., G_n$ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹਨ ਕਿ $a, G_1, G_2, G_3, ..., G_n, b$ ਇੱਕ G.P. ਹੈ। ਇਸ ਲਈ b, $(n + 2)$ ਵਾਂ ਪਦ ਹੈ, ਸਾਡੇ ਕੋਲ

$$b = ar^{n+1} \quad \text{ਜਾਂ} \quad r = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}}$$

ਇਸ ਲਈ

$$G_1 = ar = a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}}, \; G_2 = ar^2 = a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{2}{n+1}}, \; G_3 = ar^3 = a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{3}{n+1}},$$

$$G_n = ar^n = a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{n}{n+1}}$$

ਉਦਾਹਰਣ 17 : ਇਹੋ ਜਿਹੀਆਂ ਤਿੰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਨੂੰ 1 ਅਤੇ 256 ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਰੱਖਣ ਤੇ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਇੱਕ G.P. ਹੋਵੇ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ G_1, G_2, G_3 1 ਅਤੇ 256 ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਤਿੰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹਨ ਕਿ

$1, G_1, G_2, G_3, 256$ ਇੱਕ G.P. ਹੈ

ਇਸ ਲਈ $\quad 256 = r^4$ ਤੋਂ $r = \pm 4$ (ਕੇਵਲ ਵਾਸਤਵਿਕ ਮੂਲ ਲੈਣ ਤੇ)

$r = 4$ ਲਈ, ਸਾਡੇ ਕੋਲ $G_1 = ar = 4$, $G_2 = ar^2 = 16$, $G_3 = ar^3 = 64$

ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ $r = -4$ ਲਈ ਸੰਖਿਆਵਾਂ $-4, 16$ ਅਤੇ -64 ਹਨ

ਇਸ ਲਈ 1 ਅਤੇ 256 ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਅਸੀਂ 4, 16, 64 ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਰਖਾਂਗੇ ਤਾਂ ਜੋ ਬਣਿਆ ਅਨੁਕ੍ਰਮ G.P. ਹੋਵੇਗਾ।

9.6 A.M. (ਅੰਕਗਣਿਤਕ ਮੱਧ) ਅਤੇ G.M. (ਜਿਮਾਇਤੀ ਮੱਧ) ਵਿਚ ਸੰਬੰਧ (Relation between A.M. and G.M.)

ਮੰਨ ਲਉ A ਅਤੇ G ਦੋ ਦਿੱਤੀਆਂ ਹੋਈਆਂ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ a ਅਤੇ b ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਕ੍ਰਮਵਾਰ A.M. ਅਤੇ G.M. ਹਨ ਇਸ ਲਈ

$$A = \frac{a+b}{2} \quad \text{ਅਤੇ} \quad G = \sqrt{ab}$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸਾਡੇ ਕੋਲ

$$A - G = \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}{2} \geq 0 \quad \ldots (1)$$

(1) ਤੋਂ ਅਸੀਂ A ≥ G ਸੰਬੰਧ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਉਦਾਹਰਣ 18 : ਜੇਕਰ ਦੋ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ a ਅਤੇ b ਦਾ A.M. ਅਤੇ G.M. ਕ੍ਰਮਵਾਰ 10 ਅਤੇ 8 ਹੈ ਤਾਂ ਸੰਖਿਆ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤਾ ਹੈ $\quad A.M. = \frac{a+b}{2} = 10 \quad \ldots (1)$

ਅਤੇ $\quad G.M. = \sqrt{ab} = 8 \quad \ldots (2)$

(1) ਅਤੇ (2), ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ $\quad a + b = 20 \quad \ldots (3)$

$ab = 64 \quad \ldots (4)$

(3) ਅਤੇ (4) ਤੋਂ a ਅਤੇ b ਦੀਆਂ ਕੀਮਤਾਂ ਤਤਸਮਕ $(a - b)^2 = (a + b)^2 - 4ab$ ਵਿੱਚ ਰੱਖਣ 'ਤੇ

$$(a - b)^2 = 400 - 256 = 144$$

ਜਾਂ $\quad a - b = \pm 12 \quad \ldots (5)$

(3) ਅਤੇ (5) ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ 'ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ

$a = 4, b = 16$ ਜਾਂ $a = 16, b = 4$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ a ਅਤੇ b ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਕ੍ਰਮਵਾਰ 4, 16 ਜਾਂ 16, 4 ਹਨ।

ਅਭਿਆਸ 9.3

1. G.P. $\frac{5}{2}, \frac{5}{4}, \frac{5}{8}, \ldots$ ਦਾ 20ਵਾਂ ਅਤੇ nਵਾਂ ਪਦ ਪਤਾ ਕਰੋ।

2. G.P. ਦਾ 12ਵਾਂ ਪਦ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸਦਾ 8ਵਾਂ ਪਦ 192 ਅਤੇ ਸਾਂਝਾ ਅਨੁਪਾਤ 2 ਹੈ।

3. ਕਿਸੇ G.P. ਦੇ 5ਵਾਂ, 8ਵਾਂ ਅਤੇ 11ਵਾਂ ਪਦ ਕ੍ਰਮਵਾਰ p, q ਅਤੇ s ਹਨ ਦਿਖਾਉ ਕਿ $q^2 = ps$ ਹੈ।

4. ਇੱਕ G.P. ਦਾ ਚੌਥਾ ਪਦ ਉਸਦੇ ਦੂਜੇ ਪਦ ਦਾ ਵਰਗ ਹੈ ਅਤੇ ਪਹਿਲਾ ਪਦ – 3 ਹੈ। ਇਸਦਾ 7ਵਾਂ ਪਦ ਪਤਾ ਕਰੋ।

5. ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਦਾ ਕਿਹੜਾ ਪਦ

(a) $2, 2\sqrt{2}, 4, \ldots ; 128$ ਹੈ ? $\quad$ (b) $\sqrt{3}, 3, 3\sqrt{3}, \ldots ; 729$ ਹੈ ?

(c) $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \ldots ; \frac{1}{19683}$ ਹੈ?

6. x ਦੇ ਕਿਸ ਮੁੱਲ ਲਈ ਸੰਖਿਆਵਾਂ $-\frac{2}{7}, x, -\frac{7}{2}$ G.P. ਹਨ ?

ਪ੍ਰਸ਼ਨ 7 ਤੋਂ 10 ਤੱਕ ਹਰੇਕ G.P. ਦਾ ਦਿੱਤੇ ਪਦਾਂ ਤੱਕ ਜੋੜ ਪਤਾ ਕਰੋ

7. 0.15, 0.015, 0.0015, ... 20 ਪਦਾਂ ਦਾ

8. $\sqrt{7}, \sqrt{21}, 3\sqrt{7}, \ldots n$ ਪਦਾਂ ਦਾ

9. $1, -a, a^2, -a^3, \ldots n$ ਪਦਾਂ ਦਾ (ਜੇਕਰ $a \neq -1$).

10. $x^3, x^5, x^7, \ldots n$ ਪਦਾਂ ਦਾ (ਜੇਕਰ $x \neq \pm 1$).

11. ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ : $\sum_{k=1}^{11}(2+3^k)$

12. ਇੱਕ G.P. ਦੇ ਪਹਿਲੇ ਤਿੰਨ ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜ $\frac{39}{10}$ ਹੈ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਦੀ ਗੁਣਾ 1 ਹੈ। ਸਾਂਝਾ ਅਨੁਪਾਤ ਅਤੇ ਪਦ ਪਤਾ ਕਰੋ।

13. G.P. $3, 3^2, 3^3, \ldots$ ਦੇ ਕਿੰਨੇ ਪਦਾਂ ਜਾ ਜੋੜ 120 ਹੋਵੇਗਾ ?

14. ਇੱਕ G.P. ਦੇ ਪਹਿਲੇ ਤਿੰਨ ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜ 16 ਹੈ ਅਤੇ ਅਗਲੇ ਤਿੰਨ ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜ 128 ਹੈ। ਪਹਿਲਾ ਪਦ, ਸਾਂਝਾ ਅਨੁਪਾਤ ਅਤੇ G.P ਦੇ n ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਪਤਾ ਕਰੋ।

15. ਇੱਕ G.P. ਦਾ ਪਹਿਲਾ ਪਦ $a = 729$,7ਵਾਂ ਪਦ 64 ਤਾਂ S_7 ਪਤਾ ਕਰੋ।

16. ਇੱਕ G.P. ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸਦੇ ਪਹਿਲੇ ਦੋ ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜ – 4 ਅਤੇ ਪੰਜਵਾਂ ਪਦ ਤੀਜੇ ਪਦ ਦਾ 4 ਗੁਣਾ ਹੈ।

17. ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ G.P. ਦਾ ਚੌਥਾ, ਦਸਵਾਂ ਅਤੇ 16ਵਾਂ ਪਦ ਕ੍ਰਮਵਾਰ x, y ਅਤੇ z ਹਨ। ਸਿੱਧ ਕਰੋ x, y, z G.P. ਵਿੱਚ ਹਨ।

18. ਅਨੁਕ੍ਰਮ 8, 88, 888, 8888… . ਦੇ n ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਪਤਾ ਕਰੋ।

19. ਅਨੁਕ੍ਰਮ 2, 4, 8, 16, 32 ਅਤੇ 128, 32, 8, 2, $\frac{1}{2}$ ਦੇ ਸੰਗਤ ਪਦਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਨਾਲ ਬਣੇ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਦਾ ਜੋੜ ਪਤਾ ਕਰੋ।

20. ਦਿਖਾਉ ਕਿ ਅਨੁਕ੍ਰਮ $a, ar, ar^2, \ldots, ar^{n-1}$ ਅਤੇ A, AR, AR^2, … AR^{n-1} ਦੇ ਸੰਗਤ ਪਦਾਂ ਦੇ ਗੁਣਨਫਲ ਨਾਲ ਬਣਿਆ ਅਨੁਕ੍ਰਮ G.P. ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਦਾ ਸਾਂਝਾ ਅਨੁਪਾਤ ਪਤਾ ਕਰੋ।

21. ਅਜਿਹੇ ਚਾਰ ਪਦ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੋ ਜਿਮਾਇਤੀ ਲੜੀ (G.P.) ਵਿਚ ਹੋਣ, ਜਿਸਦਾ ਤੀਸਰਾ ਪਦ ਪਹਿਲੇ ਪਦ ਤੋਂ 9 ਵੱਧ ਅਤੇ ਦੂਜਾ ਪਦ, ਚੌਥੇ ਪਦ ਤੋਂ 18 ਵੱਧ ਹੋਵੇ।

22. ਕਿਸੇ G.P. ਦਾ pਵਾਂ, qਵਾਂ ਅਤੇ rਵਾਂ ਪਦ ਕ੍ਰਮਵਾਰ a, b ਅਤੇ c ਹੈ।

ਸਿੱਧ ਕਰੋ $$a^{q-r}\, b^{r-p} c^{p-q} = 1$$

23. ਇੱਕ G.P. ਦਾ ਪਹਿਲਾ ਅਤੇ nਵਾਂ ਪਦ ਕ੍ਰਮਵਾਰ a ਅਤੇ b ਹੈ, ਅਤੇ ਜੇਕਰ P, n ਪਦਾਂ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ ਹੈ ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ $P^2 = (ab)^n$.

24. ਦਿਖਾਉ ਕਿ G.P. ਦੇ ਪਹਿਲੇ n ਪਦਾਂ ਜੋੜ ਅਤੇ $(n + 1)$ਵੇਂ ਪਦ ਤੋਂ $(2n)$ਵੇਂ ਪਦ ਤੱਕ ਦੇ ਜੋੜ ਦਾ ਅਨੁਪਾਤ $\frac{1}{r^n}$ ਹੈ।

25. ਜੇਕਰ a, b, c ਅਤੇ d, G.P. ਵਿੱਚ ਹਨ, ਤਾਂ ਦਿਖਾਉ

$(a^2 + b^2 + c^2)(b^2 + c^2 + d^2) = (ab + bc + cd)^2$

26. ਅਜਿਹੀਆਂ ਦੋ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਨੂੰ 3 ਅਤੇ 81 ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਰੱਖਣ ਤੇ ਅਨੁਕ੍ਰਮ G.P. ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੋਵੇ।

27. n ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਤਾਂ ਕਿ $\frac{a^{n+1}+b^{n+1}}{a^n+b^n}$, a ਅਤੇ b ਦਾ ਜਿਮਾਇਤੀ ਮੱਧ (G.M.) ਹੋਵੇ।

28. ਦੋ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਉਹਨਾਂ ਦੇ G.M. ਤੋਂ 6 ਗੁਣਾ ਹੈ ਤਾਂ ਦਿਖਾਉ ਕਿ ਸੰਖਿਆਵਾਂ $\left(3+2\sqrt{2}\right):\left(3-2\sqrt{2}\right)$ ਦੇ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਹਨ।

29. ਜੇਕਰ A ਅਤੇ G ਦੋ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਕ੍ਰਮਵਾਰ A.M. ਅਤੇ G.M., ਹੋਣ ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਸੰਖਿਆਵਾਂ $A \pm \sqrt{(A+G)(A-G)}$ ਹਨ।

30. ਕਿਸੇ ਕਲਚਰ (Culture) ਵਿੱਚ ਬੈਕਟੀਰੀਆ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਹਰ ਘੰਟੇ ਬਾਅਦ ਦੁੱਗਣੀ ਹੋ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਸ਼ੁਰੂ ਵਿੱਚ ਉਸ ਵਿੱਚ 30 ਬੈਕਟੀਰੀਆ ਸੀ ਤਾਂ ਦੂਜੇ, ਚੌਥੇ ਅਤੇ nਵੇਂ ਘੰਟੇ ਬਾਅਦ ਬੈਕਟੀਰੀਆ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਕਿੰਨੀ ਹੋਵੇਗੀ ?

31. 500 ਰੁਪਏ ਦੀ ਰਾਸ਼ੀ 10% ਸਾਲਾਨਾ ਮਿਸ਼ਰਿਤ ਵਿਆਜ ਨਾਲ 10 ਸਾਲ ਬਾਅਦ ਕਿੰਨੀ ਹੋ ਜਾਵੇਗੀ ? ਪਤਾ ਕਰੋ।

32. ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ ਦੋ ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਣ ਦੇ ਮੁੱਲਾਂ ਦਾ A.M. ਅਤੇ G.M. ਕ੍ਰਮਵਾਰ 8 ਅਤੇ 5 ਹੈ ਤਾਂ ਦੋ ਘਾਤੀ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ।

9.7 ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਅਨੁਕ੍ਰਮਾਂ ਦੇ n ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜ (Sum of n terms of Special Series)

ਹੁਣ ਅਸੀਂ ਕੁਝ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਅਨੁਕ੍ਰਮਾਂ ਦੇ n ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਪਤਾ ਕਰਾਂਗੇ, ਜੋ ਕਿ ਹੈ

(i) $1 + 2 + 3 + \ldots + n$ (ਪਹਿਲੀਆਂ n ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ)

(ii) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$ (ਪਹਿਲੀਆਂ n ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਵਰਗਾਂ ਦਾ ਜੋੜ)

(iii) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3$ (ਪਹਿਲੀਆਂ n ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਘਣਾਂ ਦਾ ਜੋੜ)

ਆਉ ਇਹਨਾਂ 'ਤੇ ਇੱਕ-ਇੱਕ ਕਰਕੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੀਏ :

(i) $S_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$, ਤਾਂ $S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ (9.4 ਭਾਗ ਵੇਖੋ)

(ii) ਇੱਥੇ $S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$

ਅਸੀਂ ਤਤਸਮਕ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ $k^3 - (k-1)^3 = 3k^2 - 3k + 1$

ਕ੍ਰਮਵਾਰ $k = 1, 2, \ldots, n$ ਰੱਖਣ 'ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ

$$1^3 - 0^3 = 3(1)^2 - 3(1) + 1$$
$$2^3 - 1^3 = 3(2)^2 - 3(2) + 1$$
$$3^3 - 2^3 = 3(3)^2 - 3(3) + 1$$

....

....

....

$$n^3 - (n-1)^3 = 3(n)^2 - 3(n) + 1$$

ਦੋਨਾਂ ਪਾਸਿਆਂ ਨੂੰ ਜੋੜਨ 'ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ

$$n^3 - 0^3 = 3(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2) - 3(1 + 2 + 3 + \ldots + n) + n$$

$$n^3 = 3\sum_{k=1}^{n} k^2 - 3\sum_{k=1}^{n} k + n$$

(i), ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ $\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

ਇਸ ਲਈ $S_n = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \dfrac{1}{3}\left[n^3 + \dfrac{3n(n+1)}{2} - n\right] = \dfrac{1}{6}(2n^3 + 3n^2 + n) = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(iii) ਇੱਥੇ $S_n = 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3$

ਅਸੀਂ ਤਤਸਮਕ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ, $(k+1)^4 - k^4 = 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1$

$k = 1, 2, 3 \ldots n$, ਰੱਖਣ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ

$$2^4 - 1^4 = 4(1)^3 + 6(1)^2 + 4(1) + 1$$
$$3^4 - 2^4 = 4(2)^3 + 6(2)^2 + 4(2) + 1$$
$$4^4 - 3^4 = 4(3)^3 + 6(3)^2 + 4(3) + 1$$

....

....

....

$$(n-1)^4 - (n-2)^4 = 4(n-2)^3 + 6(n-2)^2 + 4(n-2) + 1$$
$$n^4 - (n-1)^4 = 4(n-1)^3 + 6(n-1)^2 + 4(n-1) + 1$$

$$(n+1)^4 - n^4 = 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1$$

ਦੋਨੋਂ ਪਾਸੇ ਜੋੜਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ

$$(n+1)^4 - 1^4 = 4(1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3) + 6(1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2) + 4(1 + 2 + 3 + ... + n) + n$$

$$= 4\sum_{k=1}^{n} k^3 + 6\sum_{k=1}^{n} k^2 + 4\sum_{k=1}^{n} k + n \quad ... (1)$$

ਭਾਗ (i) ਅਤੇ (ii) ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \text{ ਅਤੇ } \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

ਇਹਨਾਂ ਮੁੱਲਾਂ ਨੂੰ (1), ਵਿੱਚ ਰੱਖਣ 'ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ

$$4\sum_{k=1}^{n} k^3 = n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n - \frac{6n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{4n(n+1)}{2} - n$$

ਜਾਂ $$4S_n = n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n - n(2n^2 + 3n + 1) - 2n(n+1) - n$$

$$= n^4 + 2n^3 + n^2$$

$$= n^2(n+1)^2$$

ਇਸ ਲਈ, $$S_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{[n(n+1)]^2}{4}$$

ਉਦਾਹਰਣ 19 : ਲੜੀ 5 + 11 + 19 + 29 + 41… ਦੇ n ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਆਉ ਲਿਖੀਏ

$$S_n = 5 + 11 + 19 + 29 + ... + a_{n-1} + a_n$$

ਜਾਂ $$S_n = 5 + 11 + 19 + ... + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$$

ਘਟਾਉਣ 'ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ,

$$0 = 5 + [6 + 8 + 10 + 12 + ... + (n-1) \text{ ਪਦ}] - a_n$$

ਜਾਂ $$a_n = 5 + \frac{(n-1)[12 + (n-2)\times 2]}{2}$$

$$= 5 + (n-1)(n+4) = n^2 + 3n + 1$$

ਇਸ ਲਈ $$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} (k^2 + 3k + 1) = \sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{n} k + n$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{3n(n+1)}{2} + n = \frac{n(n+2)(n+4)}{3}.$$

ਉਦਾਹਰਣ 20 : ਉਸ ਲੜੀ ਦੇ n ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਕਰੋ ਜਿਸ ਦਾ nਵਾਂ ਪਦ $n\ (n + 3)$ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤਾ ਹੈ $a_n = n\ (n + 3) \ = n^2 + 3n$

ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ n ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਹੈ

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{n} k$$

$$= \frac{n\ (n+1)\ (2n+1)}{6} + \frac{3n\ (n+1)}{2}$$

$$= \frac{n(n+1)(n+5)}{3}.$$

ਅਭਿਆਸ 9.4

ਅਭਿਆਸ 1 ਤੋਂ 7 ਤੱਕ ਹਰੇਕ ਲੜੀ ਦੇ n ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਪਤਾ ਕਰੋ।

1. $1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + 4 \times 5 + \ldots$

2. $1 \times 2 \times 3 + 2 \times 3 \times 4 + 3 \times 4 \times 5 + \ldots$

3. $3 \times 1^2 + 5 \times 2^2 + 7 \times 3^2 + \ldots$

4. $\frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{2\times 3} + \frac{1}{3\times 4} + \ldots$

5. $5^2 + 6^2 + 7^2 + \ldots + 20^2$

6. $3 \times 8 + 6 \times 11 + 9 \times 14 + \ldots$

7. $1^2 + (1^2 + 2^2) + (1^2 + 2^2 + 3^2) + \ldots$

ਅਭਿਆਸ 8 ਤੋਂ 10 ਤੱਕ ਹਰੇਕ ਲੜੀ ਦੇ n ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸਦਾ nਵਾਂ ਪਦ ਦਿੱਤਾ ਹੈ।

8. $n\ (n+1)\ (n+4)$

9. $n^2 + 2^n$

10. $(2n - 1)^2$

ਫੁਟਕਲ ਉਦਾਹਰਣਾਂ

ਉਦਾਹਰਣ 21 : ਜੇਕਰ ਕਿਸੇ ਅੰਕਗਣਿਤਿਕ ਲੜੀ (A.P.) ਦਾ pਵਾਂ, qਵਾਂ, rਵਾਂ ਅਤੇ sਵਾਂ ਪਦ ਜਿਮਾਇਤੀ ਲੜੀ (G.P.) ਵਿੱਚ ਹੈ ਤਾਂ ਦਿਖਾਉ ਕਿ $(p - q)$, $(q - r)$, $(r - s)$ ਵੀ G.P. ਵਿੱਚ ਹਨ।

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ,

$$a_p = a + (p - 1)\ d \qquad \ldots (1)$$
$$a_q = a + (q - 1)\ d \qquad \ldots (2)$$
$$a_r = a + (r - 1)\ d \qquad \ldots (3)$$
$$a_s = a + (s - 1)\ d \qquad \ldots (4)$$

ਦਿੱਤਾ ਹੈ ਕਿ a_p, a_q, a_r ਅਤੇ a_s , G.P. ਵਿੱਚ ਹਨ

ਇਸ ਲਈ
$$\frac{a_q}{a_p} = \frac{a_r}{a_q} = \frac{a_q - a_r}{a_p - a_q} = \frac{q-r}{p-q} \quad \text{(ਕਿਉਂ ?)} \qquad \ldots (5)$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ, $\frac{a_r}{a_q} = \frac{a_s}{a_r} = \frac{a_r - a_s}{a_q - a_r} = \frac{r-s}{q-r}$ (ਕਿਉਂ ?) ... (6)

ਇਸ ਲਈ (5) ਅਤੇ (6) ਦੁਆਰਾ $\frac{q-r}{p-q} = \frac{r-s}{q-r}$, ਭਾਵ $(p - q)$, $(q - r)$ ਅਤੇ $(r - s)$ G.P. ਵਿੱਚ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ 22 : ਜੇਕਰ $a, b, c,$ G.P. ਵਿੱਚ ਹਨ ਅਤੇ $a^{\frac{1}{x}} = b^{\frac{1}{y}} = c^{\frac{1}{z}}$, ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $x, y, z,$ A.P. ਵਿੱਚ ਹਨ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ $a^{\frac{1}{x}} = b^{\frac{1}{y}} = c^{\frac{1}{z}} = k$ ਤਾਂ

$a = k^x$, $b = k^y$ ਅਤੇ $c = k^z$. ... (1)

ਕਿਉਂਕਿ a, b, c, G.P. ਵਿਚ ਹਨ ਇਸ ਲਈ

$$b^2 = ac \quad \text{... (2)}$$

(1) ਅਤੇ (2), ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਕੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ

$k^{2y} = k^{x+z}$, ਜਿਸ ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ $2y = x + z$

ਇਸ ਲਈ, x, y ਅਤੇ z A.P. ਵਿੱਚ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ 23 : ਜੇਕਰ a, b, c, d ਅਤੇ p ਵੱਖ-ਵੱਖ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹਨ ਕਿ $(a^2 + b^2 + c^2)p^2 - 2(ab + bc + cd)\,p + (b^2 + c^2 + d^2) \leq 0$, ਤਾਂ ਦਿਖਾਉ ਕਿ a, b, c ਅਤੇ d G.P. ਵਿੱਚ ਹਨ

ਹੱਲ : ਦਿੱਤਾ ਹੈ

$$(a^2 + b^2 + c^2)\,p^2 - 2\,(ab + bc + cd)\,p + (b^2 + c^2 + d^2) \leq 0 \quad \text{... (1)}$$

ਪ੍ਰੰਤੂ ਖੱਬਾ ਪਾਸਾ

$$= (a^2p^2 - 2abp + b^2) + (b^2p^2 - 2bcp + c^2) + (c^2p^2 - 2cdp + d^2),$$

ਇਸ ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ $(ap - b)^2 + (bp - c)^2 + (cp - d)^2 \geq 0$ ... (2)

ਕਿਉਂਕਿ ਵਾਸਤਵਿਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਵਰਗਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਰਿਣਾਤਮਕ ਨਹੀਂ ਹੁੰਦਾ

ਇਸ ਲਈ (1) ਅਤੇ (2), ਤੋਂ ਸਾਡੇ ਕੋਲ $(ap - b)^2 + (bp - c)^2 + (cp - d)^2 = 0$

ਜਾਂ $ap - b = 0,\ bp - c = 0,\ cp - d = 0$

ਇਸ ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ $\frac{b}{a} = \frac{c}{b} = \frac{d}{c} = p$

ਇਸ ਲਈ a, b, c ਅਤੇ d, G.P. ਵਿੱਚ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ 24 : ਜੇਕਰ p,q,r, G.P. ਵਿੱਚ ਹਨ ਅਤੇ ਸਮੀਕਰਣ $px^2 + 2qx + r = 0$ ਅਤੇ $dx^2 + 2ex + f = 0$ ਦੇ ਸਾਂਝੇ ਮੂਲ ਹਨ ਤਾਂ ਦਿਖਾਉ $\frac{d}{p}, \frac{e}{q}, \frac{f}{r}$, A.P. ਵਿੱਚ ਹਨ।

ਹੱਲ : ਸਮੀਕਰਣ $px^2 + 2qx + r = 0$ ਦੇ ਮੂਲ ਹਨ

$$x = \frac{-2q \pm \sqrt{4q^2 - 4rp}}{2p}$$

ਕਿਉਂਕਿ p, q, r, G.P. ਵਿੱਚ ਹਨ। $q^2 = pr$; $x = \frac{-q}{p}$ ਪ੍ਰੰਤੂ $\frac{-q}{p}$, $dx^2 + 2ex + f = 0$ ਦਾ ਵੀ ਮੂਲ ਹੈ (ਕਿਉਂ ?) ਇਸ ਲਈ

$$d\left(\frac{-q}{p}\right)^2 + 2e\left(\frac{-q}{p}\right) + f = 0,$$

ਜਾਂ $$dq^2 - 2eqp + fp^2 = 0 \quad \ldots (1)$$

(1) ਨੂੰ pq^2 ਨਾਲ ਭਾਗ ਕਰਨ ਅਤੇ $q^2 = pr$ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਨ 'ਤੇ

$$\frac{d}{p} - \frac{2e}{q} + \frac{fp}{pr} = 0, \text{ ਜਾਂ } \quad \frac{2e}{q} = \frac{d}{p} + \frac{f}{r}$$

ਇਸ ਲਈ $\frac{d}{p}, \frac{e}{q}, \frac{f}{r}$ A.P. ਵਿੱਚ ਹਨ।

ਅਧਿਆਇ 9 'ਤੇ ਫੁਟਕਲ ਅਭਿਆਸ

1. ਦਿਖਾਉ ਕਿ ਕਿਸੇ A.P. ਦੇ $(m + n)$ਵੇਂ ਅਤੇ $(m - n)$ਵੇਂ ਪਦ ਦਾ ਜੋੜ m ਵੇਂ ਪਦ ਦਾ ਦੁਗਣਾ ਹੈ।
2. ਕਿਸੇ A.P. ਦੀਆਂ ਤਿੰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ 24 ਅਤੇ ਗੁਣਾ 440 ਹੈ ਤਾਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ।
3. ਮੰਨ ਲਉ ਕਿਸੇ A.P. ਦੇ n, $2n$, $3n$ ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਕ੍ਰਮਵਾਰ S_1, S_2 ਅਤੇ S_3, ਦਿਖਾਉ ਕਿ $S_3 = 3(S_2 - S_1)$
4. 200 ਅਤੇ 400 ਵਿਚਕਾਰ ਸਾਰੀਆ ਉਹਨਾਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਕਰੋ ਜੋ 7 ਨਾਲ ਭਾਗਯੋਗ ਹਨ।
5. 1 ਅਤੇ 100 ਵਿੱਚ ਉਹਨਾਂ ਸਾਰੀਆਂ ਸੰਪੂਰਨ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਕਰੋ ਜੋ 2 ਜਾਂ 5 ਨਾਲ ਭਾਗਯੋਗ ਹਨ।
6. ਦੋ ਅੰਕਾ ਵਾਲੀਆਂ ਸਾਰੀਆਂ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਕਰੋ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਨੂੰ 4 ਨਾਲ ਭਾਗ ਕਰਨ ਤੇ 1 ਬਾਕੀ ਬੱਚਦਾ ਹੋਵੇ।
7. ਸਾਰੇ $x, y \in N$ ਦੇ ਲਈ $f(x + y) = f(x) f(y)$ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦਾ ਇੱਕ ਅਜਿਹਾ ਫਲਨ ਹੈ ਕਿ

   $f(1) = 3$ ਅਤੇ $\sum_{x=1}^{n} f(x) = 120$, n ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।
8. ਕਿਸੇ G.P. ਦੇ ਕੁਝ ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜ 315 ਹੈ, ਉਸਦਾ ਪਹਿਲਾ ਪਦ ਅਤੇ ਸਾਂਝਾ ਅਨੁਪਾਤ ਕ੍ਰਮਵਾਰ 5 ਅਤੇ 2 ਹੈ। ਆਖ਼ਰੀ ਪਦ ਅਤੇ ਪਦਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਪਤਾ ਕਰੋ।
9. ਕਿਸੇ G.P. ਦਾ ਪਹਿਲਾ ਪਦ 1 ਹੈ। ਤੀਜੇ ਅਤੇ ਪੰਜਵੇਂ ਪਦ ਦਾ ਜੋੜ 90 ਹੈ। G.P. ਦਾ ਸਾਂਝਾ ਅਨੁਪਾਤ ਪਤਾ ਕਰੋ।
10. ਕਿਸੇ G.P. ਦੇ ਤਿੰਨ ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜ 56 ਹੈ। ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਇਹਨਾਂ ਵਿੱਚੋਂ 1, 7 ਅਤੇ 21 ਘਟਾਈਏ ਤਾਂ ਅੰਕਗਣਿਤਿਕ ਲੜੀ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ।
11. ਕਿਸੇ G.P. ਦੇ ਪਦਾਂ ਦੀ ਗਿਣਤੀ ਜਿਸਤ ਸੰਖਿਆ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਉਸਦੇ ਸਾਰੇ ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜ, ਟਾਂਕ ਸਥਾਨਾਂ ਵਾਲੇ ਪਦਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਦਾ 5 ਗੁਣਾ ਹੋਵੇ ਤਾਂ ਸਾਂਝਾ ਅਨੁਪਾਤ ਪਤਾ ਕਰੋ।
12. ਇੱਕ A.P. ਦੇ ਪਹਿਲੇ ਚਾਰ ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜ 56 ਹੈ। ਆਖਰੀ ਚਾਰ ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜ 112 ਹੈ। ਜੇਕਰ ਇਸਦਾ ਪਹਿਲਾ ਪਦ 11 ਹੈ ਤਾਂ ਪਦਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਪਤਾ ਕਰੋ।
13. ਜੇਕਰ $\frac{a+bx}{a-bx} = \frac{b+cx}{b-cx} = \frac{c+dx}{c-dx} (x \neq 0)$, ਤਾਂ ਦਿਖਾਉ ਕਿ a, b, c ਅਤੇ d G.P. ਵਿੱਚ ਹਨ।

14. ਕਿਸੇ G.P. ਵਿੱਚ S, n ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜ, P ਉਹਨਾਂ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ ਅਤੇ R ਉਨ੍ਹਾਂ ਦੇ ਉਲਟਕ੍ਰਮ ਦਾ ਜੋੜ ਹੈ। ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $P^2R^n = S^n$.

15. ਕਿਸੇ A.P. ਦਾ pਵਾਂ, qਵਾਂ and rਵਾਂ ਪਦ ਕ੍ਰਮਵਾਰ a, b, ਅਤੇ c ਹੈ ਦਿਖਾਉ ਕਿ

$$(q - r)a + (r - p)b + (p - q)c = 0$$

16. ਜੇਕਰ $a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right), b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right), c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$ A.P., ਵਿੱਚ ਹਨ, ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $a, b, c,$ A.P. ਵਿੱਚ ਹਨ।

17. ਜੇਕਰ $a, b, c, d,$ G.P. ਵਿੱਚ ਹਨ ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $(a^n + b^n), (b^n + c^n), (c^n + d^n)$ G.P. ਵਿੱਚ ਹਨ।

18. ਜੇਕਰ a ਅਤੇ b, $x^2 - 3x + p = 0$ ਦੇ ਮੂਲ ਹਨ ਅਤੇ c, d, $x^2 - 12x + q = 0$ ਦੇ ਮੂਲ ਹਨ, ਜਿੱਥੇ $a, b, c, d,$ G.P. ਵਿੱਚ ਹਨ। ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $(q + p) : (q - p) = 17:15$।

19. ਦੋ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ a ਅਤੇ b ਦੇ A.M. ਅਤੇ G.M. ਦਾ ਅਨੁਪਾਤ $m : n$ ਹੈ। ਦਿਖਾਉ ਕਿ

$$a:b=\left(m+\sqrt{m^2-n^2}\right):\left(m-\sqrt{m^2-n^2}\right)$$

20. ਜੇਕਰ $a, b, c,$ A.P. ਵਿੱਚ ਹਨ, $b, c, d,$ G.P. ਵਿੱਚ ਹਨ ਅਤੇ $\frac{1}{c},\frac{1}{d},\frac{1}{e}$ A.P. ਵਿੱਚ ਹਨ ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ a, c, e G.P. ਵਿੱਚ ਹਨ।

21. ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਲੜੀਆਂ ਦੇ n ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਪਤਾ ਕਰੋ।

(i) $5 + 55 + 555 + \ldots$ (ii) $.6 + .66 + .666 + \ldots$

22. ਲੜੀ ਦਾ 20ਵਾਂ ਪਦ ਪਤਾ ਕਰੋ : $2 \times 4 + 4 \times 6 + 6 \times 8 + \ldots + n$ ਪਦ

23. ਲੜੀ ਦੇ ਪਹਿਲੇ n ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਪਤਾ ਕਰੋ : $3 + 7 + 13 + 21 + 31 + \ldots$

24. ਜੇਕਰ S_1, S_2, S_3 ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਪਹਿਲੀਆਂ n ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜ, ਉਨ੍ਹਾਂ ਦੇ ਵਰਗਾਂ ਦਾ ਜੋੜ, ਉਹਨਾਂ ਦੇ ਘਣਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਹੈ ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $9S_2^2 = S_3(1 + 8S_1)$

25. ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਲੜੀ ਦਾ n ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਪਤਾ ਕਰੋ :

$$\frac{1^3}{1}+\frac{1^3+2^3}{1+3}+\frac{1^3+2^3+3^3}{1+3+5}+\ldots$$

26. ਦਿਖਾਉ ਕਿ $\dfrac{1\times 2^2+2\times 3^2+\ldots+n\times(n+1)^2}{1^2\times 2+2^2\times 3+\ldots+n^2\times(n+1)}=\dfrac{3n+5}{3n+1}$

27. ਇੱਕ ਕਿਸਾਨ ਪੁਰਾਣਾ ਟ੍ਰੈਕਟਰ 12000 ਰੁਪਏ ਵਿਚ ਖਰੀਦਦਾ ਹੈ। ਉਹ 6000 ਰੁਪਏ ਨਕਦ ਭੁਗਤਾਨ ਕਰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਬਾਕੀ ਰਾਸ਼ੀ ਨੂੰ 500 ਰੁਪਏ ਦੀ ਸਾਲਾਨਾ ਕਿਸ਼ਤ ਤੋਂ ਇਲਾਵਾ ਉਸ ਰਾਸ਼ੀ 'ਤੇ ਜੋ ਭੁਗਤਾਨ ਨਹੀਂ ਕੀਤੀ ਗਈ ਹੈ। 12% ਸਲਾਨਾ ਵਿਆਜ ਵੀ ਦੇਣ ਦਾ ਵਾਅਦਾ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਕਿਸਾਨ ਨੂੰ ਟ੍ਰੈਕਟਰ ਦੀ ਕੁੱਲ ਕਿੰਨੀ ਕੀਮਤ ਦੇਣੀ ਪਵੇਗੀ।

28. ਸ਼ਮਸ਼ਾਦ ਅਲੀ 22000 ਰੁਪਏ ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਸਕੂਟਰ ਖਰੀਦਦਾ ਹੈ। ਉਹ 4000 ਰੁਪਏ ਨਕਦ ਦਿੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਬਾਕੀ ਰਾਸ਼ੀ ਨੂੰ 1000 ਰੁਪਏ ਸਲਾਨਾ ਕਿਸ਼ਤ ਦੇ ਨਾਲ ਉਸ ਰਾਸ਼ੀ 'ਤੇ ਜੋ ਭੁਗਤਾਨ ਨਹੀਂ ਕੀਤੀ ਗਈ ਹੈ, 10% ਸਲਾਨਾ ਵਿਆਜ ਵੀ ਦੇਣ ਦਾ ਵਾਅਦਾ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਉਸ ਨੂੰ ਸਕੂਟਰ ਦੀ ਕੁੱਲ ਕਿੰਨੀ ਕੀਮਤ ਅਦਾ ਕਰਨੀ ਪਵੇਗੀ।

29. ਇੱਕ ਵਿਅਕਤੀ ਆਪਣੇ ਚਾਰ ਮਿੱਤਰਾਂ ਨੂੰ ਪੱਤਰ ਲਿਖਦਾ ਹੈ। ਉਹ ਹਰੇਕ ਨੂੰ ਉਸਦੀ ਨਕਲ ਕਰਕੇ ਚਾਰ ਹੋਰ ਵਿਅਕਤੀਆਂ ਨੂੰ ਭੇਜਣ ਲਈ ਕਹਿੰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਨੂੰ ਵੀ ਇਹੀ ਕਰਨ ਲਈ ਕਹਿੰਦਾ ਹੈ ਕਿ ਹਰੇਕ ਪੱਤਰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਨ ਵਾਲਾ ਇਹ ਲੜੀ ਜਾਰੀ ਰੱਖੇ। ਇਹ ਮੰਨ ਲਿਆ ਜਾਵੇ ਕਿ ਲੜੀ ਨਾ ਟੁੱਟੇ ਅਤੇ ਇੱਕ ਪੱਤਰ ਦਾ ਡਾਕ ਖਰਚ 50 ਪੈਸੇ ਹੈ ਤਾਂ 8ਵੇਂ ਸਮੂਹ ਤੱਕ ਪੱਤਰ ਭੇਜੇ ਜਾਣ ਦਾ ਖਰਚ ਪਤਾ ਕਰੋ।

30. ਇੱਕ ਆਦਮੀ ਨੇ ਬੈਂਕ ਵਿੱਚ 10000 ਰੁਪਏ 5% ਸਲਾਨਾ ਦਰ ਨਾਲ ਸਾਧਾਰਨ ਵਿਆਜ ਤੇ ਜਮ੍ਹਾ ਕਰਵਾਏ। ਜਦੋਂ ਤੋਂ ਰਾਸ਼ੀ ਜਮਾਂ ਕਰਵਾਈ ਤਦ ਤੋਂ 15ਵੇਂ ਸਾਲ ਵਿਚ ਉਸ ਦੇ ਖਾਤੇ ਵਿੱਚ ਕਿੰਨੀ ਰਾਸ਼ੀ ਹੋ ਗਈ ਅਤੇ 20 ਸਾਲ ਬਾਅਦ ਕੁੱਲ ਕਿੰਨੀ ਰਾਸ਼ੀ ਹੋ ਗਈ ਪਤਾ ਕਰੋ।

31. ਇੱਕ ਨਿਰਮਾਤਾ ਘੋਸ਼ਣਾ ਕਰਦਾ ਹੈ ਕਿ ਉਸ ਦੀ ਮਸ਼ੀਨ ਜਿਸ ਦਾ ਮੁੱਲ 15625 ਰੁਪਏ ਹੈ, ਹਰ ਸਾਲ 20% ਦੀ ਦਰ ਨਾਲ ਕੀਮਤ ਘੱਟ ਜਾਂਦੀ ਹੈ। 5 ਸਾਲ ਬਾਅਦ ਮਸ਼ੀਨ ਦਾ ਅੰਦਾਜਨ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

32. ਕਿਸੇ ਕੰਮ ਨੂੰ ਕੁਝ ਦਿਨਾਂ ਵਿਚ ਪੂਰਾ ਕਰਨ ਲਈ 150 ਮਜ਼ਦੂਰ ਲਗਾਏ ਗਏ। ਦੂਜੇ ਦਿਨ 4 ਮਜ਼ਦੂਰਾਂ ਨੇ ਕੰਮ ਛੱਡ ਦਿੱਤਾ, ਤੀਜੇ ਦਿਨ 4 ਹੋਰ ਕਰਮਚਾਰੀਆਂ ਨੇ ਕੰਮ ਛੱਡ ਦਿੱਤਾ ਅਤੇ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੋਰਾਂ ਨੇ। ਹੁਣ ਕੰਮ ਪੂਰਾ ਕਰਨ ਵਿੱਚ 8 ਦਿਨ ਵੱਧ ਲੱਗਦੇ ਹਨ ਤਾਂ ਦਿਨਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਦੱਸੋ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਕੰਮ ਪੂਰਾ ਕੀਤਾ ਗਿਆ।

ਸਾਰ-ਅੰਸ਼

◆ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਤੋਂ ਸਾਡਾ ਭਾਵ ਹੈ ਕਿ, "ਕਿਸੇ ਨਿਯਮ ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਇੱਕ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਲੜੀ ਵਿਚ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੀ ਵਿਵਸਥਾ।" ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਨੂੰ ਇੱਕ ਫਲਨ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿਚ ਵੀ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਜਿਸਦਾ ਪ੍ਰਾਂਤ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੈ ਜਾਂ ਉਸ ਦਾ ਉਪ ਸਮੂਹ $\{1, 2, 3, ..., k\}$ ਦੇ ਤਰ੍ਹਾਂ ਦਾ ਹੈ। ਉਹ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਜਿਸ ਵਿਚ ਪਦਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਸੀਮਿਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਸੀਮਿਤ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਕਹਾਉਂਦੇ ਹਨ। ਜੇਕਰ ਕੋਈ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਸੀਮਿਤ ਨਹੀਂ ਤਾਂ ਉਸਨੂੰ ਅਸੀਮਿਤ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

◆ ਮੰਨ ਲਉ $a_1, a_2, a_3, ...$ ਇੱਕ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਹੈ ਤਾਂ $a_1 + a_2 + a_3 + ...$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿਚ ਦਰਸਾਇਆ ਜੋੜ ਲੜੀ ਅਖਵਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਜਿਸ ਲੜੀ ਵਿੱਚ ਪਦਾਂ ਦੀ ਸੰਖਿਆ ਸੀਮਿਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਉਸਨੂੰ ਸੀਮਿਤ ਲੜੀ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

◆ ਇੱਕ ਅੰਕਗਣਿਤਿਕ ਲੜੀ (A.P.) ਉਹ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਹੈ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਪਦ ਸਮਾਨ ਸਥਿਰ ਅੰਕ ਨਾਲ ਵੱਧਦੇ ਜਾਂ ਘੱਟਦੇ ਹਨ। ਇਸ ਸਥਿਰ ਅੰਕ ਸੰਖਿਆ ਨੂੰ A.P. ਦਾ ਸਾਂਝਾ ਅੰਤਰ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਆਮ ਤੌਰ 'ਤੇ ਅਸੀਂ A.P. ਦੇ ਪਹਿਲੇ ਪਦ ਨੂੰ a, ਸਾਂਝਾ ਅੰਤਰ ਨੂੰ d ਅਤੇ ਆਖਰੀ ਪਦ ਨੂੰ l ਨਾਲ ਦਰਸਾਉਂਦੇ ਹਾਂ। A.P. ਦਾ ਆਮ ਪਦ ਜਾਂ nਵਾਂ ਪਦ $a_n = a + (n - 1) d$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

A.P. ਦੇ ਪਹਿਲੇ n ਪਦਾਂ ਦਾ ਜੋੜ $S_n = \frac{n}{2}\left[2a+(n-1)d\right] = \frac{n}{2}(a+l)$ ਹੈ।

◆ ਦੋ ਸੰਖਿਆਵਾਂ a ਅਤੇ b ਦਾ ਅੰਕਗਣਿਤਿਕ ਮੱਧ A, $\frac{a+b}{2}$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜੋ ਕਿ ਅਨੁਕ੍ਰਮ a, A, b, A.P. ਵਿੱਚ ਹੈ।

◆ ਇੱਕ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਨੂੰ ਜਿਮਾਇਤੀ ਲੜੀ ਜਾਂ G.P., ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਜੇਕਰ ਕੋਈ ਪਦ ਆਪਣੇ ਪਿਛਲੇ ਪਦ ਤੋਂ ਇੱਕ ਸਥਿਰ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿਚ ਵੱਧਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਸਥਿਰ ਅਨੁਪਾਤ ਨੂੰ ਸਾਂਝਾ ਅਨੁਪਾਤ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ। ਆਮ ਤੌਰ 'ਤੇ ਅਸੀਂ G.P. ਦੇ ਪਹਿਲੇ ਪਦ ਨੂੰ a ਅਤੇ ਸਾਂਝਾ ਅਨੁਪਾਤ ਨੂੰ r ਨਾਲ ਲਿਖਦੇ ਹਾਂ। G.P. ਦਾ ਆਮ ਪਦ ਜਾਂ nਵਾਂ ਪਦ $a_n = ar^{n-1}$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ।

G.P. ਦੇ ਪਹਿਲੇ n ਪਦ ਦਾ ਜੋੜ $S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r-1}$ ਜਾਂ $\frac{a(1-r^n)}{1-r}$, ਜੇਕਰ $r \neq 1$

◆ ਦੋ ਧਨਾਤਮਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ a ਅਤੇ b ਦਾ ਜਿਮਾਇਤੀ ਮੱਧ (G.M.) $\sqrt{ab}$ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਭਾਵ ਅਨੁਕ੍ਰਮ a, G, b, G.P. ਵਿੱਚ ਹਨ।

ਇਤਿਹਾਸਿਕ ਨੋਟ

ਸਬੂਤ ਮਿਲਦੇ ਹਨ ਕਿ 4000 ਸਾਲ ਪਹਿਲਾਂ ਬੇਬੀ ਲੋਨੀਆ ਦੇ ਵਾਸੀਆਂ ਨੂੰ ਅੰਕਗਣਿਤ ਅਤੇ ਜਿਮਾਇਤੀ ਅਨੁਕ੍ਰਮਾਂ ਬਾਰੇ ਜਾਣਕਾਰੀ ਸੀ। Boethius (510 A.D.) ਦੇ ਅਨੁਸਾਰ ਅੰਕਗਣਿਤ ਅਤੇ ਜਿਮਾਇਤੀ ਅਨੁਕ੍ਰਮਾਂ ਦੀ ਜਾਣਕਾਰੀ ਸ਼ੁਰੂ ਦੇ ਯੂਨਾਨੀ ਲੇਖਕਾਂ ਨੂੰ ਸੀ। ਭਾਰਤੀ ਗਣਿਤ ਵਿਗਿਆਨੀ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਵਿਚ ਆਰੀਆ ਭੱਟ (476 A.D.) ਨੇ ਪਹਿਲੀ ਵਾਰ ਪ੍ਰਾਕ੍ਰਿਤਕ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਵਰਗਾਂ ਅਤੇ ਘਣਾਂ ਦਾ ਜੋੜ, ਆਪਣੀ ਮਸ਼ਹੂਰ ਪੁਸਤਕ 'ਆਰੀਆ ਭਟਿਅਮ' ਜੋ ਲਗਭਗ 499 A.D. ਵਿੱਚ ਲਿਖੀ ਗਈ ਸੀ, ਵਿਚ ਦਿੱਤਾ। ਉਹਨਾਂ ਨੇ pਵਾਂ ਪਦ ਤੋਂ ਸ਼ੁਰੂ, ਅੰਕਗਣਿਤਕ ਲੜੀ ਦੇ n ਪਦਾਂ ਦੇ ਜੋੜ ਦਾ ਸੂਤਰ ਵੀ ਦਿੱਤਾ। ਹੋਰ ਮਹਾਨ ਭਾਰਤੀ ਗਣਿਤ ਵਿਗਿਆਨੀ ਬ੍ਰਹਮਗੁਪਤ (598 A.D.), ਮਹਾਵੀਰ (850 A.D.) ਅਤੇ ਭਾਸਕਰ (1114–1185 A.D.) ਨੇ ਸੰਖਿਆਵਾਂ ਦੇ ਵਰਗਾਂ ਅਤੇ ਘਣਾਂ ਦੇ ਜੋੜ 'ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕੀਤਾ। ਇੱਕ ਹੋਰ ਖਾਸ ਕਿਸਮ ਦਾ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਜਿਸ ਦੀ ਗਣਿਤ ਵਿਚ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਵਰਤੋਂ ਹੈ ਜੋ ਫ਼ਿੱਬੋਨਾਕੀ (1170–1250 A.D.) ਨੇ ਦਿੱਤਾ। ਸਤਾਰ੍ਹਵੀਂ ਸਦੀ ਵਿੱਚ ਲੜੀਆਂ ਦਾ ਵਰਗੀਕਰਣ ਖਾਸ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਹੋਇਆ। 1671 ਈ: ਵਿਚ James Gregory ਨੇ ਅਸੀਮਿਤ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਦੇ ਸੰਬੰਧ ਵਿੱਚ ਅਸੀਮਿਤ ਲੜੀ ਸ਼ਬਦ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕੀਤਾ। ਬੀਜ ਗਣਿਤਿਕ ਅਤੇ ਸਮੂਹ ਸਿਧਾਂਤਾ ਦੇ ਸੰਪੂਰਨ ਵਿਕਾਸ ਦੇ ਉਪਰੰਤ ਹੀ ਅਨੁਕ੍ਰਮ ਅਤੇ ਲੜੀਆਂ ਨਾਲ ਸੰਬੰਧਤ ਜਾਣਕਾਰੀ ਚੰਗੇ ਢੰਗ ਨਾਲ ਪੇਸ਼ ਹੋ ਸਕੀ।

— ❖ —

ਅਧਿਆਇ 10

ਸਿੱਧੀਆਂ ਰੇਖਾਵਾਂ

(Straight Lines)

❖ *Geometry, as a logical system, is a means and even the most powerful means to make children feel the strength of the human spirit that is of their own spirit. – H. FREUDENTHAL* ❖

10.1 ਭੂਮਿਕਾ

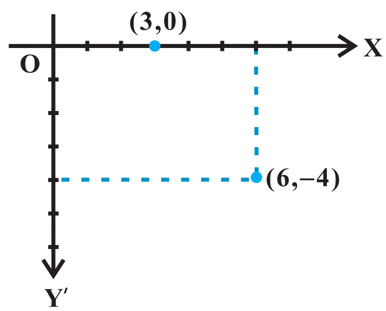
Rene Descartes
(1596 -1650)

ਅਸੀਂ ਪਿਛਲੀਆਂ ਸ਼੍ਰੇਣੀਆਂ ਤੋਂ ਦੋ ਵਿਮਾਈ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਜਿਮਾਇਤੀ ਤੋਂ ਜਾਣੂ ਹਾਂ। ਮੁੱਖ ਤੌਰ 'ਤੇ ਇਹ ਬੀਜ ਗਣਿਤ ਅਤੇ ਜਿਮਾਇਤੀ ਦਾ ਸੰਯੋਜਨ ਹੈ। ਬੀਜ ਗਣਿਤ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਕੇ ਜਿਮਾਇਤੀ ਦਾ ਸੁਚੱਜੇ ਢੰਗ ਨਾਲ ਅਧਿਐਨ ਸਭ ਤੋਂ ਪਹਿਲਾ ਮਸ਼ਹੂਰ ਫਰਾਂਸੀਸੀ ਦਾਰਸ਼ਨਿਕ ਅਤੇ ਗਣਿਤ ਵਿਗਿਆਨੀ Rene Descartes ਨੇ 1637 ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਕਾਸ਼ਿਤ ਆਪਣੀ ਪੁਸਤਕ La Geometry ਵਿੱਚ ਕੀਤਾ ਸੀ। ਇਸ ਪੁਸਤਕ ਤੋਂ ਜਿਮਾਇਤੀ ਦੇ ਅਧਿਐਨ ਵਿੱਚ ਵਕਰ ਦੇ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਵਿਚਾਰ ਅਤੇ ਸੰਬੰਧਿਤ ਵਿਸ਼ਲੇਸ਼ਣ ਵਿਧੀਆਂ ਦਾ ਅਰੰਭ ਹੋਇਆ। ਜਿਮਾਇਤੀ ਅਤੇ ਵਿਸ਼ਲੇਸ਼ਣ ਦਾ ਪਰਿਣਾਮੀ ਸੰਯੋਜਨ ਹੁਣ ਵਿਸ਼ਲੇਸ਼ਣਾਤਮਕ ਜਿਮਾਇਤੀ ਨੂੰ ਪੇਸ਼ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਪਿਛਲੀਆਂ ਸ਼੍ਰੇਣੀਆਂ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਜਿਮਾਇਤੀ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਸ਼ੁਰੂ ਕੀਤਾ ਜਿਸ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ-ਧੁਰੇ, ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਤਲ, ਤਲ ਵਿਚ ਬਿੰਦੂਆਂ ਨੂੰ ਆਲੇਖਿਤ ਕਰਨਾ, ਦੋ ਬਿੰਦੂਆਂ ਵਿਚਕਾਰ ਦੂਰੀ, ਵਿਭਾਜਨ ਸੂਤਰ ਆਦਿ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕੀਤਾ। ਇਹ ਸਾਰੀਆਂ ਧਾਰਨਾਵਾਂ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਜਿਮਾਇਤੀ ਦਾ ਅਧਾਰ ਹਨ।

ਆਉ ਪਿਛਲੀ ਸ਼੍ਰੇਣੀ ਵਿੱਚ ਕੀਤੀ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਜਿਮਾਇਤੀ ਦੀ ਦੁਹਰਾਈ ਕਰੀਏ। ਦੁਹਰਾਈ ਲਈ XY ਤਲ ਵਿੱਚ (6, –4) ਅਤੇ (3, 0) ਬਿੰਦੂਆਂ ਨੂੰ ਚਿੱਤਰ 10.1 ਵਿਚ ਦਰਸਾਇਆ ਗਿਆ ਹੈ।

ਧਿਆਨ ਦਿਉ ਕਿ ਬਿੰਦੂ (6, –4) ਧਨ x ਧੁਰੇ ਤੇ y-ਧੁਰੇ ਤੋਂ 6 ਇਕਾਈ ਦੂਰੀ 'ਤੇ ਅਤੇ ਰਿਣ-y-ਧੁਰੇ ਦੇ ਨਾਲ x-ਧੁਰੇ ਤੋਂ 4 ਇਕਾਈ ਦੂਰੀ 'ਤੇ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਬਿੰਦੂ (3, 0) ਧਨ। x-ਧੁਰੇ ਦੇ ਨਾਲ y-ਧੁਰੇ ਤੋਂ 3 ਇਕਾਈ ਦੂਰੀ ਅਤੇ x-ਧੁਰੇ ਤੋਂ ਸਿਫ਼ਰ ਦੂਰੀ ਤੇ ਹੈ।

ਅਸੀਂ ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਮਹੱਤਵਪੂਰਣ ਸੂਤਰਾਂ ਦਾ ਵੀ ਅਧਿਐਨ ਕੀਤਾ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 10.1

I. P (x_1, y_1) ਅਤੇ Q (x_2, y_2) ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰਲੀ ਦੂਰੀ ਹੈ।

$$PQ=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

ਉਦਾਹਰਣ ਦੇ ਤੌਰ 'ਤੇ ਬਿੰਦੂਆਂ (6, – 4) ਅਤੇ (3, 0) ਦੇ ਵਿਚਕਾਰਲੀ ਦੂਰੀ ਹੈ।

$$\sqrt{(3-6)^2+(0+4)^2}=\sqrt{9+16}=5 \text{ ਇਕਾਈ}$$

II. (x_1, y_1) ਅਤੇ (x_2, y_2) ਬਿੰਦੂਆਂ ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੇ ਰੇਖਾ ਖੰਡ ਨੂੰ ਅੰਦਰੂਨੀ $m: n$ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਵੰਡਣ ਵਾਲੇ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਹਨ $\left(\frac{m x_2+n x_1}{m+n}, \frac{m y_2+n y_1}{m+n}\right)$.

ਉਦਾਹਰਣ ਲਈ ਬਿੰਦੂਆਂ A (1, –3) ਅਤੇ B (–3, 9) ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੇ ਰੇਖਾ ਖੰਡ ਨੂੰ ਅੰਦਰੂਨੀ ਅਨੁਪਾਤ 1: 3 ਵਿਚ ਵੰਡਣ ਵਾਲੇ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ $x = \frac{1.(-3)+3.1}{1+3} = 0$ ਅਤੇ $y = \frac{1.9 + 3.(-3)}{1+3} = 0$ ਹਨ।

III. ਵਿਸ਼ੇਸ਼ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਜੇਕਰ $m = n$ ਤਾਂ (x_1, y_1) ਅਤੇ (x_2, y_2) ਬਿੰਦੂਆਂ ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੇ ਰੇਖਾ ਖੰਡ ਦੇ ਮੱਧ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$ ਹਨ।

IV. ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਜਿਸਦੇ ਸਿਖਰ (x_1, y_1), (x_2, y_2) ਅਤੇ (x_3, y_3) ਹਨ।

$$\frac{1}{2}\left| x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\right|$$

ਉਦਾਹਰਣ ਲਈ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਜਿਸਦੇ ਸਿਖਰ (4, 4), (3, – 2) ਅਤੇ (– 3, 16) ਹੈ।

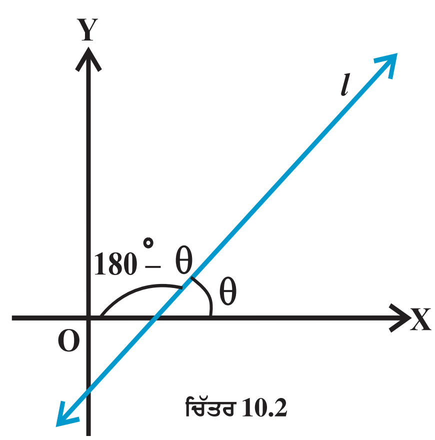
$$\frac{1}{2}\left| 4(-2-16) + 3(16-4) + (-3)(4+2)\right| = \frac{|-54|}{2} = 27$$

ਟਿੱਪਣੀ ਜੇਕਰ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ABC ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਸਿਫ਼ਰ ਹੈ ਤਾਂ ਤਿੰਨੋਂ ਬਿੰਦੂ A, B ਅਤੇ C ਇੱਕ ਹੀ ਰੇਖਾ ਤੇ ਹੋਣਗੇ ਅਰਥਾਤ ਉਹ ਸਮਰੇਖੀ ਹਨ।

ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿਚ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਜਿਮਾਇਤੀ ਤੇ ਅਧਿਐਨ ਨੂੰ ਸਰਲ ਜਿਮਾਇਤੀ ਚਿੱਤਰ-ਸਰਲ ਰੇਖਾ ਦੀਆਂ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾਵਾਂ ਦੇ ਅਧਿਐਨ ਲਈ ਜਾਰੀ ਰੱਖਾਂਗੇ। ਇਸ ਦੀ ਸਰਲਤਾ ਦੇ ਹੋਣ ਤੇ ਵੀ ਰੇਖਾ ਜਿਮਾਇਤੀ ਦੀ ਇਕ ਮਹੱਤਵਪੂਰਨ ਧਾਰਨਾ ਹੈ ਅਤੇ ਸਾਡੇ ਰੋਜਾਨਾ ਜੀਵਨ ਦੇ ਅਨੁਭਵ ਵਿੱਚ ਬਹੁਤ ਹੀ ਰੋਚਕ ਅਤੇ ਉਪਯੋਗੀ ਰੂਪ ਨਾਲ ਸ਼ਾਮਿਲ ਹੈ। ਇਥੇ ਸਾਡਾ ਮੁੱਖ ਉਦੇਸ਼ ਰੇਖਾ ਦਾ ਬੀਜਗਣਿਤਕ ਨਿਰੂਪਣ ਹੈ ਜਿਸ ਲਈ ਢਲਾਣ (Slope) ਦੀ ਧਾਰਨਾ ਬਹੁਤ ਹੀ ਜ਼ਰੂਰੀ ਹੈ।

10.2 ਰੇਖਾ ਦੀ ਢਲਾਣ (Slope of a Line)

ਇੱਕ ਰੇਖਾ, ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਤਲ ਵਿੱਚ, x-ਧੁਰੇ ਦੇ ਨਾਲ ਦੋ ਕੋਣ ਬਣਾਉਂਦੀ ਹੈ ਜੋ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਸੰਪੂਰਨ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਕੋਣ θ (ਮੰਨ ਲਉ) ਜੋ ਰੇਖਾ l, x-ਧੁਰੇ ਦੀ ਧਨਾਤਮਕ ਦਿਸ਼ਾ ਦੇ ਨਾਲ ਬਣਾਉਂਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਘੜੀ ਦੀ ਸੂਈ ਦੇ ਉਲਟ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿਚ ਮਾਪਿਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ, ਰੇਖਾ l ਦਾ ਝੁਕਾਅ ਕਹਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਸਪੱਸ਼ਟ ਤੌਰ 'ਤੇ $0° \le \theta \le 180°$ (ਚਿੱਤਰ 10.2)।



ਚਿੱਤਰ 10.2

ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ x-ਧੁਰੇ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਜਾਂ ਸੰਪਾਤੀ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦਾ ਝੁਕਾਅ 0° ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਇਕ ਖੜ੍ਹੀ ਰੇਖਾ (y-ਧੁਰੇ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਜਾਂ ਸੰਪਾਤੀ) ਦਾ ਝੁਕਾਅ 90° ਹੈ।

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 1 ਜੇਕਰ θ ਕਿਸੇ ਰੇਖਾ l ਦਾ ਝੁਕਾਅ ਹੈ ਤਾਂ tan θ ਨੂੰ ਰੇਖਾ l ਦੀ ਢਲਾਣ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

ਉਹ ਰੇਖਾ ਜਿਸ ਦਾ ਝੁਕਾਅ 90° ਹੈ, ਦੀ ਢਲਾਣ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਨਹੀਂ ਹੈ।

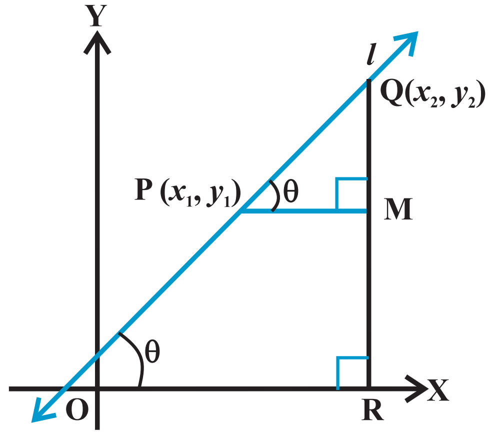
ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਦੀ ਢਲਾਣ ਨੂੰ m ਨਾਲ ਦਰਸਾਇਆ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ $m = \tan\theta, \theta \ne 90°$

ਇਹ ਦੇਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ x-ਧੁਰੇ ਦੀ ਢਲਾਣ 0 ਹੈ y-ਧੁਰੇ ਦੀ ਢਲਾਣ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਨਹੀਂ ਹੈ।

10.2.1 ਰੇਖਾ ਦੀ ਢਲਾਣ, ਜਦੋਂ ਉਸ ਉੱਪਰ ਦੋ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਦਿੱਤੇ ਹੋਣ

ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਉੱਪਰ ਦੋ ਬਿੰਦੂ ਦਿੱਤੇ ਹੋਣ ਤਾਂ ਉਹ ਪੂਰੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਅਸੀਂ ਰੇਖਾ ਦੀ ਢਲਾਣ ਨੂੰ ਉਸ ਉੱਪਰ ਦਿੱਤੇ ਦੋ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕਾਂ ਦੇ ਪਦਾਂ ਵਿਚ ਪਤਾ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।



ਚਿੱਤਰ 10. 3 (i)

ਮੰਨ ਲਉ ਦੋ ਬਿੰਦੂ P(x_1, y_1) ਅਤੇ Q(x_2, y_2) ਨਾ ਖੜ੍ਹੀ (non vertical) ਰੇਖਾ ਤੇ ਹਨ ਜਿਸ ਦਾ ਝੁਕਾਅ θ ਹੈ। ਸਪੱਸ਼ਟ ਤੌਰ ਤੇ $x_1 \neq x_2$ ਹੈ, ਨਹੀਂ ਤਾਂ ਰੇਖਾ x-ਧੁਰੇ ਤੇ ਲੰਬ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਉਸ ਦੀ ਢਲਾਣ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਨਹੀਂ ਹੋਵੇਗੀ। ਰੇਖਾ ਦਾ ਝੁਕਾਅ ਨਿਊਨ ਕੋਣ ਜਾਂ ਅਧਿਕ ਕੋਣ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਦੋਨਾਂ ਸਥਿਤੀਆਂ ਨੂੰ ਵਿਚਾਰਦੇ ਹਾਂ।

ਲੰਬ QR, x-ਧੁਰੇ ਤੇ ਖਿੱਚੋ ਅਤੇ PM ਲੰਬ RQ ਖਿੱਚੋ ਜਿਵੇਂ ਚਿੱਤਰ 10.3 (i) ਅਤੇ (ii) ਵਿਚ ਦਿਖਾਇਆ ਹੈ।

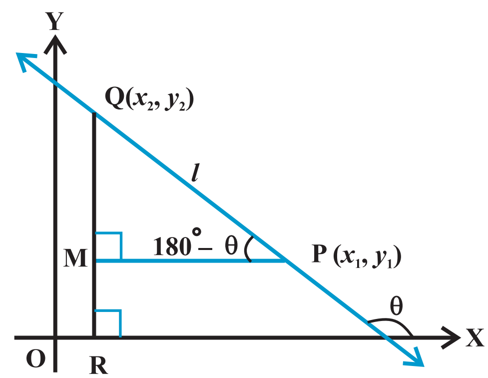
ਸਥਿਤੀ 1 ਜਦੋਂ ਕੋਣ θ ਨਿਊਨਕੋਣ ਹੈ

ਚਿੱਤਰ 10.3 (i) ਵਿੱਚ, $\angle MPQ = \theta$ ...(1)

ਇਸ ਲਈ, ਰੇਖਾ l ਦੀ ਢਲਾਣ $= m = \tan\theta$.

ਪ੍ਰੰਤੂ ΔMPQ, ਵਿਚ ਸਾਡੇ ਕੋਲ $\tan\theta = \frac{MQ}{MP} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. ...(2)

ਸਮੀਕਰਣ (1) ਅਤੇ (2), ਤੋਂ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$



ਚਿੱਤਰ 10. 3 (ii)

ਸਥਿਤੀ 2. ਜਦੋਂ ਕੋਣ θ ਅਧਿਕ ਕੋਣ ਹੈ

ਚਿੱਤਰ 10.3 (ii), ਵਿੱਚ ਸਾਡੇ ਕੋਲ

$\angle MPQ = 180° - \theta$

ਇਸ ਲਈ, $\theta = 180° - \angle MPQ$

ਹੁਣ ਰੇਖਾ l ਦੀ ਢਲਾਣ

$$m = \tan\theta$$

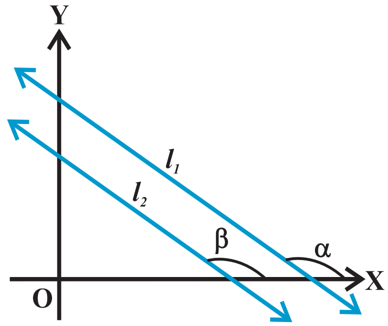
$$= \tan(180° - \angle MPQ) = -\tan\angle MPQ$$

$$= -\frac{MQ}{MP} = -\frac{y_2 - y_1}{x_1 - x_2} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

ਨਤੀਜੇ ਵਜੋਂ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਦੋਨਾਂ ਸਥਿਤੀਆਂ ਵਿਚ ਰੇਖਾ l ਦੀ ਢਲਾਣ ਜੋ ਬਿੰਦੂਆਂ (x_1, y_1) ਅਤੇ (x_2, y_2) ਵਿਚੋਂ ਲੰਘਦੀ ਹੈ : $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ ਹੈ।

10.2.2 ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਅਤੇ ਪਰਸਪਰ ਲੰਬ ਹੋਣ ਦੀ ਢਲਾਣ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਸ਼ਰਤ

ਮੰਨ ਲਉ ਇੱਕ ਤਲ ਵਿਚ ਨਾ-ਖੜ੍ਹਵੀਆਂ ਰੇਖਾਵਾਂ l_1 ਅਤੇ l_2 ਦੀ ਢਲਾਣ ਕ੍ਰਮਵਾਰ m_1 ਅਤੇ m_2 ਹੈ ਅਤੇ ਉਹਨਾਂ ਦਾ ਝੁਕਾਅ ਕ੍ਰਮਵਾਰ α ਅਤੇ β ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 10. 4

ਜੇਕਰ ਰੇਖਾਵਾਂ l_1 ਅਤੇ l_2 ਸਮਾਂਤਰ ਹੈ ਤਾਂ ਉਨ੍ਹਾਂ ਦਾ ਝੁਕਾਅ ਬਰਾਬਰ ਹੈ। ਭਾਵ

$\alpha = \beta$ ਅਤੇ $\tan \alpha = \tan \beta$

ਇਸ ਲਈ $m_1 = m_2$, ਭਾਵ ਉਹਨਾਂ ਦੀ ਢਲਾਣ ਬਰਾਬਰ ਹੈ।

ਇਸ ਦੇ ਉਲਟ ਜੇਕਰ ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ l_1 ਅਤੇ l_2 ਦੀ ਢਲਾਣ ਬਰਾਬਰ ਹੈ

ਅਰਥਾਤ

$$m_1 = m_2$$

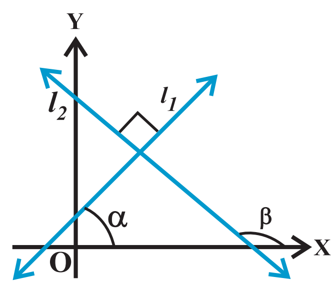
ਤਾਂ $$\tan \alpha = \tan \beta$$

ਟੇਂਜੈਂਟ ਫਲਨ ਦੀ ਵਿਸ਼ੇਸ਼ਤਾ ਤੋਂ (0° ਅਤੇ 180° ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ), $\alpha = \beta$.

ਇਸ ਲਈ ਰੇਖਾਵਾਂ ਸਮਾਂਤਰ ਹਨ।

ਇਸ ਲਈ ਦੋ ਨਾ-ਖੜ੍ਹਵੀਆਂ ਰੇਖਾਵਾਂ l_1 ਅਤੇ l_2 ਸਮਾਂਤਰ ਹਨ ਜੇਕਰ ਅਤੇ ਸਿਰਫ਼ ਜੇਕਰ ਉਨ੍ਹਾਂ ਦੀ ਢਲਾਣ ਬਰਾਬਰ ਹੈ।

ਜੇਕਰ ਰੇਖਾਵਾਂ l_1 ਅਤੇ l_2 ਲੰਬ ਹਨ (ਚਿੱਤਰ 10.5), ਤਾਂ $\beta = \alpha + 90°$



ਚਿੱਤਰ 10. 5

ਇਸ ਲਈ, $$\tan \beta = \tan (\alpha + 90°)$$

$$= - \cot \alpha = -\frac{1}{\tan \alpha}$$

ਅਰਥਾਤ $$m_2 = -\frac{1}{m_1}$$

ਜਾਂ $$m_1 m_2 = -1$$

ਇਸ ਦੇ ਉਲਟ ਜੇਕਰ $m_1 m_2 = -1$, ਅਰਥਾਤ $\tan \alpha \tan \beta = -1$

ਤਾਂ $\tan \alpha = -\cot \beta = \tan (\beta + 90°)$ ਜਾਂ $\tan (\beta - 90°)$

ਇਸ ਲਈ, α ਅਤੇ β ਦਾ ਅੰਤਰ 90° ਹੈ।

ਅਰਥਾਤ ਰੇਖਾਵਾਂ l_1 ਅਤੇ l_2 ਆਪਸ ਵਿਚ ਲੰਬ ਹਨ।

ਇਸ ਲਈ ਦੋ ਨਾ ਖੜ੍ਹਵੀਆਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਆਪਸ ਵਿਚ ਲੰਬ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ ਜੇਕਰ ਅਤੇ ਸਿਰਫ਼ ਜੇਕਰ ਉਨ੍ਹਾਂ ਦੀ ਢਲਾਣ ਇੱਕ ਦੂਜੇ ਦੀ ਰਿਣਾਤਮਕ ਉਲਟ (ਗੁਣਾਤਮਕ) ਹੋਣ।

ਅਰਥਾਤ $$m_2 = -\frac{1}{m_1}$$

ਜਾਂ $$m_1 m_2 = -1.$$

ਆਉ ਕੁਝ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਦੇਖੀਏ :

ਉਦਾਹਰਣ 1: ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੀ ਢਲਾਣ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੋ

(a) ਬਿੰਦੂਆਂ (3, – 2) ਅਤੇ (–1, 4) ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘਦੀ ਹੈ,

(b) ਬਿੰਦੂਆਂ (3, – 2) ਅਤੇ (7, – 2) ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘਦੀ ਹੈ,

(c) ਬਿੰਦੂਆਂ (3, – 2) ਅਤੇ (3, 4) ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘਦੀ ਹੈ,

(d) ਧਨਾਤਮਕ x-ਧੁਰੇ ਨਾਲ 60° ਦਾ ਕੋਣ ਬਣਾਉਂਦੀ ਹੈ

ਹੱਲ : (a) ਬਿੰਦੂਆਂ (3, – 2) ਅਤੇ (– 1, 4) ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘਦੀ ਰੇਖਾ ਦੀ ਢਲਾਣ ਹੈ

$$m = \frac{4-(-2)}{-1-3} = \frac{6}{-4} = -\frac{3}{2}.$$

(b) ਬਿੰਦੂਆਂ (3, – 2) ਅਤੇ (7, – 2) ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘਦੀ ਰੇਖਾ ਦੀ ਢਲਾਣ ਹੈ

$$m = \frac{-2-(-2)}{7-3} = \frac{0}{4} = 0$$

(c) ਬਿੰਦੂਆਂ (3, – 2) ਅਤੇ (3, 4) ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘਦੀ ਰੇਖਾ ਦੀ ਢਲਾਣ ਹੈ

$$m = \frac{4-(-2)}{3-3} = \frac{6}{0},$$ ਜੋ ਕਿ ਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਨਹੀਂ ਹੈ।

(d) ਇੱਥੇ ਰੇਖਾ ਦਾ ਝੁਕਾਅ $\alpha = 60°$ ਹੈ ਇਸ ਲਈ ਰੇਖਾ ਦੀ ਢਲਾਣ

$$m = \tan 60° = \sqrt{3}$$

10.2.3 *ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਦਾ ਕੋਣ*

ਜਦੋਂ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਹੀ ਤਲ ਵਿੱਚ ਸਥਿਤ ਇੱਕ ਤੋਂ ਵੱਧ ਰੇਖਾਵਾਂ ਬਾਰੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰਦੇ ਹਾਂ ਤਾਂ ਅਸੀਂ ਦੇਖਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਜਾਂ ਤਾਂ ਇਹ ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ ਕੱਟਦੀਆਂ ਹਨ ਜਾਂ ਸਮਾਂਤਰ ਹਨ। ਇੱਥੇ ਅਸੀਂ ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਕੋਣ ਬਾਰੇ, ਉਨ੍ਹਾਂ ਦੀ ਢਲਾਣ ਦੇ ਅਧਾਰਿਤ, ਵਿਚਾਰ ਕਰਾਂਗੇ।

ਮੰਨ ਲਉ L_1 ਅਤੇ L_2 ਦੋ ਨਾ-ਖੜ੍ਹਵੀਆਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਹਨ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਦੀ ਢਲਾਣ ਕ੍ਰਮਵਾਰ m_1 ਅਤੇ m_2 ਹੈ। ਜੇਕਰ α_1 ਅਤੇ α_2 ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਰੇਖਾਵਾਂ L_1 ਅਤੇ L_2 ਦੇ ਝੁਕਾਅ ਹਨ, ਤਾਂ

$$m_1 = \tan\alpha_1 \quad \text{ਅਤੇ} \quad m_2 = \tan\alpha_2$$

ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਜਦੋਂ ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਕੱਟਦੀਆਂ ਹਨ, ਤਾਂ ਸਿਖਰ ਸਨਮੁੱਖ ਕੋਣਾਂ ਦੇ ਦੋ ਜੋੜੇ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਬਣਦੇ ਹਨ ਕਿ ਕੋਈ ਵੀ ਦੋ ਲਾਗਵੇਂ ਕੋਣਾਂ ਦਾ ਜੋੜ 180° ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਮੰਨ ਲਉ θ ਅਤੇ ϕ ਰੇਖਾਵਾਂ L_1 ਅਤੇ L_2 (ਚਿੱਤਰ 10.6) ਵਿੱਚ ਦੋ ਲਾਗਵੇਂ ਕੋਣ ਹਨ ਤਾਂ

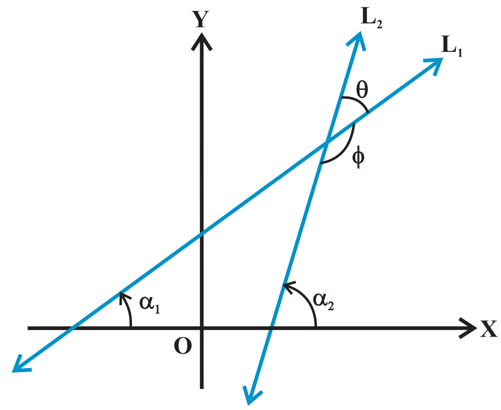
$$\theta = \alpha_2 - \alpha_1 \text{ ਅਤੇ } \alpha_1, \alpha_2 \neq 90°$$

ਇਸ ਲਈ $\tan\theta = \tan(\alpha_2 - \alpha_1) = \dfrac{\tan\alpha_2 - \tan\alpha_1}{1+\tan\alpha_1 \tan\alpha_2} = \dfrac{m_2 - m_1}{1+m_1m_2}$ (ਕਿਉਂਕਿ $1 + m_1m_2 \neq 0$)

ਅਤੇ $\phi = 180° - \theta$ ਇਸ ਲਈ

$$\tan\phi = \tan(180° - \theta) = -\tan\theta = -\frac{m_2 - m_1}{1+m_1m_2}, \text{ as } 1 + m_1m_2 \neq 0$$

ਹੁਣ ਦੋ ਸਥਿਤੀਆਂ ਪੈਦਾ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ :



ਚਿੱਤਰ 10. 6

ਸਥਿਤੀ 1 ਜੇਕਰ $\dfrac{m_2 - m_1}{1+m_1m_2}$ ਧਨਾਤਮਕ ਹੈ ਤਾਂ $\tan\theta$ ਧਨਾਤਮਕ ਹੋਵੇਗਾ ਅਤੇ $\tan\phi$ ਰਿਣਾਤਮਕ, ਜਿਸਦਾ ਅਰਥ ਹੈ θ ਨਿਊਣ ਕੋਣ ਅਤੇ ϕ ਅਧਿਕ ਕੋਣ ਹੋਵੇਗਾ।

ਸਥਿਤੀ 2 ਜੇਕਰ $\dfrac{m_2 - m_1}{1+m_1m_2}$ ਰਿਣਾਤਮਕ ਹੈ, ਤਾਂ $\tan\theta$ ਰਿਣਾਤਮਕ ਹੋਵੇਗਾ ਅਤੇ $\tan\phi$ ਧਨਾਤਮਕ ਜਿਸਦਾ ਅਰਥ ਹੈ θ ਅਧਿਕ ਕੋਣ ਅਤੇ ϕ ਨਿਊਨ ਕੋਣ ਹੋਵੇਗਾ।

ਅਰਥਾਤ ਰੇਖਾਵਾਂ L_1 ਅਤੇ L_2 ਦੀਆਂ ਢਲਾਣਾਂ m_1 ਅਤੇ m_2 ਦਿੱਤੀਆਂ ਗਈਆਂ ਹਨ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਨਿਊਨ ਕੋਣ (ਮੰਨ ਲਉ θ)

$$\tan\theta = \left|\frac{m_2 - m_1}{1+m_1m_2}\right|, \text{ ਜਿੱਥੇ } 1+m_1m_2 \neq 0 \quad \ldots (1)$$

ਅਧਿਕ ਕੋਣ (ਮੰਨਿਆ ਕਿ ϕ) $\phi = 180^0 - \theta$ ਦੇ ਪ੍ਰਯੋਗ ਨਾਲ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਾਂ।

ਉਦਾਹਰਣ 2: ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਕੋਣ $\dfrac{\pi}{4}$ ਹੈ ਅਤੇ ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਦੀ ਢਲਾਣ $\dfrac{1}{2}$, ਹੈ ਦੂਜੀ ਰੇਖਾ ਦੀ ਢਲਾਣ ਪਤਾ ਕਰੋ।

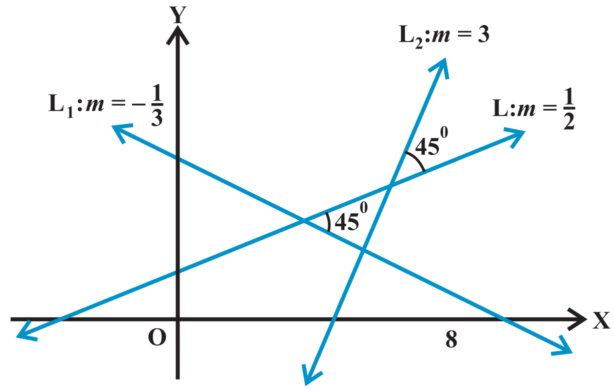
ਹੱਲ : ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ m_1 ਅਤੇ m_2 ਢਲਾਣ ਵਾਲੀਆਂ ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ ਵਿਚਕਾਰ ਨਿਊਨ ਕੋਣ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੈ ਕਿ

$$\tan\theta = \left|\frac{m_2 - m_1}{1+m_1m_2}\right| \quad \ldots (1)$$

ਮੰਨ ਲਉ $m_1 = \dfrac{1}{2}$, $m_2 = m$ ਅਤੇ $\theta = \dfrac{\pi}{4}$

ਹੁਣ ਇਹਨਾਂ ਕੀਮਤਾਂ ਨੂੰ (1), ਵਿਚ ਰੱਖਣ 'ਤੇ

$$\tan\frac{\pi}{4}=\left|\frac{m-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}m}\right| \text{ ਜਾਂ } 1=\left|\frac{m-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}m}\right|,$$



ਚਿੱਤਰ 10.7

ਜਿਸ ਤੋਂ $\frac{m-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}m}=1$ ਜਾਂ $\frac{m-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}m}=-1$

ਅਰਥਾਤ $m=3$ ਜਾਂ $m=-\frac{1}{3}$

ਇਸ ਲਈ ਦੂਜੀ ਰੇਖਾ ਦੀ ਢਲਾਣ 3 ਜਾਂ $-\frac{1}{3}$ ਹੈ। ਚਿੱਤਰ 10.7 ਵਿੱਚ ਦੋ ਉੱਤਰ ਦਾ ਕਾਰਨ ਸਪੱਸ਼ਟ ਕੀਤਾ ਗਿਆ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 3: (–2, 6) ਅਤੇ (4, 8) ਬਿੰਦੂਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ (8, 12) ਅਤੇ (x, 24) ਬਿੰਦੂਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾਂ ਤੇ ਲੰਬ ਹੈ। x ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : (– 2, 6) ਅਤੇ (4, 8) ਬਿੰਦੂਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘਦੀ ਰੇਖਾ ਦੀ ਢਲਾਣ

$$m_1=\frac{8-6}{4-(-2)}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$$

(8, 12) ਅਤੇ (x, 24) ਬਿੰਦੂਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘਦੀ ਰੇਖਾ ਦੀ ਢਲਾਣ

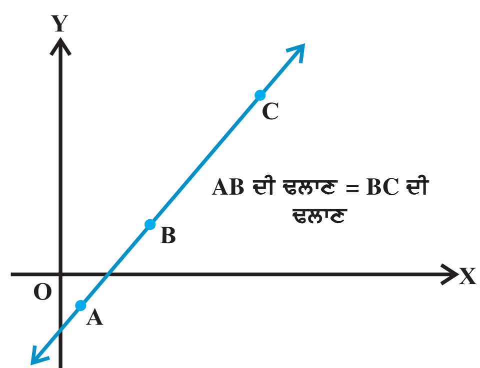
$$m_2=\frac{24-12}{x-8}=\frac{12}{x-8}$$

ਕਿਉਂਕਿ ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ ਲੰਬ ਹਨ

$m_1m_2=-1$, ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ

$$\frac{1}{3}\times\frac{12}{x-8}=-1 \text{ ਜਾਂ } x=4.$$

10.2.4 *ਤਿੰਨ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੀ ਸਮਰੇਖਿਕਤਾ (Collinearity)* ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਦੋ ਸਮਾਂਤਰ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੀ ਢਲਾਣ ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਦੀ ਢਲਾਣ ਬਰਾਬਰ ਅਤੇ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘਦੀਆਂ ਹੋਣ ਤਾਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਸੰਪਾਤੀ ਹੋਣਗੀਆਂ। ਇਸ ਲਈ ਜੇਕਰ A, B ਅਤੇ C, XY-ਤਲ ਵਿਚ ਤਿੰਨ ਬਿੰਦੂ ਹਨ ਤਾਂ ਉਹ ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਤੇ ਹੋਣਗੇ ਅਰਥਾਤ ਤਿੰਨੋਂ ਬਿੰਦੂ ਸਮਰੇਖੀ ਹੋਣਗੇ (ਚਿੱਤਰ 10.8) ਜੇਕਰ ਅਤੇ ਕੇਵਲ ਜੇਕਰ AB ਦੀ ਢਲਾਣ = BC ਦੀ ਢਲਾਣ।



ਚਿੱਤਰ 10. 8

ਉਦਾਹਰਣ 4: ਤਿੰਨ ਬਿੰਦੂ P (h, k), Q (x_1, y_1) ਅਤੇ R (x_2, y_2) ਇੱਕ ਹੀ ਰੇਖਾ ਤੇ ਬਿੰਦੂ ਹਨ। ਦਿਖਾਉ ਕਿ $(h-x_1)(y_2-y_1)=(k-y_1)(x_2-x_1)$

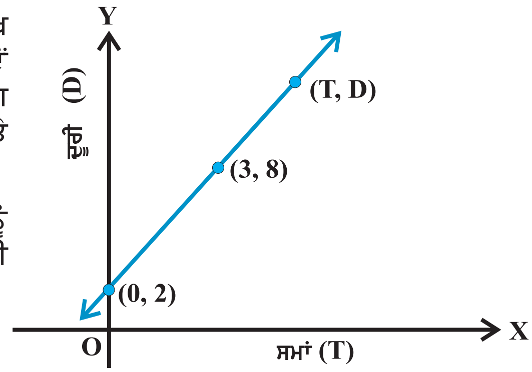
ਹੱਲ : ਕਿਉਂਕਿ ਬਿੰਦੂ P, Q ਅਤੇ R ਸਮਰੇਖੀ ਹਨ, ਸਾਡੇ ਕੋਲ

PQ ਦੀ ਢਲਾਣ = QR ਦੀ ਢਲਾਣ, ਜੋ ਕਿ, $\frac{y_1-k}{x_1-h}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

ਜਾਂ $$\frac{k - y_1}{h - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

ਜਾਂ $$(h - x_1)(y_2 - y_1) = (k - y_1)(x_2 - x_1)$$

ਉਦਾਹਰਣ 5: ਚਿੱਤਰ 10.9 ਵਿੱਚ, ਰੇਖੀ ਗਤੀ ਦਾ ਸਮੇਂ ਅਤੇ ਦੂਰੀ ਦਾ ਆਲੇਖ ਦਿੱਤਾ ਹੈ। ਸਮੇਂ ਅਤੇ ਦੂਰੀ ਦੇ ਦੋ ਸਥਾਨ ਜਦੋਂ T = 0, D = 2 ਅਤੇ ਜਦੋਂ T = 3, D = 8 ਹੈ ਦਰਜ ਕੀਤੇ ਗਏ ਹਨ। ਢਲਾਣ ਦੀ ਧਾਰਣਾ ਦਾ ਪ੍ਰਯੋਗ ਕਰਦੇ ਹੋਏ, ਗਤੀ ਦਾ ਨਿਯਮ ਪਤਾ ਕਰੋ ਅਰਥਾਤ ਕਿਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੂਰੀ, ਸਮੇਂ ਤੇ ਨਿਰਭਰ ਕਰਦੀ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 10.9

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ (T, D) ਕੋਈ ਬਿੰਦੂ ਰੇਖਾ 'ਤੇ ਹੈ। ਜਿੱਥੇ T ਸਮੇਂ ਤੇ D ਦੂਰੀ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ, ਬਿੰਦੂ (0, 2), (3, 8) ਅਤੇ (T, D) ਸਮਰੇਖੀ ਹਨ, ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ

$$\frac{8-2}{3-0} = \frac{\text{D}-8}{\text{T}-3} \quad \text{ਜਾਂ} \quad 6(\text{T}-3) = 3(\text{D}-8)$$

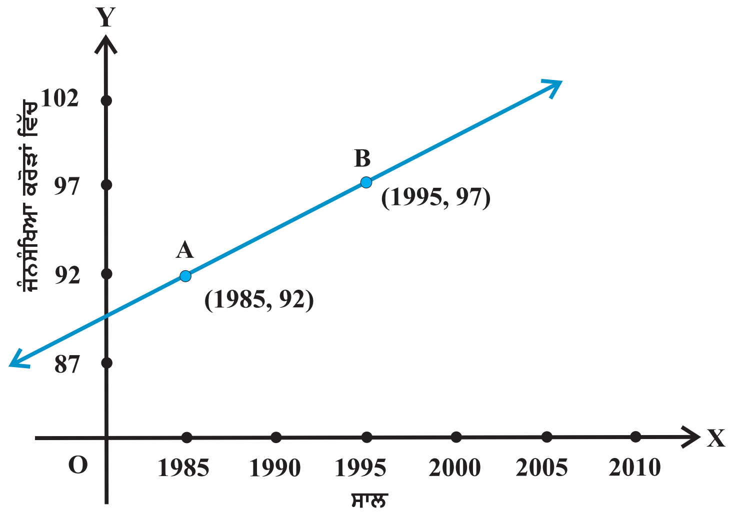
ਜਾਂ $$\text{D} = 2(\text{T} + 1),$$

ਜੋ ਕਿ ਲੋੜੀਂਦਾ ਸੰਬੰਧ ਹੈ।

ਅਭਿਆਸ 10.1

1. ਕਾਰਟੀਜੀਅਨ ਤਲ (Cartesian Plane) ਵਿੱਚ ਇੱਕ ਚਤੁਰਭੁਜ ਖਿੱਚੋ, ਜਿਸਦੇ ਸਿਖਰ (– 4, 5), (0, 7), (5, – 5) ਅਤੇ (– 4, –2) ਹਨ। ਇਸ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਵੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।
2. ਇੱਕ ਸਮਭੁਜੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਜਿਸਦੀ ਭੁਜਾ $2a$ ਹੈ, ਦਾ ਅਧਾਰ y-ਧੁਰੇ ਨਾਲ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸੰਪਾਤੀ ਹੈ ਕਿ ਇਸ ਅਧਾਰ ਦਾ ਮੱਧ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਹੈ। ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੇ ਸਿਖਰ ਪਤਾ ਕਰੋ।
3. P (x_1, y_1) ਅਤੇ Q (x_2, y_2) ਦੇ ਵਿਚਕਾਰਲੀ ਦੂਰੀ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਦੋਂ : (i) PQ y-ਧੁਰੇ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਹੈ। (ii) PQ, x-ਧੁਰੇ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਹੈ।
4. x-ਧੁਰੇ ਤੇ ਉਹ ਬਿੰਦੂ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੋ ਬਿੰਦੂਆਂ (7, 6) ਅਤੇ (3, 4) ਤੋਂ ਬਰਾਬਰ ਦੂਰੀ ਤੇ ਹੈ।
5. ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਦੀ ਢਲਾਣ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੋ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਅਤੇ ਬਿੰਦੂਆਂ P (0, – 4) ਅਤੇ B (8, 0) ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੇ ਰੇਖਾ ਖੰਡ ਦੇ ਮੱਧ ਬਿੰਦੂ ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘਦੀ ਹੈ।
6. ਪਾਇਥਾਗੋਰਸ ਥਿਊਰਮ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕੀਤੇ ਬਿਨਾਂ ਦਿਖਾਉ ਕਿ ਬਿੰਦੂ (4, 4), (3, 5) ਅਤੇ (–1, –1) ਸਮਕੋਣੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੇ ਸਿਖ਼ਰ ਹਨ।
7. ਉਸ ਰੇਖਾ ਦੀ ਢਲਾਣ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੋ ਧਨਾਤਮਕ y-ਧੁਰੇ ਨਾਲ ਘੜੀ ਦੀ ਸੂਈ ਦੇ ਉਲਟ 30° ਦਾ ਕੋਣ ਬਣਾਉਂਦੀ ਹੈ।
8. x ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਲਈ ਬਿੰਦੂ $(x, -1)$, (2,1) ਅਤੇ (4, 5) ਸਮਰੇਖੀ ਹੋਣ।
9. ਦੂਰੀ ਸੂਤਰ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕੀਤੇ ਬਿਨਾਂ ਦਿਖਾਉ ਕਿ ਬਿੰਦੂ (– 2, – 1), (4, 0), (3, 3) ਅਤੇ (–3, 2) ਸਮਾਂਤਰ ਚਤੁਰਭੁਜ ਦੇ ਸਿਖ਼ਰ ਹਨ।
10. x-ਧੁਰੇ ਅਤੇ ਬਿੰਦੂਆਂ (3,–1), (4,–2) ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ 'ਤੇ ਬਣੀ ਰੇਖਾ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਕੋਣ ਪਤਾ ਕਰੋ।
11. ਕਿਸੇ ਰੇਖਾ ਦੀ ਢਲਾਣ, ਕਿਸੇ ਹੋਰ ਰੇਖਾ ਦੀ ਢਲਾਣ ਤੋਂ ਦੁੱਗਣੀ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਦੋਨਾਂ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਦੇ ਕੋਣ ਦਾ ਟੇਂਜੈਂਟ $\frac{1}{3}$ ਹੈ ਤਾਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੀਆਂ ਢਲਾਣਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ।
12. ਇੱਕ ਰੇਖਾ (x_1, y_1) ਅਤੇ (h, k) ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘਦੀ ਹੈ। ਜੇਕਰ ਰੇਖਾ ਦੀ ਢਲਾਣ (Slope) m ਹੈ ਤਾਂ ਦਿਖਾਉ ਕਿ $k - y_1 = m(h - x_1)$
13. ਜੇਕਰ ਤਿੰਨ ਬਿੰਦੂ $(h, 0)$, (a, b) ਅਤੇ $(0, k)$ ਇੱਕ ਰੇਖਾਂ 'ਤੇ ਹੋਣ ਤਾਂ ਦਿਖਾਉ ਕਿ $\frac{a}{h} + \frac{b}{k} = 1$

14. ਹੇਠਾਂ ਦਿੱਤੇ ਜੰਨਸੰਖਿਆ ਅਤੇ ਸਾਲ ਦੇ ਗਰਾਫ਼ ਤੇ ਵਿਚਾਰ ਕਰੋ (ਚਿੱਤਰ 10.10), ਰੇਖਾ AB ਦੀ ਢਲਾਣ ਪਤਾ ਕਰੋ ਅਤੇ ਇਸ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ ਸਾਲ 2010 ਵਿੱਚ ਜੰਨਸੰਖਿਆ ਕਿੰਨੀ ਹੋਵੇਗੀ ?



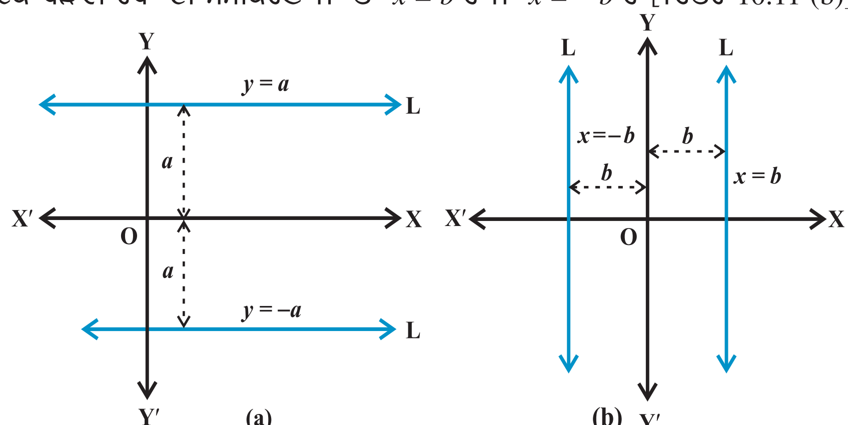
ਚਿੱਤਰ 10.10

10.3 ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਦੇ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਰੂਪ *(Various forms of the equation of a line)*

ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਇੱਕ ਤਲ ਵਿੱਚ ਰੇਖਾ ਤੇ ਅਨੰਤ ਬਿੰਦੂ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਰੇਖਾ ਅਤੇ ਬਿੰਦੂਆਂ ਵਿਚਕਾਰ ਇਹ ਸੰਬੰਧ ਸਾਨੂੰ ਨਿਮਨਲਿਖਤ ਸਮੱਸਿਆ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ਵਿਚ ਸਹਾਇਕ ਹੈ :

ਅਸੀਂ ਕਿਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕਹਿ ਸਕਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਦਿੱਤਾ ਬਿੰਦੂ, ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਰੇਖਾ 'ਤੇ ਹੈ। ਇਸ ਦਾ ਉੱਤਰ ਇਹ ਹੋ ਸਕਦਾ ਹੈ ਕਿ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਰੇਖਾ ਲਈ ਸਾਡੇ ਕੋਲ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੇ ਰੇਖਾ 'ਤੇ ਹੋਣ ਦੀ ਇਕ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਸ਼ਰਤ ਹੋਣੀ ਚਾਹੀਦੀ ਹੈ। ਮੰਨ ਲਉ $P(x, y)$, XY-ਤਲ ਵਿਚ ਇੱਕ ਅਨਿਸ਼ਚਿਤ ਬਿੰਦੂ ਹੈ ਅਤੇ L ਇਕ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਰੇਖਾ ਹੈ। L ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਲਈ ਅਸੀ ਇੱਕ ਅਜਿਹੇ ਕਥਨ ਜਾਂ ਸ਼ਰਤ ਦੀ ਰਚਨਾ ਕਰਨਾ ਚਾਹੁੰਦੇ ਹਾਂ ਜੋ ਤਾਂ ਹੀ ਸੱਚ ਹੈ, ਜਦੋਂ P, L ਉੱਤੇ ਹੈ, ਨਹੀਂ ਤਾਂ ਝੂਠ ਹੈ। ਬਿਨਾਂ ਸ਼ੱਕ ਇਹ ਕਥਨ ਇੱਕ ਅਜਿਹਾ ਬੀਜਗਣਿਤਕ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ ਜਿਸ ਵਿਚ ਚਲ x ਅਤੇ y ਸ਼ਾਮਿਲ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਹੁਣ, ਅਸੀਂ ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਬਾਰੇ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਸ਼ਰਤਾਂ ਅਧੀਨ ਚਰਚਾ ਕਰਾਂਗੇ।

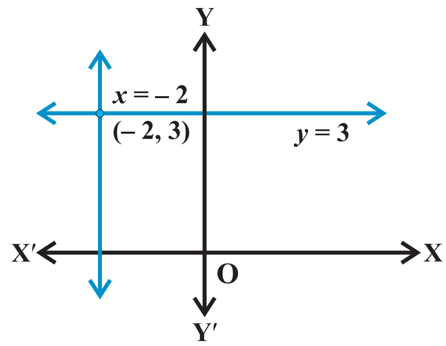
10.3.1 ***ਲੇਟਵੀਆਂ ਅਤੇ ਖੜ੍ਹਵੀਆਂ ਰੇਖਾਵਾਂ (Horizontal and Vertical Lines)*** ਜੇਕਰ ਇੱਕ ਲੇਟਵੀਂ ਰੇਖਾ L, x-ਧੁਰੇ ਤੋਂ a ਦੂਰੀ 'ਤੇ ਹੈ ਤਾਂ ਰੇਖਾ ਦੇ ਹਰੇਕ ਬਿੰਦੂ ਦੀ ਕੋਟੀ ਜਾਂ ਤਾਂ a ਜਾਂ $-a$ ਹੈ [ਚਿੱਤਰ 10.11(a)] ਇਸ ਲਈ L ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਜਾਂ ਤਾਂ $y = a$ ਜਾਂ $y = -a$ ਹੈ। ਚਿੰਨ੍ਹ ਦੀ ਚੋਣ, ਇਸ 'ਤੇ ਨਿਰਭਰ ਕਰਦੀ ਹੈ ਕਿ ਰੇਖਾ x-ਧੁਰੇ ਦੇ ਉੱਪਰ ਹੈ ਜਾਂ ਹੇਠਾਂ ਹੈ। ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ, x-ਧੁਰੇ ਤੋਂ b ਦੂਰੀ 'ਤੇ ਸਥਿਤ ਇਕ ਖੜ੍ਹਵੀਂ ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਜਾਂ ਤਾਂ $x = b$ ਹੈ ਜਾਂ $x = -b$ ਹੈ [ਚਿੱਤਰ 10.11 (b)]।



ਚਿੱਤਰ 10.11

ਉਦਾਹਰਣ 6: ਧੁਰਿਆਂ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਅਤੇ ਬਿੰਦੂ (– 2, 3) ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘਦੀਆਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੀਆਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਲਿਖੋ।

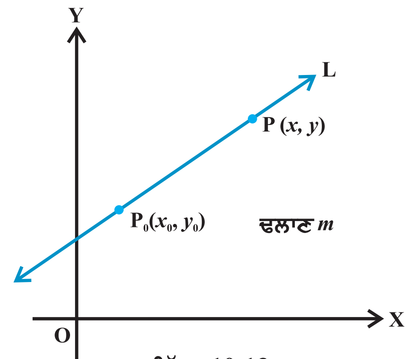
ਹੱਲ : ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੀ ਸਥਿਤੀ ਚਿੱਤਰ 10.12 ਵਿੱਚ ਦਿਖਾਈ ਗਈ ਹੈ। x-ਧੁਰੇ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਰੇਖਾ ਦੇ ਹਰੇਕ ਬਿੰਦੂ ਦੀ ਕੋਟੀ 3 ਹੈ, ਇਸ ਲਈ x-ਧੁਰੇ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਅਤੇ (– 2, 3) ਵਿੱਚੋਂ ਨਿਕਲਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ $y = 3$ ਹੈ। ਇਸੇ ਤਰ੍ਹਾਂ y-ਧੁਰੇ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਅਤੇ (– 2, 3) ਵਿੱਚੋਂ ਨਿਕਲਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਦਾ ਸਮੀਕਰਣ $x = – 2$ ਹੈ। (ਚਿੱਤਰ 10.12)।



ਚਿੱਤਰ 10.12

10.3.2 *ਬਿੰਦੂ-ਢਲਾਣ ਰੂਪ (Point-slope form)* ਮੰਨ ਲਉ $P_0 (x_0, y_0)$ ਇੱਕ ਨਾ ਖੜ੍ਹਵੀਂ ਰੇਖਾ L ਜਿਸ ਦੀ ਢਲਾਣ m ਹੈ 'ਤੇ ਨਿਸ਼ਚਿਤ (Fixed) ਬਿੰਦੂ ਹੈ। ਮੰਨ ਲਉ $P(x, y)$ ਰੇਖਾ L 'ਤੇ ਇੱਕ ਅਨਿਸ਼ਚਿਤ ਬਿੰਦੂ ਹੈ (ਚਿੱਤਰ 10.13)।

ਤਾਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਅਨੁਸਾਰ ਰੇਖਾ L ਦੀ ਢਲਾਣ ਹੈ



ਚਿੱਤਰ 10.13

$$m = \frac{y - y_0}{x - x_0}, \quad \text{ਭਾਵ,} \quad y - y_0 = m(x - x_0) \qquad ...(1)$$

ਕਿਉਂਕਿ ਬਿੰਦੂ $P_0 (x_0, y_0)$, L ਦੇ ਸਾਰੇ ਬਿੰਦੂਆਂ (x, y) ਦੇ ਨਾਲ (1) ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਵਿੱਚ ਕੋਈ ਹੋਰ ਬਿੰਦੂ (1) ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਨਹੀਂ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਸਮੀਕਰਣ (1) ਹੀ ਅਸਲ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੀ ਰੇਖਾ L ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ।

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਬਿੰਦੂ $P_0(x_0, y_0)$ ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘਣ ਵਾਲੀ, ਢਲਾਣ m ਦੀ ਰੇਖਾ 'ਤੇ ਬਿੰਦੂ (x, y) ਹੈ ਜੇਕਰ ਅਤੇ ਸਿਰਫ਼ ਜੇਕਰ ਇਸ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਸਮੀਕਰਣ

$y - y_0 = m (x - x_0)$ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦੇ ਹਨ।

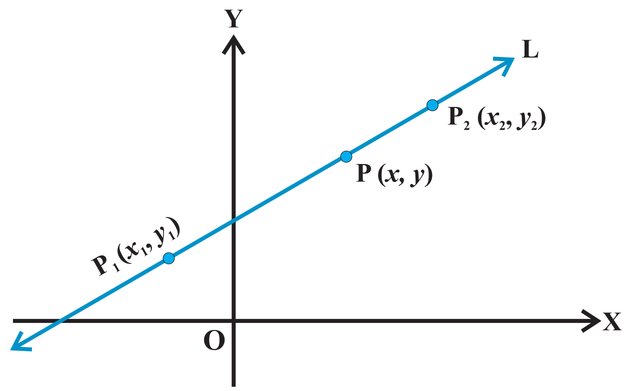
ਉਦਾਹਰਣ 7: ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੋ (– 2, 3) ਵਿੱਚ ਲੰਘਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਜਿਸਦੀ ਢਲਾਣ – 4 ਹੈ।

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ $m = – 4$ ਅਤੇ ਦਿੱਤਾ ਬਿੰਦੂ $(x_0, y_0) = (– 2, 3)$ ਹੈ

ਬਿੰਦੂ ਢਲਾਣ ਰੂਪ (Point slope Form) ਸੂਤਰ (1) ਤੋਂ ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ

$y – 3 = – 4 (x + 2)$ ਜਾਂ $4x + y + 5 = 0$, ਜੋ ਕਿ ਲੋੜੀਂਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ।

10.3.3 *ਦੋ ਬਿੰਦੂ ਰੂਪ (Two Point Form)* ਮੰਨ ਲਉ ਰੇਖਾ L ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਦੋ ਬਿੰਦੂਆਂ $P_1(x_1, y_1)$ ਅਤੇ $P_2(x_2, y_2)$ ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘਦੀ ਹੈ ਅਤੇ P (*x*, *y*) ਰੇਖਾ L 'ਤੇ ਕੋਈ ਆਮ ਬਿੰਦੂ ਹੈ (ਚਿੱਤਰ 10.14)।



ਚਿੱਤਰ 10.14

ਤਿੰਨ ਬਿੰਦੂ P_1, P_2 ਅਤੇ P ਸਮਰੇਖੀ ਹਨ ਇਸ ਲਈ ਸਾਡੇ ਕੋਲ
P_1P ਢਲਾਣ = P_1P_2 ਦੀ ਢਲਾਣ

ਭਾਵ $\dfrac{y-y_1}{x-x_1}=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$, ਜਾਂ $y-y_1=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$.

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਬਿੰਦੂਆਂ (x_1, y_1) ਅਤੇ (x_2, y_2) ਵਿਚੋਂ ਲੰਘਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ :

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1) \quad \ldots (2)$$

ਉਦਾਹਰਣ 8: ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਲਿਖੋ ਜੋ ਬਿੰਦੂਆਂ (1, –1) ਅਤੇ (3, 5) ਵਿਚੋਂ ਲੰਘਦੀ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ $x_1 = 1, y_1 = -1, x_2 = 3$ ਅਤੇ $y_2 = 5$, ਉਪਰੋਕਤ ਤੋਂ ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਦੋ ਬਿੰਦੂ ਰੂਪ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਨ ਤੇ, ਸਾਡੇ ਕੋਲ

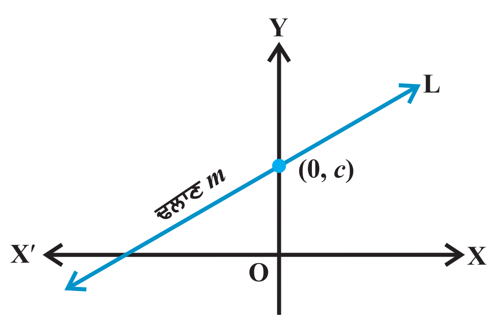
$$y-(-1)=\frac{5-(-1)}{3-1}(x-1)$$

ਜਾਂ $-3x+y+4=0$, ਜੋ ਕਿ ਲੋੜੀਂਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ

10.3.4 *ਢਲਾਣ-ਅੰਤਰਖੰਡ ਰੂਪ (Slope-intercept form)* ਕਈ ਵਾਰ ਸਾਨੂੰ ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਦੀ ਢਲਾਣ ਅਤੇ ਉਸ ਦੁਆਰਾ ਕਿਸੇ ਇੱਕ ਧੁਰੇ 'ਤੇ ਕੱਟੇ ਅੰਤਰਖੰਡ ਤੋਂ ਉਸ ਰੇਖਾ ਦੀ ਜਾਣਕਾਰੀ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।

ਸਥਿਤੀ 1 ਮੰਨ ਲਉ ਢਲਾਣ *m* ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ, *y*-ਧੁਰੇ 'ਤੇ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ *c* ਦੂਰੀ ਤੇ ਕੱਟਦੀ ਹੈ (ਚਿੱਤਰ10.15)। ਦੂਰੀ *c*, ਰੇਖਾ L ਦੀ *y*-ਅੰਤਰਖੰਡ ਕਹਾਉਂਦੀ ਹੈ। ਸਪਸ਼ਟ ਤੌਰ ਤੇ ਉਸ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਜਿੱਥੇ ਰੇਖਾ *y*-ਧੁਰੇ ਨੂੰ ਮਿਲਦੀ ਹੈ, (0, *c*) ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਰੇਖਾ L ਦੀ ਢਲਾਣ *m* ਹੈ ਅਤੇ ਇਹ ਨਿਸ਼ਚਿਤ ਬਿੰਦੂ (0, *c*) ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਬਿੰਦੂ ਢਲਾਣ ਰੂਪ ਤੋਂ, ਰੇਖਾ L ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ।

$y-c=m(x-0)$ ਜਾਂ $y=mx+c$



ਚਿੱਤਰ 10.15

ਇਸ ਲਈ ਬਿੰਦੂ (*x*, *y*), ਰੇਖਾ ਜਿਸ ਦੀ ਢਲਾਣ *m* ਅਤੇ *y*-ਅੰਤਰਖੰਡ *c*, 'ਤੇ ਹੋਵੇਗਾ ਜੇਕਰ ਅਤੇ ਸਿਰਫ਼ ਜੇਕਰ

$$y=mx+c \quad \ldots (3)$$

ਨੋਟ ਕਰੋ ਕਿ c ਦਾ ਮੁੱਲ ਧਨਾਤਮਕ ਜਾਂ ਰਿਣਾਤਮਕ ਹੋਵੇਗਾ। ਜੇਕਰ y-ਧੁਰੇ ਤੋਂ ਅੰਤਰਖੰਡ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਧਨਾਤਮਕ ਜਾਂ ਰਿਣਾਤਮਕ ਭਾਗ ਤੋਂ ਬਣਿਆ ਹੈ।

ਸਥਿਤੀ 2 ਮੰਨ ਲਉ ਢਲਾਣ m ਦੀ ਰੇਖਾ x-ਧੁਰੇ ਤੇ d ਅੰਤਰਖੰਡ ਬਣਾਉਂਦੀ ਹੈ ਤਾਂ L ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ

$y = m(x - d)$ ਹੈ। ... (4)

ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਖੁਦ ਇਸ ਸਮੀਕਰਣ ਨੂੰ ਸਥਿਤੀ-I ਅਨੁਸਾਰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ 9: ਉਹਨਾਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਲਿਖੋ ਜਿਸ ਲਈ $\tan\theta = \frac{1}{2}$, ਜਿੱਥੇ θ ਰੇਖਾ ਦਾ ਝੁਕਾਅ ਹੈ ਅਤੇ (i) y - ਅੰਤਰਖੰਡ $-\frac{3}{2}$ ਹੈ (ii) x - ਅੰਤਰਖੰਡ 4 ਹੈ।

ਹੱਲ : (i) ਇਥੇ ਰੇਖਾ ਦੀ ਢਲਾਣ $m = \tan\theta = \frac{1}{2}$ ਅਤੇ y - ਅੰਤਰਖੰਡ $c = -\frac{3}{2}$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਢਲਾਣ ਅੰਤਰਖੰਡ ਰੂਪ (3) ਤੋਂ ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} \quad \text{ਜਾਂ} \quad 2y - x + 3 = 0,$$

ਜੋ ਕਿ ਲੋੜੀਂਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ।

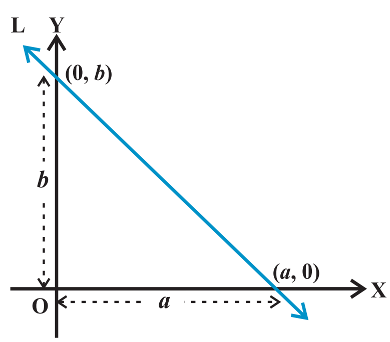
(ii) ਇੱਥੇ, ਸਾਡੇ ਕੋਲ $m = \tan\theta = \frac{1}{2}$ ਅਤੇ $d = 4$

ਇਸ ਲਈ, ਢਲਾਣ ਅੰਤਰਖੰਡ ਰੂਪ (4) ਤੋਂ, ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ

$$y = \frac{1}{2}(x - 4) \quad \text{ਜਾਂ} \quad 2y - x + 4 = 0,$$

ਜੋ ਕਿ ਲੋੜੀਂਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ।

10.3.5 *ਅੰਤਰਖੰਡ ਰੂਪ (Intercept - form)* ਮੰਨ ਲਉ L ਰੇਖਾ, ਧੁਰਿਆਂ ਤੇ x-ਅੰਤਰਖੰਡ a ਅਤੇ y-ਅੰਤਰਖੰਡ b ਬਣਾਉਂਦੀ ਹੈ। ਸਪੱਸ਼ਟ ਤੌਰ 'ਤੇ ਰੇਖਾ L, x-ਧੁਰੇ ਨੂੰ ਬਿੰਦੂ $(a, 0)$ ਅਤੇ y-ਧੁਰੇ ਨੂੰ ਬਿੰਦੂ $(0, b)$ ਤੇ ਕੱਟਦੀ ਹੈ (ਚਿੱਤਰ 10.16)।



ਚਿੱਤਰ 10.16

ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਦੇ ਦੋ-ਬਿੰਦੂ ਰੂਪ ਤੋਂ, ਸਾਡੇ ਕੋਲ

$$y - 0 = \frac{b - 0}{0 - a}(x - a) \quad \text{ਜਾਂ} \quad ay = -bx + ab,$$

ਅਰਥਾਤ, $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ x - ਧੁਰੇ ਅਤੇ y - ਧੁਰੇ 'ਤੇ ਕ੍ਰਮਵਾਰ a ਅਤੇ b ਅੰਤਰਖੰਡ ਬਣਾਉਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ—

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \qquad ...(5)$$

ਉਦਾਹਰਣ 10: ਉਸ ਰੇਖਾ ਦਾ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੋ x–ਧੁਰੇ ਅਤੇ y-ਧੁਰੇ 'ਤੇ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਅੰਤਰਖੰਡ –3 ਅਤੇ 2 ਬਣਾਉਂਦੀ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਇਥੇ $a = -3$ ਅਤੇ $b = 2$ ਹੈ। ਉਪਰੋਕਤ ਅੰਤਰਖੰਡ ਰੂਪ (5) ਤੋਂ, ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ

$$\frac{x}{-3}+\frac{y}{2}=1 \quad \text{ਜਾਂ} \quad 2x-3y+6=0.$$

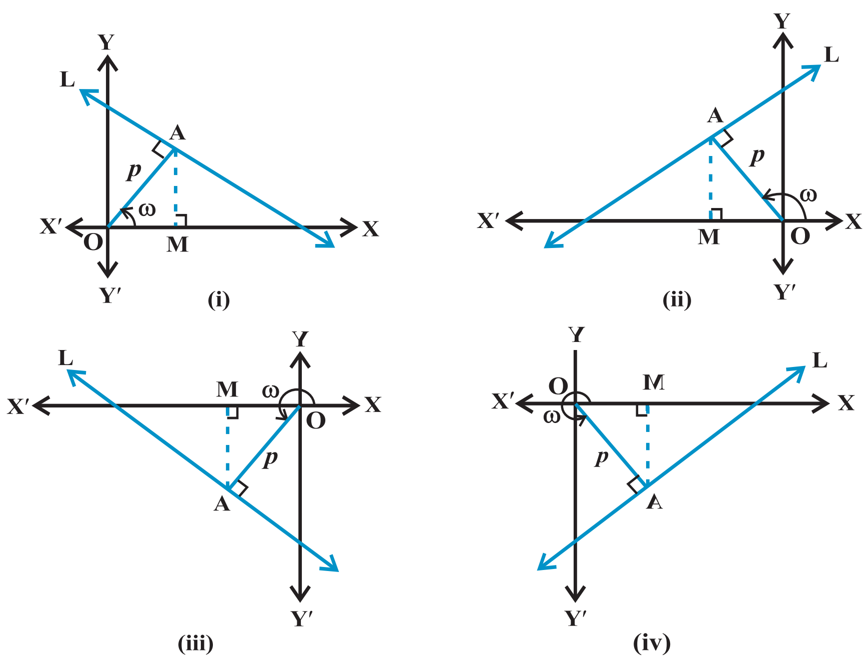
10.3.6 *ਲੰਬ ਰੂਪ (Normal form)* ਮੰਨ ਲਉ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਅੰਕੜਿਆਂ ਸਹਿਤ ਸਾਨੂੰ ਇੱਕ–ਨਾ ਖੜ੍ਹਵੀਂ ਰੇਖਾ ਪਤਾ ਹੈ :

(i) ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਰੇਖਾ 'ਤੇ ਲੰਬ ਦੀ ਲੰਬਾਈ।

(ii) ਲੰਬ ਅਤੇ ਧਨਾਤਮਕ x-ਧੁਰੇ ਵਿਚਕਾਰ ਦਾ ਕੋਣ

ਮੰਨ ਲਉ ਕਿ L ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਹੈ ਜਿਸਦੀ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ O ਤੋਂ ਲੰਬਾਤਮਕ ਦੂਰੀ OA = p ਅਤੇ ਧਨਾਤਮਕ x-ਧੁਰੇ ਅਤੇ OA ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਦਾ ਕੋਣ $\angle XOA = \omega$ ਹੈ। ਕਾਰਟੀਜਨ ਤਲ ਵਿਚ ਰੇਖਾ L ਦੀ ਸੰਭਵ ਸਥਿਤੀ ਚਿੱਤਰ 10.17 ਵਿਚ ਦਿਖਾਈ ਗਈ ਹੈ।

ਹੁਣ ਸਾਡਾ ਮੰਤਵ ਰੇਖਾ L ਦੀ ਢਲਾਣ (slope) ਅਤੇ ਇਸ 'ਤੇ ਬਿੰਦੂ ਲੱਭਣਾ ਹੈ। ਹਰ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ x-ਧੁਰੇ ਤੇ ਲੰਬ AM ਖਿੱਚੋ।



ਚਿੱਤਰ 10.17

ਹਰੇਕ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ, ਸਾਡੇ ਕੋਲ OM = $p \cos \omega$ ਅਤੇ MA = $p \sin \omega$, ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਬਿੰਦੂ A ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ $(p \cos \omega, p \sin \omega)$ ਹਨ।

ਦੁਬਾਰਾ, L ਰੇਖਾ OA ਤੇ ਲੰਬ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ

$$\text{L ਰੇਖਾ ਦੀ ਢਲਾਣ} = -\frac{1}{\text{OA ਦੀ ਢਲਾਣ}} = -\frac{1}{\tan\omega} = -\frac{\cos\omega}{\sin\omega}$$

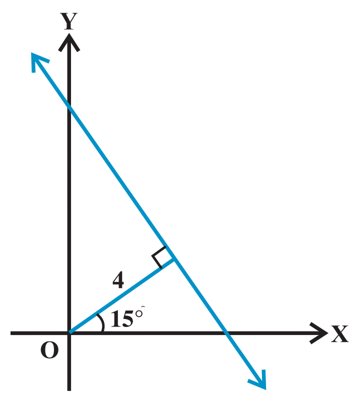
ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ L ਰੇਖਾ ਦੀ ਢਲਾਣ $-\frac{\cos\omega}{\sin\omega}$ ਅਤੇ ਇਸ ਉੱਪਰ ਬਿੰਦੂ $A(p\cos\omega, p\sin\omega)$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਢਲਾਣ ਬਿੰਦੂ ਰੂਪ ਅਨੁਸਾਰ ਰੇਖਾ L ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ $y - p\sin\omega = -\frac{\cos\omega}{\sin\omega}(x - p\cos\omega)$ ਜਾਂ $x\cos\omega + y\sin\omega = p(\sin^2\omega + \cos^2\omega)$

ਜਾਂ $x\cos\omega + y\sin\omega = p$ ਹੈ।

ਅਰਥਾਤ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਲੰਬਾਤਮਕ ਦੂਰੀ p ਅਤੇ ਧਨਾਤਮਕ x-ਧੁਰੇ ਅਤੇ ਲੰਬ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਕੋਣ ω ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਦਾ ਸਮੀਕਰਣ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੈ : $x\cos\omega + y\sin\omega = p$ ... (6)

ਉਦਾਹਰਣ 11: ਇਕ ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ, ਜਿਸਦੀ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਦੂਰੀ 4 ਇਕਾਈ ਅਤੇ ਧਨਾਤਮਕ x-ਧੁਰੇ ਅਤੇ ਲੰਬ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਦਾ ਕੋਣ 15° ਹੈ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤਾ ਹੈ $p = 4$ ਅਤੇ $\omega = 15°$ (ਚਿੱਤਰ 10.18).



ਚਿੱਤਰ 10.18

ਹੁਣ $\cos 15° = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$

ਅਤੇ $\sin 15° = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$ (ਕਿਉਂ?)

ਉਪਰੋਕਤ ਲੰਬ ਰੂਪ (6) ਤੋਂ ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ

$$x\cos 15° + y\sin 15° = 4 \text{ ਜਾਂ } \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}x + \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}y = 4 \quad \text{ਜਾਂ} \quad (\sqrt{3}+1)x + (\sqrt{3}-1)y = 8\sqrt{2}$$

ਇਹ ਲੋੜੀਂਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 12: ਫਾਰਨਹੀਟ ਤਾਪਮਾਨ F ਅਤੇ ਨਿਸਚਿਤ ਤਾਪਮਾਨ K ਇੱਕ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦੇ ਹਨ। ਦਿੱਤਾ ਹੈ ਕਿ K = 273 ਜਦੋਂ F = 32 ਅਤੇ K = 373 ਜਦੋਂ F = 212 ਹੈ। K ਨੂੰ F ਦੇ ਪਦਾਂ ਵਿੱਚ ਲਿਖੋ ਅਤੇ F ਦਾ ਮਾਨ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਦੋਂ K = 0 ਹੈ।

ਹੱਲ : F ਨੂੰ x-ਧੁਰੇ 'ਤੇ K ਨੂੰ y-ਧੁਰੇ 'ਤੇ ਲੈਣ 'ਤੇ ਸਾਡੇ ਕੋਲ xy ਤਲ ਵਿਚ ਦੋ ਬਿੰਦੂ (32, 273) ਅਤੇ (212, 373) ਹਨ। ਦੋ ਬਿੰਦੂ ਰੂਪ ਤੋਂ ਬਿੰਦੂ (F, K) ਦੁਆਰਾ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਹੋਣ ਵਾਲਾ ਸਮੀਕਰਣ

$$K - 273 = \frac{373-273}{212-32}(F-32) \quad \text{ਜਾਂ} \quad K - 273 = \frac{100}{180}(F-32)$$

ਜਾਂ $$K=\frac{5}{9}(F-32)+273 \quad ...(1)$$

ਜੋ ਕਿ ਲੋੜੀਂਦਾ ਸੰਬੰਧ ਹੈ

ਸਮੀਕਰਣ (1) ਤੋਂ, ਜਦੋ $K = 0$ ਹੈ

$$0=\frac{5}{9}(F-32)+273 \quad \text{ਜਾਂ} \quad F-32=-\frac{273\times 9}{5}=-491.4 \quad \text{ਜਾਂ } F=-459.4$$

ਬਦਲਵੀਂ ਵਿਧੀ : ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਸਰਲ ਰੂਪ $y = mx + c$ ਹੈ। ਫਿਰ ਤੋਂ F ਨੂੰ x-ਧੁਰੇ ਤੇ ਅਤੇ K ਨੂੰ y-ਧੁਰੇ ਤੇ ਲੈਣ ਨਾਲ ਅਸੀਂ ਸਮੀਕਰਣ ਨੂੰ ਇਸ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਲੈ ਸਕਦੇ ਹਾਂ : $K = mF + c$ ... (1)

ਸਮੀਕਰਣ (1) ਬਿੰਦੂਆਂ (32, 273) ਅਤੇ (212, 373) ਤੋਂ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ,

$$273 = 32m + c \quad ... (2)$$

ਅਤੇ $$373 = 212m + c \quad ... (3)$$

(2) ਅਤੇ (3) ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ’ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ

$$m=\frac{5}{9} \text{ ਅਤੇ } c=\frac{2297}{9}$$

m ਅਤੇ c ਦੇ ਮਾਨ (1) ਵਿੱਚ ਰੱਖਣ ’ਤੇ

$$K=\frac{5}{9}F+\frac{2297}{9} \quad ... (4)$$

ਜੋ ਕਿ ਲੋੜੀਂਦਾ ਸੰਬੰਧ ਹੈ। ਜਦੋਂ $K = 0$, ਤਾਂ (4) ਤੋਂ $F = -459.4$

ਟਿੱਪਣੀ ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਸਮੀਕਰਣ $y = mx + c$ ਵਿੱਚ ਦੋ ਸਥਿਰ ਅੰਕ m ਅਤੇ c ਹਨ। ਇਹਨਾਂ ਦੋ ਸਥਿਰ ਅੰਕਾਂ ਨੂੰ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਨ ਲਈ ਦੋ ਸ਼ਰਤਾਂ ਦੀ ਲੋੜ ਹੈ। ਉਪਰੋਕਤ ਸਾਰੀਆਂ ਉਦਾਹਰਣਾਂ ਵਿੱਚ, ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ ਸਾਨੂੰ ਦੋ ਸ਼ਰਤਾਂ ਦਿੱਤੀਆਂ ਗਈਆਂ ਹਨ।

ਅਭਿਆਸ 10.2

ਅਭਿਆਸ 1 ਤੋਂ 8 ਤੱਕ ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੋ ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਸ਼ਰਤਾਂ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦੀ ਹੈ—

1. x ਅਤੇ y ਧੁਰੇ ਦੀਆਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਲਿਖੋ।
2. ਢਲਾਣ $\frac{1}{2}$ ਨਾਲ ਜੋ ਬਿੰਦੂ $(-4, 3)$ ਵਿੱਚੋ ਲੰਘਦੀ ਹੈ।
3. ਢਲਾਣ m ਨਾਲ ਜੋ ਬਿੰਦੂ (0, 0) ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘਦੀ ਹੈ।
4. ਬਿੰਦੂ $\left(2, 2\sqrt{3}\right)$ ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘਣ ਵਾਲੀ ਅਤੇ x-ਧੁਰੇ ਨਾਲ 75° ਕੋਣ ਤੇ ਝੁਕੀ ਹੋਈ ਹੈ।
5. x - ਧੁਰੇ ਨੂੰ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਖੱਬੇ ਪਾਸੇ 3 ਇਕਾਈ ਦੂਰੀ ’ਤੇ ਕੱਟਣ ਵਾਲੀ ਅਤੇ ਢਲਾਣ -2 ਵਾਲੀ।
6. y - ਧੁਰੇ ਨੂੰ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ 2 ਇਕਾਈ ਉੱਪਰ ਅਤੇ ਧਨਾਤਮਕ x-ਧੁਰੇ ਨਾਲ 30° ਦਾ ਕੋਣ ਬਣਾਉਂਦੀ ਹੋਵੇ।
7. ਬਿੰਦੂਆਂ $(-1, 1)$ ਅਤੇ $(2, -4)$ ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘਦੀ ਹੋਵੇ।
8. ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਲੰਬਾਤਮਕ ਦੂਰੀ 5 ਇਕਾਈ ਅਤੇ ਲੰਬ ਦੁਆਰਾ ਧਨਾਤਮਕ x-ਧੁਰੇ ਨਾਲ 30° ਦਾ ਕੋਣ ਬਣਦਾ ਹੋਵੇ।

9. Δ PQR ਦੇ ਸਿਖ਼ਰ P (2, 1), Q (–2, 3) ਅਤੇ R (4, 5) ਹਨ। ਸਿਖ਼ਰ R ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘਦੀ ਮੱਧਿਕਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ।
10. ਉਸ ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੋ ਬਿੰਦੂ (–3, 5) ਵਿਚੋਂ ਲੰਘ ਰਹੀ ਹੈ ਅਤੇ ਬਿੰਦੂਆਂ (2, 5) ਅਤੇ (–3, 6) ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਤੇ ਲੰਬ ਹੈ।
11. ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਬਿੰਦੂਆਂ (1, 0) ਅਤੇ (2, 3) ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ 'ਤੇ ਬਣੇ ਰੇਖਾ ਖੰਡ ਤੇ ਲੰਬ ਅਤੇ ਇਸ ਨੂੰ 1: n ਵਿੱਚ ਵੰਡਦੀ ਹੈ। ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ।
12. ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੋ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਧੁਰਿਆਂ ਨੂੰ ਬਰਾਬਰ ਅੰਤਰਖੰਡ 'ਤੇ ਕੱਟਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਬਿੰਦੂ (2, 3) ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘਦੀ ਹੈ।
13. ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੋ ਬਿੰਦੂ (2, 2) ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘ ਰਹੀ ਹੈ ਅਤੇ ਧੁਰਿਆਂ 'ਤੇ ਅੰਤਰਖੰਡ ਕੱਟ ਰਹੀ ਹੈ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਦਾ ਜੋੜ 9 ਹੈ।
14. ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੋ ਬਿੰਦੂ (0, 2) ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਧਨਾਤਮਕ x-ਧੁਰੇ ਨਾਲ $\frac{2\pi}{3}$ ਕੋਣ ਬਣਾਉਂਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਅਤੇ y-ਧੁਰੇ ਨੂੰ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਹੇਠਾਂ ਵੱਲ 2 ਇਕਾਈ ਦੂਰੀ ਤੇ ਕੱਟਦੀ ਹੋਵੇ ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਵੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।
15. ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਤੇ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਲੰਬ ਇਸ ਨੂੰ ਬਿੰਦੂ (–2, 9) ਤੇ ਮਿਲਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ।
16. ਤਾਂਬੇ ਦੀ ਛੜ ਦੀ ਲੰਬਾਈ L (ਸੈਂਟੀਮੀਟਰ ਵਿੱਚ) ਸੇਲਸੀਅਸ ਤਾਪ C ਦਾ ਰੇਖਿਕ ਫਲਨ ਹੈ। ਇਸ ਪ੍ਰਯੋਗ ਵਿੱਚ, ਜੇਕਰ L = 124.942 ਤਾਂ C = 20 ਅਤੇ L = 125.134 ਤਾਂ C = 110 ਹੈ। L ਨੂੰ C ਦੇ ਪਦਾਂ ਵਿੱਚ ਲਿਖੋ।
17. ਇੱਕ ਦੁੱਧ ਭੰਡਾਰ ਦਾ ਮਾਲਿਕ ਹਰ ਹਫ਼ਤੇ 980 ਲਿਟਰ ਦੁੱਧ 14 ਰੁਪਏ ਪ੍ਰਤੀ ਲਿਟਰ ਅਤੇ 1220 ਲਿਟਰ ਦੁੱਧ 16 ਰੁਪਏ ਪ੍ਰਤੀ ਲਿਟਰ ਵੇਚ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਵੇਚਮੁੱਲ ਅਤੇ ਮੰਗ ਵਿੱਚ ਰੇਖਿਕ ਸੰਬੰਧ ਮੰਨਦੇ ਹੋਏ ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ ਉਹ ਹਰ ਹਫਤੇ 17 ਰੁਪਏ ਪ੍ਰਤੀ ਲਿਟਰ ਨਾਲ ਕਿੰਨਾ ਦੁੱਧ ਵੇਚ ਸਕਦਾ ਹੈ।
18. P (a, b) ਧੁਰਿਆਂ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਖੰਡ ਦਾ ਮੱਧ-ਬਿੰਦੂ ਹੈ। ਦਿਖਾਓ ਕਿ ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=2$ ਹੈ।
19. ਬਿੰਦੂ R(h, k) ਧੁਰਿਆਂ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਖੰਡ ਨੂੰ 1: 2 ਵਿੱਚ ਵੰਡਦਾ ਹੈ। ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ।
20. ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਦੀ ਧਾਰਨਾ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਤਿੰਨ ਬਿੰਦੂ (3, 0), (– 2, – 2) ਅਤੇ (8, 2) ਸਮਰੇਖੀ ਹਨ।

10.4 ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਧਾਰਣ ਜਾਂ ਵਿਆਪਕ ਸਮੀਕਰਣ (General Equation of a Line)

ਪਿਛਲੀਆਂ ਸ਼੍ਰੇਣੀਆਂ ਵਿੱਚ, ਅਸੀਂ ਦੋ ਚਲਾਂ ਵਾਲੀ ਇਕ ਘਾਤੀ ਵਿਆਪਕ ਜਾਂ ਆਮ ਸਮੀਕਰਣ, $Ax + By + C = 0$ ਬਾਰੇ ਅਧਿਐਨ ਕਰ ਚੁੱਕੇ ਹਾਂ ਜਿੱਥੇ A, B ਅਤੇ C ਵਾਸਤਵਿਕ ਅਚਲ ਹਨ ਅਤੇ A ਅਤੇ B ਇਕੱਠੇ ਸਿਫ਼ਰ ਨਹੀਂ ਹਨ। ਸਮੀਕਰਣ $Ax + By + C = 0$ ਦਾ ਆਲੇਖ ਹਮੇਸ਼ਾਂ ਸਰਲ ਰੇਖਾ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਕੋਈ ਵੀ ਸਮੀਕਰਣ ਜੋ $Ax + By + C = 0$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਹੈ, ਜਿੱਥੇ A ਅਤੇ B ਇਕੱਠੇ ਸਿਫ਼ਰ ਨਹੀਂ ਹਨ, ਵਿਆਪਕ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣ ਜਾਂ ਰੇਖਾ ਦੀ ਆਮ ਸਮੀਕਰਣ ਅਖਵਾਉਂਦੀ ਹੈ।

10.4.1 $Ax + By + C = 0$ ਦੇ ਵੱਖ ਵੱਖ ਰੂਪ *(Different forms of $Ax + By + C = 0$)* ਰੇਖਾ ਦੀ ਵਿਆਪਕ ਸਮੀਕਰਣ ਨੂੰ ਹੇਠ ਲਿਖੀ ਪ੍ਰਕ੍ਰਿਆ ਰਾਹੀਂ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਰੂਪਾਂ ਵਿੱਚ ਰੂਪਾਂਤਰਣ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

(a) ਢਲਾਣ ਅੰਤਰਖੰਡ ਰੂਪ (Slope-intercept form) ਜੇਕਰ $B \neq 0$ ਤਾਂ $Ax + By + C = 0$ ਨੂੰ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

$$y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B} \text{ ਜਾਂ } y=mx+c \quad \dots (1)$$

ਜਿੱਥੇ $$m=-\frac{A}{B} \text{ ਅਤੇ } c=-\frac{C}{B}$$

ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ (1) ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਢਲਾਣ ਅੰਤਰ ਖੰਡ ਰੂਪ ਹੈ, ਜਿਸ ਦੀ ਢਲਾਣ $-\frac{A}{B}$ ਅਤੇ y - ਅੰਤਰਖੰਡ $-\frac{C}{B}$ ਹੈ।

ਜੇਕਰ $B = 0$, ਤਾਂ $x=-\frac{C}{A}$ ਜੋ ਕਿ ਖੜ੍ਹਵੀਂ (vertical) ਰੇਖਾ ਹੈ ਜਿਸ ਦੀ ਢਲਾਣ ਅਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੈ ਅਤੇ x - ਅੰਤਰਖੰਡ $-\frac{C}{A}$ ਹੈ।

(b) ਅੰਤਰਖੰਡ ਰੂਪ (Intercept form) ਜੇਕਰ C ≠ 0, ਤਾਂ Ax + By + C = 0 ਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ

$$\frac{x}{-\frac{C}{A}}+\frac{y}{-\frac{C}{B}}=1 \quad \text{or} \quad \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \qquad \ldots (2)$$

ਜਿੱਥੇ $a=-\frac{C}{A}$ ਅਤੇ $b=-\frac{C}{B}$

ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ (2) ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਦਾ ਅੰਤਰਖੰਡ ਰੂਪ ਹੈ ਜਿਸਦਾ x - ਅੰਤਰਖੰਡ $-\frac{C}{A}$ ਅਤੇ y - ਅੰਤਰਖੰਡ $-\frac{C}{B}$ ਹੈ।

ਜੇਕਰ C = 0, ਤਾਂ Ax + By + C = 0 ਨੂੰ Ax + By = 0, ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ, ਜੋ ਕਿ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘਦੀ ਰੇਖਾ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਇਸਦੇ ਧੁਰਿਆਂ ਤੇ ਸਿਫ਼ਰ ਅੰਤਰਖੰਡ ਹਨ।

(c) ਲੰਬ ਰੂਪ (Normal form) ਮੰਨ ਲਉ $x\cos\omega + y\sin\omega = p$ ਰੇਖਾ ਜਿਸ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ Ax + By + C = 0 ਜਾਂ Ax + By = – C ਦਾ ਲੰਬ ਰੂਪ ਹੈ। ਅਰਥਾਤ ਦੋਨੋਂ ਸਮੀਕਰਣ ਸਮਾਨ ਹਨ ਇਸ ਲਈ, $\frac{A}{\cos\omega}=\frac{B}{\sin\omega}=-\frac{C}{p}$

ਜਿਸ ਤੋਂ $\cos\omega=-\frac{Ap}{C}$ ਅਤੇ $\sin\omega=-\frac{Bp}{C}$

ਹੁਣ $$\sin^2\omega+\cos^2\omega=\left(-\frac{Ap}{C}\right)^2+\left(-\frac{Bp}{C}\right)^2=1$$

ਜਾਂ $$p^2=\frac{C^2}{A^2+B^2} \quad \text{ਜਾਂ} \quad p=\pm\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

ਇਸ ਲਈ $$\cos\omega=\pm\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} \text{ ਅਤੇ } \sin\omega=\pm\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਸਮੀਕਰਣ Ax + By + C = 0 ਦਾ ਲੰਬ ਰੂਪ $x\cos\omega + y\sin\omega = p$ ਹੈ।

ਜਿੱਥੇ $\cos\omega=\pm\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}$, $\sin\omega=\pm\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$ ਅਤੇ $p=\pm\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}$

ਚਿੰਨ੍ਹ ਦੀ ਉਚਿਤ ਵਰਤੋਂ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕੀਤੀ ਜਾਂਦੀ ਹੈ ਕਿ p ਧਨਾਤਮਕ ਰਹੇ।

ਉਦਾਹਰਣ 13 : ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ $3x - 4y + 10 = 0$ ਹੈ। ਇਸ ਦੀ (i) ਢਲਾਣ (ii) x ਅਤੇ y-ਅੰਤਰਖੰਡ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : (i) ਦਿੱਤੀ ਸਮੀਕਰਣ $3x - 4y + 10 = 0$ ਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ

$$y=\frac{3}{4}x+\frac{5}{2} \qquad \ldots (1)$$

(1) ਦੀ ਤੁਲਨਾ $y = mx + c$ ਨਾਲ ਕਰਨ 'ਤੇ, ਸਾਡੇ ਕੋਲ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਸਮੀਕਰਣ ਦੀ ਢਲਾਣ $m=\frac{3}{4}$ ਹੈ।

(ii) ਸਮੀਕਰਣ $3x - 4y + 10 = 0$ ਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ

$$3x-4y=-10 \quad \text{ਜਾਂ} \quad \frac{x}{-\frac{10}{3}}+\frac{y}{\frac{5}{2}}=1 \qquad \ldots (2)$$

(2) ਦੀ ਤੁਲਨਾ $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ ਨਾਲ ਕਰਨ ਤੇ, ਸਾਡੇ ਕੋਲ x-ਅੰਤਰਖੰਡ $a = -\frac{10}{3}$ ਅਤੇ y-ਅੰਤਰਖੰਡ $b = \frac{5}{2}$ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 14 : ਸਮੀਕਰਣ $\sqrt{3}x + y - 8 = 0$ ਨੂੰ ਲੰਬ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਬਦਲੋ। p ਅਤੇ ω ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ

$$\sqrt{3}x + y - 8 = 0 \qquad \text{... (1)}$$

(1) ਨੂੰ $\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + (1)^2} = 2$ ਨਾਲ ਭਾਗ ਕਰਨ 'ਤੇ

$$\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y = 4 \text{ ਜਾਂ } \cos 30^\circ x + \sin 30^\circ\, y = 4 \qquad \text{... (2)}$$

(2) ਦੀ ਤੁਲਨਾ $x\cos\omega + y\sin\omega = p$ ਨਾਲ ਕਰਨ 'ਤੇ, $p = 4$ ਅਤੇ $\omega = 30^\circ$ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 15 : ਰੇਖਾਵਾਂ $y - \sqrt{3}x - 5 = 0$ ਅਤੇ $\sqrt{3}y - x + 6 = 0$ ਵਿਚਕਾਰ ਕੋਣ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤੀਆਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਹਨ—

$$y - \sqrt{3}x - 5 = 0 \text{ ਜਾਂ } y = \sqrt{3}x + 5 \qquad \text{... (1)}$$

ਅਤੇ

$$\sqrt{3}y - x + 6 = 0 \text{ ਜਾਂ } y = \frac{1}{\sqrt{3}}x - 2\sqrt{3} \qquad \text{... (2)}$$

ਰੇਖਾ (1) ਦੀ ਢਲਾਣ $m_1 = \sqrt{3}$ ਅਤੇ ਰੇਖਾ (2) ਦੀ ਢਲਾਣ $m_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ਹੈ

ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਨਿਊਣ ਕੋਣ θ (ਮੰਨ ਲਉ) ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੈ

$$\tan\theta = \left|\frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}\right| \qquad \text{... (3)}$$

m_1 ਅਤੇ m_2 ਦੇ ਮੁੱਲ (3) ਵਿਚ ਰੱਖਣ 'ਤੇ, ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ

$$\tan\theta = \left|\frac{\frac{1}{\sqrt{3}} - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}\times\frac{1}{\sqrt{3}}}\right| = \left|\frac{1-3}{2\sqrt{3}}\right| = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

ਜਿਸ ਤੋਂ $\theta = 30^\circ$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦਾ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ ਵਿਚਕਾਰ ਕੋਣ ਜਾਂ 30° ਜਾਂ $180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 16 : ਦਿਖਾਉ ਕਿ ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ ਅਤੇ $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ ਜਿੱਥੇ $b_1, b_2 \neq 0$

(i) ਸਮਾਂਤਰ ਹਨ ਜੇਕਰ $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$, ਅਤੇ (ii) ਇੱਕ-ਦੂਜੇ 'ਤੇ ਲੰਬ ਹਨ ਜੇਕਰ $a_1a_2 + b_1b_2 = 0$

ਹੱਲ : ਦਿੱਤੀਆਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ

$$y = -\frac{a_1}{b_1}x - \frac{c_1}{b_1} \qquad \text{... (1)}$$

ਅਤੇ

$$y = -\frac{a_2}{b_2}x - \frac{c_2}{b_2} \qquad \text{... (2)}$$

ਰੇਖਾਵਾਂ (1) ਅਤੇ (2) ਦੀ ਢਲਾਣਾਂ ਕ੍ਰਮਵਾਰ $m_1 = -\frac{a_1}{b_1}$ ਅਤੇ $m_2 = -\frac{a_2}{b_2}$ ਹਨ, ਹੁਣ

(i) ਰੇਖਾਵਾਂ ਸਮਾਂਤਰ ਹਨ, ਜੇਕਰ $m_1 = m_2$, ਜਿਸ ਤੋਂ

$$-\frac{a_1}{b_1} = -\frac{a_2}{b_2} \text{ ਜਾਂ } \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}.$$

(ii) ਰੇਖਾਵਾਂ ਲੰਬ ਹਨ, ਜੇਕਰ $m_1.m_2 = -1$, ਜਿਸ ਤੋਂ

$$\frac{a_1}{b_1}.\frac{a_2}{b_2} = -1 \text{ ਜਾਂ } a_1a_2 + b_1b_2 = 0$$

ਉਦਾਹਰਣ 17 : ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੋ ਰੇਖਾ $x - 2y + 3 = 0$ ਤੇ ਲੰਬ ਹੈ ਅਤੇ ਬਿੰਦੂ (1, – 2) ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘ ਰਹੀ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਰੇਖਾ $x - 2y + 3 = 0$ ਨੂੰ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਲਿਖਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \quad \text{...(1)}$$

ਰੇਖਾ (1) ਦੀ ਢਲਾਣ $m_1 = \frac{1}{2}$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਰੇਖਾ (1) 'ਤੇ ਲੰਬ ਰੇਖਾ ਦੀ ਢਲਾਣ

$$m_2 = -\frac{1}{m_1} = -2$$

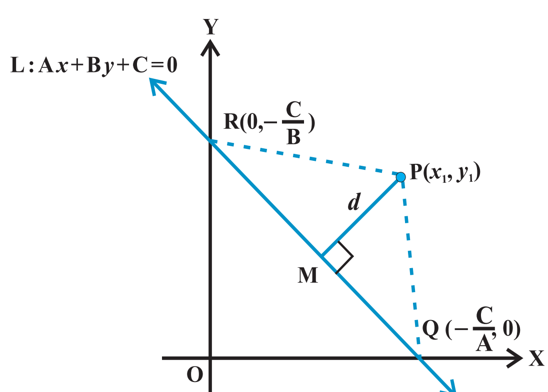
ਢਲਾਣ – 2 ਅਤੇ ਬਿੰਦੂ (1, – 2) ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘ ਰਹੀ ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ

$$y - (-2) = -2(x - 1) \quad \text{ਜਾਂ} \quad y = -2x,$$

ਜੋ ਕਿ ਲੋੜੀਂਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ।

10.5 ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਦੀ ਰੇਖਾ ਤੋਂ ਦੂਰੀ (Distance of a Point From a Line)

ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਦੀ ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਤੋਂ ਦੂਰੀ, ਉਸ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਰੇਖਾ ਤੇ ਖਿੱਚੇ ਗਏ ਲੰਬ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਹੈ। ਮੰਨ ਲਉ $L : Ax + By + C = 0$ ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਹੈ, ਜਿਸ ਦੀ ਬਿੰਦੂ P (x_1, y_1) ਤੋਂ ਦੂਰੀ d ਹੈ। ਰੇਖਾ L ਤੇ ਬਿੰਦੂ P ਤੋਂ PM ਲੰਬ ਖਿੱਚੋ (ਚਿੱਤਰ 10.19) । ਜੇਕਰ ਰੇਖਾ x-ਅਤੇ y-ਧੁਰੇ ਨੂੰ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਬਿੰਦੂ Q ਅਤੇ R 'ਤੇ ਮਿਲਦੀ ਹੈ; ਤਾਂ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ $Q\left(-\frac{C}{A}, 0\right)$ ਅਤੇ $R\left(0, -\frac{C}{B}\right)$ ਹਨ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਤ੍ਰਿਭੁਜ PQR ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਹੈ



ਚਿੱਤਰ 10.19

ਖੇਤਰਫਲ $(\Delta PQR) = \frac{1}{2} PM.QR$, ਜਿਸ ਤੋਂ $PM = \frac{2 \text{ ਖੇਤਰਫਲ } (\Delta PQR)}{QR}$ ... (1)

ਫਿਰ ਤੋਂ ਖੇਤਰਫਲ $(\Delta PQR) = \frac{1}{2}\left| x_1\left(0+\frac{C}{B}\right) + \left(-\frac{C}{A}\right)\left(-\frac{C}{B} - y_1\right) + 0(y_1 - 0)\right| = \frac{1}{2}\left| x_1\frac{C}{B} + y_1\frac{C}{A} + \frac{C^2}{AB}\right|$

ਜਾਂ 2 ਖੇਤਰਫਲ $(\Delta PQR) = \left|\frac{C}{AB}\right| . \left|Ax_1 + By_1 + C\right|$, ਅਤੇ $QR = \sqrt{\left(0+\frac{C}{A}\right)^2 + \left(\frac{C}{B} - 0\right)^2} = \left|\frac{C}{AB}\right| \sqrt{A^2+B^2}$

ਖੇਤਰਫਲ (ΔPQR) ਅਤੇ QR ਦੇ ਮੁੱਲ (1) ਵਿੱਚ ਰੱਖਣ ’ਤੇ, ਸਾਡੇ ਕੋਲ

$$PM = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2+B^2}} \quad \text{ਜਾਂ} \quad d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

ਅਰਥਾਤ ਬਿੰਦੂ (x_1, y_1) ਤੋਂ ਰੇਖਾ ਦੀ ਲੰਬਾਤਮਕ ਦੂਰੀ (d) ਹੈ

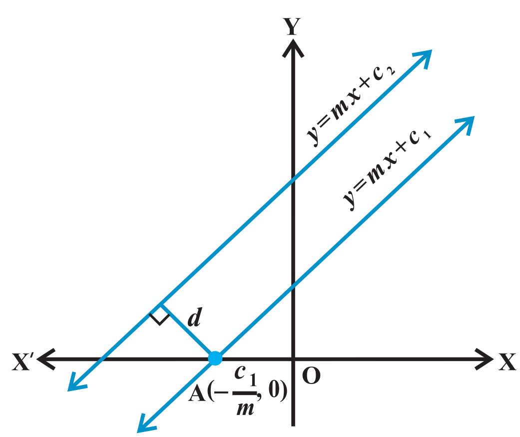
$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

10.5.1 ***ਦੋ ਸਮਾਂਤਰ ਰੇਖਾਵਾਂ ਵਿਚਕਾਰ ਦੂਰੀ (Distance between two parallel lines)*** ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਦੋ ਸਮਾਂਤਰ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੀਆਂ ਢਲਾਣਾਂ (Slopes) ਬਰਾਬਰ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਦੋ ਸਮਾਂਤਰ ਰੇਖਾਵਾਂ ਨੂੰ ਹੇਠ ਲਿਖੇ ਰੂਪ ਵਿਚ ਲਿਆ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ—

$y = mx + c_1$ ... (1)

ਅਤੇ $y = mx + c_2$ ... (2)

ਚਿੱਤਰ 10.20 ਵਿਚ ਦਿਖਾਏ ਅਨੁਸਾਰ, ਰੇਖਾ (1) x-ਧੁਰੇ ਨੂੰ ਬਿੰਦੂ A $\left(-\frac{c_1}{m}, 0\right)$ ’ਤੇ ਕੱਟੇਗੀ।



ਚਿੱਤਰ 10.20

ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੀ ਦੂਰੀ, ਬਿੰਦੂ A ਤੋਂ ਰੇਖਾ (2) ਤੇ ਲੰਬਾਤਮਕ ਦੂਰੀ ਦੇ ਸਮਾਨ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਰੇਖਾ (1) ਅਤੇ (2) ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਦੂਰੀ ਹੈ :

$$\frac{\left|(-m)\left(-\frac{c_1}{m}\right) + (-c_2)\right|}{\sqrt{1+m^2}} \quad \text{ਜਾਂ} \quad d = \frac{|c_1 - c_2|}{\sqrt{1+m^2}}.$$

ਅਰਥਾਤ ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ $y = mx + c_1$ ਅਤੇ $y = mx + c_2$ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਦੀ ਦੂਰੀ $d = \frac{|c_1 - c_2|}{\sqrt{1+m^2}}$ ਹੈ।

ਜੇਕਰ ਰੇਖਾਵਾਂ ਆਮ (ਸਧਾਰਨ) (General Form) ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਦਿੱਤੀਆਂ ਹੋਣ ਜੋ ਕਿ $Ax + By + C_1 = 0$ ਅਤੇ $Ax + By + C_2 = 0$, ਤਾਂ ਉਪਰੋਕਤ ਸੂਤਰ ਦਾ ਰੂਪ ਬਣ ਜਾਵੇਗਾ $d = \frac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

ਵਿਦਿਆਰਥੀ ਇਸ ਨੂੰ ਆਪਣੇ ਆਪ ਸਥਾਪਿਤ ਕਰ ਸਕਦੇ ਹਨ।

ਉਦਾਹਰਣ 18 : ਬਿੰਦੂ (3, – 5) ਦੀ ਰੇਖਾ $3x - 4y - 26 = 0$ ਤੋਂ ਦੂਰੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਰੇਖਾ $3x - 4y - 26 = 0$ ਹੈ। ... (1)

(1) ਦੀ ਤੁਲਨਾ ਰੇਖਾ ਦੀ ਆਮ ਸਮੀਕਰਣ $Ax + By + C = 0$ ਨਾਲ ਕਰਨ ’ਤੇ

$$A = 3, B = -4 \text{ ਅਤੇ } C = -26.$$

ਦਿੱਤਾ ਬਿੰਦੂ $(x_1, y_1) = (3, -5)$ ਹੈ। ਦਿੱਤੇ ਹੋਏ ਬਿੰਦੂ ਦੀ ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਰੇਖਾ ਤੋਂ ਦੂਰੀ ਹੈ

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|3.3 + (-4)(-5) - 26|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{3}{5}$$

ਉਦਾਹਰਣ 19 : ਸਮਾਂਤਰ ਰੇਖਾਵਾਂ $3x - 4y + 7 = 0$ ਅਤੇ $3x - 4y + 5 = 0$ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਦੂਰੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਇੱਥੇ $A = 3, B = -4, C_1 = 7$ ਅਤੇ $C_2 = 5$ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਲੋੜੀਂਦੀ ਦੂਰੀ $d = \frac{|7-5|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{2}{5}$ ਹੈ ।

ਅਭਿਆਸ 10.3

1. ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਨੂੰ ਢਲਾਣ-ਅੰਤਰਖੰਡ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਬਦਲੋ ਅਤੇ ਇਹਨਾਂ ਦੀ ਢਲਾਣ ਅਤੇ y - ਅੰਤਰਖੰਡ ਪਤਾ ਕਰੋ।
   (i) $x + 7y = 0$ (ii) $6x + 3y - 5 = 0$ (iii) $y = 0$
2. ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਨੂੰ ਅੰਤਰਖੰਡ ਰੂਪ ਵਿਚ ਬਦਲੋ ਅਤੇ ਇਹਨਾਂ ਦੇ ਧੁਰਿਆਂ ਤੇ ਅੰਤਰਖੰਡ ਪਤਾ ਕਰੋ।
   (i) $3x + 2y - 12 = 0$ (ii) $4x - 3y = 6$, (iii) $3y + 2 = 0$
3. ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਨੂੰ ਲੰਬ ਰੂਪ ਵਿੱਚ ਬਦਲੋ। ਇਹਨਾਂ ਦੀ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਦੂਰੀ ਅਤੇ ਇਸ ਤੇ ਲੰਬ ਅਤੇ ਧਨਾਤਮਕ x-ਧੁਰੇ ਵਿਚਕਾਰ ਕੋਣ ਪਤਾ ਕਰੋ।
   (i) $x - \sqrt{3}y + 8 = 0$ (ii) $y - 2 = 0$ (iii) $x - y = 4$
4. ਬਿੰਦੂ (–1, 1) ਦੀ ਰੇਖਾ $12(x + 6) = 5(y - 2)$ ਤੋਂ ਦੂਰੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।
5. x-ਧੁਰੇ ਤੇ ਉਹ ਬਿੰਦੂ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਦੀ ਰੇਖਾ $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$ ਤੋਂ ਦੂਰੀ 4 ਇਕਾਈ ਹੈ।
6. ਸਮਾਂਤਰ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਦੂਰੀ ਪਤਾ ਕਰੋ—
   (i) $15x + 8y - 34 = 0$ ਅਤੇ $15x + 8y + 31 = 0$ (ii) $l(x + y) + p = 0$ ਅਤੇ $l(x + y) - r = 0$
7. ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੋ ਰੇਖਾ $3x - 4y + 2 = 0$ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਹੈ ਅਤੇ ਬਿੰਦੂ (–2, 3) ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘ ਰਹੀ ਹੈ।
8. ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੋ ਰੇਖਾ $x - 7y + 5 = 0$ ਤੇ ਲੰਬ ਹੈ ਅਤੇ ਬਿੰਦੂ (– 2, 3) ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘ ਰਹੀ ਹੈ।

9. ਰੇਖਾਵਾਂ $\sqrt{3}x + y = 1$ ਅਤੇ $x + \sqrt{3}y = 1$ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਕੋਣ ਪਤਾ ਕਰੋ।

10. ਬਿੰਦੂਆਂ $(h, 3)$ ਅਤੇ $(4, 1)$ ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ, ਰੇਖਾ $7x - 9y - 19 = 0$ ਨੂੰ ਸਮਕੋਣ ਕੋਣ ਤੇ ਕੱਟਦੀ ਹੈ। h ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

11. ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ ਬਿੰਦੂ (x_1, y_1) ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘਣ ਵਾਲੀ ਅਤੇ $Ax + By + C = 0$ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਰੇਖਾ

$A (x - x_1) + B (y - y_1) = 0$ ਹੈ।

12. ਬਿੰਦੂ $(2, 3)$ ਵਿਚੋਂ ਲੰਘ ਰਹੀਆਂ ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ ਇਕ ਦੂਜੇ ਨੂੰ 60° ਤੇ ਕੱਟਦੀਆਂ ਹਨ। ਜੇਕਰ ਇਕ ਰੇਖਾ ਦੀ ਢਲਾਣ 2, ਹੈ, ਤਾਂ ਦੂਜੀ ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ।

13. ਬਿੰਦੂਆਂ $(3, 4)$ ਅਤੇ $(-1, 2)$ ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੇ ਰੇਖਾ ਖੰਡ ਦੇ ਲੰਬ ਸਮਦੁਭਾਜਕ (right bisector) ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ।

14. ਬਿੰਦੂ $(-1, 3)$ ਤੋਂ ਰੇਖਾ $3x - 4y - 16 = 0$ ਤੋਂ ਸੁੱਟੇ ਗਏ ਲੰਬ ਦੇ ਅਧਾਰ ਬਿੰਦੂ (Foot of perpendicular) ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਪਤਾ ਕਰੋ।

15. ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਦੇ ਰੇਖਾ $y = mx + c$ ਤੇ ਲੰਬ ਇਸ ਨੂੰ ਬਿੰਦੂ $(-1, 2)$ ਤੇ ਮਿਲਦਾ ਹੈ। m ਅਤੇ c ਦੇ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

16. ਜੇਕਰ p ਅਤੇ q ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਰੇਖਾਵਾਂ $x\cos\theta - y\sin\theta = k\cos 2\theta$ ਅਤੇ $x \sec\theta + y \operatorname{cosec}\theta = k$, ਤੇ ਲੰਬ ਦੀਆਂ ਲੰਬਾਈਆਂ ਹਨ, ਤਾਂ ਸਿੱਧ ਕਰੋ ਕਿ $p^2 + 4q^2 = k^2$.

17. ΔABC ਦੇ ਸਿਖਰ $A (2, 3)$, $B (4, -1)$ ਅਤੇ $C (1, 2)$ ਹਨ, ਸਿਖ਼ਰ A ਤੋਂ ਸਾਹਮਣੇ ਵਾਲੀ ਭੁਜਾ ਤੇ ਸੁੱਟੇ ਲੰਬ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਅਤੇ ਲੰਬਾਈ ਪਤਾ ਕਰੋ।

18. ਜੇਕਰ p ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਉਸ ਰੇਖਾ ਦੇ ਸੁੱਟੇ ਗਏ ਲੰਬ ਦੀ ਲੰਬਾਈ ਹੋਵੇ, ਜਿਸਦੇ ਧੁਰਿਆ ਤੇ ਅੰਤਰਖੰਡ a ਅਤੇ b, ਤਾਂ ਦਿਖਾਉ ਕਿ $\dfrac{1}{p^2} = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{b^2}$.

ਫੁਟਕਲ ਉਦਾਹਰਣਾਂ

ਉਦਾਹਰਣ 20 : ਜੇਕਰ ਰੇਖਾਵਾਂ $2x + y - 3 = 0$, $5x + ky - 3 = 0$ ਅਤੇ $3x - y - 2 = 0$ ਸੰਗਾਮੀ (Concurrent) ਹਨ ਤਾਂ k ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਤਿੰਨ ਰੇਖਾਵਾਂ ਨੂੰ ਸੰਗਾਮੀ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਜੇਕਰ ਉਹ ਇੱਕ ਸਾਂਝੇ ਬਿੰਦੂ ਵਿਚੋਂ ਹੋ ਕੇ ਲੰਘਣ ਅਰਥਾਤ ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦਾ ਕਾਟ ਬਿੰਦੂ ਤੀਜੀ ਰੇਖਾ 'ਤੇ ਹੋਵੇ। ਇੱਥੇ ਦਿੱਤੀਆਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਹਨ :

$$2x + y - 3 = 0 \quad \ldots (1)$$

$$5x + ky - 3 = 0 \quad \ldots (2)$$

$$3x - y - 2 = 0 \quad \ldots (3)$$

(1) ਅਤੇ (3) ਨੂੰ ਤਿਰਛੀ ਗੁਣਾ ਵਿਧੀ ਰਾਹੀਂ ਹੱਲ ਕਰਨ 'ਤੇ ਸਾਡੇ ਕੋਲ

$$\frac{x}{-2-3} = \frac{y}{-9+4} = \frac{1}{-2-3} \quad \text{ਜਾਂ} \quad x = 1, \quad y = 1$$

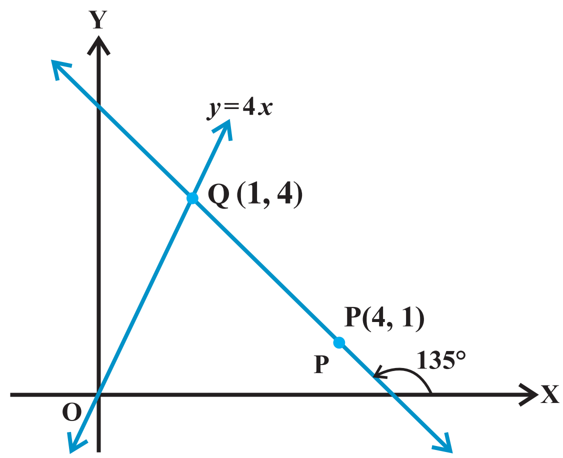
ਇਸ ਲਈ ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦਾ ਕਾਟ ਬਿੰਦੂ $(1, 1)$ ਹੈ। ਕਿਉਂਕਿ ਉਪਰੋਕਤ ਤਿੰਨ ਰੇਖਾਵਾਂ ਸੰਗਾਮੀ ਹਨ, ਇਸ ਲਈ ਬਿੰਦੂ $(1,1)$ ਸਮੀਕਰਣ (2) ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰੇਗਾ ਇਸ ਲਈ

$$5.1 + k.1 - 3 = 0 \text{ ਜਾਂ } k = -2$$

ਉਦਾਹਰਣ 21 : ਬਿੰਦੂ (4, 1) ਤੋਂ ਰੇਖਾ $4x - y = 0$ ਦੀ ਦੂਰੀ ਉਸ ਰੇਖਾ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੋ ਧਨਾਤਮਕ x-ਧੁਰੇ ਨਾਲ 135° ਦਾ ਕੋਣ ਬਣਾਉਂਦੀ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਰੇਖਾ $4x - y = 0$ ਹੈ ... (1)

ਦਿੱਤੀ ਹੋਈ ਰੇਖਾ (1) ਦੀ ਬਿੰਦੂ P (4, 1) ਤੋਂ ਕਿਸੇ ਹੋਰ ਰੇਖਾ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਦੂਰੀ ਪਤਾ ਕਰਨ ਲਈ, ਸਾਨੂੰ ਦੋਨਾਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦਾ ਕਾਟ ਬਿੰਦੂ ਪਤਾ ਕਰਨਾ ਹੋਵੇਗਾ। ਇਸ ਉਦੇਸ਼ ਲਈ, ਅਸੀਂ ਦੂਜੀ ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰਾਂਗੇ। (ਚਿੱਤਰ 10.21)



ਚਿੱਤਰ 10.21

ਦੂਜੀ ਰੇਖਾ ਦੀ ਢਲਾਣ $\tan 135° = -1$ ਹੈ। ਢਲਾਣ -1 ਅਤੇ P (4, 1) ਵਿਚੋਂ ਲੰਘਦੀ ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ

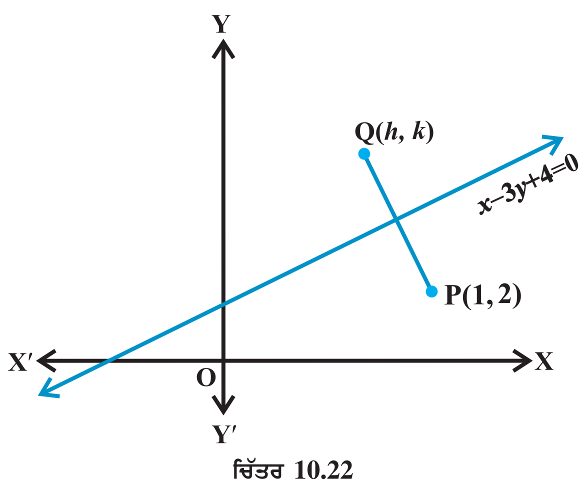
$y - 1 = -1\ (x - 4)$ ਜਾਂ $x + y - 5 = 0$ ਹੈ ... (2)

(1) ਅਤੇ (2) ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ 'ਤੇ, $x = 1$ ਅਤੇ $y = 4$ ਹੈ, ਇਸ ਕਰਕੇ ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦਾ ਕਾਟ ਬਿੰਦੂ Q (1, 4) ਹੈ। ਹੁਣ ਰੇਖਾ (1) ਦੇ ਬਿੰਦੂ P (4, 1) ਤੋਂ ਰੇਖਾ (2) ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਦੂਰੀ = ਬਿੰਦੂਆਂ P (4, 1) ਅਤੇ Q (1, 4) ਵਿਚਕਾਰ ਦੂਰੀ

$$= \sqrt{(1-4)^2 + (4-1)^2} = 3\sqrt{2} \text{ ਇਕਾਈ}$$

ਉਦਾਹਰਣ 22 : ਇਹ ਮੰਨਦੇ ਹੋਏ ਕਿ ਸਰਲ ਰੇਖਾਵਾਂ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਲਈ ਦਰਪਣ ਦਾ ਕੰਮ ਕਰਦੀਆਂ ਹਨ, ਬਿੰਦੂ (1, 2) ਦਾ ਰੇਖਾ $x - 3y + 4 = 0$ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਤਿਬਿੰਬ (image) ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਹੱਲ : ਮੰਨ ਲਉ Q (h, k) ਬਿੰਦੂ P (1, 2) ਦਾ ਰੇਖਾ $x - 3y + 4 = 0$ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਤਿਬਿੰਬ ਹੈ। ... (1)



ਚਿੱਤਰ 10.22

ਇਸ ਲਈ, ਰੇਖਾ (1), ਰੇਖਾ ਖੰਡ PQ ਦਾ ਲੰਬ-ਸਮਦੁਭਾਜਕ ਹੈ [(ਚਿੱਤਰ10.22)]

ਅਰਥਾਤ ਰੇਖਾ PQ ਦੀ ਢਲਾਣ = $\dfrac{-1}{\text{ਰੇਖਾ } x-3y+4=0 \text{ ਦੀ ਢਲਾਣ}}$

ਇਸ ਲਈ $\dfrac{k-2}{h-1}=\dfrac{-1}{\frac{1}{3}}$ ਜਾਂ $3h+k=5$ ... (2)

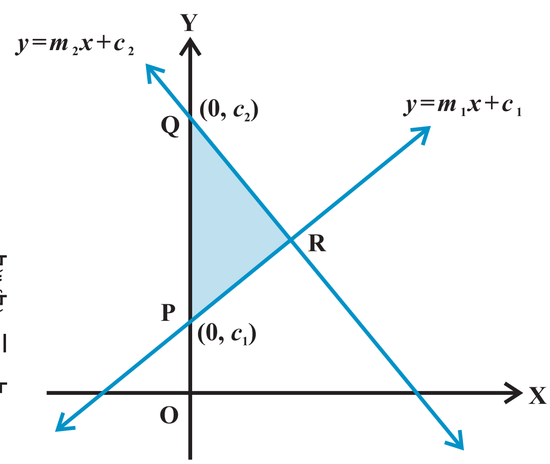
ਅਤੇ PQ ਦਾ ਮੱਧ ਬਿੰਦੂ, ਅਰਥਾਤ ਬਿੰਦੂ $\left(\dfrac{h+1}{2},\dfrac{k+2}{2}\right)$ ਸਮੀਕਰਣ (1) ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰੇਗਾ

ਇਸ ਲਈ $\dfrac{h+1}{2}-3\left(\dfrac{k+2}{2}\right)+4=0$ ਜਾਂ $h-3k=-3$ ... (3)

(2) ਅਤੇ (3) ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ’ਤੇ $h=\dfrac{6}{5}$ ਅਤੇ $k=\dfrac{7}{5}$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ।

ਅਰਥਾਤ ਬਿੰਦੂ (1, 2) ਦਾ ਰੇਖਾ $x-3y+4=0$ ਵਿੱਚ ਪ੍ਰਤਿਬਿੰਬ $\left(\dfrac{6}{5},\ \dfrac{7}{5}\right)$ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 23 : ਦਿਖਾਉ ਕਿ ਰੇਖਾਵਾਂ $y=m_1x+c_1, y=m_2x+c_2$ ਅਤੇ $x=0$ ਦੁਆਰਾ ਬਣੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ $\dfrac{(c_1-c_2)^2}{2|m_1-m_2|}$ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 10.23

ਹੱਲ : ਦਿੱਤੀਆਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਹਨ :

$y=m_1x+c_1$ ... (1)

$y=m_2x+c_2$ ... (2)

$x=0$ ... (3)

ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਰੇਖਾ $y=mx+c$ ਰੇਖਾ $x=0$ (y-ਧੁਰਾ) ਨੂੰ ਬਿੰਦੂ $(0, c)$ ’ਤੇ ਮਿਲਦੀ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ ਰੇਖਾ (1) ਅਤੇ (3) ਦੁਆਰਾ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੇ ਦੋ ਸਿਖਰ P $(0, c_1)$ ਅਤੇ Q $(0, c_2)$ ਬਣਾਏ ਗਏ ਹਨ (ਚਿੱਤਰ 10. 23)। ਤੀਜਾ ਸਿਖ਼ਰ ਸਮੀਕਰਣ (1) ਅਤੇ (2) ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਕੇ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ।

ਸਮੀਕਰਣ (1) ਅਤੇ (2) ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ ’ਤੇ

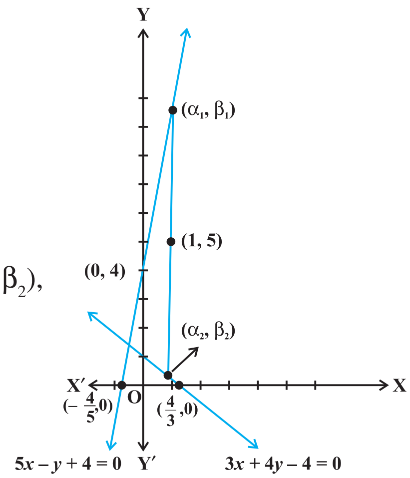
$$x=\frac{(c_2-c_1)}{(m_1-m_2)} \quad \text{ਅਤੇ} \quad y=\frac{(m_1c_2-m_2c_1)}{(m_1-m_2)}$$

ਇਸ ਲਈ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦਾ ਤੀਜਾ ਸਿਖਰ R $\left(\dfrac{(c_2-c_1)}{(m_1-m_2)},\ \dfrac{(m_1c_2-m_2c_1)}{(m_1-m_2)}\right)$

ਹੁਣ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ

$$= \frac{1}{2}\left| 0 \left(\frac{m_1c_2 - m_2c_1}{m_1 - m_2} - c_2\right) + \frac{c_2 - c_1}{m_1 - m_2}(c_2 - c_1) + 0 \left(c_1 - \frac{m_1c_2 - m_2c_1}{m_1 - m_2}\right)\right| = \frac{(c_2 - c_1)^2}{2|m_1 - m_2|}$$

ਉਦਾਹਰਣ 24 : ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੈ ਕਿ ਇਸ ਦੇ ਰੇਖਾਵਾਂ $5x - y + 4 = 0$ ਅਤੇ $3x + 4y - 4 = 0$ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਦੇ ਰੇਖਾ ਖੰਡ ਨੂੰ ਬਿੰਦੂ $(1, 5)$ ਸਮਦੁਭਾਜਿਤ ਕਰਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ।



ਚਿੱਤਰ 10.24

ਹੱਲ : ਦਿੱਤੀਆਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਹਨ :

$5x - y + 4 = 0$ ... (1)

$3x + 4y - 4 = 0$ ... (2)

ਮੰਨ ਲਉ ਲੋੜੀਂਦੀ ਰੇਖਾ, ਰੇਖਾ (1) ਅਤੇ (2) ਨੂੰ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਬਿੰਦੂ (α_1, β_1) ਅਤੇ (α_2, β_2), ਤੇ ਕੱਟਦੀ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ

$5\alpha_1 - \beta_1 + 4 = 0$ ਅਤੇ

$3\alpha_2 + 4\beta_2 - 4 = 0$

ਜਾਂ $\beta_1 = 5\alpha_1 + 4$ ਅਤੇ $\beta_2 = \frac{4 - 3\alpha_2}{4}$

ਅਸੀਂ ਜਾਣਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਲੋੜੀਂਦੀ ਰੇਖਾ ਦੇ ਰੇਖਾ ਖੰਡ ਦਾ ਮੱਧ ਬਿੰਦੂ $(1, 5)$ ਕ੍ਰਮਵਾਰ ਬਿੰਦੂਆਂ (α_1, β_1) ਅਤੇ (α_2, β_2) ਤੇ ਕੱਟਦੀ ਹੈ, ਇਸ ਲਈ

$$\frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} = 1 \quad \text{ਅਤੇ} \quad \frac{\beta_1 + \beta_2}{2} = 5,$$

ਜਾਂ $$\alpha_1 + \alpha_2 = 2 \quad \text{ਅਤੇ} \quad \frac{5\alpha_1 + 4 + \frac{4 - 3\alpha_2}{4}}{2} = 5,$$

ਜਾਂ $\alpha_1 + \alpha_2 = 2$ ਅਤੇ $20\alpha_1 - 3\alpha_2 = 20$ ... (3)

(3) ਤੋਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਨੂੰ α_1 ਅਤੇ α_2, ਲਈ ਹੱਲ ਕਰਨ ਤੇ ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ

$$\alpha_1 = \frac{26}{23} \text{ ਅਤੇ } \alpha_2 = \frac{20}{23} \text{ ਅਤੇ ਇਸ ਲਈ, } \beta_1 = 5.\frac{26}{23} + 4 = \frac{222}{23}$$

ਲੋੜੀਂਦੀ ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਜੋ ਬਿੰਦੂ $(1, 5)$ ਅਤੇ (α_1, β_1) ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘ ਰਹੀ ਹੈ

$$y - 5 = \frac{\beta_1 - 5}{\alpha_1 - 1}(x - 1) \text{ ਜਾਂ } y - 5 = \frac{\frac{222}{23} - 5}{\frac{26}{23} - 1}(x - 1)$$

ਜਾਂ $107x - 3y - 92 = 0,$

ਜੋ ਕਿ ਰੇਖਾ ਦੀ ਲੋੜੀਂਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਹੈ।

ਉਦਾਹਰਣ 25 : ਦਿਖਾਉ ਕਿ ਇੱਕ ਗਤੀਸ਼ੀਲ ਬਿੰਦੂ ਦਾ ਬਿੰਦੂਪਥ ਜਿਸ ਦੀਆਂ ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ $3x - 2y = 5$ ਅਤੇ $3x + 2y = 5$ ਤੋਂ ਦੂਰੀ ਸਮਾਨ ਹੈ ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਹੈ।

ਹੱਲ : ਦਿੱਤੀਆਂ ਹੋਈਆਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਹਨ

$$3x - 2y = 5 \qquad \ldots (1)$$

ਅਤੇ

$$3x + 2y = 5 \qquad \ldots (2)$$

ਮੰਨ ਲਉ (h, k) ਕੋਈ ਅਜਿਹਾ ਬਿੰਦੂ ਹੈ ਜਿਸ ਦੀ ਰੇਖਾਵਾਂ (1) ਅਤੇ (2) ਤੋਂ ਦੂਰੀ ਬਰਾਬਰ ਹੈ। ਇਸ ਲਈ

$$\frac{|3h-2k-5|}{\sqrt{9+4}} = \frac{|3h+2k-5|}{\sqrt{9+4}} \quad \text{ਜਾਂ} \quad |3h-2k-5| = |3h+2k-5|,$$

ਜਿਸ ਤੋਂ $3h - 2k - 5 = 3h + 2k - 5$ ਜਾਂ $-(3h - 2k - 5) = 3h + 2k - 5$

ਇਹਨਾਂ ਦੋ ਸੰਬੰਧਾ ਨੂੰ ਹੱਲ ਕਰਨ 'ਤੇ ਅਸੀਂ $k = 0$ ਜਾਂ $h = \frac{5}{3}$ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਬਿੰਦੂ (h, k) ਸਮੀਕਰਣਾਂ $y = 0$ ਜਾਂ $x = \frac{5}{3}$ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦਾ ਹੈ, ਜੋ ਕਿ ਸਰਲ ਰੇਖਾਵਾਂ ਨੂੰ ਦਰਸਾਉਂਦੀਆਂ ਹਨ। ਇਸ ਲਈ ਰੇਖਾਵਾਂ (1) ਅਤੇ (2) ਤੋਂ ਬਰਾਬਰ ਦੂਰੀ 'ਤੇ ਬਿੰਦੂ ਦਾ ਬਿੰਦੂ ਪਥ ਇੱਕ ਸਰਲ ਰੇਖਾ ਹੈ।

ਅਧਿਆਇ 10 'ਤੇ ਫੁਟਕਲ ਅਭਿਆਸ

1. k ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਲਈ ਰੇਖਾ $(k - 3)\, x - (4 - k^2)\, y + k^2 - 7k + 6 = 0$ ਹੈ
   (a) x-ਧੁਰੇ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ
   (b) y-ਧੁਰੇ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ
   (c) ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘਦੀ ਹੈ।
2. θ ਅਤੇ p ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ, ਜੇਕਰ ਸਮੀਕਰਣ $x \cos\theta + y \sin\theta = p$ ਰੇਖਾ $\sqrt{3}x + y + 2 = 0$ ਦਾ ਲੰਬ ਰੂਪ ਹੋਵੇ।
3. ਰੇਖਾਵਾਂ ਦੀਆਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਨ੍ਹਾਂ, ਦੇ ਧੁਰਿਆਂ ਤੇ ਬਣੇ ਅੰਤਰਖੰਡਾਂ ਦਾ ਜੋੜ ਅਤੇ ਗੁਣਾ ਕ੍ਰਮਵਾਰ 1 ਅਤੇ -6 ਹੈ।
4. y-ਧੁਰੇ ਤੇ ਉਹ ਕਿਹੜੇ ਬਿੰਦੂ ਹਨ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਦੀ ਰੇਖਾ $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$ ਤੋਂ ਦੂਰੀ 4 ਇਕਾਈ ਹੈ?
5. ਬਿੰਦੂਆਂ $(\cos\theta, \sin\theta)$ ਅਤੇ $(\cos\phi, \sin\phi)$ ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਤੇ ਬਣੀ ਰੇਖਾ ਦਾ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਦੂਰੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।
6. ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੋ y-ਧੁਰੇ ਦੇ ਸਮਾਂਤਰ ਹੈ ਅਤੇ ਰੇਖਾਵਾਂ $x - 7y + 5 = 0$ ਅਤੇ $3x + y = 0$ ਦੇ ਕਾਟ ਵਿੱਚੋਂ ਖਿੱਚੀ ਗਈ ਹੈ।
7. ਰੇਖਾ $\frac{x}{4} + \frac{y}{6} = 1$ 'ਤੇ ਲੰਬ, ਉਸ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਖਿੱਚੀ ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿੱਥੇ ਇਹ y-ਧੁਰੇ ਨੂੰ ਮਿਲਦੀ ਹੈ।
8. ਰੇਖਾਵਾਂ $y - x = 0$, $x + y = 0$ ਅਤੇ $x - k = 0$ ਦੁਆਰਾ ਬਣੀ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦਾ ਖੇਤਰਫਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।
9. p ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਲਈ $3x + y - 2 = 0$, $px + 2y - 3 = 0$ ਅਤੇ $2x - y - 3 = 0$, ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ 'ਤੇ ਕੱਟਦੀਆਂ ਹੋਣ।
10. ਜੇਕਰ ਤਿੰਨ ਰੇਖਾਵਾਂ ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਦੀਆਂ ਸਮੀਕਰਣਾਂ $y = m_1x + c_1$, $y = m_2x + c_2$ ਅਤੇ $y = m_3x + c_3$ ਸੰਗਾਮੀ ਹਨ ਤਾਂ ਦਿਖਾਓ ਕਿ $m_1(c_2 - c_3) + m_2(c_3 - c_1) + m_3(c_1 - c_2) = 0$

11. ਬਿੰਦੂ (3, 2) ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘਦੀ ਅਤੇ ਰੇਖਾ $x - 2y = 3$ ਨਾਲ 45° ਦਾ ਕੋਣ ਬਣਾਉਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ।

12. ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੋ $4x + 7y - 3 = 0$ ਅਤੇ $2x - 3y + 1 = 0$ ਦੇ ਕਾਟ ਬਿੰਦੂ ਵਿਚੋਂ ਲੰਘ ਰਹੀ ਹੈ ਅਤੇ ਜਿਸਦੇ ਧੁਰਿਆਂ 'ਤੇ ਅੰਤਰਖੰਡ ਸਮਾਨ ਹਨ।

13. ਦਿਖਾਓ ਕਿ ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਜੋ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘ ਰਹੀ ਹੈ ਅਤੇ ਰੇਖਾ $y = mx + c$ ਨਾਲ ਕੋਣ θ ਬਣਾਉਂਦੀ ਹੈ, $\frac{y}{x} = \frac{m \pm \tan\theta}{1 \mp m\tan\theta}$ ਹੈ।

14. ਬਿੰਦੂਆਂ (–1, 1) ਅਤੇ (5, 7) ਨੂੰ ਮਿਲਾਉਣ ਵਾਲੇ ਰੇਖਾ ਖੰਡ ਨੂੰ ਰੇਖਾ $x + y = 4$ ਕਿਸ ਅਨੁਪਾਤ ਵਿੱਚ ਵੰਡਦੀ ਹੈ ?

15. ਰੇਖਾ $4x + 7y + 5 = 0$ ਦੀ ਬਿੰਦੂ (1, 2) ਤੋਂ ਰੇਖਾ $2x - y = 0$ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਵਿੱਚ ਦੂਰੀ ਪਤਾ ਕਰੋ।

16. ਬਿੰਦੂ (–1, 2) ਤੋਂ ਖਿੱਚੀ ਜਾ ਸਕਦੀ ਉਸ ਰੇਖਾ ਦੀ ਦਿਸ਼ਾ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜਿਸ ਦੀ ਰੇਖਾ $x + y = 4$ ਨਾਲ ਕਾਟ ਬਿੰਦੂ, ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ 3 ਇਕਾਈ ਦੂਰੀ ਤੇ ਹੈ।

17. ਸਮਕੋਣ ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੇ ਕਰਣ ਦੇ ਅੰਤ ਬਿੰਦੂ (1, 3) ਅਤੇ (– 4, 1) ਹਨ। ਤ੍ਰਿਭੁਜ ਦੀਆਂ ਲੰਬ ਭੁਜਾਵਾਂ ਦੇ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ।

18. ਬਿੰਦੂ (3, 8) ਦਾ ਰੇਖਾ $x + 3y = 7$ ਨਾਲ ਪ੍ਰਤਿਬਿੰਬ ਇਹ ਮੰਨਦੇ ਹੋਏ ਪਤਾ ਕਰੋ ਕਿ ਰੇਖਾ ਇੱਕ ਸਧਾਰਨ ਦਰਪਣ ਹੈ।

19. ਜੇਕਰ ਰੇਖਾਵਾਂ $y = 3x + 1$ ਅਤੇ $2y = x + 3$ ਦਾ ਰੇਖਾ $y = mx + 4$ ਨਾਲ ਝੁਕਾਅ ਬਰਾਬਰ ਹੈ, ਤਾਂ m ਦਾ ਮੁੱਲ ਪਤਾ ਕਰੋ।

20. ਜੇਕਰ ਰੇਖਾਵਾਂ $x + y - 5 = 0$ ਅਤੇ $3x - 2y + 7 = 0$ ਤੋਂ ਚਲ ਬਿੰਦੂ $P(x, y)$ ਦੀ ਲੰਬਾਤਮਕ ਦੂਰੀਆਂ ਦਾ ਜੋੜ ਹਮੇਸ਼ਾਂ 10 ਹੈ। ਦਰਸਾਓ ਕਿ P ਪੱਕਾ ਰੇਖਾ ਤੇ ਚੱਲੇਗਾ।

21. ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ ਜੋ ਸਮਾਂਤਰ ਰੇਖਾਵਾਂ $9x + 6y - 7 = 0$ ਅਤੇ $3x + 2y + 6 = 0$ ਤੋਂ ਸਮਾਨ ਦੂਰੀ 'ਤੇ ਹੈ।

22. ਬਿੰਦੂ (1, 2) ਵਿੱਚੋਂ ਹੋ ਕੇ ਜਾਣ ਵਾਲੀ ਪ੍ਰਕਾਸ਼ ਦੀ ਕਿਰਨ x-ਧੁਰੇ 'ਤੇ ਬਿੰਦੂ A ਤੋਂ ਪਰਾਵਰਤਿਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਪਰਵਰਤਿਤ ਕਿਰਣ ਬਿੰਦੂ (5, 3) ਵਿੱਚੋਂ ਲੰਘਦੀ ਹੈ। A ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਪਤਾ ਕਰੋ।

23. ਦਿਖਾਓ ਕਿ $\left(\sqrt{a^2 - b^2}, 0\right)$ ਅਤੇ $\left(-\sqrt{a^2 - b^2}, 0\right)$ ਬਿੰਦੂਆਂ ਵਿੱਚੋਂ ਰੇਖਾ $\frac{x}{a}\cos\theta + \frac{y}{b}\sin\theta = 1$ 'ਤੇ ਖਿੱਚੇ ਗਏ ਲੰਬ ਦੀਆਂ ਲੰਬਾਈਆਂ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ b^2 ਹੈ।

24. ਇੱਕ ਵਿਅਕਤੀ ਸਮੀਕਰਣਾਂ $2x - 3y + 4 = 0$ ਅਤੇ $3x + 4y - 5 = 0$ ਤੋਂ ਬਣੇ ਸਰਲ ਰੇਖੀ ਪੱਥਾਂ ਦੇ ਕਾਟ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਖੜ੍ਹਾ ਹੈ ਅਤੇ ਸਮੀਕਰਣ $6x - 7y + 8 = 0$ ਦੇ ਪਥ 'ਤੇ ਘੱਟ ਤੋਂ ਘੱਟ ਸਮੇਂ ਵਿੱਚ ਪਹੁੰਚਣਾ ਚਾਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਉਸ ਦੁਆਰਾ ਅਪਣਾਈ ਗਈ ਪੱਥ (Path) ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਪਤਾ ਕਰੋ।

ਸਾਰ-ਅੰਸ਼

- ਇੱਕ ਨਾ-ਖੜ੍ਹਵੀਂ (Non-vertical) ਰੇਖਾ ਜੋ ਬਿੰਦੂਆਂ (x_1, y_1) ਅਤੇ (x_2, y_2) ਵਿੱਚੋਂ ਹੋ ਕੇ ਜਾਂਦੀ ਹੈ ਦੀ ਢਲਾਣ (m) ਹੈ-

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}, \quad x_1 \neq x_2$$

- ਜੇਕਰ ਇਕ ਰੇਖਾ ਧਨਾਤਮਕ x-ਧੁਰੇ ਨਾਲ ਕੋਣ α ਬਣਾਉਂਦੀ ਹੈ, ਤਾਂ ਰੇਖਾ ਦੀ ਢਲਾਣ ਹੈ : $m = \tan\alpha, \alpha \neq 90^\circ$
- ਲੇਟਵੀਂ (Horizontal) ਰੇਖਾ ਦੀ ਢਲਾਣ ਸਿਫ਼ਰ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਖੜ੍ਹਵੀਂ ਰੇਖਾ ਦੀ ਢਲਾਣ ਅਪਰਿਭਾਸ਼ਿਤ ਹੁੰਦੀ ਹੈ।
- ਰੇਖਾਵਾਂ L_1 ਅਤੇ L_2 ਜਿਨ੍ਹਾਂ ਦੀ ਢਲਾਣ m_1 ਅਤੇ m_2 ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਨਿਊਨ ਕੋਣ (ਮੰਨ ਲਓ θ) ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੈ

$$\tan\theta = \left|\frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}\right|, 1 + m_1 m_2 \neq 0.$$

- ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ ਸਮਾਂਤਰ ਹਨ ਜੇਕਰ ਅਤੇ ਸਿਰਫ਼ ਜੇਕਰ ਇਹਨਾਂ ਦੀਆਂ ਢਲਾਣਾਂ ਬਰਾਬਰ ਹਨ।
- ਦੋ ਰੇਖਾਵਾਂ ਆਪਸ ਵਿੱਚ ਲੰਬ ਹਨ ਜੇਕਰ ਅਤੇ ਸਿਰਫ਼ ਜੇਕਰ ਇਹਨਾਂ ਦੀਆਂ ਢਲਾਣਾਂ ਦਾ ਗੁਣਨਫਲ –1 ਹੈ।
- ਤਿੰਨ ਬਿੰਦੂ ਸਮਰੇਖੀ ਹਨ ਜੇਕਰ ਅਤੇ ਸਿਰਫ਼ ਜੇਕਰ AB ਦੀ ਢਲਾਣ = BC ਦੀ ਢਲਾਣ
- x-ਧੁਰੇ ਤੋਂ a ਦੂਰੀ ਤੇ ਲੇਟਵੀਂ ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਜਾਂ
  $y = a$ ਜਾਂ $y = -a$ ਹੈ।
- y-ਧੁਰੇ ਤੋਂ b ਦੂਰੀ ਤੇ ਖੜ੍ਹਵੀਂ ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਜਾਂ $x = b$ ਜਾਂ $x = -b$ ਹੈ।
- ਸਥਿਰ ਬਿੰਦੂ (x_o, y_o) ਤੋਂ ਹੋ ਕੇ ਜਾਣ ਵਾਲੀ ਅਤੇ ਢਲਾਣ m ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਤੇ ਬਿੰਦੂ (x, y) ਸਥਿਰ ਹੋਵੇਗਾ ਜੇਕਰ ਅਤੇ ਸਿਰਫ਼ ਜੇਕਰ ਇਸ ਦੇ ਨਿਰਦੇਸ਼ ਅੰਕ ਸਮੀਕਰਣ $y - y_o = m(x - x_o)$ ਨੂੰ ਸੰਤੁਸ਼ਟ ਕਰਦੇ ਹੋਣ।
- ਬਿੰਦੂਆਂ (x_1, y_1) ਅਤੇ (x_2, y_2) ਤੋਂ ਹੋ ਕੇ ਜਾਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੈ।

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

- ਢਲਾਣ m ਅਤੇ y-ਅੰਤਰਖੰਡ c ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਤੇ ਬਿੰਦੂ (x, y) ਹੋਵੇਗਾ ਜੇਕਰ ਅਤੇ ਸਿਰਫ਼ ਜੇਕਰ $y = mx + c$ ਹੈ।
- ਜੇਕਰ ਢਲਾਣ m ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ x-ਅੰਤਰਖੰਡ d ਬਣਾਉਂਦੀ ਹੈ ਤਾਂ ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ
  $y = m(x - d)$ ਹੈ।
- x ਅਤੇ y-ਧੁਰਿਆਂ ਦੇ ਕ੍ਰਮਵਾਰ a ਅਤੇ b ਅੰਤਰਖੰਡ ਬਣਾਉਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ ਹੈ।
- ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਲੰਬਾਤਮਕ ਦੂਰੀ p ਅਤੇ ਇਸ ਲੰਬ ਅਤੇ ਧਨਾਤਮਕ x-ਧੁਰੇ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਕੋਣ ω ਬਣਾਉਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ ਦੀ ਸਮੀਕਰਣ $x\cos\omega + y\sin\omega = p$ ਹੈ।
- ਕੋਈ ਸਮੀਕਰਣ $Ax + By + C = 0$ ਦੇ ਰੂਪ ਵਿਚ, A ਅਤੇ B ਇਕੱਠੇ ਸਿਫ਼ਰ ਨਾ ਹੋਣ, ਤਾਂ ਇਸ ਨੂੰ X ਵਿਆਪਕ ਰੇਖੀ ਸਮੀਕਰਣ ਜਾਂ ਰੇਖਾ ਦੀ ਵਿਆਪਕ (General equation of a line) ਸਮੀਕਰਣ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।
- ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ (x_1, y_1) ਤੋਂ ਰੇਖਾ $Ax + By + C = 0$ ਦੀ ਲੰਬਾਤਮਕ ਦੂਰੀ (d) ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਹੈ : $d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$
- ਸਮਾਂਤਰ ਰੇਖਾਵਾਂ $Ax + By + C_1 = 0$ ਅਤੇ $Ax + By + C_2 = 0$ ਦੇ ਵਿਚਕਾਰ ਦੂਰੀ ਹੈ : $d = \frac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

ਅਧਿਆਇ 11

ਕਾਨਿਕ ਕਾਟਾਂ
(Conic Sections)

❖*Let the relation of knowledge to real life be very visible to your pupils and let them understand how by knowledge the world could be transformed. – BERTRAND RUSSELL* ❖

11.1 ਭੂਮਿਕਾ

ਪਿਛਲੇ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਰੇਖਾ ਦੇ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਦੇ ਭਿੰਨ ਰੂਪਾਂ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕੀਤਾ ਹੈ। ਇਸ ਅਧਿਆਇ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਕੁਝ ਹੋਰ ਵਕਰਾਂ ਦਾ ਅਧਿਐਨ ਕਰਾਂਗੇ ਜਿਵੇਂ ਕੀ ਚੱਕਰ (Circle), ਪੈਰਾਬੋਲਾ (Parabola), ਇਲਿਪਸ (ellipse) ਅਤੇ ਹਾਈਪਰਬੋਲਾ (Hyperbola)। ਪੈਰਾਬੋਲਾ ਅਤੇ ਹਾਈਪਰਬੋਲਾ ਨਾਂ Apollonius ਦੁਆਰਾ ਦਿੱਤੇ ਗਏ ਹਨ। ਵਾਸਤਵ ਵਿੱਚ ਇਹਨਾਂ ਵਕਰਾਂ ਨੂੰ ਕਾੱਨਿਕ ਕਾਟ (Conic Sections) ਜਾਂ ਆਮ ਤੌਰ ’ਤੇ ਕਾਨਿਕਸ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ ਕਿਉਂਕਿ ਇਹਨਾਂ ਨੂੰ ਦੂਹਰੇ ਨੇਪਡ ਕੋਨ (double napped cone) ਅਤੇ ਇੱਕ ਸਮਤਲ ਦੀ ਕਾਟ ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤਾ ਜਾ ਸਕਦਾ ਹੈ। ਇਹਨਾਂ ਦੀ ਵਰਤੋਂ ਗ੍ਰਹਾਂ ਦੀ ਗਤੀ, ਦੂਰਦਰਸ਼ੀ ਯੰਤਰ (telescope) ਅਤੇ ਐਂਟੀਨਾ ਦੇ ਨਿਰਮਾਣ, ਆਟੋਮੋਬਾਈਲ ਦੀ ਲਾਈਟਾਂ ਵਿੱਚ, ਪਰਾਵਰਤਕਾਂ ਆਦਿ ਵਿੱਚ ਬਹੁਤ ਹੀ ਲਾਭਦਾਇਕ ਹੁੰਦੀ ਹੈ। ਅਸੀਂ ਅੱਗੇ ਆਉਣ ਵਾਲੇ ਸੈਕਸ਼ਨਾਂ ਵਿੱਚ ਵੇਖਾਂਗੇ ਕਿ ਕਿਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਇੱਕ ਦੂਹਰੇ ਨੇਪਡ ਕੋਨ ਅਤੇ ਇੱਕ ਸਮਤਲ ਦੀ ਕਾਟ ਦੇ ਪਰਿਣਾਮ ਵਿੱਚ ਭਿੰਨ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੇ ਵਕਰ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੇ ਹਨ।

Apollonius
(262 B.C. -190 B.C.)

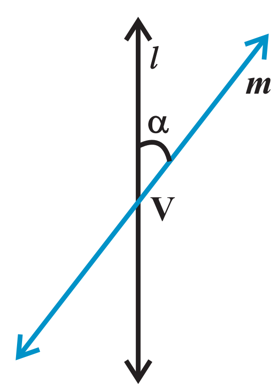
11.2 ਕੋਨ ਦੀਆਂ ਕਾਟਾਂ (Section of a Conic)

ਮੰਨ ਲਓ l ਇੱਕ ਸਥਿਰ ਖੜ੍ਹੀ ਰੇਖਾ ਹੈ ਅਤੇ m ਦੂਸਰੀ ਰੇਖਾ ਹੈ ਜਿਹੜੀ ਇਸ ਰੇਖਾ ਨੂੰ ਸਥਿਰ ਬਿੰਦੂ V ਤੇ ਕੱਟਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਇਸ ਤੋਂ ਇੱਕ ਕੋਣ α ਬਣਾਉਂਦੀ ਹੈ। (ਚਿੱਤਰ 11.1)

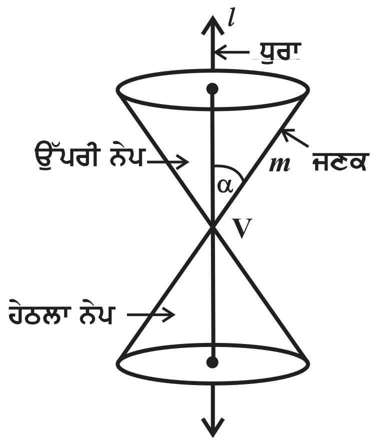
ਮੰਨ ਲਓ ਕਿ ਅਸੀਂ ਰੇਖਾ m ਨੂੰ ਰੇਖਾ l ਦੇ ਗਿਰਦ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਘੁਮਾਉਂਦੇ ਹਾਂ ਕਿ ਇਸਦੀਆਂ ਸਾਰੀਆਂ ਸਥਿਤੀਆਂ ਵਿੱਚ ਕੋਣ α ਅਚੱਲ ਰਹੇ ਤਾਂ ਜਨਿਤ ਤੱਲ ਇੱਕ ਦੂਹਰੇ ਨੇਪਡ ਖੋਖਲੇ ਕੋਨ ਹਨ ਜਿਹਨਾ ਨੂੰ ਹੁਣ ਤੋਂ ਕੋਨ ਕਹਾਂਗੇ ਜਿਹੜੇ ਦੋਵੇਂ ਦਿਸ਼ਾਵਾਂ ਵਿੱਚ ਅਨਿਸ਼ਚਿਤ ਦੂਰੀ ਤੱਕ ਵੱਧ ਰਹੇ ਹਨ। (ਚਿੱਤਰ11.2)

ਬਿੰਦੂ V ਨੂੰ ਕੋਨ ਦਾ ਸਿਖਰ (*vertex*) ਅਤੇ ਸਥਿਰ ਰੇਖਾ l ਨੂੰ ਕੋਨ ਦਾ ਧੁਰਾ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਹਨਾਂ ਸਾਰੀਆਂ ਸਥਿਤੀਆਂ ਵਿੱਚ ਘੁੰਮਣ ਵਾਲੀ ਰੇਖਾ m ਨੂੰ ਕੋਨ ਦੀ ਜਣਕ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਸਿਖਰ ਕੋਨ ਨੂੰ ਦੋ ਵੱਖ-ਵੱਖ ਭਾਗਾਂ ਵਿੱਚ ਵੰਡਦਾ ਹੈ ਜਿਹਨਾਂ ਨੂੰ ਨੇਪ (*nappe*) ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ।

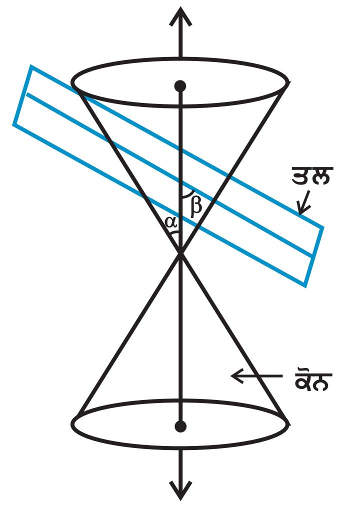
ਜੇਕਰ ਅਸੀਂ ਇੱਕ ਤੱਲ ਅਤੇ ਇੱਕ ਕੋਨ ਦੀ ਕਾਟ ਲੈਂਦੇ ਹਾਂ ਤਾਂ ਇਸ ਪ੍ਰਕਾਰ ਦੀ ਕਾਟ ਨੂੰ ਵਕਰ ਕਾੱਨਿਕ ਸ਼ੈਕਸ਼ਨ ਕਿਹਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ। ਇਸ ਤਰ੍ਹਾਂ ਕੋਨ ਦੀ ਕਾਟ ਉਹ ਵਕਰ ਹਨ ਜਿਹਨਾਂ ਨੂੰ ਇੱਕ ਲੰਬ ਚੱਕਰੀ ਕੋਨ ਅਤੇ ਇੱਕ ਤਲ ਦੀ ਕਾਟ ਤੋਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕੀਤਾ ਜਾਂਦਾ ਹੈ।



ਚਿੱਤਰ 11. 1



ਚਿੱਤਰ 11. 2



ਚਿੱਤਰ 11. 3

ਕੋਨ ਨੂੰ ਕੱਟਦੇ ਤੱਲ ਅਤੇ ਕੋਨ ਦੇ ਲੰਬ ਧੁਰੇ ਨਾਲ ਉਸ ਰਾਹੀਂ ਬਣਾਏ ਕੋਣ ਤੇ ਨਿਰਭਰ ਕਰਦੇ ਹੋਏ ਸਾਨੂੰ ਵੱਖਰੇ ਤਰਾਂ ਦੀਆਂ ਕੋਨ ਦੀ ਕਾਟਾਂ ਮਿਲਦੀਆਂ ਹਨ। ਮਨ ਲਓ ਕਿ ਕੱਟਦਾ ਹੋਇਆ ਤਲ ਕੋਨ ਦੇ ਲੰਬ ਧੁਰੇ ਨਾਲ β ਕੋਣ ਬਣਾਉਦਾ ਹੈ। (ਚਿੱਤਰ 11.3)।

ਕੋਨ ਦੇ ਨਾਲ ਤੱਲ ਦੀ ਕਾਟ ਜਾਂ ਤਾਂ ਕੋਨ ਦੇ ਸ਼ਿਖਰ ਤੇ ਹੋ ਸਕਦੀ ਹੈ ਜਾਂ ਨੇਪ ਦੇ ਦੂਜੇ ਕਿਸੇ ਭਾਗ ਉੱਪਰ ਜਾਂ ਨੀਚੇ ਹੋ ਸਕਦੀ ਹੈ।

11.2.1 ਚੱਕਰ (Circle) ਇਲਿਪਸ (ellipse), ਪੈਰਾਬੋਲਾ (Parabola) ਅਤੇ ਹਾਈਪਰਬੋਲਾ (hyperbola) ਜਦੋਂ ਤੱਲ ਕੋਨ ਦੇ ਨੇਪ ਨੂੰ ਕੱਟਦਾ ਹੈ (ਸ਼ਿਖਰ ਛੱਡ ਕੇ), ਤਾਂ ਸਾਨੂੰ ਹੇਠ ਲਿਖੀਆਂ ਸਥਿਤੀਆਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ :

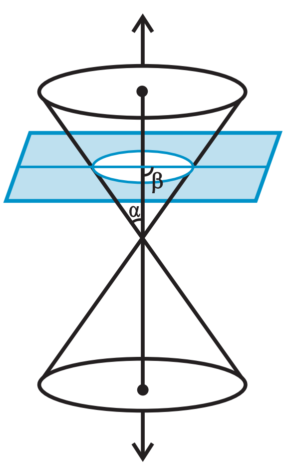
(a) ਜਦ $\beta = 90^o$, ਤਾਂ ਕਾਟ ਇੱਕ ਚੱਕਰ ਹੁੰਦਾ ਹੈ (ਚਿੱਤਰ 11.4)।

(b) ਜਦ $\alpha < \beta < 90^o$, ਤਾਂ ਕਾਟ ਇੱਕ ਇਲਿਪਸ ਹੁੰਦਾ ਹੈ (ਚਿੱਤਰ 11.5)।

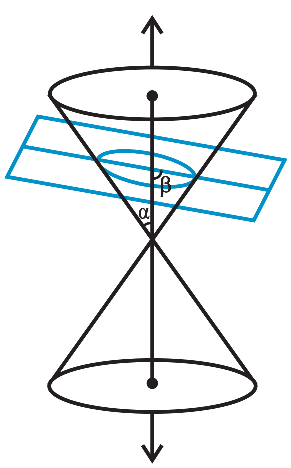
(c) ਜਦ $\beta = \alpha$ ਤਾਂ ਕਾਟ ਇੱਕ ਪੈਰਾਬੋਲਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ (ਚਿੱਤਰ 11.6)।

(ਉੱਪਰ ਦਿੱਤੀਆਂ ਸਾਰੀਆਂ ਸਥਿਤੀਆਂ ਦੀ ਹਰ ਸਥਿਤੀ ਵਿੱਚ ਕੋਨ ਨੂੰ ਨੇਪ ਦੇ ਪੂਰੀ ਤਰ੍ਹਾਂ ਆਰ-ਪਾਰ ਕੱਟਦਾ ਹੈ।)

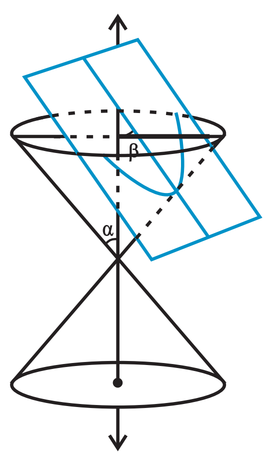
(d) ਜਦ $0 \leq \beta < \alpha$; ਤਾਂ ਤਲ ਦੋਵੇਂ ਨੇਪਾਂ ਨੂੰ ਕੱਟਦਾ ਹੈ ਅਤੇ ਕਾਟ ਦਾ ਵਕਰ ਹਾਈਪਰਬੋਲਾ ਹੁੰਦਾ ਹੈ (ਚਿੱਤਰ 11.7)।



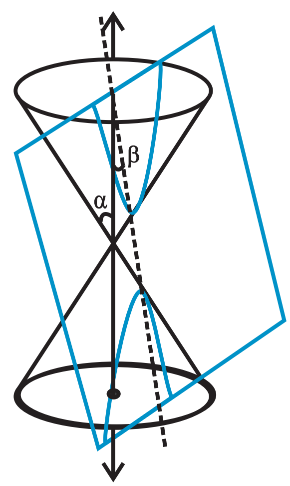
ਚਿੱਤਰ 11. 4



ਚਿੱਤਰ 11. 5



ਚਿੱਤਰ 11. 6



ਚਿੱਤਰ 11. 7

11.3 ਨਿਘਰਿਆ ਕਾਨਿਕ ਕਾਟ (*Degenerated conic sections*)

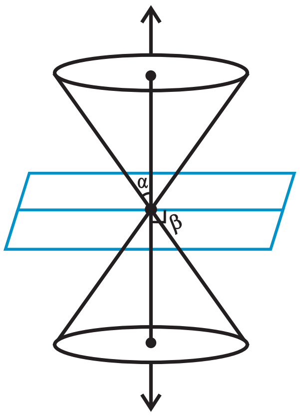
ਜਦੋਂ ਤੱਲ ਕੋਨ ਨੂੰ ਸ਼ਿਖਰ ਤੇ ਕੱਟਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਹੇਠ ਦਿੱਤਿਆਂ ਸਥਿਤੀਆਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਹੁੰਦੀਆਂ ਹਨ :

(a) ਜਦ $\alpha < \beta \le 90^o$, ਤਾਂ ਕਾਟ ਇੱਕ ਬਿੰਦੂ ਹੈ (ਚਿੱਤਰ 11.8)

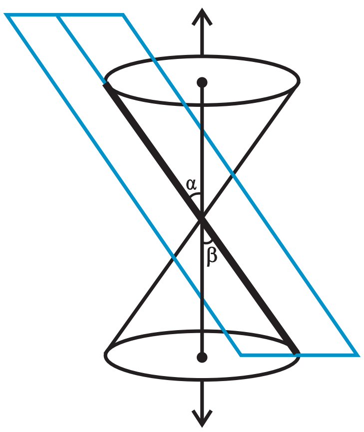
(b) ਜਦ $\beta = \alpha$, ਤਾਂ ਤੱਲ ਵਿੱਚ ਕੋਨ ਦੀ ਜਣਕ ਰੇਖਾ ਹੁੰਦੀ ਹੈ ਅਤੇ ਕਾਟ ਇੱਕ ਸਿੱਧੀ ਰੇਖਾ ਹੈ (ਚਿੱਤਰ 11.9) । ਇਹ ਪੈਰਾਬੋਲਾ ਦੀ ਨਿਘਰੀ ਸਥਿਤੀ ਹੈ।

(c) ਜਦ $0 \le \beta < \alpha$, ਤਾਂ ਕਾਟ ਇਕ ਕੱਟਦੀਆਂ ਹੋਈਆਂ ਰੇਖਾਵਾਂ ਦਾ ਜੋੜਾ ਹੈ (ਚਿੱਤਰ 11.10)। ਇਹ ਹਾਈਪਰਬੋਲਾ ਦੀ ਨਿਘਰੀ ਸਥਿਤੀ ਹੈ।

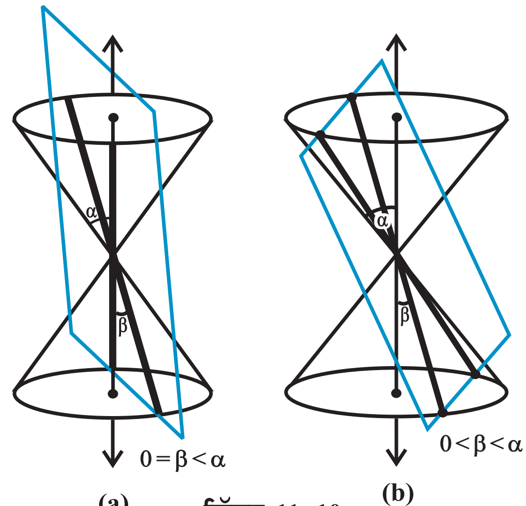
ਆਉਣ ਵਾਲੇ ਸੈਕਸ਼ਨਾਂ ਵਿੱਚ ਅਸੀਂ ਇਹਨਾਂ ਕੱਨਿਕ ਕਾਟਾਂ ਦੀਆਂ ਰੇਖਾ-ਗਣਿਤਿਕ ਮਾਨਕਾਂ ਦੇ ਅਧਾਰ ਤੇ ਸਮੀਕਰਣਾਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਾਂਗੇ।



ਚਿੱਤਰ 11. 8



ਚਿੱਤਰ 11. 9

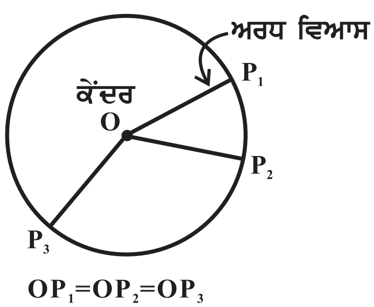


ਚਿੱਤਰ 11. 10

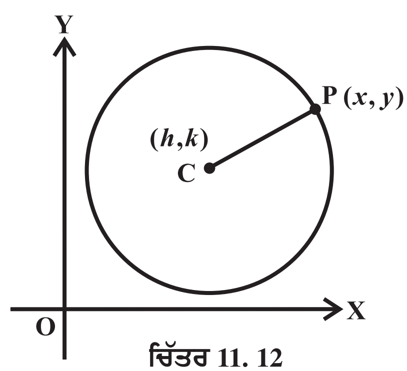
11.4 ਚੱਕਰ (Circle)

ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ 1 ਚੱਕਰ, ਤੱਲ ਦੇ ਉਹਨਾਂ ਬਿੰਦੂਆਂ ਦਾ ਸਮੂਹ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਜੋ ਤੱਲ ਦੇ ਇੱਕ ਸਥਿਰ ਬਿੰਦੂ ਤੋਂ ਸਮਾਨ ਦੂਰੀ ਤੇ ਹੁੰਦੇ ਹਨ। ਸਥਿਰ ਬਿੰਦੂ ਨੂੰ ਚੱਕਰ ਦਾ ਕੇਂਦਰ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ ਅਤੇ ਚੱਕਰ ਤੇ ਕਿਸੇ ਬਿੰਦੂ ਦੀ ਕੇਂਦਰ ਤੋਂ ਦੂਰੀ ਨੂੰ ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਕਹਿੰਦੇ ਹਨ (ਚਿੱਤਰ 11.11)।

ਜੇਕਰ ਚੱਕਰ ਦਾ ਕੇਂਦਰ ਮੂਲ ਬਿੰਦੂ ਤੇ ਹੁੰਦਾ ਹੈ ਤਾਂ ਚੱਕਰ ਦਾ ਸਮੀਕਰਣ ਸਰਲ ਹੁੰਦਾ ਹੈ। ਫਿਰ ਵੀ, ਅਸੀਂ ਦੱਸੇ ਗਏ ਕੇਂਦਰ ਅਤੇ ਅਰਧ ਵਿਆਸ ਦਾ ਸਮੀਕਰਣ ਹੇਠ ਦਿੱਤੇ ਅਨੁਸਾਰ ਹਾਸਲ ਕਰਾਂਗੇ (ਚਿੱਤਰ 11.12)।



ਚਿੱਤਰ 11. 11



ਚਿੱਤਰ 11. 12

ਚੱਕਰ ਦਾ ਕੇਂਦਰ C (h, k) ਅਤੇ ਅਰਧ ਵਿਆਸ r ਦਿੱਤਾ ਹੈ। ਮੰਨ ਲਉ ਚੱਕਰ ਤੇ ਕੋਈ ਬਿੰਦੂ $P(x, y)$ ਹੈ (ਚਿੱਤਰ 11.12)।

ਤਾਂ ਪਰਿਭਾਸ਼ਾ ਰਾਹੀਂ, $| CP | = r$ ਦੂਰੀ ਸੂਤਰ ਰਾਹੀਂ, ਅਸੀਂ ਪ੍ਰਾਪਤ ਕਰਦੇ ਹਾਂ : $\sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2} = r$

ਜਿਸਦਾ ਅਰਥ ਹੈ, $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$