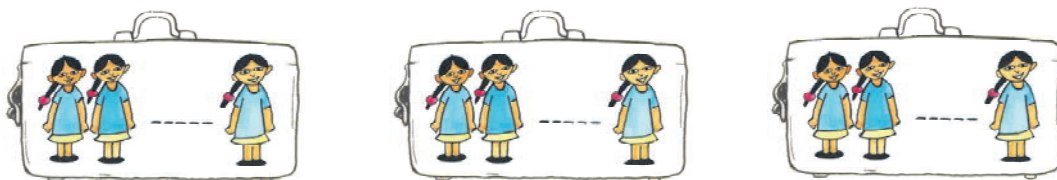


अध्याय नौ



बीजीय व्यंजकों पर संक्रियाएँ (Operations on Algebraic Expressions)

अंकिता के पास खिलौनों की 3 पेटियाँ हैं, प्रत्येक पेटि में समान संख्या में खिलौने हैं। तब खिलौनों की संख्या कितनी होगी?



चित्र-9.1

यदि प्रत्येक पेटि में 5 खिलौने हैं तो कुल खिलौनों की संख्या $= 3 \times 5$
 इस प्रकार यदि प्रत्येक पेटि में 9 खिलौने हैं तो कुल खिलौनों की संख्या $= 3 \times 9$
 यदि प्रत्येक पेटि में x खिलौने हैं तो कुल खिलौनों की संख्या $= 3 \times x$
 एक पेटि में खिलौनों की संख्या x होने पर 3 पेटियों में खिलौनों की संख्या $3x$ हो रही है।
 उसी प्रकार, एक पेटि में खिलौनों की संख्या P होने पर 7 पेटि में खिलौनों की संख्या $7P$ होगी।

इसी प्रकार, एक पेटि में खिलौने की संख्या z होने पर 11 पेटि में खिलौनों की संख्या ..
 होगी?

एक पेटि में खिलौने की संख्या S होने पर 21 पेटि में खिलौने की संख्या होगी?
 एक पेटि में खिलौने की संख्या x होने पर y पेटि में खिलौनों की संख्या होगी?
 आइए चरांकों का कुछ और उपयोग देखे—

बीजीय व्यंजकों का जोड़ना एवं घटाना (Addition and subtraction of Algebraic Expressions)

राधा के पास श्याम से दुगुनी पुस्तकें हैं एवं तिगुनी कॉपियां हैं तो उन दोनों के पास कुल पुस्तकों एवं कॉपियों की संख्या क्या होगी?

यदि श्याम के पास पुस्तक की संख्या x एवं कॉपी की संख्या y है तो श्याम के पास कुल पुस्तकों एवं कॉपियों की संख्या $x + y$ होगी। राधा के पास श्याम से दुगुनी पुस्तकें हैं अर्थात् राधा के पास पुस्तकों की संख्या $2x$ होगी और श्याम से तिगुनी कॉपियाँ हैं तो राधा के पास $3y$ कॉपियाँ होंगी। राधा के पास कुल पुस्तकों एवं कॉपियों की संख्या $2x + 3y$ होगी।

दोनों के पास मिलाकर किताबों व कॉपियों की संख्या = श्याम के पास पुस्तकों एवं कॉपियों की संख्या + राधा के पास पुस्तकों एवं कॉपियों की संख्या।

$$= (x + y) + (2x + 3y) = 3x + 4y$$

यहाँ यह स्पष्ट है कि दो बीजीय व्यंजकों के योगफल में सजातीय चरांकों (किताब से किताब एवं कॉपियों से कॉपियाँ) के गुणांक आपस में जुड़ जाते हैं। इसी प्रकार घटाने में भी सजातीय चरांकों के गुणांक घट जाते हैं।

उदाहरण 1. $5x + 6y$ में $3x + 2y$ जोड़िए।

हल : $(5x + 6y) + (3x + 2y)$ यहाँ सजातीय राशियां $5x$ एवं $3x$ तथा $6y$ एवं $2y$ हैं। सजातीय चरांकों के गुणांकों को जोड़ने पर

$$5x + 3x = 8x \text{ एवं } 6y + 2y = 8y$$

या $5x + 6y + 3x + 2y = (5x + 3x) + (6y + 2y) = 8x + 8y$ (यह क्षैतिज विधि है।)

इसे निम्न प्रकार से भी हल किया जा सकता है।

$$5x + 6y \quad (\text{जोड़ने वाले व्यंजक को इस प्रकार नीचे रखते हैं कि})$$

$$\underline{3x + 2y} \quad (\text{सजातीय चरांक एक दूसरे के नीचे हों।})$$

$$8x + 8y \quad (\text{यह स्तम्भ विधि है।})$$

उदाहरण 2. $5xy + 3z$ में $8z + 7xy$ को जोड़िए।

हल: $= (5xy + 3z) + (8z + 7xy)$

$$= 5xy + 7xy + 3z + 8z$$

$$= 12xy + 11z$$

द्वितीय विधि (यह स्तम्भ विधि)

$$5xy + 3z$$

$$\underline{7xy + 8z}$$

$$12xy + 11z$$

टीप— 1) ऋणात्मक पूर्णांकों से गुणा करते समय कोष्ठक खोलने पर धनात्मक पूर्णांक ऋणात्मक एवं ऋणात्मक पूर्णांक धनात्मक पूर्णांकों में बदल जाते हैं।

2) कोष्ठक के सामने ऋण चिन्ह $(-)$ की उपस्थिति का अर्थ (-1) से गुणा होता है।

उदाहरण 3. $13xy - 8z^2$ में से $5z^2 - 7xy$ को घटाइए।

हल: $13xy - 8z^2 - (5z^2 - 7xy)$

$$= 13xy - 8z^2 - 5z^2 + 7xy$$

$$\begin{aligned}
 &= 13xy + 7xy - 8z^2 - 5z^2 \\
 &= 20xy - 13z^2 \\
 \text{या} \quad &\frac{13xy - 8z^2}{\mp 7xy \pm 5z^2} \quad (\text{चिह्न बदलने पर}) \\
 &\quad \quad \quad 20xy - 13z^2
 \end{aligned}$$

उदाहरण 4. $3x^2y + 8 + 3y$ में से $3x + 7 - 8xy$ को घटाइए।

$$\begin{aligned}
 \text{हल:} \quad &= 3x^2y + 8 + 3y - (3x + 7 - 8xy) \\
 &= 3x^2y + 8 + 3y - 3x - 7 + 8xy \\
 &= 3x^2y + 1 + 3y - 3x + 8xy \\
 &= 3x^2y + 1 + 3y - 3x + 8xy
 \end{aligned}$$

अथवा $3x^2y + 3y + 8$

$$\begin{aligned}
 &\frac{(-) \quad \pm 7 \pm 3x \mp 8xy}{3x^2y + 3y + 1 - 3x + 8xy} \quad (\text{चिह्न बदलने पर})
 \end{aligned}$$

दोनों व्यंजकों में सजातीय पद न होने पर संक्रिया के बाद पदों की संख्या बढ़ जाती है।

प्रश्नावली 9.1 (Exercise 9.1)

प्रश्न (1) निम्नलिखित का योग ज्ञात कीजिए।

- $2pq$ और $7pq$
- $2xy - 4xy$ और $8xy$
- $3x + 4y$ और $7x + 6y$
- $7y + 3z$ और $3x + 4y$
- $x + y - z$, $x - y - z$ और $y + z - x$
- $5x + 4y - 12$, $6x + 5y$ और $12z - 7x + 9y$
- $3x - 7xy$, $6xy - 4y$ और $x + 2$
- $x^2y^2 + 3x^2 - 7$, $-5x^2y^2 - 5x + 7$

प्रश्न (2) निम्नलिखित में प्रथम व्यंजक से द्वितीय व्यंजक को घटाइए।

- $8x$ में से $3x$ को
- $12x$ में से $-4x$ को
- $-9x$ में से x को
- $-5x$ में से $-8x$ को

- e) $x^2 - 3x + 7$ में से $-3x^2 - 4x - 2$ को
 f) $x - 3y$ में से $5y - x - 3z$ को
 g) $xy - 5a - 9b$ में से $3ab + 2a - 3b$ को

प्रश्न (3) सरल कीजिए

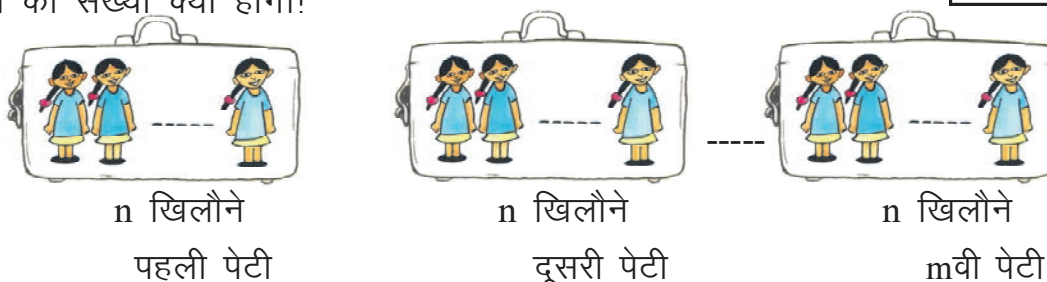
- $5ab - 7b^2c - 6ab + 2bc^2 - 4b^2c - 3bc^2$
- $m^2 - 2n^2 + 7mn - 5m^2 - 11mn - 3n^2 + 2n^2$

प्रश्न (4) शशांक ने पुस्तक मेले में 4 रुपये की दर से x पुस्तकें, 5 रुपये की दर से y पुस्तकें और पुनः x रुपये की दर से 7 पुस्तकें तथा y रुपये की दर से 8 पुस्तकें खरीदी हैं तो उसने कुल कितने रुपये खर्च किये?

प्रश्न (5) एक त्रिभुज की भुजाओं की लंबाई क्रमशः $4x^2 + x - 1$, $2x^2 - 3x + 5$ एवं $-x^2 + 4x + 1$ हो तो त्रिभुज का परिमाण ज्ञात कीजिए।

बीजीय व्यंजकों का गुणन (Multiplication of Algebraic expressions)

राधा के पास m खिलौनों की पेटियाँ हैं एवं प्रत्येक में n खिलौने हैं तब खिलौने की संख्या क्या होगी?



चित्र-9.2

खिलौनों की कुल संख्या = पहली पेटि के खिलौने + दूसरी पेटि के खिलौने + तीसरी पेटि के खिलौने + m वीं पेटि के खिलौने

$$= n + n + n + + n \text{ (m बार)}$$

$$= n \times (\text{कुल पेटियों की संख्या})$$

$$= n \times m$$

$$= mn$$

$$\text{यहाँ खिलौनों की संख्या} = m \times n = mn$$

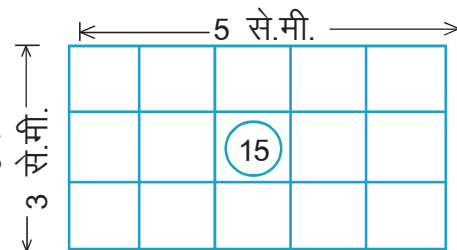
पुनः विचार कीजिए यदि एक आयत की लंबाई 5 से.मी. एवं चौड़ाई 3 से.मी. हो तब उसका क्षेत्रफल कितना होगा?

$$\text{क्षेत्रफल} = \text{लं.} \times \text{चौ.}$$

$$= 5 \times 3$$

$$\text{क्षेत्रफल} = 15 \text{ से.मी.}^2$$

अब यदि आयत की लंबाई 8 सेमी और चौड़ाई 3 सेमी है तो क्षेत्रफल क्या होगा? उसी प्रकार यदि आयत की लंबाई x सेमी और चौड़ाई 3 सेमी है तो क्षेत्रफल क्या होगा?



उदाहरण 5. यदि किसी आयत की लम्बाई p सेमी तथा चौड़ाई q सेमी हो तो उसका क्षेत्रफल क्या होगा?

हल: आयत का क्षेत्रफल = लंबाई $\times$ चौड़ाई
 $= p \text{ से.मी.} \times q \text{ से.मी.}$
 $= p q \text{ से.मी.}^2$

यहाँ उपयोग किए गए सभी चरांकों का कोई न कोई संख्यात्मक मान है इसलिए ये उन सभी नियमों का पालन करेंगी जो संख्याएं करती हैं। ऐसे ही कुछ नियमों जैसे संवरकता, क्रम विनिमय एवं साहचर्य नियम के बारे में आपने पहले पढ़ा है।

आइए, बीजीय व्यंजक इन नियमों का पालन कैसे करती हैं देखें।

क्रियाकलाप-1 (Activity-1)

नीचे दिए गए तालिका में दो बीजीय व्यंजक तथा उनका गुणनफल दिया गया है और कुछ स्थान खाली है। खाली स्थानों में आप प्रथम एवं द्वितीय व्यंजक के स्थान पर कोई भी बीजीय व्यंजक लिखकर ऊपर दिये गये उदाहरणों के अनुसार उनका गुणा कीजिए—

क्र.सं.	प्रथम व्यंजक	द्वितीय व्यंजक	प्रथम व्यंजक $\times$ द्वितीय व्यंजक	द्वितीय व्यंजक $\times$ प्रथम व्यंजक	गुणनफल
1	-3	a	$-3 \times a$	$a \times (-3)$	$-3a$
2	x	5	$x \times 5$	$5 \times x$	$5x$
3	$2a$	$5a$	$2a \times 5a = 2 \times 5 \times a \times a$	$5a \times 2a = 5 \times 2 \times a \times a$	$10a^2$
4					
5					
6					

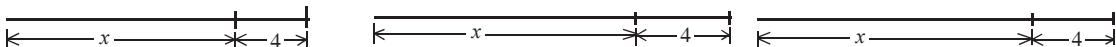
क्या पदों का स्थान बदलने से गुणनफल बदल रहा है?

इस तालिका से बीजीय व्यंजकों के गुणा सम्बन्धी क्या निष्कर्ष प्राप्त होते हैं ? लिखिए—

जब किन्हीं दो बीजीय व्यंजकों को आपस में गुणा किया जाता है तब पूर्णांकों का पूर्णांकों के साथ एवं चरांकों का चरांकों के साथ गुणा होता है। तालिका से यह भी स्पष्ट है कि बीजीय व्यंजक गुणा के लिए क्रम विनिमय नियम का पालन करते हैं।

आइए, अब कुछ समस्याओं पर विचार करें —

प्रश्न रजनी के पास x मीटर लम्बी 3 डोरियाँ हैं। यदि वह प्रत्येक डोरी में 4 मीटर लम्बी डोरियाँ जोड़ देती है तब डोरियों की कुल लम्बाई क्या होगी ?



हल: x मीटर लम्बी डोरी में 4 मीटर लम्बी डोरी जोड़ने पर प्रत्येक डोरी की लम्बाई $= (x + 4)$ मीटर हो जाएगी।

तीनों डोरियों की सम्मिलित लम्बाई $= (x + 4) \cdot 3$ मीटर या $3 \cdot (x + 4)$ मीटर

इस प्रश्न पर इस प्रकार भी विचार कर सकते हैं—

तीनों डोरियों की लम्बाइयों का योग $= x+x+x = 3x$ मीटर

बढ़ी हुई लम्बाई $= 4 \times 3 = 12$ मीटर

अतः लम्बाई बढ़ने के बाद सम्मिलित लम्बाई $= 3x + 12$

दोनों स्थितियों में कुल लम्बाई समान होगी।

अर्थात् $3(x + 4) = 3x + 12$

या $(x + 4) 3 = x.3 + 4 \times 3 = 3x + 12$

अब पुनः सोचें कि यदि इस प्रकार x लम्बाई की 5 डोरियां हैं एवं प्रत्येक डोरी में y लम्बाई की डोरी जोड़ दिया जाए तब डोरियों की कुल लम्बाई क्या होगी?

x लम्बाई की डोरी में y लम्बाई की डोरी को जोड़ने पर प्रत्येक डोरी की लम्बाई $= x+y$

अब सभी डोरियों की कुल लम्बाई $= (x + y) \cdot 5$ (चूंकि ऐसी डोरियाँ 5 हैं)

$$= 5(x + y)$$

$$= 5x + 5y$$

पुनः विचार करें x लम्बाई की 5 डोरियों की कुल लम्बाई $= x \times 5 = x \cdot 5$

प्रत्येक डोरी में y लम्बाई की डोरी जोड़नी है अतः 5 डोरियों की लम्बाई में कुल वृद्धि

$$= y \times 5 = y \cdot 5,$$

$$\text{वृद्धि के बाद कुल लम्बाई} = x \cdot 5 + y \cdot 5$$

किन्तु दोनों स्थितियों में कुल लम्बाई समान होगी,

अर्थात् $(x + y) \cdot 5 = x \cdot 5 + y \cdot 5 = 5x + 5y$

उदाहरण 5. व्यंजकों $-5a$ एवं $(6b + 3c)$ को गुणा कीजिए।

हल: $-5a \times (6b + 3c) = (-5a) \times (6b) + (-5a) (3c)$

$$= -30ab - 15ac$$

$$[a(b + c) = ab + ac \text{ द्वारा}]$$

[वितरण नियम]

उदाहरण 6. $(7b - 3c)$ का $4b$ में से गुणा कीजिए।

हल: $(7b - 3c) (4b) = 7b \times 4b + (-3c) \times 4b$

$$= 28b^2 - 12cb$$

$$= 28b^2 - 12bc$$

$$[(a + b) c = ac + bc \text{ द्वारा}]$$

[वितरण नियम]

उदाहरण 7. $\left(-5x + \frac{1}{2}y\right)$ का $4a$ में से गुणा कीजिए।

हल: $\left(-5x + \frac{1}{2}y\right) \times 4a = (-5x)(4a) + \left(\frac{1}{2}y\right)(4a)$

$$[(a + b) c = ac + bc \text{ द्वारा}]$$

$$= -20xa + 2ya$$

$$= -20ax + 2ay$$

प्रश्नावली 9.2

1. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए—

(i) $(2x + 3y) \times 2z = 2x \times 2z + 3y \times 2z = \dots = 4xz + 6yz$

(ii) $a(12x + xy) = a \times 12x + a \times xy = \dots + axy$

(iii) $-x\left(3xy + \frac{1}{2}z\right) = \dots + \dots = 3x^2y - \frac{1}{2}xz$

(iv) $\left(\frac{5}{2}m - 6n\right) \times p^2 = \dots + (-6n)p^2 = \dots + \dots$

(v) $(-3x^2y + 2z) \times y^2 = \dots + \dots = \dots + \dots$

(vi) $(\dots + 7y^2) \times (-z^3) = (5x) \times (-z^3) + (7y^2) \times (-z^3) = -5xz^3 - \dots$

2. निम्न प्रश्नों को हल कीजिए —

(i) $xy(7 + 8x)$ (ii) $(3r^2 - 5s)2t^2$ (iii) $\frac{1}{2}m\left(m^3 + \frac{3}{2}n\right)$

(iv) $mst(r^3 - st)$ (v) $\frac{4}{3}a\left(2b^2 + \frac{1}{2}c\right)$



हमने सीखा (We have learnt)

1. बीजीय व्यंजक के सजातीय पदों का समूह बनाकर जोड़ने या घटाने की प्रक्रिया करते हैं।
2. बीजीय व्यंजकों के घटाने की प्रक्रिया में घटाने वाले पदों का चिह्न परिवर्तित करके उन्हें जोड़ा जाता है।
3. बीजीय व्यंजकों का गुणा करने के लिए पहले उनके पूर्णांकों का आपस में गुणा एवं फिर चरांकों का आपस में गुणा करते हैं।

