संयुक्त फलत

Ex 1.1

प्रश्न 1. यदि f : R→R तथा g : R→R दो फलन निम्न प्रकार से परिभाषित हों, तो (fog)(x) तथा (gof)(x) ज्ञात कीजिए :

(i) $f(x) = 2x + 3,\ g(x) = x^2 + 5$
(ii) $f(x) = x^2 + 8,\ g(x) = 3x^3 + 1$
(iii) $f(x) = x,\ g(x) = |x|$
(iv) $f(x) = x^2 + 2x + 3,\ g(x) = 3x - 4$

हल : (i) $f(x) = 2x + 3g(x) = x^2 + 5.$
$(fog)(x) = f(g(x))$
$= f(x^2 + 5)$
$= 2(x^2 + 5) + 3$
$= 2x^2 + 10 + 3$
$= 2x^2 + 13$
$(gof)(x) = g(f(x))$
$= g(2x + 3)$
$= (2x + 3)^2 + 5$
$= 4x^2 + 9 + 12x + 5$
$= 4x^2 + 12x + 14$

(ii) $f(x) = x^2 + 8$
$g(x) = 3x^3 + 1$
$(fog)(x) = f(g(x))$
$= f(3x^3 + 1)$
$= (3x^3 + 1)^2 + 8$
$= 9x^6 + 6x^3 + 1 + 8$
$= 9x^6 + 6x + 9$
$(gof)(x) = g(f(x))$

$= g(x^2 + 8)$

$= 3(x^2 + 8)^3 + 1$

$= 3(x^6 + 3x^4 \times 8 + 3^2 \times 64 + 8^3) + 1$

$= 3x^6 + 727x^4 + 576x^2 + 15136$

(iii) $f(x) = x$

$g(x) = | x |$

$(fog)(x) = f(g(x))$

$= f(| x |) = | x |$

$(gof)(x) = g(f(x))$

$= g(x) = | x |$

(iv) $f(x) = x^2 + 2x + 3$

$g(r) = 3x - 4$

$(fog)(x) = f(g(x))$

$= f(3x - 4)$

$= (3x - 4)^2 + 2(3x - 4) + 3$

$= 9x^2 - 24x + 16 + 6 - 8 + 3$

$= 9x^2 - 18x + 11$

$(gof)(x) = g(f(x)) = g(x^2 + 2x + 3)$

$= 3(x^2 + 2 + 3) - 4$

$= 3x^2 + 6x + 9 - 4$

$= 3x^2 + 6x + 5.$

प्रश्न 2. यदि A = {a, b, c}, B = {u, v, w} यदि f: A→B तथा g: B→A निम्न प्रकार परिभाषित हों कि

f= {(a, v), (b, u), (c, w)}
g= {(u, b), (v, a), (w, c)} तो (fog) तथा (gof) ज्ञात कीजिए।

हल : दिया है, f = {(a, v), (b, u), (c, w)}

g = {(u, b), (v, a), (w, c}}

$\therefore$ f(a) = v तथा g(u) = b

f(b) = u तथा g(v) = a

f(c) = w तथा g(w) = c

अत: fog(x) = f[g(x)] से

fog(u) = f[g(u)] = f(b) =u

fog(v) = f[g(v)] = f(a) = v

fog(w) = f[g(w)] =f(c) = w

अत: fog= {(u, u), (v, v), (w, w)}

gof(a) = g[f(a)] = g(v) = a

gof(b) = g[f(b)] = g(u) = b

gof(c) = g[f(c)] = g(w) = c

$\therefore$ gof = {(a, a), (b, b), (c, c)}.

प्रश्न 3. यदि f : $R^+ \to R^+$ तथा g : $R^+ \to R^+$ निम्न प्रकार परिभाषित हों कि f(x) = x^2 तथा g(x) = $\sqrt{x}$ तो gof तथा fog ज्ञात कीजिए। क्या ये तुल्य फलन है?

हल : दिया है, f: $R^+ \to R^+$,f(x) = x^2

g: $R^+ \to R^+$, g(x) = $\sqrt{x}$

(gof)(x) = g[f(x)] = $g(x)^2$ = $\sqrt{x^2}$ = x

(fog)(x) = f[g(x)] = f($\sqrt{x}$) = $(\sqrt{x})^2$ = x

उपरोक्त से स्पष्ट है कि

(fog)(x) = (gof) (x) = x, $\forall x \in R^+$

अत: (fog) तथा (gof) तुल्य फलन है।

प्रश्न 4. यदि f: R $\to$ R तथा g : R $\to$ R दो ऐसे फलन हैं कि f(x) = 3x + 4 तथा g(x) = $\frac{1}{3}$ (x-4), तो (fog)(x) तथा (gof)(x) ज्ञात कीजिए। साथ ही (gog)(1) का मान भी ज्ञात कीजिए।

हल : दिये गये फलन हैं,

f: R $\to$ R, f(x) = 3x + 4

g: R$\to$ R, g(x) = $\frac{x-4}{3}$

$\therefore$ (fog)(x) = f(g(x))

$$= f\left(\frac{x-4}{3}\right) = 3\left(\frac{x-4}{3}\right) + 4$$

$$= x - 4 + 4 = x$$

$$(gof)(x) = g[f(x)] = g(3x + 4)$$

$$= \frac{3x + 4 - 4}{3} = \frac{3x}{3} = x$$

अब $$(gog)(x) = g[g(x)]$$

$$gog(1) = g[g(1)] = g(-1)$$

$$= \frac{-1-4}{3} = \frac{-5}{3}$$

प्रश्न 5. यदि f, g, h तीन फलन R से R पर इस प्रकार परिभाषित हैं कि $f(x) = x^2$, g(x) = cos x एवं h(x) = 2x + 3, तो {ho(gof)} $\sqrt{2\pi}$ का मान लिखिये।

हल : दिया है : $f(x) = x^2$, g(x) = cos x, h(x) = 2x + 3

$\therefore$ {ho(gof)}(x) = hog{{(x)} = h[g{f(x)}]

$= h[g(x^2)] = h(\cos x^2)$

$= 2 \cos x^2 + 3$

$\therefore$ {ho(gof}} $\sqrt{2\pi} = 2 \cos (\sqrt{2\pi})^2 + 3$

$= 2 \cos 2\pi + 3$

$= 2 \times 1 + 3 = 5$

प्रश्न 6. यदि f तथा g निम्न प्रकार परिभाषित हों, तो (gof) (x) ज्ञात कीजिए

(i) f : R $\rightarrow$ R, $f(x) = 2x + x^{-2}$

(ii) g : R $\rightarrow$ R, $g(x) = x^4 + 2x + 4$

हल : दिया है,f : R $\rightarrow$ R

$f(x) = 2x + x^{-2}$

g : R $\rightarrow$ R, $g(x) = x^4 + 2x + 4$

(gof)(x) = g{f(x)}

$= g\{2x + x^{-2}\}$
$= (2x + x^{-2})^4 + 2(2x + x^{-2}) + 4$

प्रश्न 7. यदि A = {1, 2, 3, 4},f: R→ R, f(x) = $x^2 + 3x + 1$ g: R → R, g(x) = 2x - 3, तब तब ज्ञात कीजिए :

(i) (fog)(x)
(ii) (gof)(x)
(iii) (fof)(x)
(iv) (gog)(x)

हल : दिया है :
f: R → R, (x) = $x^2 + 3x + 1$
g : R - R, g(x) = 2x - 3

(i) ∴ (fog)(x) = f{g(x)}
=f{2x - 3}
$= (2x - 3)^2 + 3(2x - 3) + 1$
$= 4x^2 - 12x + 9 + 6x - 9 + 1$
$= 4x^2 - 6 + 1$

(ii) (gof)(x) = g{(x)}
$= g(x^2 + 3x + 1)$
$= 2(x^2 + 3x + 1) - 3$
$= 2x^2 + 6x + 2 - 3,$
$= 2x^2 + 6x - 1.$

(iii) (fof)(x) = f{f(x)}
$= f(x^2 + 3x + 1)$
$= (x^2 + 3x + 1)^2 + 3(x^2 + 3x + 1) + 1$
$= x^4 + 9x^2 + 1 + 6x^3 + 6x + 2x^2 + 3x^2 + 9x + 3 + 1$
$= x^4 + 6x^3 + 14x^2 + 15x + 15$

(iv) $(gog)(x) = g\{g(x)\}$
$= g(2x - 3)$
$= 2(2x - 3) - 3$
$= 4x - 6 - 3$
$= 4x - 9$

Ex 1.2

प्रश्न 1. यदि A = {1, 2, 3, 4}, B = {a, b, c, d} हो, तो A से B में चार एकैकी आच्छादक फलन परिभाषित कीजिये तथा उनके प्रतिलोम फलन भी बताइए।

हल : दिया है : A = {1, 2, 3, 4}, B = {a, b, c, d}

(a) f1 = {(1, a), (2, b), (3, c), (4, d)}

$f1^{-1}$ = {(a, 1), (b, 2), (c, 3), (d, 4)}

(b) f2 = {(1, a), (2, c), (3, b), (4, d}}

$f2^{-1}$ = {(a, 1), (c, 2), (b, 3), (d, 4}}

(c) f3 = {(1, b), (2, a), (3, 4), (4, b)}

$f3^{-1}$ = {(b, 1), (a, 2), (d, 3), (b, 4)}

(d) f4 = {(1, c), (2, 4), (3, 4), (4, b)}

$f4^{-1}$ = {(c, 1), (d, 2), (a, 3), (b, 4)}

प्रश्न 2. यदि $f: R \rightarrow R, f(x) = x^3 - 3$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि f^{-1} विद्यमान होगा तथा f^{-1} का सूत्र भी ज्ञात कीजिये। अतः $f^{-1}(24)$ तथा $f^{-1}(5)$ के मान भी ज्ञात कीजिये।

हल : दिया गया है,
$f: R \rightarrow R, f(x) = x^3 - 3$
एकैकी/बहुएकी : माना $a, b \in R$.

$\therefore f(a) = f(b)$
$\because f(a) = f(b)$
$a^3 - 3 = b^3 - 3$
$a^3 = b^3$
$a = b$

अतः $f(a) = f(b)$

$\Rightarrow a = b$

$\therefore$ f एकैकी फलन है।

आच्छादक/अन्तःक्षेपी : माना $y \in R$ (सह-प्रान्त)

$f(x) = y$
$\Rightarrow x^3 - 3 = y$
$\Rightarrow x = (y + 3)^{1/3} \in R \ \forall\ y \in R$

अतः y के प्रत्येक मान के लिए x प्रान्त R में विद्यमान है।

इस प्रकार, F का परिसर = f का सहप्रान्त

अतः f आच्छादक फलन है।

उपरोक्त से स्पष्ट है कि f एकैकी आच्छादक फलन है, इसलिये

$f^{-1}, R \rightarrow R$ विद्यमान होगा।

$f^{-1}(y) = x$
$\Rightarrow f(x) = y$
$\Rightarrow f(x) = x^3 - 3$
$\Rightarrow x^3 - 3 = y$
$\Rightarrow x^3 = y + 3$
$\Rightarrow x = (y + 3)^{1/3}$
$\Rightarrow f^{-1}(y) = (y + 3)^{1/3}$
$\Rightarrow f^{-1}(x) = (x + 3)^{1/3} \ \forall\ x \in R$

x = 24 के लिए,

$\therefore f^{-1}(24) = (24 + 3)^{1/3} = (27)^{1/3}$
$= 3^{3 \times 1/3} = 3$

x = 24 के लिए,

$f^{-1}(5) = (5 + 3)^{1/3} = (8)^{1/3}$
$= 2^{3 \times 1/3} = 2$

प्रश्न 3. यदि $f: R \rightarrow R$ निम्न प्रकार परिभाषित है :
(i) $f(x) = 2 - 3$
(ii) $f(x) = x^3 + 5$
तो सिद्ध कीजिये कि दोनों स्थितियों में f एकैकी आच्छादक है। f^{-1} भी ज्ञात कीजिये।

हल : दिया गया फलन है,

$f: R \rightarrow R, f(x) = 2x - 3$

एकैकी/बहुएकी-माना $a, b \in R$
$f(a) = f(b)$
$\Rightarrow 2a - 3 = 2b - 3$
$\Rightarrow 2a = 2b$
$\Rightarrow a = b$
अतः $f(a) = f(b) \Rightarrow a = b \ \forall a, b \in R$
$\therefore$ f एकैकी फलन है।
आच्छादक/अन्तःक्षेपी—माना $y \in R$ (सह-प्रान्त)
$\Rightarrow f(x) = y$
$\Rightarrow 2x - 3 = y$
$\Rightarrow x = \frac{y+3}{2} \in R \ \forall \ y \in R$
अतः y के प्रत्येक मान के लिए पूर्व प्रतिबिम्ब प्रान्त R में विद्यमान है। इसलिए फलन f आच्छादक फलन है।
उपरोक्त से स्पष्ट है कि f एकैकी आच्छादक फलन है, अतः $f^{-1} : R \rightarrow R$ विद्यमान होगा।
माना $x \in R$ (f का प्रान्त) तथा $y \in R$ (f का सह-प्रान्त)
माना $f(x) = y$ तब $f^{-1}(y) = x$
$\Rightarrow f(x) = y$
$\Rightarrow 2x - 3 = y$,
$\Rightarrow x = \frac{y+3}{2} \in R$
$\Rightarrow f^{-1}(y) = \frac{y+3}{2}$
$\Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x+3}{2} \ \forall \ x \in R$

(ii) प्रश्नानुसार
$f: R \rightarrow R, f(x) = x^3 + 5$
एकैकी/बहुएकी : माना $a, b \in R$
$f(a) = f(b)$
$a^3 + 5 = b^3 + 5$
$a^3 = b^3$
$a = b$
अतः $f(a) = f(b)$
$a = b \ \forall \ a, b \in R$
$\therefore$ f एकैकी फलन है।
आच्छादक/अन्तःक्षेपी : माना $y \in R$ (सह-प्रान्त)
$f(x) = y$
$x^3 + 5 = y$
$x^3 = y - 5$
$x = (y - 5)^{1/3} \in R \ \forall \ x \in R$

अत: y के प्रत्येक मान के लिए पूर्व प्रतिबिम्ब प्रान्त R में विद्यमान है। इसलिए F का परिसर = F का सहप्रान्त

अतः फलन f आच्छादक फलन है।

अत: हम कह सकते हैं। f एकैकी आच्छादक फलन है; अतः $f^{-1} : R \to R$ अग्र प्रकार परिभाषित होगा।

$f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow (x) = y$ ...(i)

$\Rightarrow f(x) = y$

हल : दिया है, $a*b= a + b + 1, \forall a, b \in Z.$

क्रम-विनिमेय : $a*b = a + b + 1$

$a*b = b + a + 1$

$= b*a$

$\therefore a*b = b*a$

$\therefore$ * संक्रिया क्रम-विनिमेय हैं।

साहचर्य : $(a*b)*c= (a + b + 1)*c$

$= a + b + 1 + c + 1$

$= a + b + c + 2$

पुनः $a*(b*c) = a*(b + c + 1)$

$= a + b + c + 1 + 1$

$= a + b + c + 2$

$\Rightarrow a*(b*c) = (a*b)*c$

$\therefore$* संक्रिया साहचर्य है।

तत्समक: यदि e तत्समक अवयव हो, तो

$a*e = a$

$\Rightarrow a + e + 1 = a$

$\Rightarrow e = -1$

अत: $-1 \in Z$ तत्समक अवयव है।

प्रतिलोम : माना a का प्रतिलोम x है, तब परिभाषा के अनुसार,

$a*= 0$ [$\because$ 0 योग तत्समक हैं]

$\Rightarrow a + x + 1 = 0$

$\Rightarrow x = -(a + 1) \in Z$

यदि $a \neq -1$

प्रतिलोम अवयव $-(a + 1)$ यदि $a \neq -1$

प्रश्न 4. समुच्चय $R - \{1\}$ पर एक द्विचर संक्रिया निम्न प्रकार परिभाषित है : ।
$a*b = a + b - ab, \forall a, b \in R - \{1\}$

सिद्ध कीजिये कि ∗ क्रम-विनिमेय तथा साहचर्य है। तत्समक अवयव ज्ञात कीजिये तथा किसी अवयव a का प्रतिलोम भी ज्ञात कीजिये।

हल : यदि a, b ∈ R − {1} तो परिभाषानुसार,
a*b = a + b − ab
= b + a − ba
= b*a
∴ * एक क्रम-विनिमेय संक्रिया है।
पुनः (a*b)*c = (a + b − ab)*c
= (a + b − ab) + c − (a + b − ab).c
= a + b − ab + c − ac − bc + abc
= a + b + c − ab − bc − ac + abc ...(i)
तथा a*(b*c) = a*(b + c − bc)
= a + (b + c − bc) − a.(b + c − bc)
= a + b + c − bc − ab − ac + abc
= a + b + c − ab − bc − ac + abc ...(ii)

(i) और (ii) से स्पष्ट है कि
(ab)*c = a*(b*c)
∴ * एक साहचर्य संक्रिया है।
माना ∗ का तत्समक अवयव e हो, तब किसी a ∈ R के लिये
a*e = a (तत्समक की परिभाषा से)
a + e − ae = a
e(1 − a) = 0
e = 0 ∈ R − {1}
1 − a ≠ 0 .
∴* का तत्समक अवयव 0 है।
माना b,a का प्रतिलोम है, तो a*b = e
a + b − ab = 0.e
b + ab = − a
$b = \frac{-a}{a-1}$ या $\frac{a}{a-1}$
अत: a का प्रतिलोम है $b = \frac{a}{a-1}$

प्रश्न 5. समुच्चय R_0 में चार फलन निम्न प्रकार परिभाषित है : $f_1(x) = x$, $f_2(x) = -x$, $f_3(x) = 1/x$, $f_4(x) = -1/x$
फलनों का संयुक्त संक्रिया के लिए f_1, f_2, f_3, f_4 की संक्रियता सारणी बनाइये। तत्समक अवयव

तथा प्रत्येक अवयव का प्रतिलोम भी ज्ञात कीजिये।

हल : दिया है, $f_1(3) = x$, $f_2(x) = -x$,

$$f_1 o f_1(x) = f_1[f_1(x) = f_1(x) = x$$

$\Rightarrow$ $$f_1 o f_1 = f_1$$

$$f_1 o f_2(x) = f_1[f_2(x)] = f_1(-x) = -x = f_2(x)$$

$\Rightarrow$ $$f_1 o f_2 = f_2$$

$$f_1 o f_3(x) = f_1[f_3(x)] = f_1\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} = f_3(x)$$

$\Rightarrow$ $$f_1 o f_3 = f_3$$

$$f_1 o f_4(x) = f_1[f_4(x)] = f_1\left(\frac{-1}{x}\right) = -\frac{1}{x} = f_4(x)$$

$\Rightarrow$ $$f_1 o f_4 = f_4$$

$$f_2 o f_1(x) = f_2[f_1(x)] = f_2(x) = -x = f_2(x)$$

$\Rightarrow$ $$f_2 o f_1 = f_2$$

$$f_2 o f_2(x) = f_2[f_2(x)] = f_2(-x) = x = f_1(x)$$

$\Rightarrow$ $$f_2 o f_2 = f_1$$

$$f_2 o f_3(x) = f_2[f_3(x)] = f_2\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x} = f_4(x)$$

$\Rightarrow$ $$f_2 o f_3 = f_4$$

$$f_2 o f_4(x) = f_2[f_4(x)] = f_2\left(-\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} = f_3(x)$$

$\Rightarrow$ $$f_2 o f_4 = f_3$$

$$f_3 o f_1(x) = f_3[f_1(x)] = f_3(x) = \frac{1}{x} = f_3(x)$$

$\Rightarrow$ $$f_3 o f_1 = f_3$$

$$f_3 o f_2(x) = f_3[f_2(x)] = f_3(-x) = -\frac{1}{x} = f_4(x)$$

$\Rightarrow$ $$f_3 o f_2 = f_4$$

$$f_3of_3(x) = f_3[f_3(x)] = f_3\left(\frac{1}{x}\right) = x = f_1(x)$$

$$\Rightarrow \quad f_3of_3 = f_1$$

$$f_3of_4(x) = f_3[f_4(x)] = f_3\left(-\frac{1}{x}\right) = -x = f_2(x)$$

$$\Rightarrow \quad f_3of_4 = -f_2$$

$$f_4of_1(x) = f_4[f_1(x)] = f_4(x) = -\frac{1}{x} = f_4(x)$$

$$\Rightarrow \quad f_4of_1 = f_4$$

$$f_4of_2(x) = f_4[f_2(x)] = f_4(-x) = \frac{1}{x} = f_3(x)$$

$$\Rightarrow \quad f_4of_2 = f_3$$

$$f_4of_3(x) = f_4[f_3(x)] = f_4\left(\frac{1}{x}\right) = -x = f_2(x)$$

$$\Rightarrow \quad f_4of_3 = f_2$$

$$f_4of_4(x) = f_4[f_4(x)] = f_4\left(-\frac{1}{x}\right) = x = f_1(x)$$

$$\Rightarrow \quad f_4of_4 = f_1$$

$\therefore$ उपरोक्त संक्रियाओं हेतु सारणी

O	f_1	f_2	f_3	f_4
f_1	f_1	f_2	f_3	f_4
f_2	f_2	f_1	f_4	f_3
f_3	f_3	f_4	f_1	f_2
f_4	f_4	f_3	f_2	f_1

सारणी से स्पष्ट है कि f_1, f_2, f_3, f_4 की तत्समक अवयव f_1 है। प्रत्येक अवयव का प्रतिलोम भी स्वयं ही है।

Miscellaneous Exercise

प्रश्न 1. यदि $f : R \to R, f(x) = 2x - 3; g : R \to R, g(x) = x^3 + 5$ हो तब $(fog)^{-1}(x)$ का मान होगा

(a) $\left(\frac{x+7}{2}\right)^{1/3}$ (b) $\left(x-\frac{7}{2}\right)^{1/3}$

(c) $\left(\frac{x-2}{7}\right)^{1/3}$ (d) $\left(\frac{x-7}{2}\right)^{1/3}$

हल : दिया है,

$f : R \to R, f(x) = 2x - 3$
$g : R \to R, g(x) = x^3 + 5$
$\therefore (fog)(x) = f[g(x)]$
$= f(x^3 + 5)$
$= 2(x^3 + 5) - 3$
$= 2x^3 + 10 - 3$
$= 2x^3 + 7$

माना $y = (fog)(x) = 2x^3 + 7$
$\therefore (fog)^{-1}(y) = x$

$$= \left(\frac{y-7}{2}\right)^{1/3}$$

$$\therefore \quad (fog)^{-1}(x) = \left(\frac{x-7}{2}\right)^{1/3}$$

अत: सही विकल्प (d) है।

प्रश्न 2. यदि $f(x) = \frac{x}{1-x} = \frac{1}{y}$ तो $f(y)$ का मान होगा

(a) 2x
(b) x − 1
(c) x + 1
(d) (1 − 3)

हल : दिया है,

$f(x) = \frac{x}{1-x} = \frac{1}{y}$

$$\Rightarrow \qquad \frac{x}{1-x} = \frac{1}{y}$$

$$\Rightarrow \qquad y = \frac{1-x}{x}$$

$$\therefore \qquad f(y) = \frac{y}{1-y} = \frac{\frac{1-x}{x}}{1-\frac{1-x}{x}}$$

$$= \frac{\frac{1-x}{x}}{\frac{x-1+x}{x}} = \frac{(1-x)}{2x-1}$$

अत: उपर्युक्त विकल्पों में से में सही विकल्प कोई नहीं है।

प्रश्न 3. यदि f(x) = $\frac{x-3}{x+1}$ हो, तो f[f{(x)}] बराबर है
(a) x
(b) 1/x
(c) -x
(d) -1/x

हल :

दिया है,
f(x) = $\frac{x-3}{x+1}$

$$\therefore\ f[f\{f(x)\}] = f\left[f\left\{\frac{x-3}{x+1}\right\}\right] = f\left[\frac{\frac{x-3}{x+1}-3}{\frac{x-3}{x+1}+1}\right]$$

$$= f\left[\frac{\frac{x-3-3x-3}{x+1}}{\frac{x-3+x+1}{x+1}}\right] = f\left[\frac{-2x-6}{2x-2}\right]$$

$$= f\left[\frac{-x-3}{x-1}\right] = \frac{\frac{-x-3}{x-1}-3}{\frac{-x-3}{x-1}+1}$$

$$= \frac{\frac{-x-3-3x+3}{x-1}}{\frac{-x+3+x-1}{x-1}} = \frac{-4x}{-4} = x$$

अत: सही विकल्प (a) है।

प्रश्न 4. यदि f(x) = cos (log x) हो तो f(x) . f(y) – $\frac{1}{2}$ [f(x/y)] – f(x.y) बराबर है
(a) -1
(b) 0
(c) 1/2
(d) – 2

हल : दिया है, f(x) = cos (log x)

$\therefore$ $f(x).f(y) - \frac{1}{2}\left[f\left(\frac{x}{y}\right) + f(x.y)\right]$

= cos (log x) cos (log y) $-\frac{1}{2}\left[cos\left(log\frac{x}{y}\right) + cos(log \quad xy)\right]$

= cos (log x) cos (logy) – $\frac{1}{2}$ [cos (logx – logy) + cos (logx + logy)]

= cos (log.x) cos (logy) – $\frac{1}{2}$ [2 cos (log x) cos (logy)]

= cos (log x) cos (logy) – cos (log x) cos (logy)

= 0

अतः विकल्प (b) सही है।

प्रश्न 5. यदि $f : R \rightarrow R$, $f(x) = 2x + 1$ और $g : R \rightarrow R$, $g(x) = x^3$, तो $(gof)^{-1}(27)$ बराबर है

(a) 2
(b) 1
(c) -1
(d) 0

हल : माना $(gof)^{-1}(27) = x$

$(gof)(x) = 27$
$g\{f(x)\} = 27$
$g\{2x + 1\} = 27$
$(2x + 1)^3 = 27$
$2x + 1 = 27^{1/3}$
$2x + 1 = 3^{3 \times 1/3}$
$2x + 1 = 3$
$\therefore 2x = 2$
$\Rightarrow x = 1$
अतः विकल्प (b) सही है।

प्रश्न 6. यदि $f : R \rightarrow R$ तथा $g : R \rightarrow R$, जहां $f(x) = 2x + 3$ तथा $g(x) = x^2 + 1$ तब $(gof)(2)$ का मान है

(a) 38
(b) 42
(c) 46
(d) 50

हल : माना $(gof)(2) = y$

$\therefore y = g\{f(2)\}$
$= g\{2 \times 2 + 3\}$
$= g(7)$
$= (7)^2 + 1$
$= 49 + 1$
$= 50$
अतः सही विकल्प (d) है।

प्रश्न 7. यदि समुच्चय Q_0 पर एक संक्रिया $*$, $a*b = ab/2, \forall a, b \in Q_0$, द्वारा परिभाषित की जाये तो इस संक्रिया का तत्सम अवयव है-

(a) 1
(b) 0

(c) 2
(d) 3

हल : यदि e तत्समक अवयव हो तो।

$a \in Q_0$ के लिए

a*e = a

$\Rightarrow \frac{ae}{2} = a$

$\Rightarrow e = 2$

अतः विकल्प (c) सही है।

प्रश्न 8. वास्तविक संख्याओं के समुच्चय R में एक द्विचरं संक्रिया a*b = 1 + ab, ∀ a, b ∈ R द्वारा परिभाषित है, तब संक्रिया ∗ है

(a) क्रमविनिमेय पर साहचर्य नहीं

(b) साहचर्य पर क्रम-विनिमेय नहीं

(c) न साहचर्य न क़्रम-विनिमेय

(d) साहचर्य तथा क्रम-विनिमेय दोनों

हल : दिया है, a*b = 1 + ab, ∀a, b ∈ R

क्रम-विनिमेयता : a*b = 1 + ab
= 1 + b.a
= b*a

∵ वास्तविक संख्याओं का समुच्चय क्रम-विनिमेय होता है।

अतः a*b = b*a

∴ * संक्रिया क्रमविनिमेय है।

साहचर्यता : (a*b)*c = (1 + ab)*c
= 1 + abc
a*(b*c) = a*(1 + bc)
= 1 − a(1 + bc)
= 1 + a + abc

स्पष्ट है कि (a*b)*c* ≠ a*(b*c)

अतः ∗ संक्रिया साहचर्य नहीं है।

अतः विकल्प (a) सही है।

प्रश्न 9. पूर्णाकों के समुच्चय z के व्यवकलन (subtraction) एक ऐसी संक्रिया है जो

(a) क्रम-विनिमेय तथा साहचर्य है।

(b) साहचर्य परन्तु क्रम-विनिमेय नहीं
(c) न क़म-विनिमेय न साहचर्य
(d) क्रम-विनिमेय पर साहचर्य नहीं व्यवकलन की

उत्तर- माना a, b ∈ Z
क्रम-विनिमेयता : अतः
a − b ≠ b − a
अर्थात् संक्रिया क्रमविनिमेय नहीं है।
साहचर्यता : (a − b) − c ≠ a − (b − c)
अत: व्यकलन की संक्रिया साहचर्य नहीं है।
विकल्प (c) सही है।

प्रश्न 10. पूर्णाकों के समुच्चय Z में एक संक्रिया *, a*b = a + b − ab, ∀ a, b ∈ Z द्वारा परिभाषित है। इस संक्रिया के सापेक्ष किसी अवयव a(≠1) का प्रतिलोम है :

(a) $\frac{a}{a-1}$ (b) $\frac{a}{1-a}$
(c) $\frac{a-1}{a}$ (d) $\frac{1}{a}$

हल : दिया है, a*b = a + b − ab, ∀ a, b ∈ Z
माना a ∈ Z यदि संभव हो, तो माना a का प्रतिलोम x है,
तब परिभाषा के अनुसार
a*x = 0 (∵ 0 तत्समक है)
a + x − ax = 0
x(1 − a) = − a
$x = \frac{-a}{1-a}$
= $\frac{a}{a-1}$ ∈ Z (यदि a ≠ 1)
अतः विकल्प (a) सही है।

प्रश्न 11. R में परिभाषित निम्न में से कौन सी संक्रिया क्रमविनिमेय
(a) $a*b = a^2b$
(b) $a*b = a^b$
(c) a*b = a − b + ab
(d) $a*b = a + b + a^2$

हल : (a) ∵ $a*b = a^2b$ तथा $b*a = b^2a$
∴ $a*b \neq b*a$
अतः संक्रिया क्रम विनमेयी नहीं है।

(b) ∵ $a*b = a^b$ तथा $b*a = b^a$
∴ $a*b \neq b*a$
अतः संक्रिया क्रम विनमेयी नहीं है।

(c) ∵ $a*b = a - a + ab$ तथा $b*a = b - a + ba$
∴ $a*b \neq b*a$
अतः संक्रिया क्रम विनमेयी नहीं है।

(d) ∵ $a*b = a + b + a^2b$ तथा $b*b = b + a + b^2a$
∴ $a*b \neq b*a$
अतः संक्रिया क्रम विनमेयी नहीं है।
अत: कोई भी संक्रिया क्राम विनमेयी नहीं है।

प्रश्न 12. निम्न तीन फलनों के लिए संयुक्त फलन संक्रिया के लिये साहचर्य नियम का सत्यापन कीजिये
$f : N \rightarrow Z_0$, $f(x) = 2x$
$g : Z_0 \rightarrow Q$, $g(x) = 1/x$
$h : Q \rightarrow R$, $h(x) = e^x$

हल : दिया है,
$f : N \rightarrow Z_0$
$g : Z_0 \rightarrow Q$
$h : Q \rightarrow R$
$ho(gof) : N \rightarrow R$ तथा
$(hog)of : N \rightarrow R$

इसी प्रकार ho(gof) तथा (hog)of के प्रान्त तथा सह-प्रान्त समान हैं; क्योंकि दोनों फलनों N से R में परिभाषित हैं; अत: सिद्ध करना है कि
$[ho(gof)](x) = [(hog)of)](x) \ \forall \ x \in N$

अब $[ho(gof)](x) = h[(gof)(x)]$
$= h[g\{f(x)]$

$= h[g(2x)]$
$= h\left(\frac{1}{2x}\right)$
$[ho(gof)](x) = e^{\frac{1}{2x}}$ ….(i)

पुनः $[(hog)of](x) = (hog)f(x) = (hog)(2x)$
$= h[g(2x)]$
$= h\left(\frac{1}{2x}\right)$
$= e^{\frac{1}{2x}}$
$[(hog)of](x) = e^{\frac{1}{2x}}$ …..(ii)
समी. (i) और (ii) से,
$(hog)of = ho(gof)$
अतः फलन f, g, h की साहचर्यता सत्यापित होती है। इति सिद्धम्।

प्रश्न 13. यदि $f : R^+ \to R^+$ तथा $g : R^- \to R^-$ निम्न प्रकार परिभाषित हो कि $f(x) = x^2$, $g(x) = \sqrt{x}$, तो gof तथा fog ज्ञात कीजिये। क्या ये फलन तुल्य हैं?

हल : दिया है $f : R^+ \to R^+$, $f(x) = x^2$
$g : R^+ \to R^+$, $g(x) = \sqrt{x}$
तब $(fog) : R^+ \to R^+$ एवं $(gof) : R^+ \to R^+$ परिभाषित हैं।
$\therefore (gof)(x) = g[f(x)]$
$= g(x^2) = \sqrt{x^2} = x$
$(fog)(x) = f[g(x)]$
$= f(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 = x$
उपरोक्त के आधार पर (gof) तथा (fog) के प्रान्त, सह-प्रान्त समान हैं और
$(fog)(x) = (gof)(x) \ \forall \ x \in R^+$
अत: (fog) तथा (gof) तुल्य फलन हैं।

प्रश्न 14. यदि $f : R \to R$, $f(x) = \cos(x + 2)$ हो, तो ज्ञात कीजिये कि f प्रतिलोमी फलन है या नहीं, कारण सहित अपने उत्तर की पुष्टि कीजिये।

हल : दिया गया फलन है,
$f : R \to R$, $f(x) = \cos(x + 2)$
$x = 2\pi$ रखने पर।
$f(2\pi) = \cos(2\pi + 2)$
$= \cos(2)$
$x = 0$ रखने पर

$f(0) = \cos(0 + 2)$
$= \cos 2'$

यहाँ 0 व 2π के लिए एक ही प्रतिबिम्ब प्राप्त होता है। इसलिए फलन एकैकी नहीं है। इस प्रकार फलन एकैकी आच्छादक नहीं है।

अतः $f^{-1} : R \to R$ विद्‌यमान नहीं हो सकता।

प्रश्न 15.. यदि $A = \{-1, 1\}$ तथा A में परिभाषित दो फलन f तथा g हैं जहाँ $f(x) = x^2$, $g(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$, तो सिद्ध कीजिये कि g^{-1} विद्‌यमान है जबकि f^{-1} भी ज्ञात कीजिये।

हले : दिया है, $A = \{-1, 1\}$
$f(x) = x^2$, $g(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$
एकैकी/बहुएकी : $f : A \to A$, $f(x) = x^2$
$f(-1) = f(1) = 1$
⇒ − 1 और 1 का प्रतिबिम्ब भिन्न नहीं है।
अतः एकैकी नहीं है।
आच्छादक/अन्तःक्षेपी : साथ ही सह-प्रान्त में ऐसे अवयव हैं जो प्रान्त के किसी अवयव के प्रतिबिम्ब नहीं हैं।
अतः f आच्छादक नहीं है।
इसलिये फलन f एकैकी और आच्छादक नहीं है। अतः f^{-1} विद्‌यमान नहीं है।
इसी प्रकार $g(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$ के लिये
एकैकी/बहुएकी : माना $x_1, x_2, \in A$ इस प्रकार है कि
$f(x_1) = f(x_2)$

$$\Rightarrow \quad \sin\frac{\pi x_1}{2} = \sin\frac{\pi x_2}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\pi x_1}{2} = \frac{\pi x_2}{2}$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = x_2$$

अतः फलन एकैकी है।
साथ ही माना $y \in R$ (सह-प्रान्त)यदि सम्भव हो, तो y का पूर्व प्रतिबिम्ब प्रान्त R में x है, तब
$g(x) = y$

$$\Rightarrow \quad \frac{\pi x}{2} = \sin^{-1} y$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{2}{\pi} \sin^{-1} y \; \forall \; y \in A$$

चूँकि y के प्रत्येक मान को पूर्व प्रतिबिम्ब प्रान्त R में विद्यमान है।
इसलिए g(x) आच्छादक फलन है।
अत: g(x) एकैकी आच्छादक फलन है इसलिए g^{-1} विद्यमान है।

माना $y \in R$ तथा $g^{-1}(y) = \frac{2}{\pi} \sin^{-1} y$

$$\therefore \quad g^{-1}(x) = \frac{2}{\pi} \sin^{-1} x$$

प्रश्न 16. यदि f : R → R तथा g : R → R ऐसे फलन हैं कि f(x) = 3x +4 तथा g(x) = $\frac{x-4}{3}$, तो (fog)(x) तथा (gof)(x) ज्ञात कीजिये। साथ ही (gog)(1) का मान ज्ञात कीजिये।

हल : दिया है,
f : R → R, f(x) = 3x + 4
g : R → R, g(x) = $\frac{x-4}{3}$
∴ (fog)(x) = f[g(x)]