

الجبری عبارتوں کے اجزائے ضربی

6

آئیے ذرا یاد کریں



گذشتہ جماعت میں ہم $ax + ay$ اور $a^2 - b^2$ کی نوعیت والی الجبری عبارتوں کے اجزائے ضربی کا مطالعہ کر چکے ہیں۔

مثلاً (1) $4xy + 8xy^2 = 4xy(1 + 2y)$

(2) $p^2 - 9q^2 = (p)^2 - (3q)^2 = (p + 3q)(p - 3q)$

آئیے سمجھ لیں



مربعی سرکئی کے اجزائے ضربی (Factors of Quadratic Trinomial) :

$ax^2 + bx + c$ نوعیت کی الجبری عبارت کو مربعی سرکئی کہتے ہیں۔

ہم جانتے ہیں کہ $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$

اس لیے $x^2 + (a + b)x + ab$ کے $(x + a)$ اور $(x + b)$ جزو ضربی ہیں۔

سرکئی $x^2 + 5x + 6$ کے اجزائے ضربی معلوم کرنے کے لیے اس کا موازنہ سرکئی $x^2 + (a + b)x + ab$ سے کرنے پر $a + b = 5$ اور $ab = 6$ آتا ہے۔ لہذا 6 کے ایسے دو جزو ضربی کریں گے کہ ان کی جمع 5 آئے اور سرکئی کو $x^2 + (a + b)x + ab$ کی صورت میں لکھ کر اس کا اجزائے ضربی معلوم کریں گے۔

$$x^2 + 5x + 6 = x^2 + (3 + 2)x + 3 \times 2 \quad \dots [\because x^2 + (a + b)x + ab]$$

$(3 + 2)$ کو x سے ضرب کرنے پر حاصل ہونے والے 4 ارکان کے دو گروہ بتائیں گے اور اجزائے ضربی حاصل کریں گے

$$= x^2 + 3x + 2x + 2 \times 3$$

$$= x(x + 3) + 2(x + 3) = (x + 3)(x + 2)$$

(دی ہوئی مربعی سرکئی کے اجزائے ضربی کرنے کے طریقے کو سمجھنے کے لیے ذیل کی مثالوں کا مطالعہ کیجیے)

مثال 1 : $2x^2 - 9x + 9$ کے اجزائے ضربی کیجیے۔

حل : مربعی رکن کے ضربی اور مستقل رکن کا ضرب کریں گے۔ ان کا حاصل ضرب $2 \times 9 = 18$ ہے۔

اب 18 کے دو جزو ضربی معلوم کریں گے کہ ان کی جمع درمیانی رکن کے ضربی کے برابر یعنی -9 آئے۔

$$\begin{aligned} 2x^2 - 9x + 9 \\ = 2x^2 - 6x - 3x + 9 \\ = 2x(x - 3) - 3(x - 3) \\ = (x - 3)(2x - 3) \end{aligned}$$

$$18 = (-6) \times (-3) ; (-6) + (-3) = -9$$

رکن $-9x$ کو $-6x - 3x$ لکھیں گے۔

$(x - 3)$ مشترک جزو نکالیں گے۔

$$\therefore 2x^2 - 9x + 9 = (x - 3)(2x - 3)$$

مثال 2 : $2x^2 + 5x - 18$ کے اجزائے ضربی معلوم کیجیے۔

حل : $2x^2 + 5x - 18$

$$= \frac{2x^2 + 9x}{+9} - \frac{4x - 18}{-4}$$

$$= x(2x + 9) - 2(2x + 9)$$

$$= (2x + 9)(x - 2)$$

مثال 3 : $x^2 - 10x + 21$ کے اجزائے ضربی معلوم کیجیے۔

حل : $x^2 - 10x + 21$

$$= \frac{x^2 - 7x}{-7} - \frac{3x + 21}{-3}$$

$$= x(x - 7) - 3(x - 7)$$

$$= (x - 7)(x - 3)$$

مثال 4 : $2y^2 - 4y - 30$ کے اجزائے ضربی کیجیے۔

حل : $2y^2 - 4y - 30$

$$= 2(y^2 - 2y - 15)$$

(تمام ارکان سے 2 مشترک جزو ضربی نکال کر) ...

$$= 2(\frac{y^2 - 5y}{-5} + \frac{3y - 15}{+3})$$

$$= 2[y(y - 5) + 3(y - 5)]$$

$$= 2(y - 5)(y + 3)$$

مشقی سیٹ 6.1

1. اجزائے ضربی کیجیے۔

(1) $x^2 + 9x + 18$

(2) $x^2 - 10x + 9$

(3) $y^2 + 24y + 144$

(4) $5y^2 + 5y - 10$

(5) $p^2 - 2p - 35$

(6) $p^2 - 7p - 44$

(7) $m^2 - 23m + 120$

(8) $m^2 - 25m + 100$

(9) $3x^2 + 14x + 15$

(10) $2x^2 + x - 45$

(11) $20x^2 - 26x + 8$

(12) $44x^2 - x - 3$



$a^3 + b^3$ کے اجزائے ضربی (Factors of $a^3 + b^3$) :

ہم جانتے ہیں کہ، $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

دائیں جانب کی عبارت سے $3ab$ مشترک نکال کر اس تو سیمی ضابطے کی ترتیب ذیل کے مطابق کر سکتے ہیں۔

$$(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$$

(طرفین کی اول بدل کر کے) ... $a^3 + b^3 + 3ab(a + b) = (a + b)^3$

$$\therefore a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b) = [(a + b)(a + b)^2] - 3ab(a + b)$$

$$= (a + b)[(a + b)^2 - 3ab] = (a + b)(a^2 + 2ab + b^2 - 3ab)$$

$$= (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$\therefore \boxed{a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)}$$

دو مکعبوں کی جمع کے اجزائے ضربیوں کے مذکورہ بالا ضابطے کا استعمال کر کے کچھ مثالیں حل کریں گے۔

$$\begin{aligned} \text{مثال (1)} \quad x^3 + 27y^3 &= x^3 + (3y)^3 \\ &= (x + 3y) [x^2 - x(3y) + (3y)^2] \\ &= (x + 3y) [x^2 - 3xy + 9y^2] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{مثال (2)} \quad 8p^3 + 125q^3 &= (2p)^3 + (5q)^3 = (2p + 5q) [(2p)^2 - 2p \times 5q + (5q)^2] \\ &= (2p + 5q) (4p^2 - 10pq + 25q^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{مثال (3)} \quad m^3 + \frac{1}{64m^3} &= m^3 + \left(\frac{1}{4m}\right)^3 = \left(m + \frac{1}{4m}\right) \left[m^2 - m \times \frac{1}{4m} + \left(\frac{1}{4m}\right)^2\right] \\ &= \left(m + \frac{1}{4m}\right) \left(m^2 - \frac{1}{4} + \frac{1}{16m^2}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{مثال (4)} \quad 250p^3 + 432q^3 &= 2(125p^3 + 216q^3) \\ &= 2[(5p)^3 + (6q)^3] = 2(5p + 6q) (25p^2 - 30pq + 36q^2) \end{aligned}$$

مشقی سیٹ 6.2

1. اجزائے ضربی کیجیے۔

$$\begin{array}{llll} (1) x^3 + 64y^3 & (2) 125p^3 + q^3 & (3) 125k^3 + 27m^3 & (4) 2l^3 + 432m^3 \\ (5) 24a^3 + 81b^3 & (6) y^3 + \frac{1}{8y^3} & (7) a^3 + \frac{8}{a^3} & (8) 1 + \frac{q^3}{125} \end{array}$$



$a^3 - b^3$ کے اجزائے ضربی (Factors of $a^3 - b^3$):

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b)$$

$$\text{اب, } a^3 - b^3 - 3ab(a - b) = (a - b)^3$$

$$\therefore a^3 - b^3 = (a - b)^3 + 3ab(a - b)$$

$$= [(a - b)(a - b)^2 + 3ab(a - b)]$$

$$= (a - b) [(a - b)^2 + 3ab]$$

$$= (a - b) (a^2 - 2ab + b^2 + 3ab)$$

$$= (a - b) (a^2 + ab + b^2)$$

$$\therefore \boxed{a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)}$$

دو مکعبوں کی تفریق کے اجزائے ضربی کے ضابطے کا استعمال کر کے کچھ عبارتوں کے اجزائے ضربی کریں گے۔

(1) مثال $x^3 - 8y^3 = x^3 - (2y)^3$

$$\therefore x^3 - 8y^3 = x^3 - (2y)^3$$

$$= (x - 2y) (x^2 + 2xy + 4y^2)$$

(2) مثال $27p^3 - 125q^3 = (3p)^3 - (5q)^3 = (3p - 5q) (9p^2 + 15pq + 25q^2)$

(3) مثال $54p^3 - 250q^3 = 2[27p^3 - 125q^3] = 2[(3p)^3 - (5q)^3]$
 $= 2(3p - 5q)(9p^2 + 15pq + 25q^2)$

(4) مثال $a^3 - \frac{1}{a^3} = \left(a - \frac{1}{a}\right) \left(a^2 + 1 + \frac{1}{a^2}\right)$

(5) مثال مختصر کیجیے۔ $(a - b)^3 - (a^3 - b^3)$

حل : $(a - b)^3 - (a^3 - b^3) = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 - a^3 + b^3 = -3a^2b + 3ab^2$

(6) مثال مختصر کیجیے۔ $(2x + 3y)^3 - (2x - 3y)^3$

حل : فرض کیجیے $2x + 3y = a$ اور $2x - 3y = b$

$$a^3 - b^3 = (a - b) (a^2 + ab + b^2)$$

$$\therefore (2x + 3y)^3 - (2x - 3y)^3$$

$$= [(2x + 3y) - (2x - 3y)] [(2x + 3y)^2 + (2x + 3y)(2x - 3y) + (2x - 3y)^2]$$

$$= [2x + 3y - 2x + 3y] [4x^2 + 12xy + 9y^2 + 4x^2 - 9y^2 + 4x^2 - 12xy + 9y^2]$$

$$= 6y (12x^2 + 9y^2) = 72x^2y + 54y^3$$

یہ میری سمجھ میں آ گیا



(i) $a^3 + b^3 = (a + b) (a^2 - ab + b^2)$ (ii) $a^3 - b^3 = (a - b) (a^2 + ab + b^2)$

مشقی سیٹ 6.3

1. اجزائے ضربی کیجیے۔

(1) $y^3 - 27$ (2) $x^3 - 64y^3$ (3) $27m^3 - 216n^3$ (4) $125y^3 - 1$

(5) $8p^3 - \frac{27}{p^3}$ (6) $343a^3 - 512b^3$ (7) $64x^3 - 729y^3$ (8) $16a^3 - \frac{128}{b^3}$

2. مختصر کیجیے۔ (1) $(x + y)^3 - (x - y)^3$ (2) $(3a + 5b)^3 - (3a - 5b)^3$

(3) $(a + b)^3 - a^3 - b^3$ (4) $p^3 - (p + 1)^3$

(5) $(3xy - 2ab)^3 - (3xy + 2ab)^3$

ناطق الجبری عبارتیں یا الجبری عبارتوں کی نسبت (Rational Algebraic Expressions) :

A اور B دو عبارتیں ہوں تو $\frac{A}{B}$ کو الجبری عبارتوں کی نسبت کہتے ہیں۔ الجبری عبارتوں کی نسبت کو مختصر کرتے وقت استعمال میں آنے والے جمع، تفریق، ضرب، تقسیم وغیرہ اعمال ناطق اعداد پر ہونے والے اعمال کی طرح ہوتے ہیں۔
الجبری عبارتوں کی تقسیم کرنے کے دوران نسب نمایا مقسوم الیہ غیر صفر ہونا چاہیے۔

مثال (2) $\frac{7x^2+18x+8}{49x^2-16} \times \frac{14x-8}{x+2}$

حل :

$$\frac{7x^2+18x+8}{49x^2-16} \times \frac{14x-8}{x+2}$$

$$= \frac{(7x+4)(x+2)}{(7x+4)(7x-4)} \times \frac{2(7x-4)}{(x+2)}$$

$$= 2$$

مثال (1) مختصر کیجیے۔ $\frac{a^2+5a+6}{a^2-a-12} \times \frac{a-4}{a^2-4}$

حل :

$$\frac{a^2+5a+6}{a^2-a-12} \times \frac{a-4}{a^2-4}$$

$$= \frac{(a+3)(a+2)}{(a-4)(a+3)} \times \frac{(a-4)}{(a+2)(a-2)}$$

$$= \frac{1}{a-2}$$

مثال (3) مختصر کیجیے : $\frac{x^2-9y^2}{x^3-27y^3}$

حل :

$$\frac{x^2-9y^2}{x^3-27y^3} = \frac{(x+3y)(x-3y)}{(x-3y)(x^2+3xy+9y^2)}$$

$$= \frac{x+3y}{x^2+3xy+9y^2}$$

مشقی سیٹ 6.4

1. مختصر کیجیے۔

- (1) $\frac{m^2-n^2}{(m+n)^2} \times \frac{m^2+mn+n^2}{m^3-n^3}$ (2) $\frac{a^2+10a+21}{a^2+6a-7} \times \frac{a^2-1}{a+3}$ (3) $\frac{8x^3-27y^3}{4x^2-9y^2}$
- (4) $\frac{x^2-5x-24}{(x+3)(x+8)} \times \frac{x^2-64}{(x-8)^2}$ (5) $\frac{3x^2-x-2}{x^2-7x+12} \div \frac{3x^2-7x-6}{x^2-4}$ (6) $\frac{4x^2-11x+6}{16x^2-9}$
- (7) $\frac{a^3-27}{5a^2-16a+3} \div \frac{a^2+3a+9}{25a^2-1}$ (8) $\frac{1-2x+x^2}{1-x^3} \times \frac{1+x+x^2}{1+x}$

جوابات کی فہرست

مشقی سیٹ 6.1

1. (1) $(x + 6)(x + 3)$ (2) $(x - 9)(x - 1)$ (3) $(y + 12)(y + 12)$
 (4) $5(y + 2)(y - 1)$ (5) $(p - 7)(p + 5)$ (6) $(p + 4)(p - 11)$
 (7) $(m - 15)(m - 8)$ (8) $(m - 20)(m - 5)$ (9) $(x + 3)(3x + 5)$
 (10) $(x + 5)(2x - 9)$ (11) $2(5x - 4)(2x - 1)$ (12) $(11x - 3)(4x + 1)$

مشقی سیٹ 6.2

1. (1) $(x + 4y)(x^2 - 4xy + 16y^2)$ (2) $(5p + q)(25p^2 - 5pq + q^2)$
 (3) $(5k + 3m)(25k^2 - 15km + 9m^2)$ (4) $2(l + 6m)(l^2 - 6lm + 36m^2)$
 (5) $3(2a + 3b)(4a^2 - 6ab + 9b^2)$ (6) $\left(y + \frac{1}{2y}\right)\left(y^2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4y^2}\right)$
 (7) $\left(a + \frac{2}{a}\right)\left(a^2 - 2 + \frac{4}{a^2}\right)$ (8) $\left(1 + \frac{q}{5}\right)\left(1 - \frac{q}{5} + \frac{q^2}{25}\right)$

مشقی سیٹ 6.3

1. (1) $(y - 3)(y^2 + 3y + 9)$ (2) $(x - 4y)(x^2 + 4xy + 16y^2)$
 (3) $(3m - 6n)(9m^2 + 18mn + 36n^2)$ (4) $(5y - 1)(25y^2 + 5y + 1)$
 (5) $\left(2p - \frac{3}{p}\right)\left(4p^2 + 6 + \frac{9}{p^2}\right)$ (6) $(7a - 8b)(49a^2 + 56ab + 64b^2)$
 (7) $(4x - 9y)(16x^2 + 36xy + 81y^2)$ (8) $16\left(a - \frac{2}{b}\right)\left(a^2 + \frac{2a}{b} + \frac{4}{b^2}\right)$
2. (1) $6x^2y + 2y^3$ (2) $270a^2b + 250b^3$ (3) $3a^2b + 3ab^2$
 (4) $-3p^2 - 3p - 1$ (5) $-108x^2y^2ab - 16a^3b^3$

مشقی سیٹ 6.4

1. (1) $\frac{1}{m+n}$ (2) $a + 1$ (3) $\frac{4x^2 + 6xy + 9y^2}{2x + 3y}$
 (4) 1 (5) $\frac{(x-1)(x-2)(x+2)}{(x-3)^2(x-4)}$
 (6) $\frac{x-2}{4x+3}$ (7) $5a + 1$ (8) $\frac{1-x}{1+x}$

