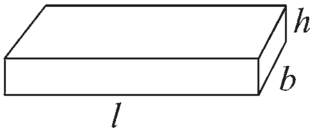
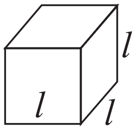
16 سطح کا رقبہ اور حجم

آیئے ذرا یاد کریں



مکعب نما یا مستطیلی منشور کی سطحوں کا کل رقبہ $= 2(l \times b + b \times h + l \times h)$

مکعب کی کل سطحوں کا رقبہ $= 6l^2$



1 میٹر = 100 سم ، 1 مربع میٹر = 100 × 100 مربع سم = 10000 مربع سم = 10^4 مربع سم

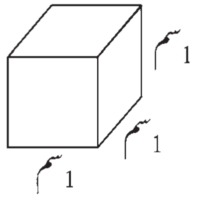
1 سم = 10 ملی میٹر ، 1 مربع سم = 10 × 10 مربع ملی میٹر = 100 مربع ملی میٹر = 10^2 مربع ملی میٹر

آیئے سمجھ لیں

مستطیلی منشور، مکعب اور مدور استوانہ وغیرہ اشیا سہ ابعادی یعنی مجسم ہوتی ہیں ۔ یہ مجسم اشکال مکانی جگہ گھیرتی ہیں ۔ کسی بھی مجسم شکل سے گھری ہوئی جگہ کو اس کا حجم کہتے ہیں ۔

حجم کی معیاری اکائی (Standard unit of volume)

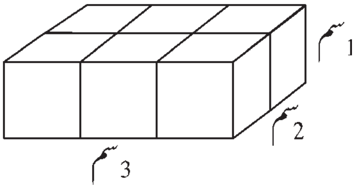
متصلہ شکل میں مکعب کے ہر ضلع کی لمبائی 1 سم ہے ۔ اس مکعب کے ذریعے گھری ہوئی جگہ، حجم ناپنے کی معیاری اکائی ہے ۔ جو 1 مکعب سینٹی میٹر مختصراً 1 مکعب سم لکھتے ہیں ۔



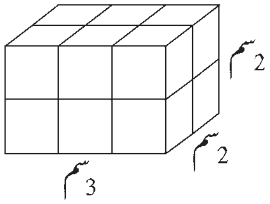
عملی کام I : 1 سم ضلعے کی لمبائی والے کئی مکعب ملا کر رکھیے ۔ شکل میں دکھائے گئے طریقے کے مطابق 6 مکعب ملا کر رکھے گئے ہیں ۔ جس سے ایک مستطیلی منشور بنتا ہے ۔ اس مستطیلی منشور کی لمبائی 3 سم، چوڑائی 2 سم اور اونچائی 1 سم ہے ۔

ایک سم لمبائی والے 6 مکعب ملا کر مستطیلی منشور بنایا گیا ہے ۔

اس مستطیلی منشور کا حجم = 3 × 2 × 1 = 6 مکعب سم



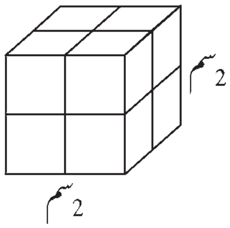
عملی کام II : متصلہ شکل میں مستطیلی منشور کی لمبائی 3 سم، چوڑائی 2 سم اور اونچائی 2 سم ہے اس مستطیلی منشور میں 1 مکعب سم حجم والے 12 = 2 × 2 × 3 مکعب ہیں ۔ یعنی اس مستطیلی منشور کا حجم 12 مکعب سم ہے ۔ اس بنا پر،



مستطیلی منشور کے حجم کا ضابطہ = لمبائی × چوڑائی × اونچائی

اگر لمبائی l، چوڑائی b اور اونچائی h ہو تو

مستطیلی منشور کا حجم $= l \times b \times h$



عملی کام III : متصلہ شکل میں 1 مکعب سم حجم والے 8 مکعب ایک دوسرے سے ملا کر رکھے گئے ہیں جس سے ایک مکعب تیار ہوتا ہے جس کے ضلع کی لمبائی 2 سم ہے۔

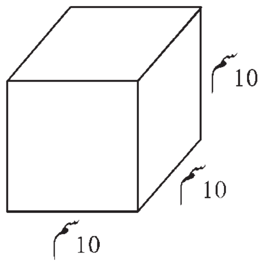
مکعبوں کا حجم $= 2 \times 2 \times 2 = 2^3$

اس بنا پر l ضلع والے مکعب کا حجم درج ذیل ہے۔

ضلع والے مکعب کا حجم $l = l \times l \times l = l^3$

مائع کا حجم : مائع کی جسامت یعنی مائع کا حجم ہوتا ہے۔

مائع کا حجم ناپنے کے لیے ملی لٹر اور لٹر اکائیاں استعمال ہوتی ہیں اسے ہم جانتے ہیں۔



شکل میں 10 سم ضلع والا ایک کھوکھلا مکعب ہے۔

اس کا حجم $= 10 \times 10 \times 10 = 1000$ مکعب سم ہے۔

اگر اس مکعب کو پانی سے بھرا جائے تو اس میں موجود پانی کا حجم 1000 مکعب سم ہوگا۔

اس جسامت کو 1 لٹر کہتے ہیں۔ ہم جانتے ہیں کہ ملی لٹر 1000 = 1 لٹر

اس لیے دھیان میں رکھیے کہ

ملی لٹر 1000 = مکعب سم 1000 = 1 لٹر اس بنا پر ملی لٹر 1 = 1 مکعب سم ہوتا ہے۔

یعنی 1 سم والے مکعب میں سمانے والے پانی کی جسامت 1 ملی لٹر ہوتی ہے۔

حل کردہ مثالیں

مثال (1) مستطیلی منشور نما شکل کے شیشے کے ایک مچھلی گھر کی لمبائی 1 میٹر، چوڑائی 40 سم اور اونچائی 50 سم ہے تو اس مچھلی گھر میں کتنا پانی سمائے گا؟ معلوم کیجیے۔

حل : مچھلی گھر میں سمانے والے پانی کا حجم اس مکعب نما مچھلی گھر کے مساوی ہوگا۔

مچھلی گھر کی لمبائی = 1 میٹر = 100 سم، چوڑائی 40 سم اور اونچائی 50 سم ہے۔

مچھلی گھر کا حجم $= l \times b \times h = 100 \times 40 \times 50 = 2,00,000$ مکعب سم

(1 لٹر = 1000 مکعب سم $\because$) ... مکعب سم 2,00,000 $= \frac{200000}{1000} = 200$ لٹر

اس لیے مچھلی گھر میں 200 لٹر پانی سمائے گا۔

مثال (2) ایک مستطیلی منشور گودام کی لمبائی 6 میٹر، چوڑائی 4 میٹر اور اونچائی 4 میٹر ہے۔ اس گودام میں 40 سم ضلع والے مکعب زیادہ سے زیادہ کتنے رکھے جاسکتے ہیں۔

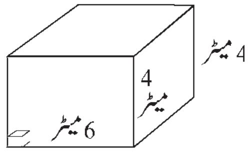
حل : گودام مکمل بھرنے پر تمام بکسوں (مکعب) کا کل حجم گودام کے حجم کے مساوی ہوگا۔

مثال حل کرنے کے لیے درج ذیل مرحلوں پر غور کریں۔

(1) گودام کا حجم معلوم کیجیے۔

(2) ایک بکس (مکعب) کا حجم معلوم کیجیے۔

(3) بکسوں کی تعداد معلوم کیجیے۔



مرحلہ (1) گودام کی لمبائی = 6 میٹر = 600 سم

اونچائی = چوڑائی = 40 میٹر = 400 سم

گودام کا حجم = لمبائی × چوڑائی × اونچائی = 600 × 400 × 400 مکعب سم

مرحلہ (2) ایک بکس کا حجم = $(\text{ضلع})^3 = (40)^3 = 40 \times 40 \times 40$ مکعب سم

مرحلہ (3) بکسوں کی تعداد = $\frac{\text{گودام کا حجم}}{\text{ایک بکس کا حجم}} = \frac{600 \times 400 \times 400}{40 \times 40 \times 40} = 1500$

$\therefore$ اس گودام میں زیادہ سے زیادہ 1500 بکس رکھے جاسکتے ہیں۔

مثال (3) برفی تیار کرنے کے لیے کھوا اور شکر کا پگھلا ہوا 5 لٹر آمیزہ ایک مکعب نما ٹرے میں انڈیلا گیا تو ٹرے مکمل طور پر بھر گئی۔ ٹرے کی چوڑائی 40 سم اور اونچائی 2.5 سم ہے۔ تو ٹرے کی لمبائی معلوم کیجیے۔

حل : مثال حل کرنے کے لیے درج ذیل مرحلوں میں خانہ پری کیجیے۔ خانوں میں مناسب عدد بھریے۔

مرحلہ (1) ٹرے کی گنجائش = 5 لٹر = ☐ مکعب سم ... ($\because$ 1 لٹر = 1000 مکعب سم)

مرحلہ (2) آمیزے کا حجم = ☐ مکعب سم

مرحلہ (3) مستطیلی ٹرے کا حجم = آمیزے کا حجم

لمبائی × چوڑائی × اونچائی = ☐ مکعب سم

لمبائی × 40 × 2.5 = ☐ مکعب سم ، $\therefore$ ٹرے کی لمبائی = $\frac{\square}{100}$ = 50 سم

یہ میری سمجھ میں آگیا

- مستطیلی منشور کا حجم = لمبائی × چوڑائی × اونچائی = $l \times b \times h$
- مکعب کا حجم = $(\text{ضلع})^3 = l^3$

مشقی سیٹ 16.1

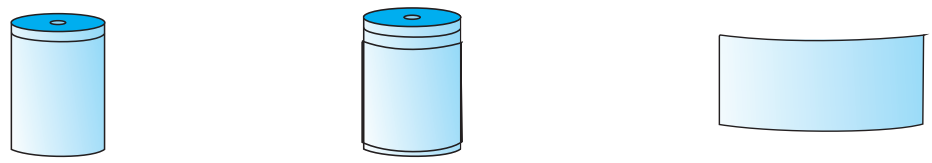
1. ایک بکس کی لمبائی 20 سم، چوڑائی 10.5 سم اور اونچائی 8 سم ہے اس کا حجم معلوم کیجیے۔
2. ایک مستطیلی منشور شکل کے صابن کی ٹکیہ کا حجم 150 مکعب سم ہے۔ اس کی لمبائی 10 سم اور چوڑائی 5 سم ہو تو اس کی موٹائی کتنی ہوگی؟
3. 6 میٹر لمبائی، 2.5 میٹر اونچائی اور 0.5 میٹر چوڑائی کی ایک دیوار تیار کرنا ہے۔ اس کے لیے 25 سم لمبائی، 15 سم چوڑائی اور 10 سم اونچائی والی کتنی اینٹیں درکار ہوں گی؟

4. بارش کا پانی ذخیرہ کرنے کے لیے ایک بستی میں 10 میٹر لمبائی، 6 میٹر چوڑائی اور 3 میٹر گہرائی کا حوض تیار کیا گیا۔ اس حوض کی گنجائش کتنی ہے؟ حوض میں کتنے لیٹر پانی سمائے گا؟

آئیے سمجھ لیں

مدوراستوانے کی سطح کا رقبہ (Surface area of a cylinder)

ایک مدوراستوانہ شکل کا ڈبا لیجیے۔ اس کی اونچائی کے مساوی چوڑائی والا ایک مستطیلی کاغذ لیجیے۔ اسے ڈبے کی خمدار سطح پر اچھی طرح لپیٹئے کہ سطح مکمل طور سے ڈھک جائے۔ کاغذ کا بچا ہوا حصہ کاٹ لیجیے۔



لمبائی = دائرے کا محیط   کاغذ لپٹا ہوا   مدوراستوانہ

لپٹا ہوا کاغذ نکالیے جو مستطیل شکل کا ہے۔ اس مستطیل کا رقبہ یعنی مدوراستوانے کی خمدار سطح کا رقبہ، مستطیل کی لمبائی یعنی دائروی تہہ کا محیط اور مستطیل کی چوڑائی یعنی مدوراستوانے کی اونچائی

مدوراستوانے کی خمدار سطح کا رقبہ = مستطیل کا رقبہ = لمبائی × چوڑائی

= مدوراستوانے کے قاعدہ کا محیط × مدوراستوانے کی اونچائی

مدوراستوانے کی خمدار سطح کا رقبہ $= 2\pi r \times h = 2\pi rh$

بند مدوراستوانے میں قاعدے کی سطح اور اوپری حصے کی سطح دائروی ہوتی ہے۔

$\therefore$ بند دائروی استوانے کی کل سطح کا رقبہ = مدوراستوانے کی خمدار سطح کا رقبہ + اوپری سطح کا رقبہ + قاعدے کا رقبہ

$\therefore$ بند دائروی استوانے کی کل سطحوں کا رقبہ = مدوراستوانے کی خمدار سطح کا رقبہ + 2 × دائرہ کا رقبہ

$$= 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r(h + r)$$

حل کردہ مثالیں

مثال (1) ایک مدوراستوانہ نما پانی کی ٹانکی کا قطر 1 میٹر اور اونچائی 2 میٹر ہے۔ ٹانکی پر ڈھکن لگا ہے۔ ٹانکی کے اندر اور باہر ڈھکن سمیت رنگ وروغن کرنا ہے۔ رنگ وروغن کرنے کا خرچ 80 روپے فی مربع میٹر ہے تو ٹانکی کو رنگنے کا خرچ کتنا ہوگا؟ $(\pi = 3.14)$

حل : ٹانکی کے اندر اور باہر رنگ وروغن یعنی رنگے جانے والے حصوں کا رقبہ ٹانکی کی کل بیرونی سطحوں کے رقبے کا دگنا ہوگا۔

مدور استوانے کے قاعدے کا قطر 1 میٹر ہے۔

اس لیے نصف قطر 0.5 میٹر اور مدور استوانے کی اونچائی 2 میٹر ہے۔

$\therefore$ مدور استوانے کی کل سطحوں کا رقبہ $= 2\pi r\,(h + r) = 2 \times 3.14 \times 0.5\,(2.0 + 0.5)$

$= 2 \times 3.14 \times 0.5 \times 2.5 = 7.85$ مربع میٹر

رنگ وروغن کیے جانے والے حصوں کا رقبہ $= 2 \times 7.85 = 15.70$ مربع میٹر

ٹانکی کو رنگنے کا کل خرچ $= 15.70 \times 80 = 1256$ روپے

مثال (2) ایک ایلومینیم کے مستطیلی پترے (ٹین) کی لمبائی 3.3 میٹر اور چوڑائی 3 میٹر ہے۔اس پترے سے 3.5 سم نصف قطر اور 30 سم لمبائی کے زیادہ سے زیادہ کتنی نلیاں بنائی جاسکتی ہے؟

حل : مستطیلی پترے کا رقبہ = لمبائی $\times$ چوڑائی

$= 3.3 \times 3$ مربع میٹر $= 330 \times 300$ مربع سم

ایک نلی کی لمبائی یعنی مدور استوانے کی اونچائی $= h = 30$ سم

نلی کا نصف قطر = مدور استوانے کے قاعدے کا نصف قطر $= r = 3.5$ سم

ایک نلی تیار کرنے کے لیے درکار پترا = ایک نلی کی خمدار سطح کا رقبہ

$$= 2\pi rh = 2 \times \frac{22}{7} \times \frac{35}{10} \times \frac{30}{1}$$

$= 2 \times 22 \times 15 = 660$ مربع سم

پترے سے تیار ہونے والی نلیوں کی تعداد = $\dfrac{\text{پترے کا رقبہ}}{\text{ایک نلی کی خمدار سطح کا رقبہ}} = \dfrac{330 \times 300}{660} = 150$

مشقی سیٹ 16.2

1. درج ذیل ہر مثال میں مدور استوانے کے قاعدے کا نصف قطر r اور اونچائی h دی گئی ہے۔اس پر سے ہر ایک مدور استوانے کی خمدار سطح کا رقبہ اور کل سطحوں کا رقبہ معلوم کیجیے۔

(1) $r = 7$ سم , $h = 10$ سم (2) $r = 1.4$ سم , $h = 2.1$ سم (3) $r = 2.5$ سم , $h = 7$ سم

(4) $r = 70$ سم , $h = 1.4$ سم (5) $r = 4.2$ سم , $h = 14$ سم

2. 50 سم قطر اور 45 سم اونچائی کے دونوں جانب سے بند ڈرم کی کل سطحوں کا رقبہ معلوم کیجیے۔ $(\pi = 3.14)$

3. ایک مدور استوانے کی خمدار سطح کا رقبہ 660 مربع سم اور اونچائی 21 سم ہے۔ اس کا نصف قطر اور قاعدے کا رقبہ معلوم کیجیے۔

4. ایک مدور استوانے کی شکل کے پترے کے ڈبے کا قطر 28 سم ہے اور اونچائی 20 سم ہے۔ ڈبا ایک جانب سے کھلا ہے تو اسے تیار کرنے میں لگنے والے پترے کا رقبہ معلوم کیجیے۔ اس ڈبے کا 2 سم اونچائی کا ڈھکنا تیار کرنے کے لیے اندازاً کتنے مربع سم پترا لگے گا معلوم کیجیے۔

آیئے سمجھ لیں

مدور استوانے کا حجم (Volume of a Cylinder)

مدور استوانہ نما پانی کی ٹانکی میں کتنا پانی سمائے گا یہ معلوم کرنے کے لیے ٹانکی کا حجم معلوم کرنا ہوتا ہے۔

(عام ضابطہ) ... کسی بھی منتظم قاعدے والے جسم کا حجم = قاعدے کا رقبہ × اونچائی

یہ ایک عام ضابطہ ہے۔

مدور استوانے کا قاعدہ، دائرہ کی شکل کا ہے۔

$\therefore$ مدور استوانے کا حجم $= \pi r^2 h$

حل کردہ مثالیں

مثال (1) ایک مدور استوانے کے قاعدے کا نصف قطر 5 سم اور اونچائی 10 سم ہے۔ اس مدور استوانے کا حجم معلوم کیجیے۔ $(\pi = 3.14)$

حل : مدور استوانے کے قاعدے کا نصف قطر $r = 5$ سم اور اونچائی $h = 10$ سم

مدور استوانے کا حجم $= \pi r^2 h = 3.14 \times 5^2 \times 10 = 3.14 \times 25 \times 10 = 785$ مکعب سم

مثال (2) ایک مدور استوانہ نما پانی کے ڈرم کی اونچائی 56 سم ہے اس ڈرم کی گنجائش 70.4 لٹر ہے۔ ڈرم کا نصف قطر معلوم کیجیے۔ $(\pi = \frac{22}{7})$

فرض کریں r = مدور استوانہ شکل کے ڈرم کے قاعدہ کا نصف قطر

ڈرم کی گنجائش = ڈرم کا حجم $= 70.4 \times 1000$ مکعب سم $= 704 \times 100$ مکعب سم

1 لٹر = 1000 ملی لٹر ، $\therefore$ 70.4 لٹر = 70400 ملی لٹر

ڈرم کا حجم $= \pi r^2 h = 70400$

$$\therefore r^2 = \frac{70400}{\pi h} = \frac{70400 \times 7}{22 \times 56} = \frac{70400}{22 \times 8} = \frac{8800}{22} = 400$$

$$\therefore r = 20$$

$\therefore$ ڈرم کا نصف قطر 20 سم ہے۔

مثال (3) تانبے کے ایک ٹھوس مدور استوانہ کے قاعدہ کا نصف قطر 4.2 سم اور اونچائی 16 سم ہے۔ اسے پگھلا کر 1.4 سم قطر اور 0.2 سم موٹائی کی کتنی ٹکیاں تیار کی جاسکیں گی؟

حل : مدور استوانے کے قاعدہ کا نصف قطر $= R = 4.2$ سم ، اونچائی $= H = 16$ سم

مدور استوانہ کا حجم $= \pi R^2 H = \pi \times 4.2 \times 4.2 \times 16.0$

ٹکیہ کے قاعدے کا نصف قطر $= 1.4 \div 2 = 0.7$ سم

ٹکیہ کی موٹائی = مدور استوانے کی اونچائی $= 0.2$ سم

ٹکیہ کا حجم $= \pi r^2 h = \pi \times 0.7 \times 0.7 \times 0.2$

فرض کریں ٹھوس مدور استوانے کو پگھلانے پر n ٹکیہ بنتی ہے۔

ٹھوس مدور استوانے کا حجم = ایک ٹکیہ کا حجم $\times \; n \quad \therefore$

$$n = \frac{\text{مدور استوانے کا حجم}}{\text{ایک ٹکیہ کا حجم}} = \frac{\pi R^2 H}{\pi r^2 h} = \frac{R^2 H}{r^2 h} = \frac{4.2 \times 4.2 \times 16}{0.7 \times 0.7 \times 0.2}$$

$$= \frac{42 \times 42 \times 160}{7 \times 7 \times 2} = 6 \times 6 \times 80 = 2880$$

$\therefore$ 2880 ٹکیاں تیار کی جاسکیں گی۔

یہ میری سمجھ میں آ گیا

مدور استوانے کی کل سطح کا رقبہ $= 2\pi r(h + r)$ ، مدور استوانے کی خمدار سطح کا رقبہ $= 2\pi rh$

مدور استوانے کا حجم $= \pi r^2 h$

مشقی سیٹ 16.3

.1 درج ذیل میں مدور استوانے کے قاعدے کا نصف قطر (r) اور اونچائی (h) دی گئی ہے۔

اس پر سے مدور استوانے کا حجم معلوم کیجیے۔

(1) $r = 10.5$ سم ، $h = 8$ سم

(2) $r = 2.5$ میٹر ، $h = 7$ میٹر

(3) $r = 4.2$ سم ، $h = 5$ سم

(4) $r = 5.6$ سم ، $h = 5$ سم

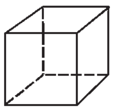
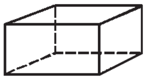
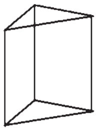
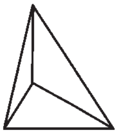
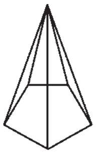
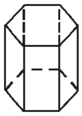
.2 90 سم لمبائی اور 1.4 سم قطر کی لوہے کی ایک سلاخ تیار کرنے کے لیے درکار لوہے کا حجم معلوم کیجیے۔

.3 مدور استوانے کی شکل کے ایک حوض کا اندرونی قطر 1.6 میٹر ہے اس کی گہرائی 0.7 میٹر ہے تو اس حوض میں زیادہ سے زیادہ کتنے لٹر پانی سمائے گا؟

.4 ایک مدور استوانے کے قاعدے کا احاطہ 132 سم ہے۔ اونچائی 25 سم ہے۔ مدور استوانے کا حجم کتنا ہوگا؟

آئیلر کا قانون :

سطح (F)، راس (V) اور کنارے (E) والی ٹھوس اجسام سے متعلق ایک دلچسپ قانون ، بہت ہی کم عمر میں (بچپن میں) لیونارڈ آئیلر نامی مشہور ریاضی داں نے معلوم کیا۔ درج ذیل جدول میں ٹھوس اجسام کے کنارے، راس (کونے) اور سطحیں شمار کر کے جدول مکمل کیجیے اور آئیلر کے قانون $V + F = E + 2$ کی تصدیق کیجیے۔

نام	مکعب	مستطیلی منشور	منشور مثلثی	مثلثی ہرم	خمسی ہرم	مسدسی منشور
اجسام کی شکل						
سطحیں (F)	6					8
راس (V)	8					12
کنارے (E)		12			10	

جوابات کی فہرست

مشقی سیٹ 16.1 : **1.** 1680 مکعب سم   **2.** 3 سم   **3.** 2000 اینٹیں   **4.** 1,80,000 لٹر

مشقی سیٹ 16.2 : **1.** (1) 440 مربع سم , 748 مربع سم   (2) 18.48 مربع سم , 30.80 مربع سم

(3) 110 مربع سم , 149.29 مربع سم   (4) 616 مربع سم , 31416 مربع سم

(5) 369.60 مربع سم , 480.48 مربع سم

2. 10,990 مربع سم   **3.** 5 سم , 78.50 مربع سم

4. 2376 مربع سم, ڈھکن کے لیے اندازاً پترا 792 مربع سم درکار ہوگا

مشقی سیٹ 16.3 : **1.** (1) 2772 مکعب سم   (2) 137.5 مکعب میٹر   (3) 277.2 مکعب سم   (4) 492.8 مکعب سم

2. 138.6 مکعب سم   **3.** 1408 لٹر   **4.** 34650 مکعب سم

❑❑❑