ಅಧ್ಯಾಯ – 2

ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳು

2.1 ಪೀಠಿಕೆ

ನೀವು ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳು, ಅವುಗಳ ಸಂಕಲನ, ವ್ಯವಕಲನ, ಗುಣಾಕಾರ ಮತ್ತು ಭಾಗಾಕಾರಗಳನ್ನು ಹಿಂದಿನ ತರಗತಿಗಳಲ್ಲಿ ಕಲಿತಿದ್ದೀರಿ. ನೀವು ಕೆಲವು ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳನ್ನು ಹೇಗೆ ಅಪವರ್ತಿಸುವುದು ಎಂಬುದನ್ನು ಸಹ ತಿಳಿದಿದ್ದೀರಿ. ನೀವು ಈ ಕೆಳಗಿನ ಬೈಜಿಕ ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಮತ್ತು ಅಪವರ್ತಿಸುವಿಕೆಯಲ್ಲಿ ಅವುಗಳ ಉಪಯೋಗವನ್ನು ಸ್ಮರಿಸಬಹುದು.

$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

$(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$

ಮತ್ತು $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$

ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ನಾವು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ ಎಂದು ಕರೆಯಲ್ಪಡುವ ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ರೀತಿಯ ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳಿಂದ ಹಾಗೂ ಅದಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಪದಗಳಿಂದ ನಮ್ಮ ಅಭ್ಯಾಸವನ್ನು ಪ್ರಾರಂಭಿಸೋಣ. ನಾವು ಶೇಷ ಪ್ರಮೇಯ ಮತ್ತು ಅಪವರ್ತನ ಪ್ರಮೇಯಗಳನ್ನು ಹಾಗೂ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳ ಅಪವರ್ತಿಸುವಿಕೆಯಲ್ಲಿ ಅವುಗಳ ಉಪಯೋಗದ ಬಗ್ಗೆ ಕೂಡಾ ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡೋಣ. ಇದರ ಜೊತೆಗೆ ಅಪವರ್ತಿಸುವಿಕೆಯಲ್ಲಿ ಮತ್ತು ಕೆಲವು ದತ್ತ ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸುವಲ್ಲಿ, ಕೆಲವು ಬೈಜಿಕ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಉಪಯೋಗದ ಬಗ್ಗೆಯೂ ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡೋಣ.

2.2. ಒಂದು ಚರಾಕ್ಷರವುಳ್ಳ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳು

ಚರಾಕ್ಷರವೆಂದರೆ, ಯಾವುದೇ ವಾಸ್ತವ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದಾದ ಒಂದು ಸಂಕೇತ ಎಂಬುದನ್ನು ಜ್ಞಾಪಿಸಿಕೊಳ್ಳುತ್ತ ಪ್ರರಂಭಿಸೋಣ.

ನಾವು ಚರಾಕ್ಷರಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸಲು x,y,z... ಇತ್ಯಾದಿ ಅಕ್ಷರಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತೇವೆ. $2x, 3x, -x, -\frac{1}{2}x$ ಇವೆಲ್ಲ ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳು ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. ಈ ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳೆಲ್ಲವೂ, (ಒಂದು ಸ್ಥಿರಾಂಕ) × **x** ರೂಪದಲ್ಲಿವೆ. ಈಗ, ನಾವು ಒಂದು ಬೀಜೋಕ್ತಿಯನ್ನು (ಒಂದು ಸ್ಥಿರಾಂಕ) × (ಒಂದು ಚರಾಕ್ಷರ) ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಲು ಬಯಸಿದರೆ ಮತ್ತು ಸ್ಥಿರಾಂಕ ಯಾವುದೆಂದು ತಿಳಿದಿರದಿದ್ದರೆ, ಅಂತಹ ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಸ್ಥಿರಾಂಕಗಳನ್ನು a,b,c.... ಇತ್ಯಾದಿ ಅಕ್ಷರಗಳಿಂದ ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಬೀಜೋಕ್ತಿಯು ax ಆಗಿರಲಿ.

ಆದಾಗ್ಯೂ, ಒಂದು ಸ್ಥಿರಾಂಕವನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ ಅಕ್ಷರ ಮತ್ತು ಒಂದು ಚರಾಕ್ಷರವನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ ಅಕ್ಷರ ಇವುಗಳ ನಡುವೆ ವ್ಯತ್ಯಾಸವಿದೆ. ಸ್ಥಿರಾಂಕಗಳ ಬೆಲೆಯು ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಸಂದರ್ಭದುದ್ದಕ್ಕೂ ಒಂದೇ ರೀತಿ ಇರುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ ಕೊಟ್ಟಂತಹ ಒಂದು ದತ್ತ ಸಮಸ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಸ್ಥಿರಾಂಕಗಳ ಬೆಲೆಯು ಬದಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ. ಆದರೆ ಒಂದು ಚರಾಕ್ಷರದ ಬೆಲೆಯು ಬದಲಾಗುತ್ತಿರಬಹುದು.

ಈಗ, ಬಾಹುವಿನ ಅಳತೆ 3 ಏಕಮಾನ ಆಗಿರುವ ಒಂದು ಚೌಕವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ. (ಚಿತ್ರ 2.1 ನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.) ಅದರ ಸುತ್ತಳತೆ ಎಷ್ಟು? ಒಂದು ಚೌಕದ ಸುತ್ತಳತೆಯು ಅದರ ನಾಲ್ಕು ಬಾಹುಗಳ ಉದ್ದಗಳ ಮೊತ್ತವೆಂದು ನೀವು ತಿಳಿದಿದ್ದೀರಿ. ಇಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಾಹುವಿನ ಅಳತೆ 3 ಮೂಲಮಾನ ಆಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಅದರ ಸುತ್ತಳತೆಯು 4 × 3 ಅಂದರೆ 12 ಮೂಲಮಾನಗಳು. ಚೌಕದ ಪ್ರತಿ ಬಾಹುವು 10 ಮೂಲಮಾನಗಳಾಗಿದ್ದರೆ, ಅದರ ಸುತ್ತಳತೆ ಎಷ್ಟು? ಅದರ ಸುತ್ತಳತೆಯು 4 × 10 ಅಂದರೆ 40 ಮೂಲಮಾನಗಳು. ಪ್ರತಿ ಬಾಹುವಿನ ಉದ್ದವು 'x' ಮಾನಗಳಾಗಿದ್ದರೆ (ಚಿತ್ರ 2.2 ನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.) ಸುತ್ತಳತೆಯು 4x ಮಾನಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ. ಹೀಗೆ ಬಾಹುವಿನ ಉದ್ದವು ಬದಲಾದಂತೆ, ಸುತ್ತಳತೆಯು ಬದಲಾಗುತ್ತದೆ.

PQRS ಚೌಕದ ವಿಸ್ತೀರ್ಣವನ್ನು ನೀವು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಹುದೇ? ಅದು $x \times x = x^2$ ಚದರ ಮಾನಗಳು. x^2 ಒಂದು ಬೀಜೋಕ್ತಿಯಾಗಿದೆ. ಇದೇ ರೀತಿ, $2x$, $x^2 + 2x$, $x^3 - x^2 + 4x + 7$ ಇವುಗಳಂತಹ ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳ ಪರಿಚಯವೂ ನಿಮಗಿದೆ. ಇಲ್ಲಿಯವರೆಗೆ ನಾವು ತೆಗೆದುಕೊಂಡ ಎಲ್ಲ ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳಲ್ಲಿ ಚರಾಕ್ಷರಗಳ ಘಾತಸೂಚಿಗಳು ಪೂರ್ಣಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿರುವುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. ಈ ರೂಪದ ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳನ್ನು ಒಂದು ಚರಾಕ್ಷರವುಳ್ಳ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳು ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳಲ್ಲಿ, 'x' ಎಂಬುದು ಚರಾಕ್ಷರವಾಗಿದೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ,

$x^3 - x^2 + 4x + 7$ ಇದು x ಎಂಬ ಚರಾಕ್ಷರವಿರುವ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯಾಗಿದೆ. ಅದೇ ರೀತಿ, $3y^2 + 5y$ ಇದು y ಎಂಬ ಚರಾಕ್ಷರವಿರುವ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯಾಗಿದೆ ಮತ್ತು $t^2 + 4$ ಇದು t ಎಂಬ ಚರಾಕ್ಷರವಿರುವ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯಾಗಿದೆ.

$x^2 + 2x$ ಈ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯಲ್ಲಿ ಬೀಜಪದಗಳಾದ x^2 ಮತ್ತು $2x$ ಇವುಗಳಿಗೆ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಪದಗಳು ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. ಇದೇ ರೀತಿ $3y^2 + 5y + 7$ ಈ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯು $3y^2$, $5y$ ಮತ್ತು 7 ಎಂಬ ಮೂರು ಪದಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ. $-x^3 + 4x^2 + 7x - 2$ ಈ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಪದಗಳನ್ನು ನೀವು ಬರೆಯಬಹುದೇ? ಈ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯು $-x^3$, $4x^2$, $7x$ ಮತ್ತು -2 ಎಂಬ 4 ಪದಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ.

ಒಂದು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಪದವೂ ಒಂದು ಸಹಗುಣಕವನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ,
$-x^3 + 4x^2 + 7x - 2$ ಇದರಲ್ಲಿ x^3 ನ ಸಹಗುಣಕ -1, x^2 ದ ಸಹಗುಣಕ 4, x ನ ಸಹಗುಣಕ 7 ಮತ್ತು -2 ಇದು xಲಿ ಯ ಸಹಗುಣಕ. ($x^\circ = 1$ ಎಂಬುದನ್ನು ನೆನಪಿಡಿ.) $x^2 - x + 7$ರಲ್ಲಿ x ನ ಸಹಗುಣಕ ಏನೆಂದು ನಿಮಗೆ ಗೊತ್ತೇ? ಅದು -1 ಆಗಿದೆ.

2 ಎಂಬುದೂ ಸಹ ಒಂದು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯಾಗಿದೆ. ನಿಜವಾಗಿ, 2, – 5, 7 ಇತ್ಯಾದಿಗಳು ಸ್ಥಿರ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳ ಉದಾಹರಣೆಗಳಾಗಿವೆ. ಸ್ಥಿರ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ 0ಯನ್ನು ಶೂನ್ಯ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. ಇದು ಎಲ್ಲಾ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರಮುಖ ಪಾತ್ರ ವಹಿಸುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೀವು ಮುಂದಿನ ತರಗತಿಗಳಲ್ಲಿ ತಿಳಿಯುವಿರಿ.

ಈಗ, $x+\frac{1}{x}, \sqrt{x}+3$ ಮತ್ತು $\sqrt[3]{y}+y^2$ ಈ ರೀತಿಯ ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ. $x+\frac{1}{x}=x+x^{-1}$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದೆಂದು ನೀವು ತಿಳಿದಿದ್ದೀರಾ? ಇಲ್ಲಿ ಎರಡನೇ ಪದದ ಎಂದರೆ x^{-1} ರ ಘಾತಸೂಚಿಯು -1 ಆಗಿದ್ದು, ಅದು ಪೂರ್ಣಸಂಖ್ಯೆ ಅಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ ಈ ಬೀಜೋಕ್ತಿಯು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ ಅಲ್ಲ.

ಪುನಃ, $\sqrt{x}+3$ನ್ನು $x^{\frac{1}{2}}+3$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು. ಇಲ್ಲಿ x ನ ಘಾತಸೂಚಿ $\frac{1}{2}$ ಆಗಿದ್ದು, ಅದು ಪೂರ್ಣಸಂಖ್ಯೆ ಅಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ, $\sqrt{x}+3$ ಒಂದು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯೇ? ಅಲ್ಲ, ಅದು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯಲ್ಲ. $\sqrt[3]{y}+y^2$ ನ್ನು ಏನೆಂದು ಹೇಳುವಿರಿ? ಅದೂ ಸಹ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ ಅಲ್ಲ. (ಏಕೆ?)

ಒಂದು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯಲ್ಲಿ ಚರಾಕ್ಷರವು 'x' ಆಗಿದ್ದರೆ, ನಾವು ಆ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯನ್ನು p(x) ಅಥವಾ q(x) ಅಥವಾ r(x) ಇತ್ಯಾದಿಯಾಗಿ ಸೂಚಿಸಬಹುದು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ನಾವು ಈ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಬರೆಯಬಹುದು.

$p(x) = 2x^2 + 5x - 3$

$q(x) = x^3 - 1$

$r(y) = y^3 + y + 1$

$s(u) = 2 - u - u^2 + 6u^5$

ಒಂದು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯು ಎಷ್ಟು ಪರಿಮಿತ ಪದಗಳನ್ನು ಬೇಕಾದರೂ ಹೊಂದಿರಬಹುದು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, $x^{150} + x^{149} + \ldots + x^2 +$

x + 1, ಇದು 151 ಪದಗಳುಳ್ಳ ಒಂದು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯಾಗಿದೆ.

2x, 2, $5x^3$, – $5x^2$, y ಮತ್ತು u^4 ಈ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ. ಈ ಎಲ್ಲ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳು ಕೇವಲ ಒಂದು ಪದವನ್ನು ಮಾತ್ರ ಹೊಂದಿವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡಿದಿರಾ? ಕೇವಲ ಒಂದು ಪದವನ್ನು ಮಾತ್ರ ಹೊಂದಿರುವ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳಿಗೆ ಏಕಪದೋಕ್ತಿಗಳು ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. (ಏಕ ಎಂದರೆ ಒಂದು ಎಂದು ಅರ್ಥ)

ಈಗ ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯನ್ನು ಗಮನಿಸಿ :

$p(x) = x + 1$ $q(x) = x^2 – x$ $r(y) = y^{30} + 1$ $t(u) = u^{43} – u^2$

ಈ ಮೇಲಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದರಲ್ಲಿಯೂ ಎಷ್ಟು ಪದಗಳಿವೆ? ಈ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯೂ ಕೇವಲ 2 ಪದಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿವೆ. ಕೇವಲ ಎರಡು ಪದಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ಹೊಂದಿರುವ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳಿಗೆ ದ್ವಿಪದೋಕ್ತಿಗಳು ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. (ದ್ವಿ ಎಂದರೆ ಎರಡು ಎಂದು ಅರ್ಥ)

ಇದೇ ರೀತಿ ಮೂರು ಪದಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ಹೊಂದಿರುವ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳಿಗೆ ತ್ರಿಪದೋಕ್ತಿಗಳು ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. (ತ್ರಿ ಎಂದರೆ ಮೂರು ಎಂದು ಅರ್ಥ). ತ್ರಿಪದೋಕ್ತಿಯ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳೆಂದರೆ,

$p(x) = x + x^2 + \pi$ $q(x) = \sqrt{2} + x - x^2$ $r(u) = u + u^2 – 2$ $t(y) = y^4 + y + 5$

ಈಗ, $p(x) = 3x^7 – 4x^6 + x + 9$ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯನ್ನು ನೋಡಿ. x ನ ಗರಿಷ್ಠ ಘಾತಸೂಚಿಯನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಪದ ಯಾವುದು? ಅದೆಂದರೆ $3x^7$. ಈ ಪದದಲ್ಲಿ x ನ ಘಾತಸೂಚಿ 7 ಆಗಿದೆ. ಹಾಗೆಯೇ,

$q(y) = 5y^6 – 4y^2 – 6$, ಈ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯಲ್ಲಿ y ನ ಗರಿಷ್ಠ ಘಾತಸೂಚಿಯನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಪದ $5y^6$ ಮತ್ತು ಈ ಪದದಲ್ಲಿ y ನ ಘಾತಸೂಚಿ 6 ಆಗಿದೆ. ನಾವು ಒಂದು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯಲ್ಲಿ ಚರಾಕ್ಷರದ ಗರಿಷ್ಠ ಘಾತಸೂಚಿಯನ್ನು ಆ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಡಿಗ್ರಿ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ $3x^7 – 4x^6 + x + 9$ ಈ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಡಿಗ್ರಿ 7 ಆಗಿದೆ. ಮತ್ತು $5y^6 – 4y^2 – 6$ ಈ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಡಿಗ್ರಿ 6 ಆಗಿದೆ. ಶೂನ್ಯವಲ್ಲದ ಒಂದು ಸ್ಥಿರ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಡಿಗ್ರಿ ಸೊನ್ನೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 1 : ಈ ಕೆಳಗೆ ನೀಡಿದ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಡಿಗ್ರಿಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) x5 – x4 + 3 (ii) 2 – y2 – y3 + 2y8(iii) 2

ಪರಿಹಾರ: (i) ಚರಾಕ್ಷರದ ಗರಿಷ್ಠ ಘಾತಸೂಚಿ 5 ಆಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಈ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಡಿಗ್ರಿ 5 ಆಗಿದೆ.

(ii) ಚರಾಕ್ಷರದ ಗರಿಷ್ಠ ಘಾತಸೂಚಿ 8 ಆಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಈ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಡಿಗ್ರಿ 8 ಆಗಿದೆ.

(iii) ಇಲ್ಲಿರುವ ಒಂದೇ ಒಂದು ಪದ 2 ಆಗಿದೆ ಮತ್ತು ಅದನ್ನು $2x^{\circ}$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು. ಆದ್ದರಿಂದ x ನ ಘಾತಸೂಚಿ 0 ಆಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಈ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಡಿಗ್ರಿ '0' ಆಗಿದೆ.

ಈಗ, $p(x) = 4x + 5$ $q(y) = 2y$ $r(t) = t + \sqrt{2}$ ಮತ್ತು $s(u) = 3u$

ಈ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. ನೀವು ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುದಾದರೂ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಂಶವನ್ನು ಗಮನಿಸಿದಿರಾ? ಈ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಡಿಗ್ರಿ ಒಂದು ಆಗಿದೆ. ಡಿಗ್ರಿ ಒಂದು ಆಗಿರುವ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗೆ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. ಒಂದು ಚರಾಕ್ಷರವುಳ್ಳ ಇನ್ನೂ ಕೆಲವು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳೆಂದರೆ $2x-1,\ \sqrt{2}y+1,\ 2-u.$ ಈಗ 3 ಪದಗಳುಳ್ಳ, 'x' ಎಂಬ ಚರಾಕ್ಷರವನ್ನು ಹೊಂದಿದ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯನ್ನು ಬರೆಯಲು ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿ. ನೀವು ಅದನ್ನು ಬರೆಯಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ಏಕೆಂದರೆ 'x' ಎಂಬ ಚರಾಕ್ಷರವುಳ್ಳ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯು ಹೆಚ್ಚೆಂದರೆ ಎರಡು ಪದಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ಹೊಂದಿರಲು ಸಾಧ್ಯ. ಆದ್ದರಿಂದ 'x' ಎಂಬ ಚರಾಕ್ಷರವುಳ್ಳ ಯಾವುದೇ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯು ax + b ರೂಪದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ. [ಇಲ್ಲಿ a ಮತ್ತು b ಗಳು ಸ್ಥಿರಾಂಕಗಳು ಮತ್ತು $a \neq 0$ (ಏಕೆ?)] ಹಾಗೆಯೇ, ay + b ಯು 'y' ಚರಾಕ್ಷರವುಳ್ಳ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯಾಗಿದೆ.

ಈಗ $2x^2 + 5$, $5x^2 + 3x + \pi$, x^2 ಮತ್ತು $x^2 + \frac{2}{5}x$ ಈ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿ.

ಅವೆಲ್ಲವುಗಳ ಡಿಗ್ರಿ 2 ಆಗಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೀವು ಒಪ್ಪುತ್ತೀರಾ? ಡಿಗ್ರಿ 2 ಆಗಿರುವ ಒಂದು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗೆ ವರ್ಗ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. ವರ್ಗ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳೆಂದರೆ, $5 – y^2$, $4y + 5y^2$ ಮತ್ತು $6 – y – y^2$. ಒಂದು ಚರಾಕ್ಷರವುಳ್ಳ ನಾಲ್ಕು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಪದಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಒಂದು ವರ್ಗ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯನ್ನು ನೀವು ಬರೆಯಬಲ್ಲಿರಾ? ಒಂದು ಚರಾಕ್ಷರವುಳ್ಳ ಒಂದು ವರ್ಗ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯು ಗರಿಷ್ಠ 3 ಪದಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ಹೊಂದಿರುವುದನ್ನು ನೀವು ಕಾಣುವಿರಿ. ನೀವು ಇನ್ನೂ ಕೆಲವು ವರ್ಗ ಬಹು ಪದೋಕ್ತಿಗಳನ್ನು ಪಟ್ಟಿ ಮಾಡಿದರೆ, x ಎಂಬ ಚರಾಕ್ಷರವುಳ್ಳ ವರ್ಗ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯು
$ax^2 + bx + c$ ರೂಪದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ. (ಇಲ್ಲಿ a,b,c ಗಳು ಸ್ಥಿರಾಂಕಗಳು $a \neq 0$) ಎಂಬುದನ್ನು ತಿಳಿಯುವಿರಿ. ಇದೇ ರೀತಿ, y ಎಂಬ ಚರಾಕ್ಷರವುಳ್ಳ ವರ್ಗ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯು $ay^2 + by + c$ ರೂಪದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ (ಇಲ್ಲಿ a,b,c ಗಳು ಸ್ಥಿರಾಂಕಗಳು, $a \neq 0$).

ಡಿಗ್ರಿ 3 ಇರುವ ಒಂದು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯನ್ನು ನಾವು ಘನ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ. 'x' ಎಂಬ ಚರಾಕ್ಷರವುಳ್ಳ ಘನ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳೆಂದರೆ $4x^3$, $2x^3 + 1$, $5x^3 + x^2$, $6x^3 – x$, $6 – x^3$, $2x^3 + 4x^2 + 6x + 7$. ಒಂದು ಚರಾಕ್ಷರವುಳ್ಳ ಘನ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಪದಗಳಿರಬಹುದೆಂದು ನೀವು ಯೋಚಿಸುತ್ತೀರಿ? ಅದು ಗರಿಷ್ಠ 4 ಪದಗಳನ್ನು ಮಾತ್ರ ಹೊಂದಿರಬಹುದು. ಇದನ್ನು $ax^3 + bx^2 + cx + d$
(a, b, c, d ಗಳು ಸ್ಥಿರಾಂಕಗಳು ಮತ್ತು $a \neq 0$) ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಬಹುದು.

ಡಿಗ್ರಿ 1, ಡಿಗ್ರಿ 2 ಅಥವಾ ಡಿಗ್ರಿ 3 ಆಗಿರುವ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯು ಹೇಗಿರುತ್ತದೆಂಬುದನ್ನು ನೀವು ನೋಡಿದ್ದೀರಿ. 'n' ಎಂಬುದು ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ ಆದಾಗುವಂತೆ, ಡಿಗ್ರಿ n ಇರುವ, ಒಂದು ಚರಾಕ್ಷರವುಳ್ಳ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯನ್ನು ಬರೆಯಬಲ್ಲಿರಾ? ಒಂದು ಚರಾಕ್ಷರವುಳ್ಳ, ಡಿಗ್ರಿ n ಇರುವ, ಒಂದು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯು ಈ ಕೆಳಗಿನ ರೂಪದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ.

$a_n xn + a_{n–1} xn^{–1} + ... + a_1 x + a_0$

ಇಲ್ಲಿ $a_0, a_1, a_2 .... a_n$ ಗಳು ಸ್ಥಿರಾಂಕಗಳು ಮತ್ತು $a_n \neq 0$

ನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾಗಿ, $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 .... = a_n = 0$ ಆದರೆ (ಎಲ್ಲಾ ಸ್ಥಿರಾಂಕಗಳೂ ಸೊನ್ನೆ) ನಾವು ಶೂನ್ಯ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯನ್ನು ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ ಮತ್ತು ಅದನ್ನು 0 ಎಂದು ಸೂಚಿಸುತ್ತೇವೆ. ಶೂನ್ಯ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಡಿಗ್ರಿ ಎಷ್ಟು ಆಗಿರುತ್ತದೆ? ಶೂನ್ಯ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಡಿಗ್ರಿಯನ್ನು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಲಾಗಿಲ್ಲ.

ಇಲ್ಲಿಯವರೆಗೆ ನಾವು ಒಂದು ಚರಾಕ್ಷರವುಳ್ಳ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳ ಬಗ್ಗೆ ಮಾತ್ರ ಚರ್ಚಿಸಿದ್ದೇವೆ. ಒಂದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಚರಾಕ್ಷರವುಳ್ಳ ಬಹು ಪದೋಕ್ತಿಗಳು ಕೂಡ ಇರಬಹುದು. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, $x^2 + y^2 + xyz$ (x,y ಮತ್ತು z ಗಳು ಚರಾಕ್ಷರಗಳು) ಇದೊಂದು ಮೂರು ಚರಾಕ್ಷರಗಳುಳ್ಳ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯಾಗಿದೆ. ಅದೇ ರೀತಿ $p^2 + q^{10} + r$
(p, q ಮತ್ತು r ಗಳು ಚರಾಕ್ಷರಗಳು), $u^3 + v^2$ (u ಮತ್ತು v ಗಳು ಚರಾಕ್ಷರಗಳು) ಇವು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಮೂರು ಮತ್ತು ಎರಡು ಚರಾಕ್ಷರಗಳುಳ್ಳ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳು. ನೀವು ಅಂತಹ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳನ್ನು ವಿವರವಾಗಿ ಮುಂದೆ ಅಭ್ಯಸಿಸಲಿದ್ದೀರಿ.

ಅಭ್ಯಾಸ 2.1

1. ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವುವು ಒಂದು ಚರಾಕ್ಷರವುಳ್ಳ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳಾಗಿವೆ ಮತ್ತು ಯಾವುವು ಅಲ್ಲ? ಕಾರಣಗಳ ಸಹಿತ ತಿಳಿಸಿ.

(i) $4x^2 – 3x + 7$ (ii) $y^2 + \sqrt{2}$ (iii) $3\sqrt{t} + t\sqrt{2}$

(iv) $y + \frac{2}{y}$ (v) $x^{10} + y^3 + t^{50}$

2. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದರಲ್ಲೂ x^2 ನ ಸಹಗುಣಕಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

(i) $2 + x^2 + x$ (ii) $2 - x^2 + x^3$ (iii) $\frac{\pi}{2}x^2 + x$ (iv) $\sqrt{2}x - 1$

3. ಡಿಗ್ರಿ 35 ಆಗಿರುವ ಒಂದು ದ್ವಿಪದೋಕ್ತಿಗೆ ಹಾಗೂ ಡಿಗ್ರಿ 100 ಆಗಿರುವ ಒಂದು ಏಕಪದೋಕ್ತಿಗೆ ಒಂದೊಂದು ಉದಾಹರಣೆ ಕೊಡಿ.

4. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಡಿಗ್ರಿಯನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

(i) $5x^3 + 4x^2 + 7x$ (ii) $4 - y^2$ (iii) $5t - \sqrt{7}$ (iv) 3

5. ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ರೇಖಾತ್ಮಕ, ವರ್ಗ ಮತ್ತು ಘನಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳಾಗಿ ವರ್ಗೀಕರಿಸಿ.

(i) $x^2 + x$ (ii) $x - x^3$ (iii) $y + y^2 + 4$ (iv) $1 + x$

(v) $3t$ (vi) r^2 (vii) $7x^3$

2.3 ಒಂದು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಶೂನ್ಯತೆಗಳು

$p(x) = 5x^3 - 2x^2 + 3x - 2$ ಎಂಬ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿ.

$p(x)$ ನಲ್ಲಿ ಎಲ್ಲಾ ಕಡೆಗೂ 'x' ಗೆ '1'ನ್ನು ಆದೇಶಿಸಿದರೆ,

$p(1) = 5 \times (1)^3 - 2 \times (1)^2 + 3 \times (1) - 2$

$= 5 - 2 + 3 - 2$

$= 4$

ಆದ್ದರಿಂದ, $x = 1$ ಆದಾಗ $p(x)$ ನ ಬೆಲೆ 4 ಎಂದು ನಾವು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ.

ಹಾಗೆಯೇ, $p(0) = 5(0)^3 - 2(0)^2 + 3(0) - 2$

$= -2$

$p(-1)$ ನ್ನು ನೀವು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಲ್ಲಿರಾ?

ಉದಾಹರಣೆ 2: ಚರಾಕ್ಷರಗಳಿಗೆ ಸೂಚಿಸಿದ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ ಅನುಸಾರವಾಗಿ ಕೆಳಗಿನ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $p(x) = 5x^2 - 3x + 7$, $x = 1$ ಆದಾಗ

(ii) $q(y) = 3y^3 - 4y + \sqrt{11}$, $y = 2$ ಆದಾಗ

(iii) $p(t) = 4t^4 + 5t^3 - t^2 + 6$, $t = a$ ಆದಾಗ

ಪರಿಹಾರ: (i) $p(x) = 5x^2 - 3x + 7$

$x = 1$ ಆದಾಗ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ $p(x)$ ನ ಬೆಲೆಯು

$p(1) = 5(1)^2 - 3(1) + 7$

= 5 – 3 + 7 = 9

(ii) q(y) = $3y^3 - 4y + \sqrt{11}$

y = 2 ಆದಾಗ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ q(y) ನ ಬೆಲೆಯು

q(2) = $3(2)^3 - 4(2) + \sqrt{11}$ = $24 - 8 + \sqrt{11}$ = $16 + \sqrt{11}$

(iii) $p(t) = 4t^4 + 5t^3 - t^2 + 6$

t = a ಆದಾಗ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ p(t) ಯ ಬೆಲೆಯು

$p(a) = 4a^2 + 5a^3 - a^2 + 6$

ಈಗ, p(x) = x – 1 ಎಂಬ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿ.

p(1) ರ ಬೆಲೆ ಏನು? p(1) = 1 – 1 = 0 ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

p(1) = 0 ಆಗಿರುವುದರಿಂದ 1 ನ್ನು ನಾವು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ p(x) ದ ಶೂನ್ಯತೆ ಎನ್ನುತ್ತೇವೆ.

ಅದೇ ರೀತಿ, q(x) = x – 2 ಆದಾಗ, 2 ಎಂಬುದು q(x) ದ ಶೂನ್ಯತೆ ಆಗಿದೆಯೆ ಎಂದು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ. ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ, p(c) = 0 ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ p(x) ನ ಶೂನ್ಯತೆ c ಆಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂದು ನಾವು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ.

ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ x – 1 ರ ಶೂನ್ಯತೆಯು ಅದನ್ನು ಸೊನ್ನೆಗೆ ಸಮೀಕರಿಸುವುದರಿಂದ ಸಿಗುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೀವು ಗಮನಿಸಿರಬಹುದು. ಅಂದರೆ x – 1= 0, ಆಗ x = 1 ಆಗುತ್ತದೆ. p(x) = 0 ಇದನ್ನು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಸಮೀಕರಣ ಎಂದು ಮತ್ತು 1ನ್ನು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಸಮೀಕರಣವಾದ p(x) = 0 ಇದರ ಮೂಲ ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ 1ನ್ನು (x – 1) ಎಂಬ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಶೂನ್ಯತೆ ಎಂದು ಅಥವಾ x – 1 = 0 ಎಂಬ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲ ಎಂದು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ.

ಈಗ ಸ್ಥಿರ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ 5 ನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಿ. ಅದರ ಶೂನ್ಯತೆ ಏನೆಂದು ನೀವು ಹೇಳಬಲ್ಲಿರಾ? ಅದಕ್ಕೆ ಶೂನ್ಯತೆ ಇಲ್ಲ. ಏಕೆಂದರೆ $5x^0$ ಯಲ್ಲಿ x ನ್ನು ಯಾವುದೇ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಬದಲಾಯಿಸಿದರೂ ಪುನಃ 5 ಸಿಗುತ್ತದೆ. ಸೊನ್ನೆಯಲ್ಲದ ಸ್ಥಿರ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯು ಶೂನ್ಯತೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿಲ್ಲ. ಶೂನ್ಯ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಶೂನ್ಯತೆಯನ್ನು ಏನೆನ್ನುವಿರಿ? ನಿಜ ಹೇಳಬೇಕೆಂದರೆ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಯೂ ಶೂನ್ಯ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಒಂದು ಶೂನ್ಯತೆ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 3: x + 2 ಎಂಬ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಶೂನ್ಯತೆಗಳು –2 ಮತ್ತು 2 ಆಗಿವೆಯೆ ಎಂದು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ: p(x) = x + 2 ಆಗಿರಲಿ.

ಆಗ, p(2) = 2 + 2 = 4 p(–2) = – 2 + 2 = 0

ಆದ್ದರಿಂದ –2 ಎಂಬುದು x + 2 ಈ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಶೂನ್ಯತೆ ಆಗಿದೆ. ಆದರೆ 2 ಶೂನ್ಯತೆ ಆಗಿಲ್ಲ.

ಉದಾಹರಣೆ 4 : p(x) = 2x + 1 ಈ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಶೂನ್ಯತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ: p(x) ನ ಶೂನ್ಯತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದೆಂದರೆ, p(x) = 0 ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಿಡಿಸಿದಂತೆ.

ಈಗ, 2x + 1 = 0

$\therefore x = \frac{-1}{2}$

ಆದ್ದರಿಂದ, $-\frac{1}{2}$ ಇದು $2x + 1$ ಎಂಬ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಶೂನ್ಯತೆಯಾಗಿದೆ.

ಈಗ, $p(x) = ax + b$, $a \neq 0$ ಎಂಬುದು ಒಂದು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯಾದರೆ, $p(x)$ ನ ಶೂನ್ಯತೆಯನ್ನು ನಾವು ಹೇಗೆ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಲ್ಲೆವು? ಉದಾಹರಣೆ 4 ನಿಮಗೆ ಕೆಲವು ಕಲ್ಪನೆಗಳನ್ನು ನೀಡಿರಬಹುದು. ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ $p(x)$ ನ ಶೂನ್ಯತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದೆಂದರೆ $p(x) = 0$ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಿಡಿಸುವುದು ಎಂದರ್ಥ.

ಈಗ, $p(x) = 0$ ಅಂದರೆ, $ax + b = 0$, $a \neq 0$

ಆದ್ದರಿಂದ, $ax = -b$

ಅಂದರೆ, $x = \frac{-b}{a}$

ಆದ್ದರಿಂದ, $x = \frac{-b}{a}$ ಯು $p(x)$ ನ ಒಂದೇ ಒಂದು ಶೂನ್ಯತೆಯಾಗಿದೆ. ಅಂದರೆ ಒಂದು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯು ಕೇವಲ ಒಂದೇ ಒಂದು ಶೂನ್ಯತೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿದೆ.

ಈಗ ನಾವು $x - 1$ರ ಶೂನ್ಯತೆಯು 1 ಮತ್ತು ಇದು $x + 2$ ರ ಶೂನ್ಯತೆಯು -2 ಎಂದು ಹೇಳಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆ 5: 2 ಮತ್ತು 0 ಇವು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ $x^2 - 2x$ರ ಶೂನ್ಯತೆಗಳಾಗಿವೆಯೇ? ಪರಿಶೀಲಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ: ಈಗ $p(x) = x^2 - 2x$ ಆಗಿರಲಿ.

ಆದ್ದರಿಂದ, $p(2) = 2^2 - 2(2) = 4 - 4 = 0$

ಮತ್ತು $p(0) = 0^2 - 2(0) = 0 - 0 = 0$

ಆದ್ದರಿಂದ, 2 ಮತ್ತು 0 ಇವೆರಡೂ $x^2 - 2x$ ಈ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಶೂನ್ಯತೆಗಳಾಗಿವೆ.

ನಾವು ಈಗ ನಮ್ಮ ವೀಕ್ಷಣೆಗಳನ್ನು ಪಟ್ಟಿ ಮಾಡೋಣ.

(i) ಒಂದು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಶೂನ್ಯತೆಯು '0' ಆಗಿರಲೇಬೇಕೆಂದಿಲ್ಲ.

(ii) '0' ಯು ಒಂದು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಶೂನ್ಯತೆ ಆಗಿರಬಹುದು.

(iii) ಪ್ರತಿಯೊಂದು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯು ಕೇವಲ ಒಂದೇ ಒಂದು ಶೂನ್ಯತೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ.

(iv) ಒಂದು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯು ಒಂದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಶೂನ್ಯತೆಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರಲು ಸಾಧ್ಯ.

ಅಭ್ಯಾಸ 2.2

1. x ನ ಬೆಲೆಯು ಈ ಕೆಳಗಿನಂತಿದ್ದಾಗ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ $5x - 4x^2 + 3$ ರ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $x = 0$ (ii) $x = -1$ (iii) $x = 2$

2. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗೂ $p(0)$, $p(1)$ ಮತ್ತು $p(2)$ ಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $p(y) = y^2 – y + 1$ (ii) $p(t) = 2 + t + 2t^2 – t^3$

(iii) $p(x) = x^3$ (iv) $p(x) = (x – 1) (x + 1)$

3. ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳು, ಅವುಗಳೆದುರು ಸೂಚಿಸಿದ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳ ಶೂನ್ಯತೆಗಳೇ ಎಂದು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ.

(೧) $p(x) = 3x + 1$; $x=-\frac{1}{3}$ (೨) $p(x) = 5x - \pi$; $x=\frac{4}{5}$

(೩) $p(x) = x2 - 1$; $x = 1, - 1$ (೧೩) $p(x) = (x + 1) (x - 2)$; $x = - 1, 2$

(೫) $p(x) = x2$; $x = 0$ (೬) $p(x) = lx + m$; $x=-\frac{m}{l}$

(೭) $p(x) = 3x2 - 1$; $x=-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{2}{\sqrt{3}}$ (೮) $p(x) = 2x + 1$; $x=\frac{1}{2}$

4. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಶೂನ್ಯತೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $p(x) = x + 5$ (ii) $p(x) = x – 5$ (iii) $p(x) = 2x + 5$

(iv) $p(x) = 3x – 2$ (v) $p(x) = 3x$ (vi) $p(x) = ax, a \neq 0$

(vii) $p(x) = cx + d, c \neq 0$, c, d ಗಳು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು.

2.4 ಶೇಷ ಪ್ರಮೇಯ

15 ಮತ್ತು 6 ಎಂಬ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿ. 15 ನ್ನು 6 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಭಾಗಲಬ್ಧ 2 ಮತ್ತು ಶೇಷ 3ನ್ನು ನಾವು ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೀವು ತಿಳಿದಿದ್ದೀರಿ. ಇದನ್ನು ಹೇಗೆ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸುವುದು ಎಂಬುದು ನಿಮಗೆ ನೆನಪಿದೆಯೇ? ನಾವು 15ನ್ನು ಈ ರೀತಿ ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ.

$15 = (2 \times 6) + 3$

ಶೇಷ 3 ಇದು ಭಾಜಕ 6 ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆಯಾಗಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನಾವು ಗಮನಿಸಬಹುದು. ಹಾಗೆಯೇ
12 ನ್ನು 6 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ,

$12 = (2 \times 6) + 0$ ಆಗುತ್ತದೆ.

ಇಲ್ಲಿ ಶೇಷ ಎಷ್ಟು? ಇಲ್ಲಿ ಶೇಷವು 0 ಆಗಿದೆ ಮತ್ತು 12 ರ ಅಪವರ್ತನ 6 ಅಥವಾ 6 ರ ಅಪವರ್ತ್ಯ 12 ಎಂದು ನಾವು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ.

ಈಗ ಪ್ರಶ್ನೆ ಏನೆಂದರೆ ಒಂದು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯನ್ನು ಮತ್ತೊಂದರಿಂದ ಭಾಗಿಸಬಹುದೇ? ಇದನ್ನು ತಿಳಿಯಲು ಭಾಜಕವು ಏಕ ಪದೋಕ್ತಿಯಾದಾಗ ಪ್ರಯತ್ನಿಸೋಣ. ಆದ್ದರಿಂದ ಈಗ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ $2x^3 + x^2 + x$ ನ್ನು ಏಕಪದೋಕ್ತಿ x ದಿಂದ ಭಾಗಿಸೋಣ.

$(2x^3 + x^2 + x) \div x = \frac{2x^3}{x}+\frac{x^2}{x}+\frac{x}{x}$

$= 2x^2 + x + 1$

ನಿಜವಾಗಿ, $2x^3 + x^2 + x$ ನ ಪ್ರತಿ ಪದದಲ್ಲಿಯೂ ‘x’ ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿರುವುದನ್ನು ನೀವು ಗಮನಿಸಿರಬಹುದು. ಆದ್ದರಿಂದ $2x^3 + x^2 + x$ ನ್ನು $x(2x^2 + x + 1)$ ಎಂದು ಬರೆಯಬಹುದು. ಹೀಗಾಗಿ x ಮತ್ತು
$2x^2 + x + 1$ ಗಳು $2x^3 + x^2 + x$ ನ ಅಪವರ್ತನಗಳು. $2x^3 + x^2 + x$ ಇದು x ನ ಅಪವರ್ತ್ಯವೂ ಹೌದು ಮತ್ತು $2x^3 + x^2 + 1$ ರ ಅಪವರ್ತ್ಯವೂ ಹೌದು ಎಂದು ನಾವು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ.

ಇನ್ನೊಂದು ಜೊತೆ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳಾದ $3x^2 + x + 1$ ಮತ್ತು x ನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿ.

ಇಲ್ಲಿ, $(3x^2 + x + 1) \div x = (3x^2 \div x) + (x \div x) + (1 \div x)$

1 ನ್ನು ‘x’ ನಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ ನಾವು ಒಂದು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ ಪದವನ್ನು ಪಡೆಯಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ ಎಂದು ತಿಳಿಯುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ಈ ಪ್ರಕರಣದಲ್ಲಿ ನಾವು ಇಲ್ಲಿಗೆ ನಿಲ್ಲಿಸುತ್ತೇವೆ. ಇಲ್ಲಿ 1 ಶೇಷವಾಗಿರುವುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. ಆದ್ದರಿಂದ,

$3x^2 + x + 1 =[x \times (3x + 1)] + 1$

ಈ ಪ್ರಕರಣದಲ್ಲಿ, $3x + 1$ ಭಾಗಲಬ್ಧ ಮತ್ತು 1 ಶೇಷವಾಗಿದೆ. x ಎಂಬುದು $3x^2 + x + 1$ ರ ಅಪವರ್ತನ ಎಂದು ನೀವು ಯೋಚಿಸುತ್ತೀರಾ? ಶೇಷವು ಸೊನ್ನೆಯಾಗಿಲ್ಲದಿರುವುದರಿಂದ, ಅದು ಅಪವರ್ತನವಲ್ಲ.

ಈಗ ಒಂದು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯನ್ನು ಯಾವುದೇ ಶೂನ್ಯವಲ್ಲದ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯಿಂದ ಹೇಗೆ ಭಾಗಿಸಬಹುದೆಂಬುದನ್ನು ನೋಡಲು ಒಂದು ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿ.

ಉದಾಹರಣೆ 6: $p(x) = x + 3x^2 – 1$ ಮತ್ತು $g(x) = 1 + x$ ಆದಾಗ $p(x)$ ನ್ನು $g(x)$ ನಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ: ಈ ಕೆಳಗಿನ ಹಂತಗಳ ಮೂಲಕ ನಾವು ಭಾಗಾಕಾರ ಕ್ರಿಯೆಯನ್ನು ಮಾಡುತ್ತೇವೆ.

ಹಂತ 1: ನಾವು ಭಾಜ್ಯ $x + 3x^2 – 1$ ನ್ನು ಮತ್ತು ಭಾಜಕ $1 + x$ ನ್ನು ಆದರ್ಶ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಅಂದರೆ ಪದಗಳನ್ನು ಅವುಗಳ ಡಿಗ್ರಿಯ ಇಳಿಕೆ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಬರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಭಾಜ್ಯವು $3x^2 + x – 1$ ಮತ್ತು ಭಾಜಕವು $x + 1$ ಆಗುತ್ತದೆ.

ಹಂತ 2: ನಾವು ಭಾಜ್ಯದ ಭಾಗಲಬ್ಧದ ಮೊದಲ ಪದವನ್ನು ಭಾಜಕದ ಮೊದಲ ಪದದಿಂದ ಭಾಗಿಸುತ್ತೇವೆ ಅಂದರೆ ನಾವು $3x^2$ ನ್ನು x ದಿಂದ ಭಾಗಿಸುತ್ತೇವೆ ಮತ್ತು $3x$ ನ್ನು ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ. ಇದು ಭಾಗಲಬ್ಧದ ಮೊದಲ ಪದ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

$\frac{3x^2}{x} = 3x$ = ಭಾಗಲಬ್ಧದ ಮೊದಲ ಪದ

ಹಂತ 3: ನಾವು ಭಾಜಕವನ್ನು ಭಾಗಲಬ್ಧದ ಮೊದಲ ಪದದಿಂದ ಗುಣಿಸುತ್ತೇವೆ ಮತ್ತು ಈ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಭಾಜ್ಯದಿಂದ ಕಳೆಯುತ್ತೇವೆ. ಅಂದರೆ
$(x + 1)$ ನ್ನು $3x$ ದಿಂದ ಗುಣಿಸುತ್ತೇವೆ ಮತ್ತು ಗುಣಲಬ್ಧ $3x^2 + 3x$ ನ್ನು ಭಾಜ್ಯ $3x^2 + x –1$ ರಿಂದ ಕಳೆಯುತ್ತೇವೆ. $– 2x – 1$ ಎಂಬ ಶೇಷ ದೊರೆಯುತ್ತದೆ.

$$\begin{array}{r|l} & 3x \\ \hline x+1 & 3x^2 + x - 1 \\ & 3x^2 + 3x \\ & \underline{- \quad -} \\ & -2x - 1 \end{array}$$

$\frac{-2x}{x} = -2$ ಹೊಸ ಭಾಗಲಬ್ಧ

= ಭಾಗಲಬ್ಧದ 2ನೇ ಪದ = 3x – 2

ಹಂತ 4 : ಶೇಷ – 2x – 1 ನ್ನು ನಾವು ಹೊಸ ಭಾಜ್ಯವಾಗಿ ಪರಿಗಣಿಸುತ್ತೇವೆ. ಭಾಜಕವು ಮೊದಲಿನಂತೆಯೇ ಇರುತ್ತದೆ. ಭಾಗಲಬ್ಧದ ಮುಂದಿನ ಪದವನ್ನು ಪಡೆಯಲು ನಾವು 2ನೆಯ ಹಂತವನ್ನು ಪುನರಾವರ್ತಿಸುತ್ತೇವೆ. ಅಂದರೆ ನಾವು ಹೊಸ ಭಾಜ್ಯದ ಮೊದಲ ಪದ –2x ನ್ನು ಭಾಜಕದ ಮೊದಲ ಪದ ಥ ನಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ –2 ನ್ನು ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ. ಹೀಗೆ –2 ಎಂಬುದು ಭಾಗಲಬ್ಧದಲ್ಲಿ ಎರಡನೆಯ ಪದ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಹಂತ 5 :ನಾವು ಭಾಜಕವನ್ನು ಭಾಗಲಬ್ಧದ ಎರಡನೆಯ ಪದದಿಂದ ಗುಣಿಸುತ್ತೇವೆ ಮತ್ತು ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಭಾಜ್ಯದಿಂದ ಕಳೆಯುತ್ತೇವೆ. ಅಂದರೆ, ನಾವು (x + 1) ನ್ನು –2 ರಿಂದ ಗುಣಿಸುತ್ತೇವೆ ಮತ್ತು ಗುಣಲಬ್ಧ –2x – 2 ನ್ನು ಭಾಜ್ಯ –2x –1 ರಿಂದ ಕಳೆಯುತ್ತೇವೆ. ಆಗ 1ನ್ನು ಶೇಷವಾಗಿ ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ.

$$
\begin{array}{r|r}
(x+1)(-2) & -2x-1 \\
= -2x-2 & -2x-2 \\
 & + \quad + \\
\hline
 & +1
\end{array}
$$

ಶೇಷವು ‘0’ ಆಗುವವರೆಗೆ ಅಥವಾ ಹೊಸ ಭಾಜ್ಯದ ಡಿಗ್ರಿಯು ಭಾಜಕದ ಡಿಗ್ರಿಗಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಆಗುವವರೆಗೆ ಈ ಕ್ರಿಯೆಯು ಮುಂದುವರಿಯುತ್ತದೆ. ಈ ಹಂತದಲ್ಲಿ, ಈ ಹೊಸ ಭಾಜ್ಯವು ಶೇಷವಾಗುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಭಾಗಲಬ್ಧಗಳ ಮೊತ್ತವು ನಮಗೆ ಪೂರ್ಣ ಭಾಗಲಬ್ಧವನ್ನು ನೀಡುತ್ತದೆ.

ಹಂತ 6: ಹೀಗೆ, ಪೂರ್ಣ ಭಾಗಲಬ್ಧವು 3x – 2 ಮತ್ತು ಶೇಷವು 1 ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಈಗ, ಈ ಮೇಲಿನ ಕ್ರಿಯೆಯಲ್ಲಿ ನಾವು ಮಾಡಿರುವುದನ್ನು ಸಮಗ್ರವಾಗಿ ನೋಡೋಣ.

$$
\begin{array}{r|l}
 & 3x-2 \\
\cline{2-2}
x+1 & 3x^2+x-1 \\
 & 3x^2+3x \\
 & - \quad - \\
\cline{2-2}
 & \quad -2x-1 \\
 & \quad -2x-2 \\
 & \quad + \quad + \\
\cline{2-2}
 & \qquad\quad 1 \\
\cline{2-2}
\end{array}
$$

$3x^2 + x – 1 = (x + 1) (3x – 2) + 1$ ಆಗಿರುವುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

ಅಂದರೆ, ಭಾಜ್ಯ = (ಭಾಜಕ್ಠ ಭಾಗಲಬ್ಧ) + ಶೇಷ

ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ, ಠ(ಥ) ನ ಡಿಗ್ರಿ ≥ ಂ(ಥ) ನ ಡಿಗ್ರಿ ಮತ್ತು $g(x) \neq 0$ ಆಗಿರುವಂತೆ p(x) ಮತ್ತು g(x) ಗಳು ಎರಡು ಬಹು ಪದೋಕ್ತಿಗಳಾದರೆ, ಆಗ ನಾವು p(x) = g(x) q(x) + r(x) ಆಗುವಂತೆ q(x) ಮತ್ತು r(x) ಎಂಬ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳನ್ನು ನಾವು ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಇಲ್ಲಿ r(x) = 0 ಅಥವಾ r(x) ನ ಡಿಗ್ರಿ < g(x) ನ ಡಿಗ್ರಿ. ಇಲ್ಲಿ, ಠ(ಥ) ನ್ನು g(x) ನಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ, ಭಾಗಲಬ್ಧ q(x) ಮತ್ತು ಶೇಷ r(x)

ದೊರೆಯುತ್ತದೆ ಎಂದು ನಾವು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ.

ಈ ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ, ಭಾಜಕವು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯಾಗಿತ್ತು. ಅಂತಹ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಶೇಷ ಮತ್ತು ಭಾಜ್ಯದ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಬೆಲೆಗಳ ನಡುವೆ ಯಾವುದಾದರೂ ಸಂಬಂಧ ಇದೆಯೇ ಎಂದು ನಾವು ಈಗ ನೋಡೋಣ.

$p(x) = 3x^2 + x - 1$ ರಲ್ಲಿ ಥ ಗೆ -1 ನ್ನು ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ, ನಮಗೆ

$p(-1) = 3(-1)^2 + (-1) - 1 = 1$ ಸಿಗುತ್ತದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ $p(x) = 3x^2 + x - 1$ ನ್ನು $x + 1$ ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ದೊರೆತ ಶೇಷವು, ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ $x + 1$ ರ ಶೂನ್ಯತೆಯಲ್ಲಿ ಎಂದರೆ -1ರಲ್ಲಿ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ $p(x)$ ನ ಬೆಲೆಗೆ ಸಮನಾಗಿದೆ.

ಈಗ, ಇನ್ನೂ ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

ಉದಾಹರಣೆ 7 : ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ $3x^4 - 4x^3 - 3x - 1$ ನ್ನು $x - 1$ ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ: ದೀರ್ಘ ಭಾಗಾಕಾರದಿಂದ,

$$
\begin{array}{r|l}
 & 3x^3 - x^2 - x - 4 \\
\hline
x - 1 & 3x^4 - 4x^3 - 3x - 1 \\
 & 3x^4 - 3x^3 \\
 & - \quad + \\
\hline
 & -x^3 \qquad - 3x - 1 \\
 & -x^3 + x^2 \\
 & + \quad - \\
\hline
 & -x^2 - 3x - 1 \\
 & -x^2 + x \\
 & + \quad - \\
\hline
 & -4x - 1 \\
 & -4x + 4 \\
 & + \quad - \\
\hline
 & -5
\end{array}
$$

ಇಲ್ಲಿ ಶೇಷವು -5 ಆಗಿದೆ. ಈಗ ಥ$-$ 1 ರ ಶೂನ್ಯತೆ 1 ಆದ್ದರಿಂದ ಠ(ಥ) ನಲ್ಲಿ ಥ =1 ನ್ನು ಆದೇಶಿಸಿದರೆ,

$p(x) = 3(1)^4 - 4(1)^3 - 3(1) - 1$

$= 3 - 4 - 3 - 1$

$= -5$ ಇದು ಶೇಷವಾಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 8 : $p(x) = x^3 + 1$ ನ್ನು $x + 1$ ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಸಿಗುವ ಶೇಷವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ

ಪರಿಹಾರ : ದೀರ್ಘ ಭಾಗಾಕಾರದಿಂದ,

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2 - x + 1 \\
\hline
x+1 & x^3 + 1 \\
 & x^3 + x^2 \\
 & -\quad - \\
\hline
 & -x^2 \qquad + 1 \\
 & -x^2 - x \\
 & +\quad + \\
\hline
 & x + 1 \\
 & x + 1 \\
 & -\quad - \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

ಆದ್ದರಿಂದ ಶೇಷ 0 ಆಗಿರುವುದನ್ನು ನಾವು ಕಾಣುತ್ತೇವೆ.

ಇಲ್ಲಿ $p(x) = x^3 + 1$ ಮತ್ತು $x + 1 = 0$ ಗಳ ಮೂಲವು $x = -1$

$p(-1) = (-1)^3 + 1$

$= -1 + 1$

$= 0$

ಇದು ನೈಜ ಭಾಗಾಕಾರದಲ್ಲಿ ದೊರೆತ ಶೇಷಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿದೆ.

ಒಂದು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯನ್ನು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ದೊರೆಯುವ ಶೇಷವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಇದು ಸರಳ ಮಾರ್ಗವಲ್ಲವೇ? ನಾವು ಈಗ ಈ ವಿಷಯವನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರಮೇಯದ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಸಾಮಾನ್ಯೀಕರಿಸೋಣ. ಈ ಪ್ರಮೇಯಕ್ಕೆ ಒಂದು ಸಾಧನೆಯನ್ನು ನೀಡುವ ಮೂಲಕ, ಪ್ರಮೇಯವು ಹೇಗೆ ಸತ್ಯವಾಗಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನಾವು ನಿಮಗೆ ತೋರಿಸಿ ಕೊಡುತ್ತೇವೆ.

ಶೇಷ ಪ್ರಮೇಯ :

$p(x)$ ಎಂಬುದು ಡಿಗ್ರಿ 1 ಅಥವಾ 1 ಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಆಗಿರುವ ಒಂದು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ ಆಗಿರಲಿ ಮತ್ತು ಚಿ ಒಂದು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆ ಆಗಿರಲಿ. $p(x)$ ನ್ನು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ $x - a$ ದಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ $p(a)$ ಯು ಶೇಷವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಸಾಧನೆ :

$p(x)$ ಎಂಬುದು ಡಿಗ್ರಿ 1 ಅಥವಾ 1 ಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚಾಗಿರುವ ಯಾವುದೇ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ ಆಗಿರಲಿ. $p(x)$ ನ್ನು $(x - a)$ ದಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ, ಭಾಗಲಬ್ಧ $q(x)$ ಮತ್ತು ಶೇಷ $r(x)$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ

$p(x) = (x - a)\, q(x) + r(x)$

$(x-a)$ ಯ ಡಿಗ್ರಿಯು 1 ಮತ್ತು ಡಿ(ಥ) ನ ಡಿಗ್ರಿಯು $(x-a)$ ಯ ಡಿಗ್ರಿಗಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಇರುವುದರಿಂದ $r(x)$ನ ಡಿಗ್ರಿ = 0. ಹಾಗೆಂದರೆ ಡಿ(ಥ) ಒಂದು ಸ್ಥಿರಾಂಕ ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಈ ಸ್ಥಿರಾಂಕವು r ಆಗಿರಲಿ.

ಆದ್ದರಿಂದ x ನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಬೆಲೆಗೂ $r(x) = r$.

ಆದ್ದರಿಂದ $p(x) = (x - a)\, q(x) + r(x)$

ನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾಗಿ $x = a$ ಆದರೆ, $p(a) = (a - a)\, q(a) + r$

ಹೀಗೆ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಸಾಧಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಈ ಫಲಿತಾಂಶವನ್ನು ಇನ್ನೊಂದು ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ಉಪಯೋಗಿಸೋಣ.

ಉದಾಹರಣೆ 9 : x4 + x3 – 2x2 + x + 1 ನ್ನು x – 1 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಸಿಗುವ ಶೇಷವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ : ಇಲ್ಲಿ p(x)= x4 + x3 – 2x2 + x + 1 ಮತ್ತು x – 1 ರ ಶೂನ್ಯತೆ 1.

ಆದ್ದರಿಂದ $p(1) = (1)^4 + (1)^3 - 2(1)^2 + 1 + 1$

$= 2$

∴ಶೇಷ ಪ್ರಮೇಯದ ಪ್ರಕಾರ, x4 + x3 – 2x2 +x + 1 ನ್ನು x – 1 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಸಿಗುವ ಶೇಷ 2.

ಉದಾಹರಣೆ 10 : $q(t) = 4t^3 + 4t^2 - t - 1$ ಎಂಬ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯು (2t + 1) ರ ಅಪವರ್ತ್ಯವಾಗಿದೆಯೇ ಎಂದು ಪರಿಶೀಲಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ : ನೀವು ತಿಳಿದಂತೆ, 2t + 1 ಇದು q(t) ಯನ್ನು ಶೇಷ ಸೊನ್ನೆ ಆಗುವಂತೆ ಭಾಗಿಸಿದರೆ ಮಾತ್ರ q(t)ಯು 2t + 1 ದ ಅ ಪವರ್ತ್ಯವಾಗುತ್ತದೆ. ಈಗ 2t + 1 = 0 ಎಂದು ತೆಗೆದುಕೊಂಡಾಗ, $t = -\frac{1}{2}$ ಆಗುತ್ತದೆ.

$$q\left(-\frac{1}{2}\right) = 4\left(-\frac{1}{2}\right)^3 + 4\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \left(-\frac{1}{2}\right) - 1 = -\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} - 1 = 0$$

ಆದ್ದರಿಂದ q(t) ಯನ್ನು 2t + 1 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಸಿಗುವ ಶೇಷ ಸೊನ್ನೆ ಆಗಿದೆ. ಅಂದರೆ 2t + 1 ಇದು ದತ್ತ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ q(t) ಯ ಅಪವರ್ತನವಾಗಿದೆ, ಹೀಗಾಗಿ, q(t) ಯು 2t + 1 ದ ಅಪವರ್ತ್ಯವಾಗಿದೆ.

ಅಭ್ಯಾಸ 2.3

1. ಈ ಕೆಳಗಿನವುಗಳಿಂದ x3 + 3x2 + 3x + 1 ನ್ನು ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಸಿಗುವ ಶೇಷವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(ು) x + 1 (ುು) $x - \frac{1}{2}$ (ುುು) x (ುತಿ) x + π (ತಿ) 5 + 2x

2. x3 – ax2 + 6x – a ಯನ್ನು x – a ದಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದಾಗ ಸಿಗುವ ಶೇಷವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

3. 7 + 3x ಇದು 3x3 + 7x ರ ಅಪವರ್ತನವೇ ಎಂದು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ.

2.5 ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳ ಅಪವರ್ತಿಸುವಿಕೆ

ಈಗ ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆ 10ರ ಸಂದರ್ಭವನ್ನು ಸೂಕ್ಷ್ಮವಾಗಿ ಗಮನಿಸೋಣ ಅದರಿಂದ ಶೇಷ, $q\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ (2t + 1) ಇದು q(t) ಯ ಅಪವರ್ತನವಾಗಿದೆ ಎಂಬುದು ತಿಳಿಯುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ ಯಾವುದೊಂದು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ g(t) ಗೆ q(t) = (2t + 1) g(t) ಇದು ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರಮೇಯದ ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಪ್ರಕರಣವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಅಪವರ್ತನ ಪ್ರಮೇಯ : p(x) ಎಂಬುದು ಟಿ ಡಿಗ್ರಿಯ ಒಂದು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯಾಗಿದ್ದು (n ≥ 1) ಮತ್ತು ಚಿ ಯಾವುದೇ ಒಂದು ವಾಸ್ತವಸಂಖ್ಯೆ ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ (i) p(a) = 0 ಆದರೆ ಆಗ x – a ಯು p(x) ದ ಅಪವರ್ತನವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಮತ್ತು (ii) (x – a) ಯು

$p(x)$ ದ ಅಪವರ್ತನವಾದರೆ ಆಗ $p(a) = 0$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಸಾಧನೆ : ಶೇಷ ಪ್ರಮೇಯದಿಂದ, $p(x)= (x – a)\, q(x) + p(a)$

(i) $p(a) = 0$ ಆದರೆ, ಆಗ $p(x) = (x – a)\, q(x)$. ಇದು $(x – a)$ಯು $p(x)$ ದ ಅಪವರ್ತನ ಎಂದು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ.

(ii) $(x–a)$ ಯು $p(x)$ ನ ಅಪವರ್ತನವಾಗಿರುವುದರಿಂದ, $p(x)= (x – a)\, g(x)$. ಇಲ್ಲಿ $p(a) = (a – a)\, g(a) = 0$

ಉದಾಹರಣೆ 11: $x + 2$ ಇದು $x3 + 3x2 + 5x + 6$ ರ ಮತ್ತು $2x + 4$ ರ ಅಪವರ್ತನವಾಗಿದೆಯೇ ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ : $x + 2$ ಇದರ ಶೂನ್ಯತೆ $–2$ ಆಗಿದೆ.

ಈಗ $p(x) = x3 – 3x2 + 5x – 6$ ಮತ್ತು $s(x) = 2x + 4$ ಆಗಿರಲಿ

ಆಗ, $p(–2) = (–2)^3 + 3(–2)^2 + 5(–2) + 6$

$= –8 + 12 – 10 + 6$

$= 0$

ಆದ್ದರಿಂದ, ಅಪವರ್ತನ ಪ್ರಮೇಯದ ಪ್ರಕಾರ, $x + 2$ ಇದು $x3 + 3x2 + 5x – 6$ ರ ಅಪವರ್ತನವಾಗಿದೆ. ಪುನಃ $s(−2) = 2(−2) + 4 = 0$

ಆದ್ದರಿಂದ, $x + 2$ ಇದು $2x+4$ ರ ಅಪವರ್ತನವಾಗಿದೆ. ನಿಜವಾಗಿ, $2x + 4 = 2(x + 2)$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, ಅಪವರ್ತನ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಅನ್ವಯಿಸದೆಯೂ ನೀವು ಇದನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆ 12 : $x – 1$ ಇದು $4x3 + 3x2 – 4x + k$ ಯ ಅಪವರ್ತನವಾಗಿದ್ದರೆ, k ಯ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ : $x – 1$ ಇದು $p(x) = 4x3 + 3x2 – 4x + k$ ಯ ಅಪವರ್ತನವಾಗಿರುವುದರಿಂದ, $p(1) = 0$

ಈಗ, $p(1) = 4(1)3 + 3(1)2 – 4(1) + k$

ಆದ್ದರಿಂದ, $4 + 3 – 4 + k = 0$

ಅಂದರೆ $k = −3$

ನಾವು ಈಗ ಡಿಗ್ರಿ 2 ಮತ್ತು 3 ಆಗಿರುವ ಕೆಲವು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳನ್ನು ಅಪವರ್ತಿಸಲು ಅಪವರ್ತನ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತೇವೆ. ನಿಮಗೆ ಈಗಾಗಲೇ $x2 + lx + m$ ನಂತಹ ವರ್ಗ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯನ್ನು ಅಪವರ್ತಿಸುವುದರ ಪರಿಚಯವಿದೆ. ನೀವು ಮಧ್ಯಪದವಾದ lx ನ್ನು $ax + bx$ ($ab = m$ ಆಗುವಂತೆ) ಎಂದು ವಿಭಜಿಸುವ ಮೂಲಕ ಅಪವರ್ತಿಸಿದ್ದೀರಿ. ಆಗ $x2 + lx + m = (x + a)(x + b)$ ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಈಗ ನಾವು $ax2 + bx + c$ ($a \neq 0$, a, b, c ಗಳು ಸ್ಥಿರಾಂಕಗಳು) ರೂಪದ ವರ್ಗಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳನ್ನು ಅಪವರ್ತಿಸಲು ಪ್ರಯತ್ನಿಸೋಣ.

ಮಧ್ಯಪದವನ್ನು ವಿಭಜಿಸುವ ಮೂಲಕ, ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ $ax2 + bx + c$ ಯನ್ನು ಅಪವರ್ತಿಸುವ ವಿಧಾನವು ಈ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಇರುತ್ತದೆ:

ಈಗ ಅದರ ಅಪವರ್ತನಗಳು $(px + q)$ ಮತ್ತು $(rx + s)$ ಆಗಿರಲಿ.

$\therefore ax2 + bx + c = (px + q)(rx + s) = pr\, x2 + (ps + qr)\, x + qs$

$x2$ ದ ಸಹಗುಣಕಗಳನ್ನು ಹೋಲಿಸಲಾಗಿ, $a = pr$.

ಹಾಗೆಯೇ, x ನ ಸಹಗುಣಕಗಳನ್ನು ಹೋಲಿಸಲಾಗಿ, $b = ps + qr$.

ಮತ್ತು ಸ್ಥಿರಾಂಕಗಳನ್ನು ಹೋಲಿಸಲಾಗಿ, $c = qs$ ಆಗುತ್ತದೆ.

ಇದು ನಮಗೆ b ಯು ps ಮತ್ತು qr ಎಂಬ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವಾಗಿದೆ ಎಂದು ತೋರಿಸುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ಇಲ್ಲಿ $(ps)(qr) = (pr)(qs) = ac$ ಆಗಿದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, $ax^2 + bx + c$ ಯನ್ನು ಅಪವರ್ತಿಸಲು, ನಾವು b ಯನ್ನು ಗುಣಲಬ್ಧ ac ಆಗಿರುವಂತಹ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವಾಗಿ ಬರೆಯಬೇಕು. ಇದು ಉದಾಹರಣೆ 13 ರಿಂದ ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 13 : $6x^2 + 17x + 5$ ಇದನ್ನು ಮಧ್ಯಪದವನ್ನು ವಿಭಜಿಸುವುದರಿಂದ ಹಾಗೂ ಅಪವರ್ತನ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುವುದರಿಂದ ಅಪವರ್ತಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ 1 : (ಮಧ್ಯಪದವನ್ನು ವಿಭಜಿಸುವ ವಿಧಾನದಿಂದ) : $p + q = 17$ ಮತ್ತು $pq = 6 \times 5 = 30$ ಆಗುವಂತೆ p ಮತ್ತು q ಎಂಬ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ನಮಗೆ ದೊರೆತರೆ, ಆಗ ನಾವು ಅಪವರ್ತನಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದು.

ಆದ್ದರಿಂದ ಈಗ 30 ರ ಅಪವರ್ತನಗಳ ಜೊತೆಗಳನ್ನು ನೋಡೋಣ. ಅವುಗಳೆಂದರೆ 1 ಮತ್ತು 30, 2 ಮತ್ತು 15, 3 ಮತ್ತು 10, 5 ಮತ್ತು 6. ಇವುಗಳಲ್ಲಿ 2 ಮತ್ತು 15 ನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡಾಗ, $p + q = 17$ ಆಗುತ್ತದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, $6x^2 + 17x + 5 = 6x^2 + (2 + 15)x + 5$

$= 6x^2 + 2x + 15x + 5$

$= 2x(3x + 1) + 5(3x + 1)$

$= (3x + 1)(2x + 5)$

ಪರಿಹಾರ 2 : (ಅಪವರ್ತನ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುವುದರಿಂದ)

$6x^2 + 17x + 5 = 6\left(x^2 + \frac{17}{6}x + \frac{5}{6}\right) = 6\,p(x)$, ಆಗಿರಲಿ a ಮತ್ತು b ಗಳು p(x) ನ ಶೂನ್ಯತೆಗಳಾದರೆ, ಆಗ $6x^2 + 17x + 5 = 6(x - a)(x - b)$. ಹೀಗೆ, $ab = \frac{5}{6}$. ಈಗ, a ಮತ್ತು b ಗಳ ಕೆಲವು ಸಾಧ್ಯತೆಗಳನ್ನು ನೋಡೋಣ.

ಅವೆಂದರೆ $\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{5}{3}, \pm\frac{5}{2}, \pm 1.$ ಈಗ, $p\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} + \frac{17}{6}\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{5}{6} \neq 0.$ ಆದರೆ $p\left(\frac{-1}{3}\right) = 0$ ಆದ್ದರಿಂದ, $\left(x + \frac{1}{3}\right)$ ಇದು p(x) ನ ಅಪವರ್ತನವಾಗಿದೆ.

ಇದೇ ರೀತಿ, ಪರೀಕ್ಷಾ ಕ್ರಮದಿಂದ $\left(x + \frac{5}{2}\right)$ ಇದು p(x) ನ ಅಪವರ್ತನವಾಗಿರುವುದನ್ನು ನೀವು ಕಾಣಬಹುದು.

ಆದ್ದರಿಂದ, $6x^2 + 17x + 5 = 6\left(x + \frac{1}{3}\right)\left(x + \frac{5}{2}\right)$

$$= 6\left(\frac{3x+1}{3}\right)\left(\frac{2x+5}{2}\right)$$

$= (3x + 1)(2x + 5)$

ಮೇಲಿನ ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಮಧ್ಯಪದವನ್ನು ವಿಭಜಿಸುವ ವಿಧಾನವು ಹೆಚ್ಚು ಉತ್ತಮವಾದುದೆಂದು ಕಾಣುತ್ತದೆ. ಆದಾಗ್ಯೂ, ನಾವು ಈಗ ಇನ್ನೊಂದು ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ.

ಉದಾಹಣೆ 14 : ಅಪವರ್ತನ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ $y^2 - 5y + 6$ ನ್ನು ಅಪವರ್ತಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ: ಈಗ $p(y) = y^2 - 5y + 6$ ಆಗಿರಲಿ. ಈಗ, $p(y) = (y - a)(y - b)$ ಆದರೆ, ಸ್ಥಿರಾಂಕವು ab ಆಗಿರುವುದೆಂದು ನೀವು ತಿಳಿದಿದ್ದೀರಿ. ಹೀಗೆ $ab = 6$. ಆದ್ದರಿಂದ $p(y)$ ದ ಅಪವರ್ತನಗಳನ್ನು ತಿಳಿಯಲು ನಾವು 6ರ ಅಪವರ್ತನಗಳನ್ನು ನೋಡುತ್ತೇವೆ.

6 ರ ಅಪವರ್ತನಗಳೆಂದರೆ 1, 2 ಮತ್ತು 3

ಈಗ, $p(2) = 2^2 - (5 \times 2) + 6 = 0$

ಆದ್ದರಿಂದ, $y - 2$ ಇದು $p(y)$ ದ ಒಂದು ಅಪವರ್ತನವಾಗಿದೆ.

ಮತ್ತು $p(3) = 3^2 - (5 \times 3) + 6 = 0$

ಆದ್ದರಿಂದ, $(y - 3)$ ಇದೂ ಸಹ $y^2 - 5y + 6$ ರ ಅಪವರ್ತನವಾಗಿದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ, $y^2 - 5y + 6 = (y - 2)(y - 3)$.

$y^2 - 5y + 6$ ನ್ನು ಮಧ್ಯಪದವಾದ $-5y$ ನ್ನು ವಿಭಜಿಸುವುದರಿಂದ ಕೂಡಾ ಅಪವರ್ತಿಸಬಹುದು ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

ಈಗ ಘನಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳ ಅಪವರ್ತಿಸುವಿಕೆಯನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಇಲ್ಲಿ, ವಿಭಜಿಸುವ ವಿಧಾನದಿಂದ ಆರಂಭಿಸುವುದು ಸೂಕ್ತವಲ್ಲ. ನೀವು ಈ ಕೆಳಗಿನ ಉದಾಹರಣೆಯಲ್ಲಿ ಕಾಣುವಂತೆ, ಮೊದಲು ಕನಿಷ್ಠ ಒಂದು ಅಪವರ್ತನವನ್ನು ನಾವು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 15 : $x3 - 23x2 + 142x - 120$ ನ್ನು ಅಪವರ್ತಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ : ಈಗ, $p(x) = x3 - 23x2 + 142x - 120$ ಆಗಿರಲಿ.

ಈಗ ನಾವು –120 ರ ಎಲ್ಲಾ ಅಪವರ್ತನಗಳನ್ನು ನೋಡಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಕೆಲವು,
$\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5, \pm 6, \pm 8, \pm 10, \pm 12, \pm 15, \pm 20, \pm 24, \pm 30, \pm 60$.

ಪರೀಕ್ಷಾ ಕ್ರಮದಿಂದ $p(1) = 0$ ಆಗಿರುವುದನ್ನು ನಾವು ಕಾಣುತ್ತೇವೆ.

$\therefore (x - 1)$ ಇದು $p(x)$ ದ ಒಂದು ಅಪವರ್ತನವಾಗಿದೆ.

ಈಗ, $x^3 - 23x^2 + 142x - 120 = x^3 - x^2 - 22x^2 + 22x + 120x - 120$

$= x^2(x - 1) - 22x(x - 1) + 120(x - 1)$ (ಏಕೆ?)

$= (x - 1)(x^2 - 22x + 120)$ [$(x - 1)$ [ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳಲಾಗಿದೆ]

$p(x)$ ನ್ನು $(x - 1)$ ರಿಂದ ಭಾಗಿಸುವುದರಿಂದಲೂ ನಾವು ಇದನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದು.

ಈಗ, $x^2 - 22x + 120$ ನ್ನು ಮಧ್ಯಪದವನ್ನು ವಿಭಜಿಸುವುದರಿಂದ ಅಥವಾ ಅಪವರ್ತನ ಪ್ರಮೇಯದ ಸಹಾಯದಿಂದ ಅ ಪವರ್ತಿಸಬಹುದು. ಮಧ್ಯಪದವನ್ನು ವಿಭಜಿಸಿದಾಗ,

$x^2 - 22x + 120 = x^2 - 12x - 10x + 120$

$= x(x - 12) - 10(x - 12)$

$= (x - 12)(x - 10)$

ಆದ್ದರಿಂದ, $x^3 - 12x^2 + 142x - 120 = (x - 1)(x - 10)(x - 12)$

ಅಭ್ಯಾಸ 2.4

1. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಯಾವ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಗಳು (x+1) ನ್ನು ಅಪವರ್ತನವನ್ನಾಗಿ ಹೊಂದಿವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸಿ:

(ು) x3 + x2 + x + 1 (ುು) x4 + x3 + x2 + x + 1

(ುುು) x4 + 3x3 + 3x2 + x + 1 (ುತ) $x^3 - x^2 - \left(2 + \sqrt{2}\right)x + \sqrt{2}$

2. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದರಲ್ಲಿಯೂ g(x) ಇದು p(x) ನ ಅಪವರ್ತನವಾಗಿದೆಯೇ ಎಂಬುದನ್ನು ಅಪವರ್ತನ ಪ್ರಮೇಯವನ್ನು ಉ ಪಯೋಗಿಸಿ ನಿರ್ಧರಿಸಿ:

(ು) p(x) = 2x3 + x2 - 2x - 1, g(x) = x + 1

(ುು) p(x) = x3 + 3x2 + 3x + 1, g(x) = x + 2

(ುುು) p(x) = x3 - 4x2 + x + 6, g(x) = x - 3

3. p(ಥ) ನ ಅಪವರ್ತನ (ಥ - 1) ಆಗಿದ್ದರೆ k ಯ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಈ ಕೆಳಗಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದರಲ್ಲಿಯೂ ಕಂಡಿಹಿಡಿಯಿರಿ:

(ು) p(x) = x2 + x + k (ುು) $p(x) = 2x^2 + kx + \sqrt{2}$

(ುುು) $p(x) = kx^2 - \sqrt{2}x + 1$ (ುತ) p(x) = kx2 - 3x + k

4. ಅಪವರ್ತಿಸಿ:

(i) $12x^2 - 7x + 1$ (ii) $2x^2 + 7x + 3$

(iii) $6x^2 + 5x + 6$ (iv) $3x^2 - x - 4$

5. ಅಪವರ್ತಿಸಿ:

(ು) x3 - 2x2 - x + 2 (ುು) x3 - 3x2 - 9x - 5

(ುುು) x3 + 13x2 + 32x + 20 (ುತ) 2y3 + y2 - 2y - 1

2.6 ಬೈಜಿಕ ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣಗಳು

ನಿಮ್ಮ ಹಿಂದಿನ ತರಗತಿಗಳಿಂದ, ಒಂದು ಬೈಜಿಕ ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣವು ಅದರಲ್ಲಿನ ಚರಾಕ್ಷರಗಳ ಎಲ್ಲಾ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ ಸತ್ಯವಾಗುವ ಬೈಜಿಕ

ಸಮೀಕರಣ ಎಂಬುದನ್ನು ನೀವು ಸ್ಮರಿಸಿಕೊಳ್ಳಬಹುದು. ಹಿಂದಿನ ತರಗತಿಗಳಲ್ಲಿ ನೀವು ಈ ಕೆಳಗಿನ ಬೈಜಿಕ ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಅಭ್ಯಾಸ ಮಾಡಿದ್ದೀರಿ:

ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣ I : $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣ II : $(x – y)^2 = x^2 – 2xy + y^2$

ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣ III : $x^2 – y^2 = (x + y) (x – y)$

ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣ IV : $(x + a) (x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$

ಈ ಬೈಜಿಕ ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ ಕೆಲವನ್ನು ನೀವು ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳನ್ನು ಅಪವರ್ತಿಸಲು ಉಪಯೋಗಿಸಿರಬಹುದು. ಲೆಕ್ಕಚಾರ ಮಾಡುವಲ್ಲಿ ಕೂಡಾ ಅವುಗಳ ಉಪಯುಕ್ತತೆಯನ್ನು ನೀವು ನೋಡಿರಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆ 16: ಸೂಕ್ತವಾದ ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಕೆಳಗಿನವುಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $(x + 3) (x + 3)$ (ii) $(x – 3) (x + 5)$

ಪರಿಹಾರ : (೧) ಇಲ್ಲಿ ನಾವು ಮೊದಲನೇ ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣವಾದ $(x + y)2 = x^2 + 2xy + y^2$ ನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದು. ಅದರಲ್ಲಿ $y = 3$ ನ್ನು ಆದೇಶಿಸಿದಾಗ,

$(x + 3) (x + 3) = (x + 3)^2 = x^2 + 2(x)(3) + (3)^2$

$= x^2 + 6x + 9$

(ಖ) ಮೇಲಿನ ಖಗಿ ನೇ ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿದಾಗ, ಅಂದರೆ

$(x + a) (x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$

ಆದ್ದರಿಂದ, $(x – 3) (x + 5) = x^2 + (–3 + 5)x + (–3) (+5)$

$= x^2 + 2x – 15$

ಉದಾಹರಣೆ 17 : ನೇರವಾಗಿ ಗುಣಾಕಾರ ಮಾಡದೇ 105×106 ರ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ : $105 \times 106 = (100 + 5) \times (100 + 6)$

$= (100)2 + (5 + 6) (100) + (5 \times 6)$ [IV ನೇ ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣದಂತೆ]

$= 10000 + 1100 + 30$

$= 11130$

ಕೊಟ್ಟಂತಹ ಕೆಲವು ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವಲ್ಲಿ ಈ ಮೇಲೆ ಪಟ್ಟಿ ಮಾಡಿದ ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣಗಳ ಕೆಲವು ಉಪಯೋಗಗಳನ್ನು ನೀವು ನೋಡಿದಿರಿ. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಉದಾಹರಣೆಗಳಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ, ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳ ಅಪವರ್ತಿಸುವಿಕೆಯಲ್ಲಿಯೂ ಕೂಡಾ ಈ ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣಗಳು ಉಪಯುಕ್ತವಾಗಿವೆ.

ಉದಾಹರಣೆ 18 : ಅಪವರ್ತಿಸಿ :

(i) 49a2 + 70ab + $25b^2$ (ii) $\frac{25}{4}x^2 - \frac{y^2}{9}$

ಪರಿಹಾರ : (i) ಇಲ್ಲಿ, $49a^2 = (7a)^2$, $25b^2 = (5b)^2$, $70ab = 2(7a)(5b)$, ಆಗಿರುವುದನ್ನು ನೀವು ಕಾಣಬಹುದು.

ದತ್ತ ಬೀಜೋಕ್ತಿಯನ್ನು $x^2 + 2xy + y^2$ ದ ಜೊತೆಗೆ ಹೋಲಿಸಿದಾಗ, $x = 7a$ ಮತ್ತು $y = 5b$ ಆಗಿರುವದನ್ನು ನಾವು ಗಮನಿಸಬಹುದು.

I ನೇ ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿದಾಗ,

$49a^2 + 70ab + 25b^2 = (7a + 5b)^2 = (7a + 5b)(7a + 5b)$

(ii) $\frac{25}{4}x^2 - \frac{y^2}{9} = \left(\frac{5}{2}x\right)^2 - \left(\frac{y}{3}\right)^2$

ಈಗ, ಇದನ್ನು IIIನೇ ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣದ ಜೊತೆಗೆ ಹೋಲಿಸಿದಾಗ,

$\frac{25}{4}x^2 - \frac{y^2}{9} = \left(\frac{5}{2}x\right)^2 - \left(\frac{y}{3}\right)^2$

$= \left(\frac{5}{2}x + \frac{y}{3}\right)\left(\frac{5}{2}x - \frac{y}{3}\right)$

ಇಲ್ಲಿಯವರೆಗೆ, ನಮ್ಮ ಎಲ್ಲಾ ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣಗಳು ದ್ವಿಪದೋಕ್ತಿಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿದ್ದವು. ಈಗ ಮೊದಲನೇ ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣವನ್ನು ತ್ರಿಪದೋಕ್ತಿ $x + y + z$ ಗೆ ವಿಸ್ತರಿಸೋಣ. ನಾವು $(x + y + z)^2$ ನ್ನು 1ನೆಯ ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಲೆಕ್ಕಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಈಗ $x + y = t$ ಆಗಿರಲಿ.

$\therefore (x + y + z)^2 = (t + z)^2$

$= t^2 + 2tz + z^2$ [1 ನೆಯ ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣದಂತೆ]

$= (x + y)^2 + 2(x + y)z + z^2$ [t ಯ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಆದೇಶಿಸಿದೆ]

$= x^2 + 2xy + y^2 + 2zx + 2yz + z^2$ [1 ನೆಯ ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣದಂತೆ]

$= x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$ [ಪದಗಳನ್ನು ಪುನರ್‌ಜೋಡಿಸಿದೆ]

ಹೀಗೆ, ನಾವು ಕೆಳಗಿನ ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ.

ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣ V : $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$

ಗಮನಿಸಿ : ಬಲಭಾಗದ ಬೀಜೋಕ್ತಿಯನ್ನು, ಎಡಭಾಗದ ಬೀಜೋಕ್ತಿಯ ವಿಸ್ತೃತ ರೂಪ ಎಂದು ನಾವು ಹೇಳುತ್ತೇವೆ. $(x + y + z)^2$ ದ ವಿಸ್ತರಣೆಯು ಮೂರು ವರ್ಗಪದಗಳನ್ನು ಮತ್ತು ಮೂರು ಗುಣಲಬ್ಧ ಪದಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿರುವುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

ಉದಾಹರಣೆ 19 : $(3a + 4b + 5c)^2$ ನ್ನು ವಿಸ್ತೃತ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ.

ಪರಿಹಾರ : ದತ್ತ ಬೀಜೋಕ್ತಿಯನ್ನು $(x + y + z)^2$ ದ ಜೊತೆಗೆ ಹೋಲಿಸಿದಾಗ, $x = 3a$, $y = 4b$ ಮತ್ತು $z = 5c$ ಆಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ Vನೇ ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿದಾಗ,

$$(3a + 4b + 5c)^2 = (3a)^2 + (4b)^2 + (5c)^2 + 2(3a)(4b) + 2(4b)(5c) + 2(5c)(3a)$$

$$= 9a^2 + 16b^2 + 25c^2 + 24ab + 40bc + 30ca$$

ಉದಾಹರಣೆ 20 : $(4a – 2b – 3c)^2$ ನ್ನು ವಿಸ್ತರಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ : Vನೇ ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿದಾಗ,

$$(4a – 2b – 3c)^2 = [4a + (–2b) + (–3c)]^2$$

$$= (4a)^2 + (–2b)^2 + (–3c)^2 + 2(4a)(–2b) + 2(–2b)(–3c) + 2(–3c)(4a)$$

$$= 16a^2 + 4b^2 + 9c^2 – 16ab + 12bc – 24ac$$

ಉದಾಹರಣೆ 21 : $4x^2 + y^2 + z^2 – 4xy – 2yz + 4xz$ ನ್ನು ಅಪವರ್ತಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ : $4x^2 + y^2 + z^2 – 4xy – 2yz + 4xz$

$$= (2x)^2 + (–y)^2 + z^2 + 2(2x)(–y) + 2(–y)(z) + 2 (2x)(z)$$

$= [2x + (–y) + z]^2$ [ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣ V ರಿಂದ]

$$= (2x –y + z)^2 = (2x – y + z) (2x – y + z)$$

ಇಲ್ಲಿಯವರೆಗೆ, ಎರಡನೇ ಘಾತದ ಪದಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣಗಳ ಬಗ್ಗೆ ನಾವು ಚರ್ಚಿಸಿದ್ದೇವೆ. ಈಗ, Iನೇ ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣ $(x + y)^3$ ನ್ನು ಲೆಕ್ಕಿಸಲು ವಿಸ್ತರಿಸೋಣ.

$$(x + y)^3 = (x + y) (x + y)^2$$

$$= (x + y) (x^2 + 2xy + y^2)$$

$$= x(x^2 + 2xy + y^2) + y(x^2 + 2xy + y^2)$$

$$= x^3 + 2x^2y + xy^2 + x^2y + 2xy^2 + y^3$$

$$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

$$(x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x + y)$$

ಆದ್ದರಿಂದ ನಾವು ಕೆಳಗಿನ ನಿತ್ಯ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ.

ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣ VI : $(x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy(x + y)$

ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣ VI ರಲ್ಲಿ y ನ್ನು –y ದಿಂದ ಬದಲಾಯಿಸಿದಾಗ,

ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣ VII : $(x - y)^3 = x^3 - y^3 - 3xy(x - y)$

$= x3 - 3x2y + 3xy2 - y3$

ಉದಾಹರಣೆ 22 : ಈ ಕೆಳಗಿನ ಘನಗಳನ್ನು ವಿಸ್ತೃತ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ.

(i) $(3a + 4b)3$ (ii) $(5p - 3q)3$

ಪರಿಹಾರ : (i) ದತ್ತ ಬೀಜೋಕ್ತಿಯನ್ನು $(x + y)^3$ ದ ಜೊತೆಗೆ ಹೋಲಿಸಿದಾಗ, $x = 3a$ ಮತ್ತು $y = 4b$ ಆಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣ VI ರಿಂದ,

$(3a + 4b)3 = (3a)3 + (4b)3 + 3(3a) (4b) (3a + 4b)$

$= 27a3 + 64b3 + 108a2b + 144ab2$

(ii) ದತ್ತ ಬೀಜೋಕ್ತಿಯನ್ನು $(x - y)3$ ದ ಜೊತೆಗೆ ಹೋಲಿಸಿದಾಗ

$x = 5p$, $y = 3q$ ಆಗಿದೆ

ಆದ್ದರಿಂದ ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣ VII ರಿಂದ

$(5p - 3q)3 = (5p)3 - (3q)3 - 3(5p) (3q) (5p - 3q)$

$= 125p^3 - 27q^3 - 225p^2 q + 135pq^2$

ಉದಾಹರಣೆ 23 : ಸೂಕ್ತವಾದ ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ:

(i) $(104)3$ (ii) $(999)3$

ಪರಿಹಾರ : $(104)^3 = (100 + 4)^3$

$= (100)^3 + (4)^3 + 3(100)(4) (100 + 4)$ [ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣ VI ರಿಂದ]

$= 1000000 + 64 + 124800$

$= 1124864$

(ii) $(999)^3 = (1000 - 1)^3$

$= (1000)^3 - (1)^3 - 3(1000)(1)(1000 - 1)$ [ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣ VI ರಿಂದ]

$= 1000000000 - 1 - 2997000$

$= 997002999$

ಉದಾಹರಣೆ 24 : $8x3 + 27y3 + 36x2y + 54xy2$ನ್ನು ಅಪವರ್ತಿಸಿ.

ಪರಿಹಾರ : ದತ್ತ ಬೀಜೋಕ್ತಿಯನ್ನು ಈ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಬರೆಯಬಹುದು.

$(2x)3 + (3y)3 + 3(4x2)(3y) + 3(2x)(9y2)$

$= (2x)3 + (3y)3 + 3(2x)2\ (3y) + 3(2x)(3y)2$

$= (2x + 3y)3$ [ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣ VI ರಿಂದ]

$= (2x + 3y)\ (2x + 3y)\ (2x + 3y)$

ಈಗ $(x + y + z)\ (x^2 + y^2 + z^2 – xy – yz – zx)$ ನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿ.

ವಿಸ್ತರಿಸಿದಾಗ, ಈ ಕೆಳಗಿನಂತೆ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ.

$x\ (x^2 + y^2 + z^2 – xy – yz – zx) + y\ (x^2 + y^2 + z^2 – xy – yz – zx) + z\ (x^2 + y^2 + z^2 – xy – yz – zx)$

$= x^3 + xy^2 + xz^2 – x^2y – xyz – zx^2 + x^2y + y^3 + yz^2 – xy^2 – y2z – xyz + x^2z + y^2z + z^3 – xyz – yz^2 – xz^2$

$= x^3 + y^3 + z^3 – 3xyz$ (ಸರಳೀಕರಿಸಿದಾಗ)

ಹೀಗೆ, ನಾವು ಕೆಳಗಿನ ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ.

ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣ VIII : $x^3 + y^3 + z^3 – 3xyz = (x + y + z)\ (x^2 + y^2 + z^2 – xy – yz – zx)$

ಉದಾಹರಣೆ 25 : $8x^3 + y^3 + 27z^3 – 18xyz$

$= (2x)^3 + y^3 + (3z)^3 – 3(2x)(y)(3z)$

$= (2x + y + 3z)[(2x)^2 + y^2 + (3z)^2 – (2x)(y) – (y)(3z) – (2x)(3z)]$

$= (2x + y + 3z)(4x^2 + y^2 + 9z^2 – 2xy – 3yz – 6xz)$

ಅಭ್ಯಾಸ 2.5

1. ಕೆಳಗಿನ ಗುಣಲಬ್ಧಗಳನ್ನು ಸೂಕ್ತವಾದ ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ:

(i) $(x + 4)\ (x + 10)$ (ii) $(x + 8)\ (x – 10)$

(iii) $(3x + 4)\ (3x – 5)$ (iv) $\left(y^2 + \frac{3}{2}\right)\left(y^2 - \frac{3}{2}\right)$

(v) $(3 – 2x)\ (3 + 2x)$

2. ನೇರವಾಗಿ ಗುಣಾಕಾರ ಮಾಡದೆ ಕೆಳಗಿನ ಗುಣಲಬ್ಧಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ:

(i) 103×107 (ii) 95×96 (iii) 104×96

3. ಸೂಕ್ತವಾದ ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಅಪವರ್ತಿಸಿ:

(೧) $9x2 + 6xy + y2$ (೨) $4y2 - 4y + 1$ (೩) $x2- \frac{y^2}{100}$

4. ಸೂಕ್ತವಾದ ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ವಿಸ್ತರಿಸಿ:

(i) $(x + 2y + 4z)^2$ (ii) $(2x - y + z)^2$ (iii) $(-2x + 3y + 2z)^2$

(iv) $(3a - 7b - c)^2$ (v) $(-2x + 5y - 3z)^2$ (vi) $\left(\frac{1}{4}a - \frac{1}{2}b + 1\right)^2$

5. ಅಪವರ್ತಿಸಿ:

(i) $4x^2 + 9y^2 + 16z^2 + 12xy - 24yz - 16xz$

(ii) $2x^2 + y^2 + 8z^2 - 2\sqrt{2}xy + 4\sqrt{2}yz - 8xz$

6. ಕೆಳಗಿನ ಘನಗಳನ್ನು ವಿಸ್ತೃತ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಬರೆಯಿರಿ:

(i) $(2x + 1)^3$ (ii) $(2a - 3b)^3$

(iii) $\left[\frac{3}{2}x + 1\right]^3$ (iv) $\left[x - \frac{2}{3}y\right]^3$

7. ಸೂಕ್ತವಾದ ನಿತ್ಯಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(i) $(99)^3$ (ii) $(102)^3$ (iii) $(998)^3$

8. ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಅಪವರ್ತಿಸಿ:

(i) $8a^3 + b^3 + 12a^2b + 6ab^2$ (ii) $8a^3 - b^3 - 12a^2b + 6ab^2$

(iii) $27 - 125a^3 - 135a + 225a^2$ (iv) $64a^3 - 27b^3 - 144a^2b + 108ab^2$

(v) $27p^3 - \frac{1}{216} - \frac{9}{2}p^2 + \frac{1}{4}p$

9. ತಾಳೆ ನೋಡಿ:

(i) $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$ (ii) $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$

10. ಕೆಳಗಿನವುಗಳನ್ನು ಅಪವರ್ತಿಸಿ:

(i) $27y^3 + 125z^3$ (ii) $64m^3 - 343n^3$

[ಸುಳುಹು : ಪ್ರಶ್ನೆ 9 ನ್ನು ನೋಡಿ]

11. ಅಪವರ್ತಿಸಿ : $27x^3 + y^3 + z^3 - 9xyz$

12. ತಾಳೆನೋಡಿ : $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = \frac{1}{2}(x + y + z)[(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2]$

13. $x + y + z = 0$ ಆದರೆ $x3 + y3 + z3 = 3xyz$ ಎಂದು ತೋರಿಸಿ.

14. ನೇರವಾಗಿ ಘನಗಳನ್ನು ಲೆಕ್ಕಿಸದೆ ಕೆಳಗಿನವುಗಳ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.

(ಅ) $(-12)3 + (7)3 + (5)3$ (ಆ) $(28)3 + (-15)3 + (-13)3$

15. ಈ ಕೆಳಗಿನ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಆಯತಗಳ ಉದ್ದ ಮತ್ತು ಅಗಲಗಳಿಗೆ ಸಾಧ್ಯವಿರುವ ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

ವಿಸ್ತೀರ್ಣ : $25a^2 - 35a + 12$		ವಿಸ್ತೀರ್ಣ : $35y^2+13y - 12$
(i)		(ii)

16. ಈ ಕೆಳಗಿನ ಘನಫಲಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುವ ಆಯತ ಘನಗಳ ಆಯಾಮ (ಉದ್ದ, ಅಗಲ ಮತ್ತು ಎತ್ತರ)ಗಳಿಗೆ ಸಾಧ್ಯವಿರುವ ಬೀಜೋಕ್ತಿಗಳನ್ನು ಬರೆಯಿರಿ.

ಘನಫಲ : $3x^2-12x$		ಘನಫಲ: $12ky^2 + 8ky - 20k$
(i)		(ii)

2.7 ಸಾರಾಂಶ :

ಈ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ನೀವು ಈ ಕೆಳಗಿನ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಕಲಿತಿರುವಿರಿ.

1. 'x' ಚರಾಕ್ಷರವಾಗಿರುವ ಮತ್ತು a_0, a_1, a_2 ------ a_n ಗಳು ಸ್ಥಿರಾಂಕಗಳಾಗಿರುವ $(a_n \neq 0)$, $p(x) = a_nxn + a_{n-1}xn^{-1}+$ ---- $+a_2x^2 + a_1x + a_0$ ರೂಪದ ಬೀಜೋಕ್ತಿಯನ್ನು ಒಂದು ಚರಾಕ್ಷರವುಳ್ಳ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ $p(x)$ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. a_0, a_1, a_2 ------ a_n ಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ x^0, x^1, x^2 ----xn ಗಳ ಸಹಗುಣಕಗಳಾಗಿವೆ ಮತ್ತು n ನ್ನು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಮಹತ್ತಮ ಘಾತ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. $a_nxn, a_{n-1}xn^{-1}$,--- a_0 $(a_n \neq 0)$ ಇವುಗಳನ್ನು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಪದಗಳು ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

2. ಒಂದು ಪದವುಳ್ಳ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯನ್ನು ಏಕಪದೋಕ್ತಿ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

3. ಎರಡು ಪದಗಳುಳ್ಳ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯನ್ನು ದ್ವಿಪದೋಕ್ತಿ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

4. ಮೂರು ಪದಗಳುಳ್ಳ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯನ್ನು ತ್ರಿಪದೋಕ್ತಿ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

5. ಮಹತ್ತಮ ಘಾತ 1 ಆಗಿರುವ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯನ್ನು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

6. ಮಹತ್ತಮ ಘಾತ 2 ಆಗಿರುವ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯನ್ನು ವರ್ಗ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

7. ಮಹತ್ತಮ ಘಾತ 3 ಆಗಿರುವ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯನ್ನು ಘನ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ.

8. a ಯು ಒಂದು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದ್ದು $p(x) = 0$ ಆದರೆ a ಯನ್ನು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ $p(x)$ನ ಶೂನ್ಯತೆ ಎನ್ನುತ್ತಾರೆ. ಈ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಚಿ ಯನ್ನು $p(x) = 0$ ಸಮೀಕರಣದ ಮೂಲ ಎಂದೂ ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ.

9. ಒಂದು ಚರಾಕ್ಷರವುಳ್ಳ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯು ಏಕಮಾತ್ರ ಶೂನ್ಯತೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತದೆ. ಶೂನ್ಯರಹಿತ ಸ್ಥಿರ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯು ಶೂನ್ಯತೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿರುವುದಿಲ್ಲ ಮತ್ತು ಪ್ರತಿಯೊಂದು ವಾಸ್ತವ ಸಂಖ್ಯೆಯೂ ಶೂನ್ಯ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿಯ ಶೂನ್ಯತೆ

ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

10. ಶೇಷ ಪ್ರಮೇಯ: $p(x)$ ಎಂಬುದು ಡಿಗ್ರಿ 1 ಅಥವಾ 1 ಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಆಗಿರುವ ಯಾವುದೇ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ ಆಗಿದ್ದರೆ ಮತ್ತು $p(x)$ ನ್ನು ಒಂದು ರೇಖಾತ್ಮಕ ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ $(x – a)$ ದಿಂದ ಭಾಗಿಸಿದರೆ ಆಗ ಶೇಷವು $p(a)$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

11. ಅಪವರ್ತನ ಪ್ರಮೇಯ : $p(a) = 0$ ಆದರೆ $(x – a)$ ಯು ಬಹುಪದೋಕ್ತಿ $p(x)$ ದ ಅಪವರ್ತನವಾಗಿರುತ್ತದೆ.ಮತ್ತು $(x – a)$ ಯು $p(x)$ ದ ಅಪವರ್ತನವಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $p(a) = 0$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

12. $(x + y + z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx$

13. $(x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3xy (x + y)$

14. $(x – y)^3 = x^3 – y^3 – 3xy (x – y)$

15. $x^3 + y^3 + z^3 – 3xyz = (x + y + z) (x2 + y^2 + z^2 – xy – yz – zx)$

ㄴㅈ ㄹㄱ ㄴㅈ ㄹㄱ