6 சமவாய்ப்பு மாறி மற்றும் கணக்கியல் எதிர்பார்த்தல்

சைமன் டெனிஸ் பாய்சான்

(ஜுன் 21, 1781–ஏப்ரல்25, 1840)

அறிமுகம்

சில்வெஸ்ட்ரே பிரான்கோஸ் லாக்ரோய்ஸ் (1816) மற்றும் லூயிஸ் பேச்சிலியர் (1914) ஆகியோரின் காலங்களுக்கு இடைப்பட்ட காலத்தில் சமவாய்ப்பு மாறி மற்றும் சமவாய்ப்பு மாறிக்கான சராசரி எனும் கருத்துக்கள் உருவாக்கப்பட்டன. சில நூல் ஆசிரியர்கள் சைமன் டெனிஸ் பாய்சான் அவர்களால் சமவாய்ப்பு மாறி மற்றும் எதிர்பார்த்தலுக்கான மதிப்பு எனும் கருத்துக்கள் கண்டுபிடித்ததாக கூறுகின்றனர். சைமன் டெனிஸ் பாய்சான் ஒரு பிரஞ்சு கணிதவியலாளர் ஆவார். இவர் நிகழ்தகவு கருத்தியலின் பணிக்காக நன்கு அறியப்பட்டவர். பாய்சானின் மிகப்பெரிய ஆய்வானது நிகழ்தகவைப் பற்றியதாகும். 1838 ஆம் ஆண்டில் பாய்சான் தனது கருத்துக்களை நிகழ்தகவு கோட்பாட்டின் மூலம் வெளியிட்டார். இது தற்போது பாய்சான் பரவல் என அறியப்படுகிறது. இவர் மின்சாரம் மற்றும் காந்தவியல், மற்றும் வானியல் பயன்பாடு உள்ளிட்ட 300–க்கும் மேற்பட்ட கணிதபடைப்புகளை வெளியிட்டுள்ளார்.

M7XGPK

கற்றல் நோக்கங்கள்

இந்த அத்தியாயத்தைப் படித்தப் பின்பு பின்வரும் பாடக்கருத்துகளை மாணவர்கள் புரிந்துகொள்ள இயலும்.

- சமவாய்ப்பு மாறியினை ஏன் பயன்படுத்து கிறோம்?
- சமவாய்ப்பு மாறியினை நாம் ஏன் வரையறுக்க வேண்டும்?
- சமவாய்ப்பு மாறியின் வகைகள்.
- நிகழ்தகவு சார்பு.
- பரவல் சார்பு.
- கணக்கின் இயல்பு (தன்மை).
- எண்ணியல் ரீதியாக விவரிக்கக்கூடிய வெளியீடுகளுடன் சமவாய்ப்பு சோதனைகளைப் படிப்பதற்கான முறைகளை மேம்படுத்துதல்.
- உண்மை நிகழ்தகவை கணக்கிடுதல்.
- தனித்த மற்றும் தொடர்ச்சி யான சமவாய்ப்பு மாறியின் கணக்கியல் எதிர்பாத்தலின் கருத்துரு.
- தனித்த மற்றும் தொடர்ச்சியான சமவாய்ப்பு மாறியின் கணக்கியல் எதிர்பார்த்தலின் பண்புகள்.
- தனித்த மற்றும் தொடர்ச்சியான சமவாய்ப்பு மாறியின் சராசரி மற்றும் மாறுபாடு ஆகியவற்றை கணக்கிடுதல்.
- தனித்த மற்றும் தொடர்ச்சியான சமவாய்ப்பு மாறியின் கணக்கியல் எதிர்பார்த்தலின் நடைமுறை பயன்பாடுகள்.

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 6.indd 128 3/5/2020 12:14:22 PM

6.1 சமவாய்ப்பு மாறி (Random variable)

அறிமுகம்

ஒரு நாணயம் சுண்டுவதை சமவாய்ப்பு மாறியாக எடுத்துக் கொள்வோம். 'n' நாணயங்களை சுண்டும் பொழுது கிடைக்கக்கூடிய தலைகளின் எண்ணிக்கையைத் தெரிந்து கொள்ள ஒருவருக்கு ஆர்வம் இருக்கலாம். இதே போல, ஒரு ஜோடி பகடைகளை உருட்டும் பொழுது கிடைக்கக்கூடிய ஒவ்வொரு கூறு புள்ளிகளின் கூடுதல் பற்றிய தகவலைப் பெற ஆர்வம் காட்டலாம். இவ்வாறாக, ஒரு சோதனையின் ஒவ்வொரு வெளிப்பாட்டிற்கும், ஒரு மெய்யெண்ணை நாம் தொடர்பு படுத்துகிறோம். இதனை வேறுவகையில் கூறுவதனால், நாம் ஒரு சார்பைக் கருத்தில் கொண்டால் அவற்றின் சார்பகம் என்பது வெளிப்பாட்டின் தொகுப்பாகும். அவற்றின் வீச்சுகம் என்பது மெய்யெண்கள் தொகுப்பின் உட்கணமாகும். அத்தகைய ஒரு சார்பு சமவாய்ப்பு மாறி என்று அழைக்கப்படுகிறது.

இயற்கணிதத்தில், X அல்லது Y அல்லது வேறு எதாவது எழுத்தை ஒரு குறிப்பிட்ட கணக்கில் நீங்கள் வெவ்வேறு மாறிகளாகப் பயன்படுத்திக் கற்றிருப்பீர்கள். எனவே, அடிப்படை கணிதத்தில், ஒரு மாறி என்பது ஒரு தெரியாத எண்ணை பிரதிபலிக்கும் ஒரு அகரவரிசை எழுத்தாகும். சமவாய்ப்பு மாறி என்பதும் ஒரு மாறி, அது மேலும் சமவாய்ப்பிற்கு உட்பட்டது என்பது அதன் பொருள். அதாவது இது வெவ்வேறான மதிப்புகளைப் பெற்றிருக்கும். புள்ளியியலில், X–ஐக் கொண்டு சமவாய்ப்பு மாறியைக் குறிப்பது மிகவும் பொது வானது ஆகும். மேலும் அது சோதனைத் தன்மையைப் பொறுத்து வெவ்வேறு மதிப்புகளைப் பெற்றிருக்கும்.

சமவாய்ப்பு மாறிக்கான சில உதாரணங்கள்:

(i) ஒரு நாணயம் 8 முறை சுண்டப்படுவதால் கிடைக்கக்கூடிய தலைகளின் எண்ணிக்கை.

(ii) ஒரு வருடத்தில், ஒரு கால அளவில் ஒரு முதலீட்டில் இருந்து பெறப்படும் வருமானம்

(iii) உருட்டிய பகடையின் மீதுள்ள முகங்கள்.

(iv) திங்கள்கிழமை முதல் வெள்ளிக்கிழமை வரை காலை 9.00 மணி முதல் மாலை 4.30 மணி வரை வழக்கமான ஒவ்வொரு ஒரு மணி நேர இடைவெளியில் ஒரு வங்கிக்கு வருகை புரியும் வாடிக்கையாளர்களின் எண்ணிக்கை.

(v) ஒரு குறிப்பிட்ட நாளில் கடையில் நடைபெற்ற விற்பனை அளவு.

எடுத்துக்காட்டாக, சமவாய்ப்பு சோதனை 'E' என்பது ஒரு நாணயத்தை மூன்று முறை சுண்டு வதைக் குறிக்கட்டும். இந்த சோதனையின் வெளிப் பாடுகள் கூறுவெளி 'S'–ஐ உருவாக்கிறது. 'X' என்பது பெறப்பட்ட தலைகளின் எண்ணிக்கை குறிக்கட்டும். இங்கு X ஆனது ஒரு சமவாய்ப்பு சோதனை 'E'–இன் வெளிப்பாட்டுகளுடன் இணைக்கப்பட்ட மெய்யெண்கள் ஆகும். இதன் விவரங்கள் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

நாணயம் சுண்டுதல்

படம் 6.1

வெளிப்பாடுகள் (ω) :							
(HHH)	(HHT)	(HTH)	(THH)	(HTT)	(THT)	(TTH)	(TTT)
$X = x$ ன் மதிப்புகள் :							
3	2	2	2	1	1	1	0

அதாவது, $R_X = \{0, 1, 2, 3\}$

மேற்குறிப்பிட்ட எடுத்துக்காட்டில், ஒவ்வொரு வெளிப்பாடும் அதனுடன் தொடர்புடைய மெய்யெண் $X(\omega)$ உடன் இணைக்கப்பட்டுள்ளது. கூறுவெளி 'S' என்பதை சோதனை வெளிப்பாட்டிற்கு தொடர் புடைய ஒவ்வொரு புள்ளி $\omega \in S$ என வரையறுக்கலாம்.

6.1.1 சமவாய்ப்பு மாறியின் வரையறை (Definition of a random variable)

வரையறை 6.1

ஒரு சமவாய்ப்பு மாறி X என்பது 'S' என்ற கூறுவெளியின் மீது வரையறுக்கப்பட்ட ஒரு மெய்மதிப்பீட்டுச் சார்பு என வரையறுக்கப்படுகிறது. மேலும் இது $(-\infty, \infty)$ இல் மதிப்புகளைப் பெற்றிருக்கும் அல்லது இது ஒரு சமவாய்ப்பு சோதனையின் சாத்தியமுள்ள மதிப்புகளின் எண் வெளிப்பாடுகள் எனவும் கூறலாம்.

சமவாய்ப்பு மாறியின் வகைகள் (Types of Random Variable)

சமவாய்ப்பு மாறிகளை இரு வகைகளாக வகைப்படுத்தலாம், அவை தனித்த மற்றும் தொடர்ச்சி யான சமவாய்ப்பு மாறிகள் ஆகும். இவை, கணிதம் மற்றும் புள்ளியியல் துறையில் நடைமுறைப் பயன் பாடுகளுக்கு முக்கியத்துவம் வாய்ந்தவையாக

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 6.indd 129 3/5/2020 12:14:22 PM

இருக்கின்றன. மேற்குறிப்பிட்ட சமவாய்ப்பு மாறிகளை எடுத்துக்காட்டுகளுடன் பின்வருமாறு வரையறுப்போம்.

குறிப்பு

x ஒரு மெய்யெண் எனில் , S இல் உள்ள அனைத்து ω தொகுப்புகளுடன் $X(\omega)=x$ எனுமாறு , $X=x$ என குறிக்கப்படுகிறது. எனவே $P(X = x) = P\{\omega:X(\omega) = x\}$.

(vi) $P(X \leq a) = P\{\omega:X(\omega) \in (-\infty, a]\}$ மற்றும் $P(a < X \leq b) = P\{\omega: X(\omega) \in (a, b]\}$.

(vii) ஒரு பரிமாண சமவாய்ப்பு மாறிகள், $X, Y, Z, \ldots$ என்ற பெரிய எழுத்துக்கள் மூலம் குறிக்கப்படும். பொதுவாக, ஒரு சோதனையின் வெளிப்பாடுகள் ω ஆல் குறிக்கப்படும். இவ்வாறாக, $b \in X(\omega)$ என்பது ஒரு மெய்யெண்ணை குறிக்கும் சமவாய்ப்பு மாறி X உடன் தொடர்புடைய வெளிப்பாடு ω ஆகும். $X, Y, Z, \ldots$ போன்றவைகள் கொண்டிருக்கும் மதிப்புகளைச் சிறிய எழுத்துக்களைக் கொண்டு, அதாவது $x, y, z, \ldots$ போன்றவற்றால் குறிக்கலாம்.

6.1.2 தனித்த சமவாய்ப்பு மாறி (Discrete random variable)

தனித்த சமவாய்ப்பு மாறியின் எடுத்துக்காட்டுகள்:

- ஒரு தேர்வில் பெற்ற மதிப்பெண்கள்.
- ஒரு ஜாடியில் உள்ள சிவப்பு பளிங்குகளின் எண்ணிக்கை.
- ஒரு குறிப்பிட்ட நேரத்தில், தொலைபேசி அழைப்புகளின் எண்ணிக்கை.
- ஒரு மாதத்தில், ஒரு மகிழுந்து விற்பனை யாளரால் விற்கப்படும் மகிழுந்துகளின் எண்ணிக்கை முதலியன.

வரையறை 6.2

சாத்தியமான மதிப்புகளால் வரையறுக்கப்பட்ட எண்களை ஏற்றுக்கொள்ளக் கூடிய ஒரு மாறி அல்லது ஒரு எண்ணத்தக்க மெய்யெண்களின் முடிவிலாத் தொடரானது **தனித்த சமவாய்ப்பு மாறி** என வரையறக்கப்படுகிறது.

எடுத்துக்காட்டாக P_1, P_2 மற்றும் P_3 ஆகியோர் ஒரு குறிப்பிட்ட மாவட்டத்தில் ஒரு மாதிரி பள்ளியை உருவாக்குவதற்காக சில நபர்களின் கருத்துக் களைப் பதிவு செய்கிறார்கள். ஒவ்வொரு நபரின் பதிவும் ஆம் (Y) அல்லது இல்லை (N) என பதிவு செய்யப்படுகிறது.

இது தொடர்பான தனித்த சமவாய்ப்பு மாறியைத் தீர்மானிக்கும் சாத்தியக்கூறுகள் பின்வருமாறு அமையலாம்.

அட்டவணை 6.1

சாத்திய கூறுகள்	P_1	P_2	P_3	சமவாய்ப்பு மாறியின் மதிப்புகள் (ஆம் என்று கொடுக்கப்பட்டவர்களின் எண்ணிக்கை)
1.	Y	Y	Y	3
2.	Y	Y	N	2
3.	Y	N	Y	2
4.	Y	N	N	1
5.	N	Y	Y	2
6.	N	Y	N	1
7.	N	N	Y	1
8.	N	N	N	0

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 6.indd 130 3/5/2020 12:14:25 PM

மேலே உள்ள அட்டவணையிலிருந்து பெறக்கூடிய தனித்த சமவாய்ப்பு மாறியின் மதிப்புகள் 0, 1, 2 மற்றும் 3 ஆகும்.

உங்களுக்கு தெரியுமா?

(i) X_1 மற்றும் X_2 ஆகியவை சமவாய்ப்பு மாறிகள் மற்றும் c என்பது மாறிலி எனில், $cX_1,\ X_1+X_2,\ X_1X_2,\ X_1-X_2$ என்பனவும் சமவாய்ப்பு மாறிகளாகும்.

(ii) X என்பது சமவாய்ப்பு மாறி எனில், $(i)\frac{1}{X}$ மற்றும் $(ii)|X|$ ஆகியவை களும் சமவாய்ப்பு மாறிகளாகும்.

நிகழ்தகவு நிறை சார்பு (Probability Mass function)

வரையறை 6.3

X என்ற தனித்த சமவாய்ப்பு மாறியின் தனித்த மதிப்புகள் $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ என்க. மேலும் இதன் நிகழ்தகவு சார்பு $P_X(x)$ எனக் குறியிடப்படுகிறது எனில்,

$$P_X(x)=p(x)$$

$$=\begin{cases} P(X=x_i)=p_i=p(x_i) & ,x=x_i, i=1,2,...,n,... \\ 0 & ,x\neq x_i \end{cases}$$

என வரையறுக்கப்படுகிறது.

இது, X இன் நிகழ்தகவு நிறை சார்பு அல்லது தனித்த நிகழ்தகவு சார்பு என்றும் அழைக்கப் படுகிறது.

இந்த நிகழ்தகவு நிறை சார்பு $P_X(x)$ ஆனது பின்வரும் நிபந்தனைகளை நிறைவு செய்ய வேண்டும்.

(i) $p(x_i)\geq 0\ \forall\ i$ மற்றும்

(ii) $\sum_{i=1}^{\infty} p(x_i)=1$

எடுத்துக்காட்டு 6.1

சில குடும்பங்களில் உள்ள மகிழுந்துகளின் எண்ணிக்கை கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளன.

மகிழுந்துகளின் எண்ணிக்கை	0	1	2	3	4
குடும்பங்களின் எண்ணிக்கை	30	320	380	190	80

இவ் விவரங்களைக் கொண்டு நிகழ்தகவு நிறை சார்பை மதிப்பிடுக, மேலும் $p(x_i)$ ஒரு நிகழ்தகவு நிறை சார்பு என்பதையும் சரிபார்க்க.

தீர்வு:

மகிழுந்துகளின் எண்ணிக்கை X என்க.

அட்டவணை 6.2

$X=x_i$	குடும்பங்களின் எண்ணிக்கை	$p(x_i)$
0	30	0.03
1	320	0.32
2	380	0.38
3	190	0.19
4	80	0.08
மொத்தம்	1000	1.00

(i) $p(x_i)\geq 0\ \forall\ i$ மற்றும்

(ii) $\sum_{i=1}^{\infty} p(x_i)$

$$= p(0)+p(1)+p(2)+p(3)+p(4)$$

$$= 0.03+0.32+0.38+0.19+0.08 = 1$$

எனவே, $p(x_i)$ ஒரு நிகழ்தகவு நிறை சார்பு ஆகும்.

குறிப்பு

$X=0$ -க்கான நிகழ்தகவு 0.03 ஆனது 30/1000 -லிருந்து பெறப்படுகிறது. மற்ற நிகழ்தகவுகளும் இதேபோல் மதிப்பிடப்படுகின்றன.

எடுத்துக்காட்டு 6.2

ஒரு சமவாய்ப்பு மாறி X ஆனது பின்வரும் நிகழ்தகவு சார்பை பெற்றுள்ளது எனில்,

X ன் மதிப்புகள்	0	1	2	3	4	5	6	7
$p(x)$	0	a	$2a$	$2a$	$3a$	a^2	$2a^2$	$7a^2+a$

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 6.indd 131 3/5/2020 12:14:30 PM

(i) a வை கண்டுபிடிக்கவும், மேலும் (ii) $P(X<3)$, (iii) $P(X>2)$ மற்றும் (iv) $P(2<X\le 5)$ –ஐ மதிப்பிடவும்.

தீர்வு:

(i) நிகழ்தகவு நிறை சார்பின் நிபந்தனையிலிருந்து,

$$\sum_{i=1}^{\infty} p(x_i) = 1$$

$$\therefore \sum_{i=0}^{7} p(x_i) = 1$$

$$0+a+2a+2a+3a+a^2+2a^2+7a^2+a = 1$$

$$10a^2+9a-1 = 0$$

$$(10a-1)(a+1) = 0$$

$$a=\frac{1}{10} \text{ அல்லது } -1$$

ஆனால் $p(x)$ ஆனது குறை மதிப்பைக் கொண்டிருக்கமுடியாது என்பதால், $a = -1$ ஆனது பொருந்தாது எனவே, $a = \frac{1}{10}$ ஆகும்.

(ii) $P(X<3)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)$

$$=0+a+2a$$

$$=3a$$

$$=\frac{3}{10} \quad \left(\because a=\frac{1}{10}\right)$$

(iii) $P(X>2)=1-P(X\le 2)$

$$=1-\left[P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)\right]$$

$$=1-\frac{3}{10}$$

$$=\frac{7}{10}$$

(iv) $P(2<X\le 5)=P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)$

$$=2a+3a+a^2$$

$$=5a+a^2$$

$$=\frac{5}{10}+\frac{1}{100}$$

$$=\frac{51}{100}$$

எடுத்துக்காட்டு 6.3

$$p(x)=\begin{cases}\frac{x}{20}, & x=0,1,2,3,4,5\\ 0 & \text{மற்றெங்கிலும்}\end{cases}$$

எனில், (i) $P(X<3)$ மற்றும் (ii) $P(2<X\le 4)$ ஆகியவற்றைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

தீர்வு:

(i) $P(X<3) = P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)$

$$=0+\frac{1}{20}+\frac{2}{20}$$

$$=\frac{3}{20}$$

(ii) $P(2<X\le 4)= P(X=3)+P(X=4)$

$$=\frac{3}{20}+\frac{4}{20}$$

$$=\frac{7}{20}$$

எடுத்துக்காட்டு 6.4

நீங்கள் ஒரு பிழையற்ற நாணயத்தை மூன்று முறை சுண்டுவதாகக் கருதுவோம். இந்த சோதனையின் வெளிப்பாடு சமவாய்ப்பு மாறியாக கருதப்பட்டு, மேலே திருப்பப்பட்ட முகங்களில் உள்ள தலைகளின் எண்ணிக்கை கணக்கிடப் படுகிறது. இதன் நிகழ்தகவு நிறை சார்பை கண்டு பிடிக்கவும். மேலும் நிகழ்தகவு நிறை சார்பின் பண்புகளையும் சரிபார்.

தீர்வு:

மேலே திருப்பப்பட்ட முகங்களில் உள்ள தலைகளின் எண்ணிக்கையைக் கணக்கிடும் சமவாய்ப்புமாறியை X என்க. இதன் வெளிப்பாடுகள் கீழே குறிப்பிடப்பட்டுள்ளது.

வெளிப்பாடுகள்	X இன் மதிப்புகள்	வெளிப்பாடுகள்	X இன் மதிப்புகள்
(HHH)	3	(HTT)	1
(HHT)	2	(THT)	1
(HTH)	2	(TTH)	1
(THH)	2	(TTT)	0

இதன் மதிப்பீடுகள் பின்வரும் நிகழ்தகவு அட்டவணை 6.3–இல் தரப்பட்டுள்ளன.

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 6.indd 132 3/5/2020 12:14:37 PM

அட்டவணை 6.3

X ன் மதிப்புகள்	0	1	2	3	மொத்தம்
$p(x_i)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\sum_{i=0}^{3} p(x_i)=1$

(i) $p(x_i) \geq 0 \ \forall \ i$ மற்றும் (ii) $\sum_{i=0}^{3} p(x_i)=1$

எனவே, $p(x_i)$ ஒரு நிகழ்தகவு நிறை சார்பாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 6.5

இரண்டு பகடைகள் ஒரே சமயத்தில் வீசப்படுகிறது. இதில் மேலே திருப்பப்பட்ட முகங்களின் கூடுதல் சமவாய்ப்பு மாறியாகக் கருதப்படுகிறது எனில், அதன் நிகழ்தகவு நிறை சார்பை உருவாக்கவும்.

படம் 6.2

தீர்வு:

$$\text{கூறுவெளி } (S)=\begin{Bmatrix} (1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6) \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6) \\ (3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & (3,5) & (3,6) \\ (4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & (4,5) & (4,6) \\ (5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4) & (5,5) & (5,6) \\ (6,1) & (6,2) & (6,3) & (6,4) & (6,5) & (6,6) \end{Bmatrix}$$

மொத்த வெளிப்பாடு : $n(S) = 36$

அட்டவணை 6.4

வெளிப்போடுகள்	திருப்பிய முகங்களின் கூடுதல் (X)	$P_X(x)$
(1,1)	2	$\frac{1}{36}$
(1,2) (2,1)	3	$\frac{2}{36}$
(1,3) (2,2) (3,1)	4	$\frac{3}{36}$
(1,4) (2,3) (3,2) (4,1)	5	$\frac{4}{36}$
(1,5) (2,4) (3,3) (4,2) (5,1)	6	$\frac{5}{36}$
(1,6) (2,5) (3,4) (4,3) (5,2) (6,1)	7	$\frac{6}{36}$
(2,6) (3,5) (4,4) (5,3) (6,2)	8	$\frac{5}{36}$
(3,6) (4,5) (5,4) (6,3)	9	$\frac{4}{36}$
(4,6) (5,5) (6,4)	10	$\frac{3}{36}$
(5,6) (6,5)	11	$\frac{2}{36}$
(6,6)	12	$\frac{1}{36}$

தனித்த பரவல் சார்பு (Discrete distribution function)

வரையறை 6.4

$x_1, x_2, ..., x_n, ...$ என்ற எண்ணத்தக்க மெய்மதிப்புகளை உடைய தனித்த சமவாய்ப்பு மாறி X -இன் நிகழ்த்தகவுகள் $p(x_1), p(x_2), p(x_3), ...,$ $p(x_n),...$ எனில், இதன் **தனித்த திரள் பரவல் சார்பு** அல்லது **பரவல் சார்பு** பின்வருமாறு வரையறுக்கப் படுகிறது.

அனைத்து $x \in R$ -க்கு, $F_X(x)= P(X \leq x)$.

அதாவது, $F_X(x)= \sum_{x<x_i} P(x_i)$

எடுத்துக்காட்டாக, ஒரு குடும்பத்தில் இரண்டு குழந்தைகள் உள்ளனர் எனக் கருதுவோம். அவ்வாறாயின் அதன் கூறுவெளி (S) = $\{bb, bg, gb, gg\}$ ஆகும். இங்கு b = சிறுவன் (boy) மற்றும் g= சிறுமி (girl) என்பதனை குறிக்கிறது.

குழந்தைகளின் எண்ணிக்கையைக் கணக்கிடும் சமவாய்ப்பு மாறி X என்க.

$\therefore$ கூறுவெளிக்குத் தொடர்புடைய X இன் மதிப்புகள் 2,1,1 மற்றும் 0 ஆகும்.

எனவே, நிகழ்தகவு நிறை சார்பு $p(x)$ -ஐ பின்வருமாறு அமைக்கலாம்.

$X = x$	0	1	2
$p(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

மேலும் இந்த X இன் திரள் பரவல் சார்பானது பின்வருமாறு கணக்கிடப்படுகிறது.

$X = x$	0	1	2
$p(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$
$F_X(x)=P(X\leq x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4}+\frac{1}{4}=1$

எடுத்துக்காட்டு 6.6

ஒரு நாணயம் மூன்று முறை சுண்டப் படுகிறது. X என்பது கணக்கிடப்பட்ட தலைகளின் எண்ணிக்கை எனில், X இன் திரள் பரவல் சார்பைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 6.indd 133 3/5/2020 12:14:42 PM

தீர்வு:

கூறுவெளி (S) ={(HHH), (HHT), (HTH), (HTT), (THH), (THT), (TTH), (TTT)}

X ஏற்கும் மதிப்புகள் : 3, 2, 2, 1, 2, 1, 1 மற்றும் 0.

X–இன் வீச்சு(R_X)	0	1	2	3
$P_X(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$
$F_X(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{7}{8}$	1

இவ்வாறாக,

$$F_X(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \frac{1}{8}, & 0\le x<1\\ \frac{4}{8}, & 1\le x<2\\ \frac{7}{8}, & 2\le x<3\\ 1, & x\le 3\end{cases}$$ என்பதைப் பெறலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 6.7

கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ள தனித்த சமவாய்ப்பு மாறி X இன் நிகழ்தகவுப் பரவலுக்கான பரவல் சார்பை அமைக்கவும்.

$X=x$	1	2	3	4	5	6	7
$P(x)$	0.10	0.12	0.20	0.30	0.15	0.08	0.05

தீர்வு:

கொடுக்கப்பட்ட நிகழ்தகவு பரவல் $p(x)$ இன் மதிப்பிலிருந்து நாம் பெறுவது,

$$F(1)=P(X\le 1)=P(1)=0.10$$

$$F(2)=P(X\le 2)=P(1)+P(2)=0.10+0.12=0.22$$

$$F(3)=P(X\le 3)=P(1)+P(2)+P(3)$$

$$=F(2)+P(3)$$

$$=0.22+0.20$$

$$=0.42$$

$$F(4)=F(3)+P(4)$$

$$=0.42+0.30$$

$$=0.72$$

$$F(5)=F(4)+P(5)$$

$$=0.72+0.15$$

$$=0.87$$

$$F(6)=F(5)+P(6)$$

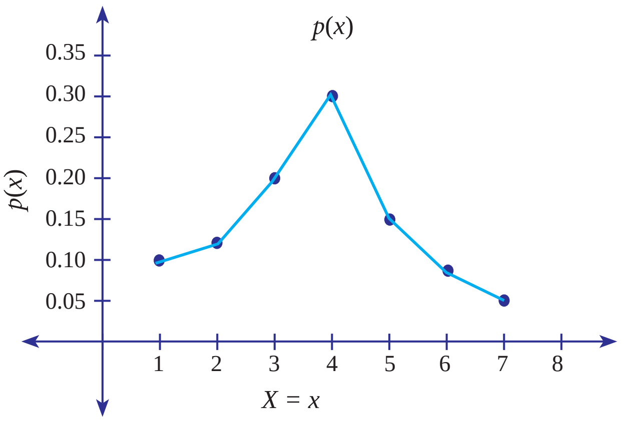
$$=0.87+0.08$$

$$=0.95$$

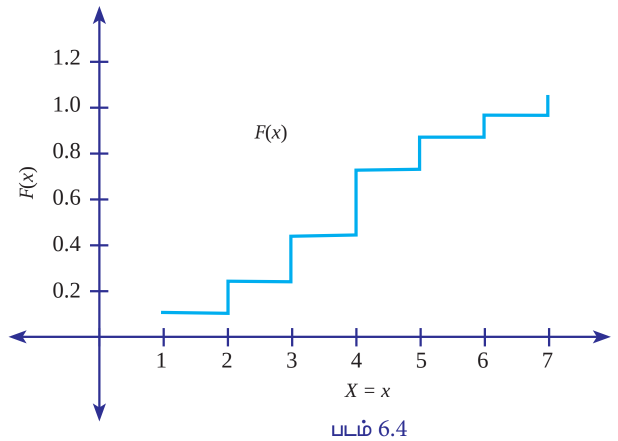
$$F(7)=F(6)+P(7)$$

$$=0.95+0.05$$

$$=1.00$$



படம் 6.3



படம் 6.4

எனவே,

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 6.indd 134 3/5/2020 12:14:48 PM

$$F_X(x)=\begin{cases}0, & x<1\\ 0.10, & x\le 1\\ 0.22, & x\le 2\\ 0.42, & x\le 3\\ 0.72, & x\le 4\\ 0.87, & x\le 5\\ 0.95, & x\le 6\\ 1, & x\le 7\end{cases}$$ ஆகும்.

6.1.3 தொடர்ச்சியான சமவாய்ப்பு மாறி (Continuous random variable)

வரையறை 6.5

ஓர் இடைவெளியில் உள்ள அனைத்து மெய் மதிப்புகளையும் (முழுக்களாகவோ, பின்னங்களாகவோ) ஏற்கும் ஒரு சமவாய்ப்பு மாறி X ஆனது தொடர்ச்சியான சமவாய்ப்பு மாறி என்று அழைக்கப்படுகிறது.

தொடர்ச்சியான சமவாய்ப்பு மாறியின் எடுத்துக்காட்டுகள்:

- ஒரு 10 அவுன்ஸ் பாட்டிலில் உள்ள தண்ணீரின் அளவு.
- ஒரு மகிழுந்தின் வேகம்.
- மின் நுகர்வு கிலோவாட் மணி நேரத்தில்.
- மக்கள் தொகையில் மக்களின் உயரம்.
- ஒரு வகுப்பில் மாணவர்களின் எடை.
- சென்னையிலிருந்து மதுரைக்குச் செல்ல ஒரு சரக்குவண்டி ஓட்டுநர் எடுத்துக்கொள்ளும் நேரம்.

நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு (Probability density function)

வரையறை 6.6

தொகையிடக்கூடிய ஓர் இடைவெளி $[t_1, t_2]$ இல் (திறந்த அல்லது மூடிய) அமையும் ஒரு சமவாய்ப்பு மாறி X இன் நிகழ்தகவு $f_X(x)$ ஆனது நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு என்று வரையறுக்கப் படுகிறது.

$$P(t_1 \le X \le t_2) = \int_{t_1}^{t_2} f_X(x)dx$$

நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு $f_X(x)$ அல்லது சுருக்கமாக, $f(x)$ ஆனது பின்வரும் நிபந்தனை களை நிறைவு செய்ய வேண்டும்.

(i) $f(x) \ge 0 \ \forall x$ மற்றும் (ii) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$.

நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பிற்குப் பதிலாகப் பயன்படுத்தப்படும் பிற பெயர்களாவன அடர்த்திச் சார்பு, தொடர்ச்சியான நிகழ்தகவு சார்பு, தொகை அடர்த்திச் சார்பு ஆகியவை ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 6.8

ஒரு தொடர்ச்சியான சமவாய்ப்பு மாறி X -இன் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு $f(x)$ பின்வருமாறு உள்ளது

$$f(x) = ax \ , \ 0 \le x \le 1 \text{ எனில்,}$$

மாறிலி a வைக் கண்டுபிடிக்கவும். மேலும் $P\left[X \le \frac{1}{2}\right]$ இன் மதிப்பையும் காண்க.

தீர்வு:

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ என்பதை நாம் அறிவோம்.

$$\int_0^1 ax\,dx = 1 \Rightarrow a\int_0^1 x dx = 1$$

$$\Rightarrow a\left(\frac{x^2}{2}\right)_0^1 = 1$$

$$\Rightarrow \frac{a}{2}(1-0) = 1$$

$$\Rightarrow a = 2$$

$$P\left[x \le \frac{1}{2}\right] = \int_{-\infty}^{\frac{1}{2}} f(x)dx$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} axdx$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} 2xdx$$

$$= \frac{1}{4}$$

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 6.indd 135 3/5/2020 12:14:53 PM

எடுத்துக்காட்டு 6.9

ஒரு தொடர்ச்சியான சமவாய்ப்பு மாறி X -இன் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு (p.d.f)

$f(x) = 5x^4, 0 \le x \le 1$ எனில்,

(i) $P[X \le a_1] = P[X > a_1]$ மற்றும்

(ii) $P[X > a_2] = 0.05$ என்பவற்றைக் கொண்டு a_1 மற்றும் a_2 ஆகியவற்றைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

தீர்வு :

(i) $P[X \le a_1] = P[X > a_1]$ இதிலிருந்து,

$$P[X \le a_1] = \frac{1}{2}$$

$$\int_0^{a_1} f(x)dx = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \int_0^{a_1} 5x^4 dx = \frac{1}{2}$$

$$5\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^{a_1} = \frac{1}{2}$$

$$a_1 = (0.5)^{\frac{1}{5}}$$

(ii) $$P[X > a_2] = 0.05$$

$$\int_{a_2}^{1} f(x)dx = 0.05$$

$$\int_{a_2}^{1} 5x^4 dx = 0.05$$

$$5\left[\frac{x^5}{5}\right]_{a_2}^{1} = 0.05$$

$$a_2 = [0.95]^{\frac{1}{5}}$$

தொடர்ச்சியான பரவல் சார்பு (Continuous distribution function)

வரையறை 6.7

தொடர்ச்சியான சமவாய்ப்பு மாறி X இன் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு $f_X(x)$ எனில், சார்பு $F_X(x)$ பின்வருமாறு வரையறுக்கப்படுகிறது.

$$F_X(x) = P[X \le x] = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt, -\infty < x < \infty$$

இது தொடர்ச்சியான சமவாய்ப்பு மாறி X– இன் பரவல் சார்பு அல்லது (சில நேரங்கள்) திரள் பரவல் சார்பு என்று அழைக்கப்படுகிறது.

திரள் பரவல் சார்பின் பண்புகள் (Properties of cumulative distribution function)

சார்பு $F_X(x)$ அல்லது சுருக்கமாக $F(x)$ ஆனது பின்வரும் பண்புகளைப் பெற்றுள்ளது.

(i) $0 \le F(x) \le 1, -\infty < x < \infty$

(ii) $F(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ மற்றும்

$F(+\infty) = \lim_{x \to \infty} F(x) = 1.$

(iii) $F(\cdot)$ என்பது ஓரியல்புத் தன்மைக் கொண்ட குறையாச் சார்பு.

அதாவது $a < b$ –க்கு $F(a) \le F(b)$

(iv) $F(\cdot)$ என்பது வலப்புறத்திலிருந்து தொடர்ச்சியானது, அதாவது $\lim_{h \to 0} F(x+h) = F(x)$.

(v) $F'(x) = \frac{d}{dx}F(x) = f(x) \ge 0$

(vi) $F'(x) = \frac{d}{dx}F(x) = f(x) \Rightarrow dF(x) = f(x)dx$

$dF(x)$ என்பது X–இன் நிகழ்தகவு வகையீடு என அறியப்படுகிறது.

(vii) $$P(a \le x \le b) = \int_a^b f(x)dx = \int_{-\infty}^{b} f(x)dx - \int_{-\infty}^{a} f(x)dx$$

$$= P(X \le b) - P(X \le a)$$

$$= F(b) - F(a)$$

எடுத்துக்காட்டு 6.10

ஒரு வானொலிக் குழாயின் ஆயுட்காலமானது (மணி நேரங்களில்) பின்வரும் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பை கொண்டிருக்கிறது

$$f(x) = \begin{cases} \frac{100}{x^2}, & x \ge 100 \\ 0, & x < 100 \end{cases}$$

எனில், அதன் பரவல் சார்பை காண்க.

தீர்வு:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

$$= \int_{100}^{x} \frac{100}{t^2} dt, x \ge 100$$

$$= \left[\frac{100}{-t}\right]_{100}^{x}, x \ge 100$$

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 6.indd 136 3/5/2020 12:15:01 PM

$$F(x)=\left[1-\frac{100}{x}\right], x\geq 100$$

எடுத்துக்காட்டு 6.11

ஒரு குறிப்பிட்ட அடுமனையில் ஒரு நாளில் விற்று முடிந்த ரொட்டி X–இன் அளவுகள் (நூறு பவுண்டுகளில்) ஒரு எண் சார்ந்த சமவாய்ப்பு நிகழ்வாகக் கண்டறியப்பட்டது. அதன் நிகழ்தகவானது, $f(x)$ என்ற நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பின் மூலம் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது எனில்,

$$f(x)=\begin{cases} Ax, & 0\leq x<10 \\ A(20-x), & 10\leq x<20 \\ 0, & \text{மற்றெங்கிலும்} \end{cases}$$

(a) A -இன் மதிப்பை காண்க.

(b) மறுநாளைக்கு விற்கப்படவிருக்கும் ரொட்டிகளின் எண்ணிக்கைக்கான பவுண்டுகளின் நிகழ்தகவு என்ன ?

(i) 10 பவுண்டுகளுக்கு அதிகமாக.

(ii) 10 பவுண்டுகளுக்குக்குறைவாக.

(iii) 5 மற்றும் 15 பவுண்டுகளுக்கு இடையில்.

தீர்வு:

(a) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=1$ என்பது நமக்குத் தெரியும்.

$$\int_0^{10} Axdx+\int_{10}^{20} A(20-x)dx=1$$

$$A\left\{\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{10}+\left[20x-\frac{x^2}{2}\right]_{10}^{20}\right\}=1$$

$$A\left[(50-0)+(400-200)-(200-50)\right]=1$$

$$A=\frac{1}{100}$$

(b) (i) மறுநாளைக்கு விற்கப்படவிருக்கும் ரொட்டிகளின் எண்ணிக்கை 10 பவுண்டுகளுக்கு அதிகமாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு:

$$P(10\leq X\leq 20)=\int_{10}^{20}\frac{1}{100}(20-x)dx$$

$$=\frac{1}{100}\left[20x-\frac{x^2}{2}\right]_{10}^{20}$$

$$=\frac{1}{100}\left[(400-200)-(200-50)\right]$$

$$=0.5$$

(ii) மறுநாளைக்கு விற்கப்படவிருக்கும் ரொட்டிகளின் எண்ணிக்கை 10 பவுண்டுகளுக்கு குறைவாக இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு:

$$P(0\leq X<10)=\int_0^{10}\frac{1}{100}xdx$$

$$=\frac{1}{100}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{10}$$

$$=\frac{1}{100}(50-0)$$

$$=0.5$$

(iii) மறுநாளைக்கு விற்கப்படவிருக்கும் ரொட்டிகளின் எண்ணிக்கை 5 மற்றும் 15 பவுண்டுகளுக்கு இடையில் இருப்பதற்கான நிகழ்தகவு:

$$P(5\leq X\leq 15)=\int_5^{10}\frac{1}{100}xdx+\int_{10}^{15}\frac{1}{100}(20-x)dx$$

$$=\frac{1}{100}\left[\frac{x^2}{2}\right]_5^{10}+\frac{1}{100}\left[20x-\frac{x^2}{2}\right]_{10}^{15}$$

$$=0.75$$

பயிற்சி 6.1

1. கொடுக்கப்பட்டுள்ள நிகழ்தகவுப் பரவலுக்கான திரள் பரவல் சார்பை அமைக்கவும்.

X	0	1	2	3
$P(X=x)$	0.3	0.2	0.4	0.1

2. X என்ற தனித்த சமவாய்ப்பு மாறியின் நிகழ்தகவு நிறை சார்பு ஆனது

$$p(x)=\begin{cases} 0.3, & x=3 \\ 0.2, & x=5 \\ 0.3, & x=8 \\ 0.2, & x=10 \\ 0, & \text{மற்றெங்கிலும்} \end{cases}$$

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 6.indd 137 3/5/2020 12:15:05 PM

எனில், X -இன் திரள் பரவல் சார்பைக் கண்டுபிடிக்கவும். மேலும் வரைபடம் வரையவும்.

3. தனித்த சமவாய்ப்பு மாறி X ஆனது பின்வரும் நிகழ்தகவு சார்பை பெற்றுள்ளது

$$P(X=x)=\begin{cases} kx & , \quad x=2,4,6 \\ k(x-2) & , \quad x=8 \\ 0 & , \quad \text{மற்றெங்கிலும்} \end{cases}$$

இங்கு ஒரு k மாறிலி எனில், $k=\frac{1}{18}$ என நிறுவுக.

4. தனித்த சமவாய்ப்பு மாறி X ஆனது பின்வரும் நிகழ்தகவுச் சார்பைப் பெற்றுள்ளது எனில், $k=0.1$ என காண்பிக்கவும்.

X	1	2	3	4
$P(X=x)$	k	$2k$	$3k$	$4k$

5. இரண்டு நாணயங்கள் ஒரே சமயத்தில் சுண்டப்படுகிறது. தலை பெறுவது வெற்றி யாகக் கருதப்படுகிறது எனில், வெற்றிகளின் எண்ணிக்கைக்கான நிகழ்தகவுப் பரவலை கண்டுபிடிக்கவும்.

6. ஒரு தொடர்ச்சியான சமவாய்ப்பு மாறி X ஆனது பின்வரும் நிகழ்தகவுச் சார்பைப் பெற்றுள்ளது எனில்,

Value of $X=x$	0	1	2	3	4	5	6	7
$P(x)$	0	k	$2k$	$2k$	$3k$	k^2	$2k^2$	$7k^2+k$

(i) k ன் மதிப்பைக் காண்க.

(ii) $p(x<6)$, $p(x\geq 6)$ மற்றும் $p(0<x<5)$ ஐக் காண்க.

(iii) $P(X\leq x)>\frac{1}{2}$க்கான x இன் குறைந்தபட்ச மதிப்பைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

7. ஒரு தொடர்ச்சியான சமவாய்ப்பு மாறி X ஆனது வீச்சு[-3, 3] உடைய நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பாகக் கொடுக்கப்பட்டுள்ளது

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{16}(3+x)^2, & -3\leq x\leq -1 \\ \frac{1}{16}(6-2x^2), & -1\leq x\leq 1 \\ \frac{1}{16}(3-x)^2, & 1\leq x\leq 3 \end{cases}$$ எனில்,

வளைவரையின் பரப்பு ஒன்று என்பதை சரிபார்க்கவும்.

8. ஒரு தொடர்ச்சியான சமவாய்ப்பு மாறி Xஆனது பின்வரும் பரவல் சார்பை பெற்றுள்ளது

$$F(x)=\begin{cases} 0 & , \quad x\leq 1 \\ k(x-1)^4 & , \quad 1<x\leq 3 \\ 1 & , \quad x>3 \end{cases}$$

எனில், (i) k மற்றும் (ii) நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பைக் காண்க.

9. ஒரு குறிப்பிட்ட நபர் தொலைபேசியில் பேசும் நேரம் (நிமிடங்களில்) சமவாய்ப்பு நிகழ்வாகக் கண்டறியப்பட்டது, அதன் நிகழ்தகவுச் சார்பு, நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு $f(x)$ ஆல் குறிப்பிடப்படுகிறது. மேலும்,

$$f(x)=\begin{cases} Ae^{-x/5}, & x\geq 0 \\ 0 & , \quad \text{மற்றெங்கிலும்} \end{cases}$$

எனில், (a) $f(x)$ ஒரு நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பை உருவாக்கும் எனில் A- இன் மதிப்பைக் காண்க.

(b) ஒரு நபர் தொலைபேசியில் (i) 10 நிமிடங்களுக்கு மேல் (ii) 5 நிமிடங்களுக்குக் குறைவாக (iii) 5 மற்றும் 10 நிமிடங்களுக்கு இடையில்பேசும்நிமிடங்களில்எண்ணிக்கைகளின் நிகழ்தகவு என்ன ?

10. ஒரு நபர் ஒரு குறிப்பிட்ட தொடர்வண்டி நிலையத்தில் காத்திருக்க வேண்டிய நேரம் நிமிடங்களில் கண்டறியப்பட்டு அதை ஒரு சமவாய்ப்பு நிகழ்வாக வைத்துக் கொள்வோம். அதன் நிகழ்தகவுச் சார்பின் பரவல் சார்பால் குறிப்பிடப்பட்டுள்ளது

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\leq 0 \\ \frac{x}{2}, & 0\leq x<1 \\ \frac{1}{2}, & 1\leq x<2 \\ \frac{x}{4}, & 2\leq x<4 \\ 1, & x\geq 4 \end{cases}$$ எனில்,

(a) பரவல் சார்பு தொடர்ச்சியாக இருக்குமா? அப்படியானால், அதன் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பை எழுதுக.

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 6.indd 138 3/5/2020 12:15:09 PM

(b) ஒரு நபர் (i) 3 நிமிடங்களுக்கு மேல் (ii) 3 நிமிடங்களுக்குக் குறைவாக (iii) 1 மற்றும் 3 நிமிடங்களுக்கு இடையில் காத்திருப்பதற்கான நிகழ்தகவு என்ன?

11. சமவாய்ப்பு மாறி வரையறுக்கவும்.

12. சமவாய்ப்பு மாறியின் வகைகள் யாவை? அவற்றை விளக்கவும்.

13. தனித்த சமவாய்ப்பு மாறியை வரையறுக்கவும்.

14. தொடர்ச்சியான சமவாய்ப்பு மாறி பற்றி நீங்கள் என்ன புரிந்து கொள்கிறீர்கள்?

15. சமவாய்ப்பு மாறியின் பொருள் என்ன என்பதனை விவரிக்கவும்.

16. தனித்த மற்றும் தொடர்ச்சியான சமவாய்ப்பு மாறிகளை வேறுபடுத்தவும்.

17. சமவாய்ப்பு மாறியின் பரவல் சார்பை விளக்கவும்.

18. சொற்றொடர்கள், (i) நிகழ்தகவு நிறை சார்பு (ii) நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு மற்றும் (iii) நிகழ்தகவு பரவல் சார்பு ஆகியவற்றை விளக்கவும்.

19. (i) தனித்த சமவாய்ப்பு மாறி மற்றும் (ii) தொடர்ச்சியான சமவாய்ப்பு மாறி ஆகியவற்றின் பண்புகள் யாவை?

20. பரவல் சார்பின் பண்புகளைக் கூறவும்.

6.2 கணக்கியல் எதிர்பார்த்தல் (Mathematical Expectation)

அறிமுகம்

சமவாய்ப்பு மாறிகள் அல்லது பரவல்கள் சம்பந்தப்பட்ட கணக்குகளில் மிகவும் பயனுள்ள கருத்தை எதிர்பார்த்தல் கொண்டுள்ளது. அளவீடுகளைக் கருத்தில் கொண்டு நடைமுறை நோக்கங்களுக்காகச் சமவாய்ப்பு மாறிப்பண்புகள் உருவாக்கப்பட்டு திறம்பட கையாளுவதையே அவற்றின் எதிர்பார்த்தல் என்றழைக்கப்படுகிறது. விளையாட்டுகள் தொடர்பான வெற்றி வாய்ப்புகளில் கணக்கியல் எதிர்பார்த்தலின் கருத்து எழுந்தது. எடுத்துக்காட்டாக, ஒரு விளையாட்டு வீரர், ஒரு போட்டியில் அவரின் சராசரி வெற்றியைக் காண, ஒரு தொழிலதிபர் ஒரு உற்பத்தியில் அவரின் சராசரி இலாபம் காண ஆர்வமாக இருக்கலாம். ஒரு சமவாய்ப்பு நிகழ்வின் சராசரி மதிப்பானது அதன் **கணக்கியல் எதிர்பார்த்தல்** அல்லது எதிர்பார்க்கும் மதிப்பாக குறிப்பிடப்படுகிறது. பின்வரும் பிரிவுகளில், தனித்த மற்றும் தொடர்ச்சியான சமவாய்ப்பு மாறிகளுக்கான கணக்கியல் எதிர்பார்த்தலின் கருத்தை நாம் வரையறுத்துப் படிப்போம்.

6.2.1 எதிர்பார்க்கும் மதிப்பு மற்றும் மாறுபாட்டு அளவை (Expected value and Variance)

எதிர்பார்க்கும் மதிப்பு

எதிர்பார்க்கும் மதிப்பு என்பது ஒரு சமவாய்ப்பு மாறி மதிப்பின் எடையிட்ட சராசரி என கருதப்படுகிறது. இங்கு நிகழ்தகவுகள் எடைகளாக இருக்கின்றன.

வரையறை 6.8

ஒரு தனித்த சமவாய்ப்பு மாறி X இன் நிகழ்தகவு நிறை சார்பு $p(x)$ எனில், அதன் எதிர்பார்க்கும் மதிப்பு

$$E(X)=\sum_{x} x\,p(x) \qquad \ldots (1)$$

ஒரு தொடர்ச்சியான சமவாய்ப்பு மாறி X இன் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு $f(x)$ எனில், அதன் எதிர்பார்க்கும் மதிப்பு

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x\,f(x)\,dx \quad \ldots (2)$$ என

வரையறுக்கப்படுகிறது.

உங்களுக்கு தெரியுமா?

- $E(X)$ என்பது அலகு நிறை புவி ஈர்ப்பு விசையின் மையம் அல்லது நடுமம் (centroid) ஆகும். இது X–இன் அடர்த்தி சார்பின் மூலம் தீர்மானிக்கப்படுகிறது. எனவே X -இன் சராசரி என்பது சமவாய்ப்பு மாறி Xக்கான மதிப்புகளின் "மையப்படுத்தப் பட்ட" அளவாகும்.
- X –இன் சராசரி φ_x அல்லது $E(X)$ ஆல் குறிக்கப்படுகிறது.

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 6.indd 139 3/5/2020 12:15:10 PM

குறிப்பு

- (1) இல், $E(X)$ என்பது குறிப்பிடப்பட்ட தொடர் முழுவதிலும் குவிதலியல்புடைய (absolutely convergent) தொடராக இருக்க வேண்டும் என்ற நிபந்தனைக்கு உட்பட்டு வரையறுக்கப்படுகிறது. இல்லையெனில், சராசரி காணத்தக்கது அல்ல என்று கூறுகிறோம்.
- (1) இல், $E(X)$ என்பது சமவாய்ப்பு மாறி பெறும் மதிப்புகளின் "சராசரி" ஆகும். ஒவ்வொரு சமவாய்ப்பு மாறி மதிப்பும், அம்மதிப்பின் நிகழ்தகவு மூலம் நிறையிடப் படுகிறது. சாத்தியமான நிகழ்தகவு மதிப்புகள் அதிக நிறையைப் பெறும்.
- (2) இல், குறிப்பிடப்பட்ட தொகுப்பு தொகையிடத்தக்கது எனில், $E(X)$ என்பது அமைவுறு தொகுப்பாக வரையறுக்கப் படுகிறது இல்லையெனில், சராசரி காணத்தக்கது அல்ல என்று கூறுகிறோம்.
- (2) இல், $E(X)$ என்பது சமவாய்ப்புமாறி பெறும் மதிப்புகளின் "சராசரி" ஆகும். ஒவ்வொரு x மதிப்பும் X –இன் தோராய நிகழ்தகவு $f_X(x)$ மூலம் பெருக்கப்படுகிறது, பின்னர் அனைத்து மதிப்புகளுக்கும் தொகுப்பாக்கப்படுகிறது.

மாறுபாட்டு அளவை (Variance)

மாறுபாட்டு அளவை என்பது ஒரு சமவாய்ப்பு மாறியிலிருந்து அதன் சராசரியின் வர்க்க விலக்கங் களின் எடையிட்ட சராசரி ஆகும். இங்கு நிகழ் தகவுகள் எடைகளாக இருக்கும். ஒரு சமவாய்ப்பு மாறி X-இன் சராசரி (1) மற்றும் (2) -இல் வரையறுக்கப்பட்ட X-இன் அடர்த்தி மையநிலை அளவு ஆகும். ஒரு சமவாய்ப்பு மாறி X-இன் மாறுபாடானது X-இன் அடர்த்தியின் சிதறல் அல்லது பரவல் அளவையாக இருக்கும் அல்லது சுருக்கமாக, ஒரு சீரற்ற மாறி மதிப்புகளின் மாறுபாடு ஆகும்.

வரையறை 6.9

X–இன் மாறுபாட்டு அளவை பின்வருமாறு வரையறுக்கப்படுகிறது.

தனித்த சமவாய்ப்பு மாறி X–இன் நிகழ்தகவு நிறை சார்பு $p(x)$ எனில்,

$$Var(X)=\sum\left[x-E(X)\right]^2 p(x) \qquad \dots (3)$$

தொடர்ச்சியான சமவாய்ப்பு மாறி X–இன் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு $f_X(x)$ எனில்,

$$Var(X)=\int_{-\infty}^{\infty}\left[x-E(X)\right]^2 f_X(x)\,dx \qquad \dots (4)$$

ஆகும்.

வரையறை 6.10

$[X \;\; -E(X)]^2$ இன் எதிர்பார்க்கும் மதிப்பானது சமவாய்ப்பு மாறியின் மாறுபாட்டு அளவை என்று அழைக்கப்படுகிறது.

அதாவது,

$$Var(X)=E\left[X-E(X)\right]^2=E\left(X^2\right)-\left[E(X)\right]^2 \quad \dots (5)$$

இங்கு $E\left(X^2\right)=\begin{cases}\sum_x x^2\,p(x) & , X \text{ ஒரு தனித்த சமவாய்ப்பு மாறி எனில்}\\ \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx & , X \text{ ஒரு தொடர்ச்சியான சமவாய்ப்பு மாறி எனில்}\end{cases}$

குறிப்பு

- பின்வரும் எடுத்துக்காட்டுகளில், மாறுபாட்டு அளவையானது வரையறை 6.10–ஐ பயன் படுத்திக் கண்டறியப்பட்டிக்கும்.
- (3)–இல் தொடரானது குவிதலியல்புடைய தாகவும் அல்லது (4)–இல் தொகுப்புடையன வாகவும் இருந்தால் மட்டுமே மாறுபாடுகள் வரையறுக்கப்படுகின்றன.
- X ஒரு சமவாய்ப்பு மாறி எனில், X –இன் திட்டவிலக்கம் σ_X என்று குறியிடப்பட்டு $+\sqrt{Var[X]}$ என்று வரையறுக்கப் படுகிறது.
- X இன் மாறுபாடு, $\sigma_X{}^2$ அல்லது $Var(X)$ அல்லது $V(X)$ என்றும் குறிக்கப்படுகிறது.

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 6.indd 140 3/5/2020 12:15:12 PM

உங்களுக்கு தெரியுமா? சராசரி என்பது ஒரு அடர்த்தி புவிஈர்ப்பு விசையின் மையம் ஆகும். இதேபோல், மாறுபாட்டு அளவையானது புவிஈர்ப்பு விசை மையத்தின் செங்குத்து அச்சைப் பொறுத்து அதே அடர்த்தி கொண்ட திருப்புத்திறனை பிரதிபலிக்கிறது.

6.2.2 கணக்கியல் எதிர்பார்த்தலின் பண்புகள் (Properties of Mathematical expectation)

(i) $E(a)=a$, 'a'என்பது ஒரு மாறிலி.

(ii) $E(aX)=aE(X)$

(iii) $E(aX+b)=aE(X)+b$, 'a' மற்றும் 'b' ஆகியவை மாறிலிகள்.

(iv) $X\geq 0$ எனில், $E(X)\geq 0$ ஆகும்.

(v) $V(a)=0$, a ஒரு மாறிலி.

(vi) X என்பது ஒரு சமவாய்ப்பு மாறி எனில்,

$V(aX+b)=a^2V(X)$

விலக்கப் பெருக்குத்தொகையின் கருத்தாக்கம் (Concept of moments)

ஒரு சமவாய்ப்பு மாறியின் அல்லது ஒரு பரவலின் விலக்கப்பெருக்குத்தொகை (அல்லது சீர்பட்ட விலக்கப்பெருக்குத்தொகை) என்பது கொடுக்கப்பட்ட பரவலுக்குரிய சமவாய்ப்பு மாறியின் அடுக்குகளின் எதிர்பார்த்தலாகும்.

வரையறை 6.11

ஒரு சமவாய்ப்பு மாறி X–ஆக இருந்தால் X –இன் r–வது விலக்கப்பெருக்குத்தொகை, பொதுவாக φ_r' மூலம் குறிக்கப்பட்டு பின்வருமாறு வரையறுக்கப்படுகிறது.

$$\varphi_r' = E\left(X^r\right)=\begin{cases}\sum_x x^r p(x), & X \text{ ஒரு தனித்த சமவாய்ப்பு மாறி எனில்}\\ \int_{-\infty}^{\infty} x^r f(x)dx, & X \text{ ஒரு தொடர்ச்சியான சமவாய்ப்பு மாறி எனில்}\end{cases}$$

இங்கு எதிர்பார்த்தல் காணத்தக்கதாக இருத்தல் வேண்டும்.

வரையறை 6.12

X ஒரு சமவாய்ப்பு மாறி எனில் a–ஐ பொருத்த X–இன் r–வது சீர்படா விலக்கபெருக்குத்தொகை $E\left[(X-a)^r\right]$ என வரையறுக்கப்படுகிறது. $a=\varphi_X$ எனில், φ_x –ஐ பொருத்த X–இன் r–வது மைய விலக்கபெருக்குத்தொகையை φ_r மூலம் குறிக்கப்பட்டு, பின்வருமாறு வரையறுக்கப்படுகிறது.

$$\varphi_r = E[(X-\varphi_X)^r]$$

குறிப்பு

- $\varphi_1' = E(X) = \varphi_X$, X –இன் சராசரி.
- $\varphi_1 = E[X-\varphi_X] = 0.$
- $\varphi_2 = E[(X-\varphi_X)^2]$, X –இன் மாறுபாடு
- X இன் விலக்கபெருக்குத்தொகை காணத்தக்கது மற்றும் அதன் அடர்த்தி சார்பு φ_X ஐ பொருத்து சமச்சீராக இருந்தால், φ_X–ஐ பொருத்த X–இன் அனைத்து ஒற்றை விலக்கபெருக்குத்தொகைகளும் பூஜ்ஜியமாக இருக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 6.12

பின்வரும் நிகழ்தகவுப் பரவலைக் கொண்ட சமவாய்ப்பு மாறியின் சராசரி மற்றும் மாறுபாட்டைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

$X=x$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(x)$	0.15	0.10	0.10	0.01	0.08	0.01	0.05	0.02	0.28	0.20

தீர்வு:

சமவாய்ப்பு மாறி X–இன் சராசரி :

$$E(X)=\sum_x x\,P_X(x)$$

$= (1 \times 0.15) + (2 \times 0.10) + (3 \times 0.10) + (4 \times 0.01) + (5 \times 0.08) + (6 \times 0.01) + (7 \times 0.05) + (8 \times 0.02) + (9 \times 0.28) + (10 \times 0.20)$

$E(X)=6.18$

$$E\left(X^2\right)=\sum_x x^2\,P_X(x)$$

$= (1^2 \times 0.15) + (2^2 \times 0.10) + (3^2 \times 0.10) + (4^2 \times 0.01) + (5^2 \times 0.08) + (6^2 \times 0.01) + (7^2 \times 0.05) + (8^2 \times 0.02) + (9^2 \times 0.28) + (10^2 \times 0.20)$

$E(X^2) = 50.38$

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 6.indd 141 3/5/2020 12:15:16 PM

சமவாய்ப்பு மாறியின் மாறுபாட்டளவு :

$$V(X) = E\left(X^2\right)-\left[E(X)\right]^2 = 50.38 - (6.18)^2 = 12.19$$

எனவே, கொடுக்கப்பட்ட தனித்த பரவலின் சராசரி மற்றும் மாறுபாட்டு அளவை முறையே 6.18 மற்றும் 12.19 ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 6.13

ஆறு ஆண்கள் மற்றும் ஐந்து பெண்கள், ஒரு சிறிய நிறுவனத்தில் ஒரு நிர்வாக நிலைக்கு விண்ணப்பிக்கின்றனர். இரண்டு விண்ணப்ப தாரர்கள் நேர்காணலுக்குத் தேர்ந்தெடுக்கப்பட்டனர். நேர்க்காணல் குழுவில் உள்ள பெண்களின் எண்ணிக்கை X எனக் குறிக்கப்பட்டு. X இன் நிகழ்தகவு நிறை சார்பு பின்வருமாறு கண்டறியப் பட்டுள்ளது.

$X = x$	0	1	2
$P(x)$	$\frac{2}{11}$	$\frac{5}{11}$	$\frac{4}{11}$

நேர்காணல் குழுவில் எத்தனை பெண்களை நீங்கள் எதிர்பார்க்கிறீர்கள்?

தீர்வு:

நேர்காணல் குழுவில் உள்ள பெண்களின் எதிர்பார்ப்பு எண்ணிக்கை :

$$E(X) = \sum_x x\,P_X(x)$$

$$= \left[\left(0\times\frac{2}{11}\right)+\left(1\times\frac{5}{11}\right)+\left(2\times\frac{4}{11}\right)\right]$$

$$= \frac{13}{11}$$ (தோராயமாக ஒரு பெண்)

எடுத்துக்காட்டு 6.14

ஒரு தனித்த சமவாய்ப்பு மாறியின் சராசரி மற்றும் மாறுபாட்டு அளவையைக் கண்டுபிடிக்கவும். இதன் பரவல் சார்பானது பின்வருமாறு பெறப் பட்டுள்ளது.

$X = x$	1	2	3	4	5	6
$F_x(x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{5}{6}$	1

தீர்வு :

கொடுக்கப்பட்ட விவரத்திலிருந்து, நீங்கள் முதலில் சமவாய்ப்பு மாறியின் நிகழ்தகவு பரவலைக் கணக்கிடவும். அதைப் பயன்படுத்தி சராசரி மற்றும் மாறுபாட்டளவையைக் கணக்கிடவேண்டும்.

X	$p(x)$
1	$F(1) = \frac{1}{6}$
2	$F(2) - F(1) = \frac{2}{6}-\frac{1}{6}=\frac{1}{6}$
3	$F(3) - F(2) = \frac{3}{6}-\frac{2}{6}=\frac{1}{6}$
4	$F(4) - F(3) = \frac{4}{6}-\frac{3}{6}=\frac{1}{6}$
5	$F(5) - F(4) = \frac{5}{6}-\frac{4}{6}=\frac{1}{6}$
6	$F(6) - F(5) = 1-\frac{5}{6}=\frac{1}{6}$

நிகழ்தகவு நிறை சார்பு :

$X = x$	1	2	3	4	5	6
$P(x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

சமவாய்ப்பு மாறி X–இன் சராசரி:

$$= E(X) = \sum_x x\,P_X(x)$$

$$= \left(1\times\frac{1}{6}\right)+\left(2\times\frac{1}{6}\right)+\left(3\times\frac{1}{6}\right)+\left(4\times\frac{1}{6}\right)+\left(5\times\frac{1}{6}\right)+\left(6\times\frac{1}{6}\right)$$

$$= \frac{1}{6}\left(1+2+3+4+5+6\right)$$

$$= \frac{7}{2}$$

$$E\left(X^2\right) = \sum_x x^2\,P_X(x)$$

$$= \left(1^2\times\frac{1}{6}\right)+\left(2^2\times\frac{1}{6}\right)+\left(3^2\times\frac{1}{6}\right)+\left(4^2\times\frac{1}{6}\right)+\left(5^2\times\frac{1}{6}\right)+\left(6^2\times\frac{1}{6}\right)$$

$$= \frac{1}{6}\left(1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2\right)$$

$$= \frac{91}{6}$$

சமவாய்ப்பு மாறியின் மாறுபாட்டளவு :

$$V(X) = E\left(X^2\right) - \left[E(X)\right]^2$$

$$= \frac{91}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2$$

$$= \frac{35}{12}$$

எடுத்துக்காட்டு 6.15

பின்வரும் தகவல் வெற்றிகளின் நிகழ்தகவு பரவலைக் குறிக்கிறது எனில், வெற்றியின் எதிர்பார்த்தல் எண்ணிக்கையைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

வெற்றிகளின் எண்ணிக்கை $X=x$	0	1	2
நிகழ்தகவு $p(x)$	$\frac{6}{11}$	$\frac{9}{22}$	$\frac{1}{22}$

தீர்வு:

வெற்றியின் எதிர்பார்த்தல் எண்ணிக்கை :

$$E(X) = \sum_x x\,P_X(x)$$

$$= \left(0 \times \frac{6}{11}\right) + \left(1 \times \frac{9}{22}\right) + \left(2 \times \frac{1}{22}\right)$$

$$= \frac{11}{22} = 0.5$$

எனவே, வெற்றியின் எதிர்பார்த்தல் எண்ணிக்கை 0.5 ஆகும். (தோராயமாக ஒரு வெற்றி)

எடுத்துக்காட்டு 6.16

ஒரு குடுவையில் சிவப்பு, கருப்பு, பச்சை, மற்றும் நீலம் ஆகிய நான்கு நிற பந்துகள் உள்ளன. எந்த நிற பந்தையும் பெற சமமான நிகழ்தகவு வழங்கப் பட்டுள்ளது. முப்பது சோதனைகளில் பந்துகள் திரும்பி வைக்கும் முறையில், நீலநிற பந்து பெறுவதற் கான எதிர்பார்க்கத்தக்க மதிப்பு என்ன?

தீர்வு:

நீலபந்து பெறுவதற்கான நிகழ்தகவு : $p = \frac{1}{4} = 0.25$

மொத்த சோதனைகள் : N = 30

சோதனைகளின் மதிப்பு = சோதனைகளின் எண்ணிக்கை X நிகழ்தகவு

$$= N \times p$$

$$= 30 \times 0.25$$

$$= 7.50$$

எனவே, நீலப்பந்தைப் பெறுவதற்கான எதிர் பார்க்கத்தக்க மதிப்பு தோரயமாக 8 ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 6.17

ஒரு நடுநிலையான பகடை உருட்டப்படுகிறது எனில், அதன் விளைவுகளில் எதிர்பார்க்கப்பட்ட மதிப்பைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

தீர்வு:

உருட்டப்பட்ட ஒரு நடுநிலையான ஆறு முகங்கள் உள்ள பகடையின் (மேல்பக்கம்) சமவாய்ப்பு மாறி X இன் நிகழ்தகவு நிறை சார்பு

$$P_X(x) = \frac{1}{6},\quad x = 1,2,3,4,5 \text{ மற்றும் } 6 \text{ எனில்}$$

உருட்டப்பட்டதின் சராசரி, அதாவது X -இன் எதிர்பார்த்தல் :

$$E(X) = \sum_x x\,P_X(x)$$

E(X) =

$$\left(1\times\frac{1}{6}\right)+\left(2\times\frac{1}{6}\right)+\left(3\times\frac{1}{6}\right)+\left(4\times\frac{1}{6}\right)+\left(5\times\frac{1}{6}\right)+\left(6\times\frac{1}{6}\right)$$

$$= \frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6)$$

$$= \frac{7}{2}$$

$$= 3.5$$

எனவே ஒரு நடுநிலையான ஆறு பக்கமுள்ள பகடையின் எதிர்பார்த்தல் 3.5 ஆகும்

எடுத்துக்காட்டு 6.18

தனித்த சமவாய்ப்பு மாறியின் நிகழ்தகவு நிறை சார்பானது,

$X = x$	0	1	2	3
$p(x)$	0.2	0.1	0.4	0.3

எனில், $E(3X + 2X^2)$ இன் மதிப்பைக் காண்க?

தீர்வு:

$$E(X) = \sum_x x\,P_X(x)$$

$$= (0 \times 0.2) + (1 \times 0.1) + (2 \times 0.4) + (3 \times 0.3)$$

$$= 1.8$$

$$E\left(X^2\right) = \sum_x x^2\,P_X(x)$$

$$= (0^2 \times 0.2) + (1^2 \times 0.1) + (2^2 \times 0.4) + (3^2 \times 0.3)$$

$$= 4.4$$

$$E(3X + 2X^2) = 3E(X) + 2E(X^2)$$

$$= (3 \times 1.8) + (2 \times 4.4)$$

$$= 14.2$$

எடுத்துக்காட்டு 6.19

ஒரு சமவாய்ப்பு மாறி X–க்கான நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பானது

$$f(x) = \begin{cases} 4x^3, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{மற்றெங்கிலும்} \end{cases}$$

எனில், $E(X)$ மற்றும் $V(X)$ கண்டுபிடிக்கவும்.

தீர்வு:

$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx$ என்பது நமக்குத் தெரியும்.

$$= \int_0^1 x\, 4x^3\, dx$$

$$= 4\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^1$$

$$E(X) = \frac{4}{5}$$

$$E\left(X^2\right) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\, dx$$

$$= \int_0^1 x^2\, 4x^3\, dx$$

$$= 4\left[\frac{x^6}{6}\right]_0^1$$

$$= \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$V(X) = E\left(X^2\right) - \left[E(X)\right]^2$$

$$= \frac{2}{3} - \left[\frac{4}{5}\right]^2$$

$$= \frac{2}{75}$$

எடுத்துக்காட்டு 6.20

$f\ (x)$ மூலம் வரையறுக்கப்படும் சார்பு $f(x) = ke^{-2x}, 0 \le x < \infty$ ஆனது ஒரு அடர்த்திச் சார்பு எனில், மாறிலி k மற்றும் சராசரி ஆகியவற்றைக் கண்டு பிடிக்கவும்.

தீர்வு:

$f(x)$ என்பது ஒரு அடர்த்திச் சார்பு எனில்,

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$ என்பது நமக்குத் தெரியும்.

$$\int_0^{\infty} k\, e^{-2x}\, dx = 1$$

$$k\int_0^{\infty} e^{-2x}\, dx = 1$$

$$k\left[\frac{e^{-2x}}{-2}\right]_0^{\infty} = 1$$

$$\Rightarrow k = 2$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx$$

$$= \int_0^{\infty} xk\, e^{-2x}\, dx$$

$$= 2\int_0^{\infty} xe^{-2x}\, dx$$

$$= 2\left\{\left[\frac{xe^{-2x}}{-2}\right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \frac{e^{-2x}}{-2}\, dx\right\}$$

$$\left(\because \int u\,dv = uv - \int v\,du\right)$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-2x}\, dx$$

$$= \frac{1}{2}$$

எடுத்துக்காட்டு 6.21

தயாரிக்கப்பட்ட DVD இயக்கியில் பயன்படுத்தப் படும் மின்னணு உபகரணங்களின் முக்கிய பகுதியின் செயலிழப்பிற்கான நேரம் (ஆயிரத்தில்) அடர்த்திச் சார்பாக கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

$$f(x) = \begin{cases} 3e^{-3x}, & x > 0 \\ 0, & \text{மற்றெங்கிலும்} \end{cases}$$

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 6.indd 144 3/5/2020 12:15:29 PM

இந்த உபகரண பகுதியின் எதிர்பார்க்கத்தக்க செயல் வாழ்வை கண்டுபிடிக்கவும்.

தீர்வு:

$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx$ என்பது நமக்குத் தெரியும்.

$$=\int_{0}^{\infty} x\, 3e^{-3x} dx$$

$$=3\int_{0}^{\infty} x\, e^{-3x} dx$$

$$=3\left\{\left[x\frac{e^{-3x}}{-3}\right]_0^{\infty}-\int_0^{\infty}\left(\frac{e^{-3x}}{-3}\right)dx\right\}$$

$$\left(\because \int u\,dv=uv-\int v\,du\right)$$

$$=\int_{0}^{\infty} e^{-3x} dx$$

$$=\frac{1}{3}$$

எனவே, உபகரணபகுதியின் எதிர்பார்க்கத் தக்க செயல் வாழ்வு $\frac{1}{3}$ மணி நேரம் (ஆயிரத்தில்) ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 6.22

ஒரு பயணிகள் இரயில் ஒவ்வொரு 25 நிமிடங் களுக்கும், ஒரு இரயில் நிலையத்திற்கு வந்து செல்கிறது. ஒரு பயணி ஒவ்வொரு காலையும் அவரது வீட்டைவிட்டு வெளியேறி சாதாரணமாக நடந்து இரயில் நிலையத்திற்கு செல்கிறார். அவர் இரயில் நிலையத்தை அடைந்த நேரத்திலிருந்து இரயிலுக்குக் காத்திருக்கும் நேரஅளவு (நிமிடங்களில்) X எனக் குறிக்கப்பட்டு அது X-இன் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பாக அறியப்படுகிறது.

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{25}, & 0<x<25\\ 0, & \text{மற்றெங்கிலும்}\end{cases}$$

எனில்,

சமவாய்ப்பு மாறி X –இன் எதிர்பார்க்கத்தக்க மதிப்பை பெறவும் மற்றும் விளக்கவும்.

தீர்வு:

சமவாய்ப்பு மாறியின் எதிர்பார்க்கத்தக்க மதிப்பு:

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx$$

$$=\int_0^{25} x\frac{1}{25}dx$$

$$=\frac{1}{25}\int_0^{25} x\,dx \quad =\frac{1}{25}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{25}$$

$$=12.5$$

எனவே, பயணி எதிர்ப்பார்க்கத்தக்க காத்திருப்பு நேரம் 12.5 நிமிடங்கள் ஆகும்.

எடுத்துக்காட்டு 6.23

ஒரு வானொலி குழலின் (Valve) வாழ்நாள் (மணி நேரங்களில்) பின்வரும் நிகழ்தகவு அடர்த்திச்சார்பைக் கொண்டிருப்பதாக வைத்துக்கொள்ளுங்கள்.

$$f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{x}{100}}, & x\geq 100\\ 0, & x<100\end{cases}$$ எனில்,

வானொலி குழலின் வாழ்நாளின் சராசரியை கண்டுபிடிக்கவும்.

தீர்வு:

சமவாய்ப்பு மாறியின் எதிர்பார்த்தல் :

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx$$

$$=\int_{100}^{\infty} x\, e^{-\frac{x}{100}} dx$$

$$=\left\{\left[x\left(\frac{e^{-\frac{x}{100}}}{-\frac{1}{100}}\right)\right]_{100}^{\infty}-\int_{100}^{\infty}\left(\frac{e^{-\frac{x}{100}}}{-\frac{1}{100}}\right)dx\right\}$$

$$\left(\because \int u\,dv=uv-\int v\,du\right)$$

$$=\left[(10000)\left(e^{-1}\right)+(10000)\left(e^{-1}\right)\right]$$

$$=\left[(10000)(0.3679)+(10000)(0.3679)\right]$$

= 7358 மணிகள்

எனவே, வானொலி குழலின் சராசரி வாழ்நாள் 7,358 மணிகள் ஆகும்.

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 6.indd 145 3/5/2020 12:15:32 PM

எடுத்துக்காட்டு 6.24

ஒரு சமவாய்ப்பு மாறி X –இன் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு

$f(x)=ke^{-|x|}, -\infty<x<\infty$ எனில், k–இன் மதிப்பைக் கண்டுபிடிக்கவும் மற்றும் சமவாய்ப்பு மாறியின் சராசரி மற்றும் மாறுபாட்டு அளவையைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

தீர்வு

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx=1$ என்பது நமக்குத் தெரியும்

$$\int_{-\infty}^{\infty} ke^{-|x|}dx=1$$

$$k\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}dx=1$$

$$2k\int_{0}^{\infty} e^{-x}dx=1 \quad (\because \; e^{-|x|} \text{ ஒரு இரட்டை சார்பு})$$

$$2k\left[\frac{e^{-x}}{-1}\right]_0^{\infty}=1$$

$$\therefore \quad k=\frac{1}{2}$$

சமவாய்ப்பு மாறியின் சராசரி :

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x\,f(x)\,dx$$

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x\,k\,e^{-|x|}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} x\,e^{-|x|}dx$$

$(\because \; xe^{-|x|}$ ஒரு ஒற்றைச் சார்பு)

$$= 0$$

$$E\left(X^2\right)=\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} x^2 k\,e^{-|x|}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-|x|}dx$$

$$=\int_{0}^{\infty} x^2 e^{-x}dx$$

$(\because \; x^2e^{-|x|}$ ஒரு இரட்டைச் சார்பு)

$$=\Gamma(3) \quad \left(\because \Gamma(\alpha)=\int_0^{\infty} x^{\alpha-1}e^{-x}dx, \alpha>0; \Gamma(n)=(n-1)!\right)$$

$$=2$$

$$V(X)=E\left(X^2\right)-\left[E\left(X\right)\right]^2$$

$$=2-[0]^2$$

$$=2$$

பயிற்சி 6.2

1. ஒரு நடுநிலையான பகடையினசமவாய்ப்பு மாறிகளுக்கான எதிர்பார்த்தல் மதிப்பைக் கண்டுபிடிக்கவும்.

2. மாணவர்கள் A தரநிலையை பெறுவதற்கான எண்ணிக்கையை வரையறுக்கும் சமவாய்ப்பு மாறியாக X இருக்கட்டும். கொடுக்கப்பட்ட அட்டவணையிலிருந்து X–இன் எதிர்பார்த்தல் மதிப்பைக் கண்டறியவும்.

$X=x$	0	1	2	3
$P(X=x)$	0.2	0.1	0.4	0.3

3. பின்வரும் அட்டவணை சமவாய்ப்பு மாறி X–இன் நிகழ்தகவு நிறை சார்பை பற்றி விவரிக்கிறது எனில்,

x	3	4	5
$P(x)$	0.2	0.3	0.5

x–இன் திட்ட விலக்கத்தைக் கண்டு பிடிக்கவும்.

4. X என்பது ஒரு தொடர்ச்சியான சமவாய்ப்பு மாறி என்க. அதன் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பானது

$$f_X(x)=\begin{cases}2x, & 0\le x\le 1\\ 0, & \text{மற்றெங்கிலும்}\end{cases}$$

எனில், X–இன் எதிர்பார்த்தல் மதிப்பை கண்டு பிடிக்கவும்.

5. X என்பது ஒரு தொடர்ச்சியான சமவாய்ப்பு மாறி என்க. அதன் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பானது

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{3}{x^4}, & x\ge 1\\ 0, & \text{மற்றெங்கிலும்}\end{cases}$$

எனில், X –இன் சராசரி மற்றும் மாறுபாட்டை கண்டுபிடிக்கவும்.

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 6.indd 146 3/5/2020 12:15:38 PM

6. ஒருவர், ஒரு முதலீட்டில் ₹ 5,000 இலாபம் ஈட்டுவதற்கான நிகழ்தகவு 0.62 அல்லது ₹ 8,000 இழப்பு வருவதற்கான நிகழ்தகவு 0.38 எனில், இதில் எதிர்பார்க்கப்பட்ட ஆதாயத்தைக் கண்டறியவும்.

7. கணக்கியல் எதிர்பார்த்தலின் பண்புகள் யாவை?

8. கணக்கியல் எதிர்பார்த்தலில் மூலம் நீங்கள் என்ன புரிந்து கொண்டீர்கள்?

9. கணக்கியல் எதிர்பார்த்தலில் அடிப்படையில் மாறு பாட்டு அளவையை நீங்கள் எவ்வாறு வரையறுக்க வேண்டும்?

10. தனித்த சமவாய்ப்பு மாறியின் கணக்கியல் எதிர் பார்த்தலை வரையறுக்கவும்.

11. தொடர்ச்சியான சமவாய்ப்பு மாறியைப் பயன் படுத்தி கணக்கியல் எதிர்பார்த்தலின் வரை யறையைக் கூறவும்.

12. ஒரு வியாபார முயற்சியில் ஒருவர் ₹ 2,000 இலாபம் ஈட்டுவதற்கான நிகழ்தகவு 0.4 அல்லது ₹ 1,000 இழப்பை பெறுவதற்கான நிகழ்தகவு 0.6 எனில், அவரது எதிர்பார்த்தல், மாறுபாடு மற்றும் திட்டவிலக்கம் இலாபம் என்ன?

13. ஒரு மோட்டார் வண்டிச்சக்கர டயரின் (Motor cycle tyre) இறுதி அடிப்பகுதி தேய்மானத்தை எதிர்த்து தாங்கும் திறனானது ஒரு நெருக்கடியான தருவாயை அடையும்வரை கடந்த மைல்களின் எண்ணிக்கை ஒரு நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பின் மூலம் குறிக்கப்படுகிறது

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{30}e^{-\frac{x}{30}}, & x>0\\ 0, & x\leq 0\end{cases}$$

எனில், வண்டிச்சக்கர டயரின் இறுதி அடிப்பகுதி தேய்மானத்தை எதிர்த்து தாங்குத் திறனானது ஒரு நெருக்கடியான தருவாயை அடையும் வரைக்கான எதிர்பார்க்கத்தக்க மைல்கள் (ஆயிரத்தில்) எண்ணிக்கையைக் கண்டு பிடிக்கவும்.

14. ஒரு நபர் ஒரு நாணயத்தைச் சுண்டுகிறார், தலை எனில், ₹ 4-ஐப் பெறுகிறார் மற்றும் பூ எனில், ₹ 2-ஐ செலுத்துகிறார். அவரது இலாபத்தின் எதிர்பார்ப்பு மற்றும் மாறுபாட்டு அளவையைக் கண்டறியவும்.

15. ஒரு சமவாய்ப்பு மாறி X ஆக இருக்கட்டும் மற்றும் $Y=2X+1$. சமவாய்ப்பு மாறி X-இன் மாறுபாட்டளவு 5 என்றால் Y-இன் மாறுபாட்டளவு என்ன?

பயிற்சி 6.3

ஏற்புடைய விடையைத் தெரிவு செய்க:

1. நிகழ்வின் நிகழ்தகவு கொண்ட சமவாய்ப்பு மாறியின் சாத்தியமுள்ள மதிப்புகளைப் பெருக்கு வதன் மூலம் பெறப்பட்ட எந்த மதிப்பு எடையிட்ட சராசரிக்கு சமம் என அழைக்கப்படுகிறது.

   (a) தனித்த மதிப்பு

   (b) எடையிட்ட மதிப்பு

   (c) எதிர்பார்த்தல் மதிப்பு

   (d) திரள் மதிப்பு

T68W2I

2. நாள் ஒன்றுக்கு பொருள்களின் தேவையானது, மூன்று நாள்களுக்கு முறையே 21, 19, 22 அலகுகள் ஆகும். அவற்றின் நிகழ்தகவுகள் முறையே 0.29, 0.40, 0.35 ஆகும். அலகு ஒன்றுக்கு இலாபம் 0.50 பைசாக்கள் எனில், மூன்று நாள்களுக்கான எதிர்பார்க்கப்பட்ட இலாபம்.

   (a) 21, 19, 22 (b) 21.5, 19.5, 22.5

   (c) 0.29, 0.40, 0.35 (d) 3.045, 3.8, 3.85

3. x-ஐ விவரிக்கும் நிகழ்தகவு குறிப்பிட்ட மதிப்பை விட சமமாகவோ அல்லது குறைவாகவோ உள்ள நிகழ்தகவு

   (a) தனித்த நிகழ்தகவு

   (b)திரள் நிகழ்தகவு

   (c) விளிம்பு நிகழ்தகவு

   (d) தொடர்ச்சியான நிகழ்தகவு

4. $E(X) = 5$ மற்றும் $E(Y) = -2$ எனில், $E(X - Y)$ –ன் மதிப்பானது

   (a) 3 (b) 5 (c) 7 (d) –2

5. இரண்டு புள்ளிகளுக்கு இடையில் எந்தவிதமான மதிப்பும் அனுமானிக்கலாம் எனும் மாறியானது

   (a) தனித்த சமவாய்ப்பு மாறி

   (b) தொடர்ச்சியான சமவாய்ப்பு மாறி

   (c) தனித்த கூறுவெளி

   (d) சமவாய்ப்பு மாறி

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 6.indd 147 3/5/2020 12:15:38 PM

6. ஒரு தொடர்ச்சியான சமவாய்ப்பு மாறியின் நிகழ் தகவு பரவலைப் குறிக்கும் ஒரு சூத்திரம் அல்லது சமன்பாடு

(a) நிகழ்தகவு பரவல்

(b) பரவல் சார்பு

(c) நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு

(d) கணக்கியல் எதிர்பார்த்தல்

7. ஒரு தனித்த சமவாய்ப்பு மாறி X மற்றும் X -இன் நிகழ்தகவு $p(x)$ எனில், சமவாய்ப்பு மாறியின் எதிர்பார்த்தல் மதிப்பானது

(a) $\sum f(x)$ (b) $\sum[x+f(x)]$

(c) $\sum f(x)+x$ (d) $\sum xp(x)$

8. நிகழ்தகவு பரவலில் பின்வரும் எந்த ஒன்று சாத்தியமில்லை

(a) $\sum p(x)\geq 0$ (b) $\sum p(x)=1$

(c) $\sum x\,p(x)=2$ (d) $p(x)=-0.5$

9. c ஒரு மாறிலி எனில், $E(c)$ இன் மதிப்பு

(a) 0 (b) 1 (c) $c\,f(c)$ (d) c

10. ஒரு தனித்த நிகழ்தகவுப் பரவல் இதன் மூலமும் குறிப்பிடப்படலாம்.

(a) அட்டவணை

(b) வரைபடம்

(c) கணிதவியல் சமன்பாடு

(d) இவை அனைத்தும்

11. ஒரு நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு இதன் மூலமும் குறிப்பிடப்படலாம்.

(a) அட்டவணை

(b) வரைபடம்

(c) கணிதவியல் சமன்பாடு

(d) (b) மற்றும் (c)

12. ஒரு தொடர்ச்சியான நிகழ்தகவு பரவலில் c என்பது ஒரு மாறிலி என்றால் $P(X=c)$ எப்போதும் எதற்கு சமமாக இருக்கும்

(a) பூஜ்ஜியம் (b) ஒன்று

(c) எதிர்மறை (d) காணஇயலாது.

13. $E[X-E(X)]$ என்பது

(a) $E(X)$ (b) $V(X)$

(c) 0 (d) $E(X)-X$

14. $E[X-E(X)]^2$ என்பது

(a) $E(X)$ (b) $E(X^2)$

(c) $V(X)$ (d) $S.D(X)$

15. சமவாய்ப்பு மாறியானது குறை மதிப்புகளை பெறும் எனில், அந்த குறை மதிப்புகள் பெறுவது

(a) நேர்மறை நிகழ்தகவுகள்

(b) எதிர்மறை நிகழ்தகவுகள்

(c) நிலையான நிகழ்தகவுகள்

(d) சொல்வது கடினம்

16. $f(x)=2x, 0\leq x\leq 1$ எனில், $f(x)$ ஒரு

(a) நிகழ்தகவு பரவல்

(b) நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு

(c) பரவல் சார்பு

(d) தொடர்ச்சியான சமவாய்ப்பு மாறி.

17. $f(x)$ ஆனது ஒரு அடர்த்திச் சார்பு எனில், $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ ஆனது எப்போதும் இதற்கு சமமாக இருக்கும்

(a) பூஜ்யம் (b) ஒன்று

(c) $E(X)$ (d) $f(x)+1$

18. ஒரு சோதனையின் அனைத்து வெளிப்பாடு களின் பட்டியல் மற்றும் ஒவ்வொரு வெளிப் பாட்டிற்கும் தொடர்புடைய நிகழ்தகவானது இவ்வாறு அழைக்கப்படுகிறது.

(a) நிகழ்தகவு பரவல்

(b) நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு

(c) பண்புக் கூறுகள்

(d) பரவல் சார்பு

19. எந்த ஒன்று சமவாய்ப்பு சோதனைக்கான உதாரணம் அல்ல?

(a) ஒரு நாணயம் சுண்டப்பட்டது மற்றும் வெளிப்பாடு ஒரு தலை அல்லது ஒரு பூ ஆகும்.

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 6.indd 148 3/5/2020 12:15:46 PM

(b) ஆறு பக்கமுள்ள பகடை உருட்டப்பட்டது.

(c) ஒரு மருத்துவமனையின் அவசர அறையில் அனுமதிக்கப்பட்ட சில நபர்களின் எண்ணிக்கை.

(d) குறிப்பிட்ட வருடத்திற்கு ஒரு நிறுவனத்தால் பெறப்பட்ட அனைத்து மருத்துவகாப்பீட்டு உரிமைக் கோரிக்கைகள்.

20. கூறுவெளிக்கு ஒதுக்கப்பட்டுள்ள எண்ணியல் மதிப்புகளின் தொகுப்பு

(a) சமவாய்ப்பு கூறு

(b) சமவாய்ப்பு மாறி

(c) சமவாய்ப்பு எண்கள்

(d) சமவாய்ப்பு சோதனை

21. முடிவுறு அல்லது கணக்கிடத்தக்க முடிவுறா எண் மதிப்புகளை பெறும் ஒரு மாறி

(a) தொடர்ச்சியானது

(b) தனித்தது

(c) பண்பார்ந்தது

(d)இதில் எதுவும் இல்லை

22. ஒரு சமவாய்ப்பு மாறியின் நிகழ்தகவு சார்பு பின்வருமாறு வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது

$X=x$	-1	-2	0	1	2
$P(x)$	k	$2k$	$3k$	$4k$	$5k$

எனில், k-இன் மதிப்பானது

(a) பூஜ்யம் (b) $\frac{1}{4}$

(c) $\frac{1}{15}$ (d) ஒன்று

23. $p(x)=\frac{1}{10}$, $x=10$ எனில், $E(X)$ மதிப்பானது.

(a) பூஜ்யம் (b) $\frac{6}{8}$

(c) 1 (d) -1

24. ஒரு தனித்த நிகழ்தகவுச் சார்பு $p(x)$ ஆனது எப்போதும்

(a) எதிர்மறை அல்லாதது

(b) எதிர்மறையானது

(c) ஒன்று

(d) பூஜ்யம்

25. ஒரு தனித்த பரவல் சார்பில் அனைத்து நிகழ்தகவுகளின் கூட்டுத்தொகையானது

(a) பூஜ்யம் (b) ஒன்று

(c) மீச்சிறுமம் (d) மீப்பெருமம்

26. ஒரு சமவாய்ப்பு மாறியின் எதிர்பார்க்கத்தக்க மதிப்பு என்பது

(a) மாறுபாடு

(b) திட்டவிலக்கம்

(c) சராசரி

(d) இணை மாறுபாடு

27. ஒரு தனித்த நிகழ்தகவுச் சார்பு $p(x)$ எப்போதும் குறையற்றது மற்றும் அது அமையும் இடைவெளி யானது

(a) 0 மற்றும் ∞

(b) 0 மற்றும்1

(c) -1 மற்றும்$+1$

(d) $-\infty$ மற்றும் $+\infty$

28. நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு $p(x)$ –ன் மீப்பெரு மதிப்பானது

(a) பூஜ்ஜியம்

(b) ஒன்று

(c) சராசரி

(d) முடிவற்றநிலை

29. ஒரு நாட்டில் உள்ள நபர்களின் உயரத்தை கொண்டு அமையும் சமவாய்ப்பு மாறியின் வகை யானது

(a) தனித்த சமவாய்ப்பு மாறி

(b) தொடர்ச்சியான சமவாய்ப்பு மாறி

(c) (a) மற்றும் (b)

(d) (a) யும் அல்ல (b) யும் அல்ல

30. பரவல் சார்பு $F(x)$ ஆனது

(a) $P(X=x)$

(b) $P(X\leq x)$

(c) $P(X\geq x)$

(d) இவையனைத்தும்

இதர கணக்குகள்

1. ஒரு சமவாய்ப்பு மாறி X - இன் நிகழ்தகவு சார்பு கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது

$$p(x)=\begin{cases}\frac{1}{4}, & x=-2\\ \frac{1}{4}, & x=0\\ \frac{1}{2}, & x=10\\ 0, & \text{மற்றெங்கிலும்}\end{cases}$$

எனில், பின்வரும் நிகழ்தகவுகளை மதிப்பிடவும்

(i) $P(X\le 0)$ (ii) $P(X<0)$

(iii) $P(|X|\le 2)$ (iv) $P(0\le X\le 10)$

2. ஒரு சமவாய்ப்பு மாறி X - ஆக இருக்கட்டும் அதன் திரள் பரவல் சார்பானது.

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \frac{x}{8}, & 0\le x<1\\ \frac{1}{4}+\frac{x}{8}, & 1\le x<2\\ \frac{3}{4}+\frac{x}{12}, & 2\le x<3\\ 1, & 3\le x.\end{cases}$$

எனில்,

(a) (i) $P(1\le X\le 2)$ மற்றும் (ii) $P(X=3)$ கணக்கிடவும்

(b) X ஒரு சமவாய்ப்பு மாறியா? உங்கள் பதிலை நியாயப்படுத்தவும்.

3. X இன் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு பின்வருமாறு வரையறுக்கப்பட்டுள்ளது எனில்,

$$f(x)=\begin{cases}k, & 0<x\le 4\\ 0, & \text{மற்றெங்கிலும்}\end{cases}$$

k இன் மதிப்பைக் கண்டுபிடிக்கவும், மேலும் $P(2\le X\le 4)$ -ஐ கண்டுபிடிக்கவும்.

4. ஒரு தனித்த சமவாய்ப்பு மாறி X இன் நிகழ்தகவு பரவல் சார்பு

$$f(x)=\begin{cases}2k, & x=1\\ 3k, & x=3\\ 4k, & x=5\\ 0, & \text{மற்றெங்கிலும்}\end{cases}$$

இங்கு k ஒரு மாறிலி எனில்,

(a) k –ன் மதிப்பு யாது ? ™மற்றும்

(b) $P(X>2)$ -ஐ காண்க.

5. ஒரு தொடர்ச்சியான சமவாய்ப்பு மாறி X - இன் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு

$$f(x)=\begin{cases}a+bx^2, & 0\le x\le 1\\ 0, & \text{மற்றெங்கிலும்}\end{cases}$$

இதில் a மற்றும் b ஆகியவை மாறிலிகள் எனில்,

(i) $E(X)=\frac{3}{5}$ எனக்கொண்டு a மற்றும் b– ஐ காண்க.

(ii) $Var(X)$ ஐ காண்க.

6. $E(X) = 0$ எனில், $V(X) = E(X^2)$ என நிரூபிக்கவும்.

7. பின்வருமாறு செயலாற்றும் ஒரு விளையாட்டுக்கான எதிர்பார்த்தல் மதிப்பு என்ன? நான் ஒரு நாணயத்தை சுண்டுகிறேன், பூ என்றால் ₹ 2 -ஐ நீங்கள் செலுத்தவேண்டும். தலை என்றால் ₹1-ஐ நீங்கள் செலுத்தவேண்டும். எந்த நிகழ்ச்சியாக இருந்தாலும் நான் உங்களுக்கு ₹ 0.50 -ஐ தருகிறேன்.

8. நிரூபிக்கவும்: (i) $V(aX)=a^2V(X)$ மற்றும் (ii) $V(X+b)=V(X)$

9. ஒரு சமவாய்ப்பு மாறி X- இன் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு பின்வருமாறு

$$f(x)=\begin{cases}3x^2, & 0<x<1\\ 0, & \text{மற்றெங்கிலும்}\end{cases}$$

எனில், $E(X)$ மற்றும் $V(3X-2)$ –ஐ காண்க.

10. தயாரிக்கப்பட்ட DVD இயக்கியில் பயன்படுத்தப்படும் மின்னணு உபகரணங்களின் முக்கிய பகுதியின் செயலிழப்பிற்கான நேரம் (ஆயிரத்தில்) அடர்த்திச் சார்பாக பெறப்பட்டது

$$f(x)=\begin{cases}2e^{-2x}, & x>0\\ 0, & \text{மற்றெங்கிலும்}\end{cases}$$

எனில், உபகரணப் பகுதியின் எதிர்பார்க்கத்தக்க செயல் வாழ்வை கண்டுபிடிக்கவும்.

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 6.indd 150 3/5/2020 12:15:55 PM

தொகுப்புரை

- **தனித்த சமவாய்ப்பு மாறி (Discrete random variable)** சாத்தியமான மதிப்புகளால் வரையறுக்கப்பட்ட எண்களை ஏற்றுக்கொள்ளக் கூடிய ஒரு மாறி அல்லது எண்ணத்தக்க மெய்யெண்களின் முடிவிலாத் தொடரை ஒரு தனித்த சமவாய்ப்பு மாறி என அழைக்கலாம்.
- நிகழ்தகவு நிறை சார்பு **(Probability mass function)** (p.m.f.)

$$P_X(x)=p(x)=\begin{cases} P(X=x_i)=p_i=p(x_i); & x=x_i,\ i=1,2,\ldots,n,\ldots \\ 0 & ; \quad x\neq x_i \end{cases}$$

நிபந்தனைகள்:

- $p(x_i)\geq 0\ \forall\, i$ மற்றும் • $\sum_{i=1}^{\infty} p(x_i)=1$

- **தனித்த பரவல் சார்பு** (Discrete distribution function) (d.f.):

அனைத்து $x\in R$ -க்கு, $F_X(x)=P\left(X\leq x\right)$. அதாவது $F_X(x)=\sum_{x\leq x_i} p(x_i)$

- ஓர் இடைவெளியில் உள்ள அனைத்து மெய் மதிப்புகளையும் (முழுக்களாகவோ, பின்னங்களாகவோ) ஏற்கும் ஒரு சமவாய்ப்பு மாறி X ஆனது தொடர்ச்சியான சமவாய்ப்பு மாறி என்று அழைக்கப்படுகிறது.
- **நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு** (Probability density function (p.d.f.))

தொகையிடக்கூடிய ஓர் இடைவெளி $[t_1,t_2]$ இல் (திறந்த அல்லது மூடிய) அமையும் ஒரு சமவாய்ப்பு மாறி X இன் நிகழ்தகவு $f_X(x)$ ஆனது நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு என்று அழைக்கப்படும்.

$$P\left(t_1\leq X\leq t_2\right)=\int_{t_1}^{t_2} f_X(x)dx\,.$$

நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு $f_X(x)$ அல்லது சுருக்கமாக $f(x)$ பின்வரும் நிபந்தனைகளை பூர்த்தி செய்ய வேண்டும்.

நிபந்தனைகள்:

- $f(x)\geq 0\ \forall\, x$
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=1$

நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பிற்கு பதிலாகப் பயன்படுத்தப்படும் பிற பெயர்களாவன அடர்த்திச் சார்பு, தொடர்ச்சியான நிகழ்தகவு சார்பு, தொகை அடர்த்திச் சார்பு ஆகியவை ஆகும்.

- **தொடர்ச்சியான பரவல் சார்பு** (Continuous distribution function)

தொடர்ச்சியான சமவாய்ப்பு மாறி X இன் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு $f_X(x)$, எனில் சார்பு $F_X(x)$ பின்வருமாறு வரையறுக்கப்படுகிறது.

$$F_X(x)=P[X\leq x]=\int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt, -\infty<x<\infty$$

இது தொடர்ச்சியான சமவாய்ப்பு மாறி X – இன் பரவல் சார்பு $F_X(x)$ அல்லது (சில நேரங்கள்) திரள் பரவல் சார்பு என்று அழைக்கப்படுகிறது.

- திரள் பரவல் சார்பின் பண்புகள் (Properties of cumulative distribution function)

சார்பு $F_X(x)$ அல்லது சுருக்கமமாக $F(x)$ பின்வரும் பண்புகளைப் பெற்றுள்ளது.

(i) $0\leq F(x)\leq 1, -\infty<x<\infty$

(ii) $F(-\infty)=\lim_{x\to-\infty} F(x)=0$ மற்றும் $F(+\infty)=\lim_{x\to\infty} F(x)=1.$

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 6.indd 151 3/5/2020 12:15:59 PM

(iii) $F(\cdot)$ என்பது ஓரியல்புத் தன்மைக் கொண்ட குறையா சார்பு

அதாவது $a<b$ க்கு $F(a)\leq F(b)$

(iv) $F(\cdot)$ என்பது வலது புறத்திலிருந்து தொடர்ச்சியானது அதாவது $\lim_{h\to 0} F(x+h)=F(x)$.

(v) $F'(x)=\frac{d}{dx}F(x)=f(x)\geq 0$

(vi) $F'(x)=\frac{d}{dx}F(x)=f(x)\Rightarrow dF(x)=f(x)dx$

(vii) $dF(x)$ என்பது X இன் நிகழ்தகவு வகையீடு என அறியப்படுகிறது.

(viii) $$P(a\leq x\leq b)=\int_a^b f(x)dx=\int_{-\infty}^{b} f(x)dx-\int_{-\infty}^{a} f(x)dx$$
$$=P(X\leq b)-P(X\leq a)$$
$$=F(b)-F(a)$$

- **எதிர்பார்க்கும் மதிப்பு** (Expected value)
  எதிர்பார்க்கும் மதிப்பு என்பது ஒரு சமவாய்ப்பு மாறியின் மதிப்பின் எடையிட்ட சராசரி என கருதப் படுகிறது. இங்கு நிகழ்தகவுகள் எடைகளாக இருக்கிறது.

- ஒரு தனித்த சமவாய்ப்பு மாறியின் நிகழ்தகவு நிறை சார்பு X–எனில் அதன் எதிர்பார்க்கும் மதிப்பை பின்வருமாறு வரையறுக்கலாம்.

  $$E(X)=\sum_x x\,p(x) \text{ ஆகும்.}$$

- ஒரு தொடர்ச்சியான சமவாய்ப்பு மாறி X மற்றும் $f(x)$ என்பது அதன் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு எனில் X -இன் எதிர்பார்க்கும் மதிப்பு

  $$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x\,f(x)\,dx \text{ ஆகும்.}$$

- X இன் சராசரி அல்லது எதிர்பார்த்தல் என்பது φ_X அல்லது E(X) ஆல் குறிக்கப்படுகிறது.

- மாறுபாட்டளவை (Variance)
  மாறுபாட்டு அளவை என்பது ஒரு சமவாய்ப்பு மாறியிலிருந்து அதன் சராசரியின் வர்க்க விலக்கங்களின் எடையிட்ட சராசரி ஆகும்.

- தனித்த சமவாய்ப்பு மாறி X-இன் நிகழ்தகவு நிறை சார்பு $p(x)$ எனில், $Var(X)=\sum\left[x-E(X)\right]^2 p(x)$

- தொடர்ச்சியான சமவாய்ப்பு மாறி X-இன் நிகழ்தகவு அடர்த்திச் சார்பு $f_X(x)$ எனில்,
  $$Var(X)=\int_{-\infty}^{\infty}\left[X-E(X)\right]^2 f_X(x)\,dx \text{ ஆகும்.}$$

- $[X\ -E(X)]^2$ இன் எதிர்பார்க்கும் மதிப்பானது சமவாய்ப்பு மாறியின் மாறுபாட்டளவை என்று அழைக்கப்படுகிறது. அதாவது, $Var(X)=E\left[X-E(X)\right]^2=E\left(X^2\right)-\left[E(X)\right]^2$

  $$\text{இங்கு } E\left(X^2\right)=\begin{cases}\sum_x x^2\,p(x)\ , & X \text{ ஒரு தனித்த சமவாய்ப்பு மாறி எனில்}\\ \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx\ , & X \text{ ஒரு தொடர்ச்சியான சமவாய்ப்பு மாறி எனில்}\end{cases}$$

- X ஒரு சமவாய்ப்பு மாறி எனில், X–இன் திட்டவிலக்கம் σ_X எனக் குறியிடப்பட்டு $+\sqrt{Var[X]}$ என்று வரையறுக்கப்படுகிறது.

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 6.indd 152 3/5/2020 12:16:04 PM

- X –இன் மாறுபாடு, $\sigma_X^{\ 2}$ அல்லது $Var(X)$ அல்லது $V(X)$ ஆல் குறிக்கப்படுகிறது.
- **கணக்கியல் எதிர்பார்த்தலின் பண்புகள்:**

  (i) $E(a)=a$, 'a' என்பது ஒரு மாறிலி.

  (ii) $E(aX)=aE(X)$

  (iii) $E(aX+b)=aE(X)+b$, 'a' மற்றும் 'b' ஆகியவை மாறிலிகள்.

  (iv) $X\geq 0$ எனில், $E(X)\geq 0$

  (v) $V(a)=0$

  (vi) X என்பது ஒரு சமவாய்ப்பு மாறி எனில், $\text{Var}(aX+b)=a^2\,\text{Var}(X)$.
- விலக்கப் பெருக்குத்தொகையின் கருத்தாக்கம்

$$\varphi_r' = E\left(X^r\right) = \begin{cases} \sum\limits_x x^r p(x) \ , & X \text{ ஒரு தனித்த சமவாய்ப்பு மாறி எனில்} \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^r f(x)dx, & X \text{ ஒரு தொடர்ச்சியான சமவாய்ப்பு மாறி எனில்} \end{cases}$$

- **விலக்கப் பெருக்குத்தொகை :**

  $\varphi_r = E[(X-\varphi_X)^r]$

  $\varphi_1' = E(X) = \varphi_X$, X–இன் சராசரி

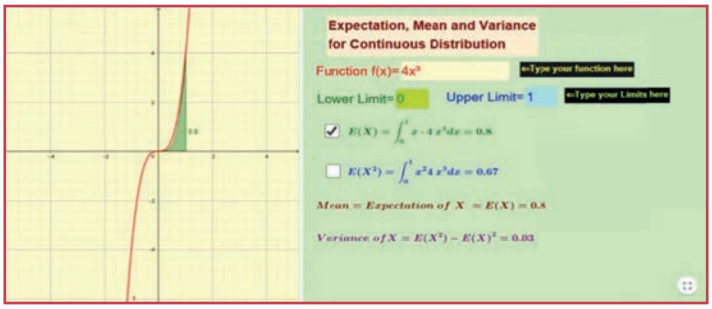
  $\varphi_1 = E[X-\varphi_X] = 0.$

  $\varphi_2 = E[(X-\varphi_X)^2]$, X–இன் மாறுபாட்டளவை

கலைச்சொற்கள் (Glossary)	
எதிர்பார்க்கத்தக்க மதிப்பு / எதிர்பார்த்தல் மதிப்பு	Expected value
எதிர்பார்த்தல்	Expectation
கணக்கியல் எதிர்பார்த்தல்	Mathematical expectation
குடுவை, கலசம்	Urn
சமவாய்ப்பு மாறி	Random variable
சராசரி	Mean
திட்ட விலக்கம், நியமச்சாய்வு	Standard deviation
திரள், குவிந்த	Cumulative
தொடர்ச்சியற்ற சமவாய்ப்பு மாறி	Discrete random variable
தொடர்ச்சியற்ற பரவல் சார்பு	Discrete distribution function
தொடர்ச்சியான சமவாய்ப்பு மாறி	Continuous random variable
தொடர்ச்சியான பரவல் சார்பு	Continuous distribution function
நடுநிலையற்ற	Biased
நடுநிலையான	Unbiased
நிகழ்தகவு நிறை சார்பு	Probability mass function
நிகழ்தகவுச் சார்பு	Probability function
நிகழ்வு, நிகழ்ச்சி	Event
நிறை சராசரி	Weighted average
பரவல் சார்பு	Distribution function
மாறுபாட்டு அளவை / பரவற்படி	Variance
முற்றிலும் குவிதல் இயல்புடைய	Absolutely Convergent
மையநிலை விலக்கப் பெருக்கம்	Central moments
விலக்கப் பெருக்கங்கள்	Moments

இணையச் செயல்பாடு

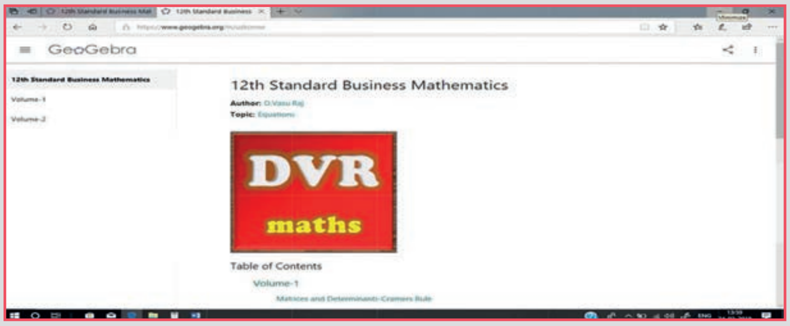
எதிர்பார்க்கப்படும் விளைவு



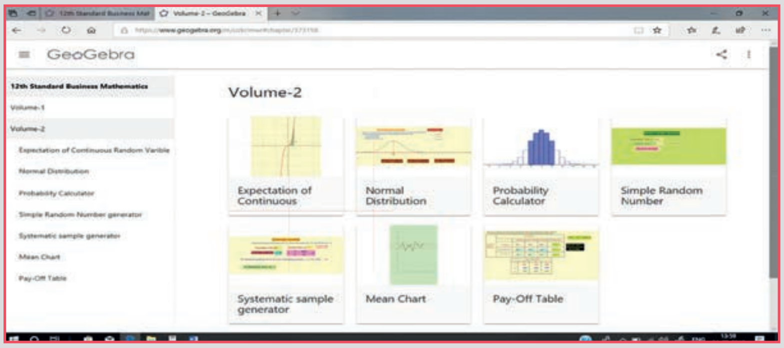
படி – 1 : கீழ்க்காணும் உரலி / விரைவுக் குறியீட்டைப் பயன்படுத்தி இச்செயல்பட்டிற்கான இணையப் பக்கத்திற்குச் செல்க. பின்பு "12th Standard Business Mathematics and Statistics" என்னும் திரையில் "Volume–2" யை தெரிவு செய்யவும்.

படி - 2 : "Expectation of continuous Random Variable" என்னும் பயிற்சித்தாளினை தெரிவு செய்துகொள்ளவும். பின்பு வலது பக்கத்தில் கொடுக்கப்பட்டுள்ள பெட்டியில் Function f(X), Limits ஆகியவற்றின் மதிப்புகளை தட்டச்சு செய்தால் Mean , Variance மதிப்பினை பெறலாம்.

படி 1



படி 2



செயல்பாட்டிற்கான உரலி : **https://ggbm.at/uzkcrnwr**

அல்லது விரைவுக் குறியீடு **(QR Code)**

B247_12_BUS_MAT_TM

XII Std - Business Maths & Stat TM Chapter 6.indd 154 3/5/2020 12:16:08 PM