31. दो चरों में रैखिक समीकरण
(LINEAR EQUATIONS IN TWO VARIABLES)

दो चरों में रैखिक समीकरण

I. $ax + by + c = 0$ जहाँ a, b, c वास्तविक संख्यायें हैं तथा $a \neq 0$.
यह एक रैखिक समीकरण चरों x तथा y में है.
जो x तथा y के मान इस समीकरण को सन्तुष्ट करते हैं, उनसे बने क्रमित युग्म को इस समीकरण का हल कहते हैं.

II. युगपत समीकरण $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ तथा $a_2x + b_2y + c_2 = 0$

(*i*) का एक अद्वितीय हल होगा, यदि $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$; (*ii*) के हल अनन्त होंगे, यदि $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$;

(*iii*) का कोई हल संभव नहीं होगा, यदि $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$.

III. $a_1x + b_1y = 0,\ a_2x + b_2y = 0$

(*i*) का हल $x = 0, y = 0$ तभी होगा जबकि $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$. (*ii*) के हल अनन्त होंगे यदि $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$ हो.

साधित उदाहरण

उदाहरण 1. हल कीजिए: $3x + 2y = 4,\ 8x + 5y = 9$.

हल : दिये गये समीकरण हैं:

$3x + 2y = 4$ ...(*i*) $\qquad 8x + 5y = 9$ ...(*ii*)

(*ii*) को 2 से तथा (*i*) को 5 से गुणा करके घटाने पर: $x = -2$.

(*i*) में $x = -2$ रखने पर: $3 \times (-2) + 2y = 4$

$\therefore \quad 2y = (4 + 6) = 10 \Rightarrow y = 5$.

अत: $x = -2, y = 5$.

उदाहरण 2. यदि $\frac{5}{x} + 6y = 13$ तथा $\frac{3}{x} + 4y = 7$ हो, तो y का मान ज्ञात कीजिए.

हल : दिये गये समीकरण हैं:

$\frac{5}{x} + 6y = 13$ ...(*i*) $\qquad \frac{3}{x} + 4y = 7$ ...(*ii*)

(*i*) को 3 से तथा (*ii*) को 5 से गुणा करके घटाने पर:

$-2y = 4 \Rightarrow y = -2$.

उदाहरण 3. $\frac{x+y-8}{2} = \frac{x+2y-14}{3} = \frac{3x+y-12}{11}$ को हल कीजिए.

हल : प्रथम दो भाग लेने पर:

$$\frac{x+y-8}{2} = \frac{x+2y-14}{3} \Rightarrow 3(x + y - 8) = 2(x + 2y - 14)$$

$$\Rightarrow 3x + 3y - 24 = 2x + 4y - 28 \Rightarrow x - y = -4. \qquad ...(i)$$

अन्तिम दो भाग लेने पर:

$$\frac{x+2y-14}{3} = \frac{3x+y-12}{11} \Rightarrow 11(x+2y-14) = 3(3x+y-12)$$

$$\Rightarrow 11x + 22y - 154 = 9x + 3y - 36 \Rightarrow 2x + 19y = 118 \quad ...(ii)$$

(*i*) को 19 से गुणा करके (*ii*) में जोड़ने पर: $21x = 42 \Rightarrow x = 2$.

अब (*i*) में $x = 2$ रखने पर: $y = (x + 4) = (2 + 4) = 6$.

$\therefore \quad x = 2, \ y = 6.$

उदाहरण 4. हल करें: $217x + 131y = 913$ ...(*i*) $131x + 217y = 827$ ...(*ii*)

हल : (*i*) तथा (*ii*) को जोड़ने पर: $348x + 348y = 1740 \Rightarrow 348(x + y) = 1740 \Rightarrow x + y = 5$ ...(*iii*)

(*i*) में से (*ii*) घटाने पर: $86x - 86y = 86 \Rightarrow 86(x - y) = 86 \Rightarrow x - y = 1$ ...(*iv*)

(*iii*) तथा (*iv*) को जोड़ने पर $2x = 6 \Rightarrow x = 3$.

(*iii*) में $x = 3$ रखने पर $y = (5 - x) = (5 - 3) = 2$.

$\therefore \quad x = 3, \ y = 2.$

उदाहरण 5. k के किस मान के लिए समीकरणों $kx - y - 2 = 0$ तथा $6x - 2y - 3 = 0$ का अद्वितीय हल प्राप्त होगा ?

हल : अद्वितीय हल के लिए $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$

$$\therefore \quad \frac{k}{6} \neq \frac{-1}{-2} \Rightarrow \frac{k}{6} \neq \frac{1}{2} \Rightarrow k \neq \left(\frac{1}{2} \times 6\right) \Rightarrow k \neq 3.$$

उदाहरण 6. k के किस मान के लिए $x + 2y + 7 = 0$ तथा $2x + ky + 14 = 0$ के अनन्त हल होंगे ?

हल : अनन्त हलों के लिए $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$

$$\therefore \quad \frac{1}{2} = \frac{2}{k} = \frac{7}{14} \Rightarrow k = 4.$$

उदाहरण 7. k के किस मान के लिए $kx - 10y - 3 = 0$ तथा $3x - 5y - 7 = 0$ का कोई हल नहीं होगा ?

हल : दिये गये समीकरणों का कोई हल नहीं होगा यदि $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$.

अर्थात् $\frac{k}{3} = \frac{-10}{-5} \neq \frac{-3}{-7} \Rightarrow k = 6.$

प्रश्नमाला 31

नीचे दिये गये प्रश्नों में से प्रत्येक में ठीक उत्तर को चिन्हांकित (√) कीजिए:

1. $2x + y = 8$ तथा $3y = 4 + 4x$ को हल करने पर

(*a*) $x = 3, \ y = -4$ (*b*) $x = 2, \ y = 4$ (*c*) $x = 1, \ y = 4$ (*d*) $x = 4, \ y = 1$

2. $\frac{x}{2} + \frac{y}{9} = 11$ तथा $\frac{x}{3} + \frac{y}{6} = 9$ को हल करने पर:

(*a*) $x = 36, y = 9$ (*b*) $x = 9, y = 9$ (*c*) $x = 18, y = 18$ (*d*) $x = 18, y = 9$

3. यदि $2x + 3y = 29$ तथा $y = x + 3$ हो, तो $x = ?$

(*a*) 4 (*b*) 5 (*c*) 6 (*d*) 7

4. $\frac{4}{x} + 5y = 7$ तथा $\frac{3}{x} + 4y = 5$ को हल करने पर:

(*a*) $x = \frac{1}{3}, y = 1$ (*b*) $x = \frac{-1}{3}, y = -1$ (*c*) $x = \frac{1}{3}, y = -1$ (*d*) $x = \frac{-1}{3}, y = 1$

5. यदि $2x + y - 6 = 0$ का हल $(5, k)$ हो, तो $k = ?$

(*a*) -4 (*b*) -3 (*c*) 4 (*d*) 6

6. यदि $3x + 7y = 75$ तथा $5x - 5y = 25$ हो, तो $x + y = ?$ **(बैंक पी०ओ० परीक्षा, 2005)**

(*a*) 14 (*b*) 15 (*c*) 16 (*d*) 17 (*e*) इनमें से कोई नहीं

7. यदि $x + \frac{1}{y} = 5$ तथा $2x + \frac{3}{y} = 13$ हो, तो $(2x - 3y) = ?$

(*a*) 1 (*b*) 2 (*c*) 3 (*d*) 5

8. यदि $4x + 6y = 32$ तथा $4x - 2y = 4$ हो, तो $8y = ?$

(*a*) 24 (*b*) 30 (*c*) 36 (*d*) 42 (*e*) इनमें से कोई नहीं

9. यदि $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = \frac{5}{12}$ तथा $\frac{x}{2} + y = 1$ हो, तो $(x + y) = ?$

(*a*) $\frac{1}{2}$ (*b*) 1 (*c*) $\frac{3}{2}$ (*d*) 2

10. $\frac{p}{x} + \frac{q}{y} = m$ तथा $\frac{q}{x} + \frac{p}{y} = n$ हो हल करने पर:

(*a*) $x = \frac{(q^2 - p^2)}{(mp - nq)},\ y = \frac{(q^2 - p^2)}{(np - mq)}$ (*b*) $x = \frac{(p^2 - q^2)}{(mp - nq)},\ y = \frac{(p^2 - q^2)}{(np - mq)}$

(*c*) $x = \frac{(p^2 - q^2)}{(mp - nq)},\ y = \frac{(q^2 - p^2)}{(np - mq)}$ (*d*) $x = \frac{(q^2 - p^2)}{(mp - nq)},\ y = \frac{(p^2 - q^2)}{(np - mq)}$

11. यदि $2^a + 3^b = 17$ तथा $2^{a+2} - 3^{b+1} = 5$ हो, तो **(एम०बी०ए० परीक्षा, 2006)**

(*a*) $a = 2,\ b = 3$ (*b*) $a = -2,\ b = 3$ (*c*) $a = 2,\ b = -3$ (*d*) $a = 3,\ b = 2$

12. $\frac{3x - y + 1}{3} = \frac{2x + y + 2}{5} = \frac{3x + 2y + 1}{6}$ हो, तो

(*a*) $x = 1,\ y = 2$ (*b*) $x = -1,\ y = -1$ (*c*) $x = 1, y = 1$ (*d*) $x = 2, y = 1$

13. युगपत समीकरण $4x + 7y = 10$ तथा $10x + ky = 25$ के अनन्त हल होने के लिए आवश्यक शर्त है कि:

(*a*) $k = \frac{17}{2}$ (*b*) $k = 5$ (*c*) $k = \frac{27}{2}$ (*d*) $k = \frac{35}{2}$

14. युगपत समीकरण $2x + ky = 11$ तथा $5x - 7y = 5$ का कोई हल अस्तित्व में न हो इसके लिए आवश्यक है कि

(*a*) $k = \frac{13}{5}$ (*b*) $k = \frac{-13}{5}$ (*c*) $k = \frac{-14}{5}$ (*d*) $k = \frac{-16}{5}$

15. युगपत समीकरण $kx - y = 2$ तथा $6x - 2y = 3$ का एक अद्वितीय हल होने के लिए आवश्यक शर्त है कि:

(*a*) $k = 0$ (*b*) $k \neq 0$ (*c*) $k = 3$ (*d*) $k \neq 3$

(एम०बी०ए० परीक्षा, 2006)

16. युगपत समीकरण $x + 2y = 3$ तथा $2x + 4y = 3$ के हल हैं:

(*a*) कोई नहीं (*b*) ठीक दो (*c*) अनन्त (*d*) अद्वितीय

17. $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 4$ तथा $x + y = 10$ के हल हैं:

(*a*) $x = 6, y = -4$ (*b*) $x = -6,\ y = 4$ (*c*) $x = 4,\ y = 6$ (*d*) $x = 6,\ y = 4$

18. यदि $3x - 5y = 5$ तथा $\frac{x}{x + y} = \frac{5}{7}$ हो, तो $(x - y) = ?$

(*a*) 3 (*b*) 4 (*c*) 6 (*d*) 9 (*e*) इनमें से कोई नहीं

19. यदि 3 कुर्सियाँ तथा 1 मेज का कुल मूल्य 900 रु० हो जबकि 5 कुर्सियाँ तथा 3 मेजों का मूल्य 2100 रु० हो, तो 4 कुर्सियाँ तथा 1 मेज का कुल मूल्य होगा:

(*a*) 1000 रु० (*b*) 1050 रु० (*c*) 1100 रु० (*d*) 1150 रु०

20. 2 साड़ियाँ तथा 4 कमीजों का कुल मूल्य 16000 रु० है जबकि 1 साड़ी तथा 6 कमीजों का कुल मूल्य भी इतना ही है. 12 कमीजों का कुल मूल्य कितना होगा? **(रेलवे परीक्षा, 2006)**

(*a*) 12000 रु० (*b*) 24000 रु० (*c*) 48000 रु० (*d*) ज्ञात नहीं किया जा सकता

उत्तरमाला

1. (*b*)	**2.** (*c*)	**3.** (*a*)	**4.** (*c*)	**5.** (*a*)	**6.** (*d*)	**7.** (*c*)	**8.** (*e*)	**9.** (*c*)	**10.** (*b*)
11. (*d*)	**12.** (*c*)	**13.** (*d*)	**14.** (*c*)	**15.** (*d*)	**16.** (*a*)	**17.** (*c*)	**18.** (*a*)	**19.** (*b*)	**20.** (*b*)

दिये गये प्रश्नों के हल

1. $2x + y = 8$ ...(*i*) तथा $y = \frac{1}{3}(4 + 4x)$ ...(*ii*)

(*ii*) से y का मान (*i*) में रखने पर: $2x + \frac{1}{3}(4 + 4x) = 8 \Rightarrow 6x + (4 + 4x) = 24 \Rightarrow 10x = 20 \Rightarrow x = 2.$

(*i*) में $x = 2$ रखने पर, $4 + y = 8 \Rightarrow y = 4.$

$\therefore \quad x = 2, y = 4.$

2. दिये गये समीकरण हैं:

$9x + 2y = 198$ ...(*i*) तथा $2x + y = 54$ ...(*ii*)

(*ii*) को 2 से गुणा करके (*i*) में से घटाने पर: $5x = (198 - 108) = 90 \Rightarrow x = 18.$

(*ii*) में $x = 18$ रखने पर, $36 + y = 54 \Rightarrow y = 18.$

$\therefore \quad x = 18, \; y = 18.$

3. $2x + 3y = 29$ ...(*i*), $y = x + 3$ ...(*ii*)

(*ii*) से y का मान (*i*) में रखने पर: $2x + 3(x + 3) = 29 \Rightarrow 5x = 20 \Rightarrow x = 4.$

4. दिये गये समीकरण हैं: $\frac{4}{x} + 5y = 7$ ...(*i*), $\frac{3}{x} + 4y = 5$ ...(*ii*)

(*i*) को 4 से गुणा करके तथा (*ii*) को 5 से गुणा करके घटाने पर $\frac{1}{x} = 3 \Rightarrow x = \frac{1}{3}.$

(*i*) में $x = \frac{1}{3}$ रखने पर $12 + 5y = 7 \Rightarrow 5y = -5 \Rightarrow y = -1.$

$\therefore \quad x = \frac{1}{3}, \; y = -1.$

5. $2x + y - 6 = 0$ में $x = 5, \; y = k$ रखने पर $10 + k = 6 \Rightarrow k = -4.$

6. दिये गये समीकरण हैं: $3x + 7y = 75$ ...(*i*), $x - y = 5$ ...(*ii*)

(*ii*) 7 से गुणा करके (*i*) में जोड़ने पर: $10x = 110 \Rightarrow x = 11.$

(*ii*) में $x = 11$ रखने पर, $11 - y = 5 \Rightarrow y = 6.$

$\therefore \quad x + y = (11 + 6) = 17.$

7. $x + \frac{1}{y} = 5$ ...(*i*), $2x + \frac{3}{y} = 13$ ...(*ii*)

(*i*) को 3 से गुणा करके (*ii*) घटाने पर: $x = 2.$

(*i*) में $x = 2$ रखने पर, $\frac{1}{y} = 3 \Rightarrow y = \frac{1}{3}.$ $\quad \therefore \; (2x - 3y) = \left(2 \times 2 - 3 \times \frac{1}{3}\right) = (4 - 1) = 3.$

8. $2x + 3y = 16$ ...(*i*), $2x - y = 2$ ...(*ii*)

(*i*) में से (*ii*) घटाने पर $4y = 14 \Rightarrow 8y = 28.$

9. $3x + 4y = 5$ ...(*i*), $x + 2y = 2$ ...(*ii*)

(*ii*) को 3 से गुणा करके (*i*) घटाने पर, $2y = 1 \Rightarrow y = \frac{1}{2}.$

(i) में $y = \frac{1}{2}$ रखने पर, $3x + 2 = 5 \Rightarrow 3x = 3 \Rightarrow x = 1$. $\therefore\ (x + y) = \left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}$.

10. $\frac{p}{x} + \frac{q}{y} = m$ ...(i), $\frac{q}{x} + \frac{p}{y} = n$ ...(ii)

(i) को p से तथा (ii) को q से गुणा करके घटाने पर

$$\frac{p^2}{x} - \frac{q^2}{x} = mp - nq \Rightarrow \frac{(p^2 - q^2)}{x} = (mp - nq) \Rightarrow x = \frac{(p^2 - q^2)}{(mp - nq)}.$$

(i) को q से तथा (ii) को p से गुणा करके घटाने पर:

$$\frac{q^2}{y} - \frac{p^2}{y} = (mq - np) \Rightarrow \frac{(q^2 - p^2)}{y} = (mq - np) \Rightarrow y = \frac{(p^2 - q^2)}{(np - mq)}.$$

11. $2^a + 3^b = 17$ ...(i) तथा $2^2 \times 2^a - 3 \times 3^b = 5 \Rightarrow 4 \times 2^a - 3 \times 3^b = 5$ ...(ii)

$2^a = x$ तथा $3^b = y$ रखने पर:

$x + y = 17$ ...(iii) तथा $4x - 3y = 5$ ...(iv)

(iii) को 3 से गुणा करके (iv) में जोड़ने पर $7x = 56 \Rightarrow x = 8$. (iii) में $x = 8$ रखने पर, $y = 9$.

$\therefore$ $(2^a = 8 = 2^3 \Rightarrow a = 3)$ तथा $(3^b = 9 = 3^2 \Rightarrow b = 2)$

$\therefore$ $a = 3,\ b = 2$.

12. $\frac{3x - y + 1}{3} = \frac{2x + y + 2}{5} \Rightarrow 5(3x - y + 1) = 3(2x + y + 2) \Rightarrow 9x - 8y = 1$ ...(i)

$\frac{2x + y + 2}{5} = \frac{3x + 2y + 1}{6} \Rightarrow 6(2x + y + 2) = 5(3x + 2y + 1) \Rightarrow 3x + 4y = 7$ ...(ii)

(ii) को 2 से गुणा करके (i) में जोड़ने पर, $15x = 15 \Rightarrow x = 1$. (i) में $x = 1$ रखने पर $8y = 8 \Rightarrow y = 1$.

$\therefore$ $x = 1,\ y = 1$.

13. अनन्त हल होने के लिए $\frac{4}{10} = \frac{7}{k} = \frac{10}{25} \Rightarrow k = \frac{35}{2}$.

14. यहाँ $\frac{a_1}{a_2} = \frac{2}{5}, \frac{b_1}{b_2} = \frac{k}{-7}, \frac{c_1}{c_2} = \frac{11}{5}$. कोई हल नहीं होगा यदि $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$.

$\therefore$ $\frac{2}{5} = \frac{k}{-7} \neq \frac{11}{5} \Rightarrow k = \frac{-14}{5}$.

15. अद्वितीय हल के लिये $\frac{k}{6} \neq \frac{-1}{-2}$ $\left[\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}\right]$. $\therefore$ $k \neq 3$.

16. यहाँ $\frac{a_1}{a_2} = \frac{1}{2}, \frac{b_1}{b_2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ तथा $\frac{c_1}{c_2} = \frac{3}{3} = 1$.

$\therefore$ $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$. अतः दिये गये युगपत समीकरण का कोई हल नहीं है.

17. $3x + 2y = 24$ ...(i) तथा $x + y = 10$ ...(ii)

(ii) को 2 से गुणा करके (i) में से घटाने पर, $x = 4$. (ii) से $4 + y = 10 \Rightarrow y = 6$.

$\therefore$ $x = 4,\ y = 6$.

18. $3x - 5y = 5$ ...(i), $7x = 5x + 5y \Rightarrow 2x - 5y = 0$ ...(ii)

(i) तथा (ii) को जोड़ने पर, $x = 5$. (ii) में $x = 5$ रखने पर $5y = 10 \Rightarrow y = 2$. $\therefore (x - y) = (5 - 2) = 3$.

19. माना 1 कुर्सी का मूल्य $= x$ रु० तथा 1 मेज का मूल्य $= y$ रु०. तब $3x + y = 900$ ...(i), $5x + 3y = 2100$ ...(ii)

(i) को 3 से गुणा करके (ii) घटाने पर, $4x = 600 \Rightarrow x = 150$.

(i) में $x = 150$ रखने पर, $y = 450$. 4 कुर्सियाँ तथा 1 मेज का मूल्य $= (4 \times 150 + 450)$ रु० $= 1050$ रु०.

20. माना 1 साड़ी का मूल्य $= x$ रु० तथा 1 कमीज का मूल्य $= y$ रु०. तब

$2x + 4y = 16000 \Rightarrow x + 2y = 8000$ ...(i) तथा $x + 6y = 16000$ ...(ii)

(ii) में से (i) घटाने पर, $4y = 8000 \Rightarrow y = 2000$.

12 कमीजों का मूल्य $= (12 \times 2000)$ रु० $= 24000$ रु०.