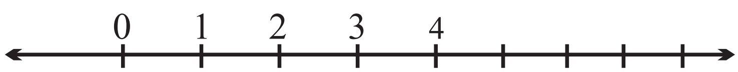
ACXIZE

अध्याय—17

संख्याओं का खेल
PLAYING WITH NUMBERS

हमने संख्याओं के बारे में काफी कुछ सीखा है। हमने बड़ी से बड़ी संख्याओं को लिखना सीखा है, हमने यह भी सीखा कि गिनने के लिए जिन संख्याओं का उपयोग किया जाता है उन्हें प्राकृत संख्या कहते हैं। प्राकृत संख्या के समूह में अगर हम शून्य जोड़ दें तो पूर्ण संख्याओं का समूह प्राप्त होता हैं। पूर्ण संख्याओं में प्राकृत संख्याओं के सभी गुण मौजूद होते हैं। शून्य सबसे छोटी पूर्ण संख्या हैं। पूर्ण संख्याओं को 0, 1, 2, 3..... से लिखते हैं तथा पूर्ण संख्याओं (Whole Number) के समूह को W संकेत द्वारा बताते हैं। पूर्ण संख्याओं को समूह में इस प्रकार प्रदर्शित करते हैं – W = {0, 1, 2, 3 ....} पूर्ण संख्याओं का संख्या रेखा पर प्रदर्शन इस प्रकार किया जा सकता है।



चित्र 17.1

आईए पूर्ण संख्याओं पर आधारित कुछ प्रश्नों को हल करें –

प्र.1. क्या आप सबसे बड़ी पूर्ण संख्या को बता सकते हैं? ....

प्र.2 सबसे छोटी पूर्ण वर्ग विषम संख्या कौनसी है?....................................

प्र.3 2, 5, 7 व 9 अंकों से चार अंकों की कितनी संख्याएँ बनाई जा सकती हैं?

————————————————————————————

प्र.4 2, 4, 6, 8 अंकों का उपयोग करके सबसे बड़ी व सबसे छोटी संख्याएँ बनाइए।

प्र.5 पाँच अंकों की सबसे छोटी व चार अंकों की सबसे बड़ी संख्या का अन्तर बताईये।

प्र.6 3,7,9 को अंकों के रूप में उपयोग करके सबसे बड़ी तीन अंकों की संख्या कौनसी बन सकती है और सबसे छोटी कौनसी।

(i) लता कहती है कि ऊपर प्राप्त, सबसे छोटी और सबसे बड़ी संख्या को जोड़ दें तो योगफल 11 से भाज्य होगा। क्या आप इससे सहमत हैं? जाँच करके देखिए।

(ii) फातिमा ने कहा यह तो सिर्फ दो अंकों की संख्या के लिए ही सही है? फातिमा की बात की भी जाँच कीजिए।

(iii) रमेश ने कहा जोड़ का तो पता नहीं किन्तु कोई भी 3 अंकों की संख्या तथा उसको उलट कर लिखने से प्राप्त संख्या में यदि बड़ी संख्या से छोटी संख्या घटा दें तो शेषफल 9 से भाज्य होगा और 11 से भी होगा। क्या यह बात सही है?

(iv) ज्योति ने कहा तीन अंकों वाली संख्या ही नहीं, तुम कुछ अंक सोचो तथा उनसे बनने वाली

सबसे बड़ी संख्या से सबसे छोटी संख्या को घटाओ। यह हमेशा 9 से भाज्य होगी।

आइए एक खेल खेलें –

आप एक संख्या सोच लीजिए और उसके अंकों के योगफल को संख्या में से घटा दीजिए। क्या यह 9 से विभाजित होगा? ऐसा क्यों होता है? कारण पता लगाइए।

माना कि आपने 7324 सोचा है, तब

कथनानुसार $7324 - (7 + 3 + 2 + 4)$

$= 7324 - 16$

$= 7308$

जो कि 9 से विभाज्य है(क्योंकि इस संख्या के अंकों का योगफल 9 से विभाजित होता है)। इसी प्रकार से आप भी अपने दोस्तों के साथ गणितीय खेल, खेल सकते हैं।

पूर्ण संख्याओं का योग (Sum of whole number)

1. आइए, दो पूर्ण संख्याओं को जोड़कर देखें –

$18 + 12 = 30$ (पूर्ण संख्या)

$22 + 19 = 41$ (पूर्ण संख्या)

$24 + 68 = 92$ (पूर्ण संख्या)

यहाँ 30, 41, 92 भी पूर्ण संख्याएँ हैं।

हम देखते हैं कि दो पूर्ण संख्याओं का योगफल भी पूर्ण संख्या है। क्या ऐसा हमेशा होगा? आप भी कुछ और पूर्ण संख्याओं का जोड़ करके देखिए।

सोचिए, क्या कभी ऐसा होगा कि जोड़ पूर्ण संख्या न हो?

आप देखेंगे कि दो पूर्ण संख्याओं का योगफल सदैव एक पूर्ण संख्या होती है।

यदि a व b दो पूर्ण संख्याएँ हैं तो उनका योग c भी एक पूर्ण संख्या ही प्राप्त होती है। अर्थात् $a + b = c$, इस नियम को संवरक नियम कहते है।

2. आइए, फिर से दो पूर्ण संख्याओं को जोड़ते हैं

$25 + 43 = 68$ (पूर्ण संख्या)

अब इन संख्याओं का क्रम बदल कर जोड़िये –

$43 + 25 = 68$ (पूर्ण संख्या)

क्या दोनों योगफल समान हैं?

एक बार फिर दो संख्याओं को जोड़ें

$10487 + 368 = 10855$ (पूर्ण संख्या)

अब इनका क्रम बदलकर फिर जोड़ें

$368 + 10487 = 10855$ (पूर्ण संख्या)

क्या इनके योगफल में अन्तर है?

इस प्रकार $25 + 43 = 43 + 25 = 68$

एवं $10487 + 368 = 368 + 10487 = 10855$

अतः दो पूर्ण संख्याओं का योग एवं उनका क्रम बदलकर जोड़ने पर योगफल समान होता है।

यदि a व b दो पूर्ण संख्याएँ हो तो उनका योग $(a + b)$ व उनका क्रम बदलकर योग $(b + a)$ करने पर योगफल समान होता है।

अर्थात् $\mathbf{a + b = b + a}$ इसे हम योग का **क्रम विनिमेय नियम** कहते हैं।

3. आइये 0 में किसी पूर्ण संख्या को जोड़ें–

क्या संख्या के मान में परिवर्तन आता है? किसी पूर्ण संख्या a में 0 जोड़ने या 0 में कोई पूर्ण संख्या a जोड़ने पर दोनों स्थितियों में मान समान रहता है।

अर्थात् $\mathbf{a + 0 = 0 + a = a}$ शून्य के इस विशेष गुण के कारण ही **शून्य को योग का तत्समक** कहते हैं।

4. अब हम तीन पूर्ण संख्याओं का योग करके देखते हैं। जैसे 17+ 29 +44 इस योगफल को दो तरीके से ज्ञात कर सकते हैं। हम पहली दो संख्याओं 17 व 29 का योग करके उनमें तीसरी संख्या 44 को जोड़ते हैं।

$(17 + 29) + 44 = 46 + 44 = 90$

अब हम अन्तिम दो पूर्ण संख्याएँ 29 व 44 का योग करके उसमें पहली संख्या को जोड़ते हैं।

$17 + (29 + 44) = 17 + 73 = 90$

दोनों स्थितियों में क्या योग समान है?

अतः $(17 + 29) + 44 = 17 + (29 + 44)$

अतः यदि a, b, c तीन पूर्ण संख्यायें हैं, तो

$\mathbf{a + b + c = (a + b) + c = a + (b + c)}$ यह **योग का साहचार्य नियम** कहलाता है।

यही क्रिया चार या चार से अधिक संख्याएँ लेकर कीजिए और बताइये कि क्या उनका योग भी समान आयेगा?

पूर्ण संख्याओं के घटाने के नियम (Rules for subtracting of whole numbers)

1. दो संख्याओं के घटाने के नियम

$15 - 8 = 7$ (पूर्ण संख्या)

$25 - 14 = 11$ (पूर्ण संख्या)

$18 - 18 = 0$ (पूर्ण संख्या)

$16 - 23 =$ क्या यह पूर्ण संख्या होगी?

क्या दो पूर्ण संख्याओं को घटाने से सदैव पूर्ण संख्या प्राप्त हुई? यदि नहीं तो क्यों?

हाँ, यदि बड़ी पूर्ण संख्या में से छोटी पूर्ण संख्या को घटाते है या दो समान संख्याओं को आपस में घटाते है तो हमें पूर्ण संख्या प्राप्त होती है लेकिन छोटी पूर्ण संख्या में से बड़ी पूर्ण संख्या घटाते समय पूर्ण संख्या प्राप्त नहीं होती है।

यदि a और b दो पूर्ण संख्याएँ हैं और $a > b$ अथवा $a = b$ हो तो $a - b = c$ एक **पूर्ण संख्या** होगी। और यदि $a < b$ हो, तो $a - b$ एक पूर्ण संख्या नहीं होगी।

2. अब तीन पूर्ण संख्याओं 25, 8, 6 घटाने की क्रिया करके देखते हैं। इसे दो प्रकार से घटाया जा सकता है। आओ घटाकर देखें।

$(25 - 8) - 6$	$25 - (8 - 6)$
$= 17 - 6$	$= 25 - 2$
$= 11$	$= 23$

क्या दोनों स्थितियों में मान समान है?

ऐसी कुछ और संख्या लेकर हल कीजिए। इससे क्या निष्कर्ष निकलता है? यही कि **घटाते समय संख्याओं का क्रम कोष्ठक द्वारा नहीं बदला जा सकता है।**

3. आइए, एक पूर्ण संख्या में से शून्य को घटाकर देखते हैं।

$5 - 0 = 5$, $18 - 0 = 18$

आप और पूर्ण संख्याओं में से शून्य को घटाकर देखिए। क्या वही संख्या प्राप्त होती है?

अतः **यदि a कोई पूर्ण संख्या है तो $a - 0 = a$**

अतः **किसी पूर्ण संख्या में से शून्य को घटाने पर वही पूर्ण संख्या प्राप्त होती हैं।**

4. अब $15 - 15 = 0$, $23 - 23 = 0$

यही क्रिया अन्य पूर्ण संख्या लेकर कीजिए। क्या कभी 0 के अतिरिक्त कोई संख्या प्राप्त हुई? **किसी पूर्ण संख्या में से उसी पूर्ण संख्या को घटाने पर हमें शून्य प्राप्त होता है।**

अर्थात् **यदि a कोई पूर्ण संख्या है तो $a - a = 0$**

पूर्ण संख्याओं का गुणा (Multiplication of whole numbers)

1. आइए, दो पूर्ण संख्याओं को गुणा करके देखते हैं।

$18 \times 8 = 144$, $29 \times 12 = 348$

$41 \times 7 = 287$, $86 \times 4 = 344$

हम देखते है कि यहाँ 144, 348, 287, 344 सभी पूर्ण संख्याएँ हैं। दो पूर्ण संख्याओं का गुणनफल भी पूर्ण संख्या होती है। क्या सदैव ऐसा होता है?

आप भी दो पूर्ण संख्याओं का गुणा करके देखिए।

क्या कभी कोई गुणनफल पूर्ण संख्या नहीं प्राप्त हुई?

अतः हम कह सकते है कि पूर्ण संख्याओं का गुणनफल भी पूर्ण संख्या प्राप्त होती है।

यदि a व b दो पूर्ण संख्याएँ हों तो इनका गुणनफल c भी एक पूर्ण संख्या होगी।
अर्थात् $\mathbf{a \times b = c}$ यह गुणा के लिए **संवरक नियम** है।

2. आओ दो पूर्ण संख्या 5 व 8 लें।

इनके गुणा करने से आपको क्या मान प्राप्त हुआ?

$5 \times 8 = 40$

अब इनको क्रम बदल कर गुणा करें।

$8 \times 5 = 40$

क्या दोनों गुणनफल में कोई अन्तर है?
कुछ और पूर्ण संख्याएँ लेकर इनका गुणा कीजिए।
इनका क्रम बदल कर गुणा कीजिए।
क्या कहीं ऐसा भी हुआ कि गुणनफल में कोई फर्क आया?

दो पूर्ण संख्याओं का गुणा एवं उनके क्रम बदलकर गुणा करने पर मान हमेशा समान रहता है।

यदि a एवं b दो पूर्ण संख्या हों तो इनका गुणनफल $a \times b$ तथा इनका क्रम बदलकर गुणा $b \times a$ समान होगा। अर्थात् $\mathbf{a \times b = b \times a}$ इसे गुणन के लिए क्रमविनिमेय नियम कहते हैं।

3. अब तीन पूर्ण संख्याएँ 4, 5, 6 लेकर इनको गुणा करें।
इस गुणा को निम्न दो प्रकार से किया जा सकता है।

$4 \times 5 \times 6 = (4 \times 5) \times 6$
$= 20 \times 6$
$= 120$

$= 4 \times (5 \times 6)$
$= 4 \times 30$
$= 120$

क्या दोनों स्थितियों में मान समान आया? यदि हाँ तो कुछ और पूर्ण संख्याएँ लेकर इनका गुणा दोनों तरह से कीजिए।

क्या हर स्थिति में मान बराबर आया?

इसी प्रकार 4 संख्याएँ लेकर भी गुणा कीजिए।

तीन या अधिक संख्याओं को किसी भी क्रम में गुणा किया जाए तो गुणनफल का मान सदैव समान रहता है।

अर्थात् a, b और c तीन पूर्ण संख्या हैं तो $\mathbf{(a \times b) \times c = a \times (b \times c)}$ यही गुणा के लिए **साहचर्य नियम** है।

4. अब, एक पूर्ण संख्या को 0 से गुणा करके देखते हैं।
$8 \times 0 = 0$, $19 \times 0 = 0$, $0 \times 15 = 0$
$29 \times 0 = 0$, $45 \times 0 = 0$, $48 \times 0 = 0$

इस प्रकार आप भी किसी पूर्ण संख्या को 0 से गुणा करके देखें क्या सदैव शून्य ही प्राप्त होता है?

अर्थात् **किसी भी पूर्ण संख्या को 0 से गुणा करने पर गुणनफल शून्य प्राप्त होगा। यदि a कोई पूर्ण संख्या है, तो $\mathbf{a \times 0 = 0}$**

5. इसी प्रकार किसी पूर्ण संख्या को 1 से गुणा करके देखो। गुणनफल क्या प्राप्त हुआ?
यदि किसी पूर्ण संख्या को 1 से गुणा किया जाए तो हमें वहीं संख्या प्राप्त होती है।

यदि a कोई पूर्ण संख्या है तो $\mathbf{a \times 1 = a}$, इस विशेष गुण के कारण ही एक को **गुणन तत्समक** कहते हैं।

6. नीचे लिखी संख्याओं का गुणा करके देखिए–

यह गुणा दो प्रकार से कर सकते हैं।

$$5\,(8+4)$$

$= 5(8+4)$	$= 5(8+4)$
$= 5(12)$	$= 5\times 8 + 5\times 4$
$= 60$	$= 40 + 20$
	$= 60$

क्या दोनों ही स्थितियों में बराबर मान प्राप्त हुआ?

इसी प्रकार :

$$5(8-4)$$

$= 5\times(8-4)$	$= 5\,(8-4)$
$= 5\times 4$	$= 5\times 8 - 5\times 4$
$= 20$	$= 40 - 20$
	$= 20$

अतः यदि a,b,c पूर्ण संख्याएँ हों तो $a(b\pm c)=a\times b\pm a\times c$ इसे **गुणा का योग/अंतर पर वितरण नियम** कहते हैं।

ऐसे ही कोई भी तीन संख्याएँ लेकर दोनों प्रकार से हल करके देखिए कि क्या दोनों स्थितियों में बराबर मान प्राप्त होता है।

पूर्ण संख्याओं का विभाजन (Division of whole numbers)

1. हम जानते है कि भाग की क्रिया, गुणन क्रिया का प्रतिलोम है। आइए देखें कैसे?

$40 \div 4 = 10 \quad \Rightarrow \quad 10 \times 4 = 40$

$21 \div 3 = 7 \quad \Rightarrow \quad 7 \times 3 = 21$

आइए, भाग संक्रिया के कुछ और प्रश्नों को हल करके देखें।

$20 \div 5 = 4$ और शेषफल 0

$25 \div 4 = 6$ और शेषफल 1

पूर्ण संख्याओं में भाग की क्रिया से प्राप्त मान सदैव पूर्ण संख्या नहीं होती है, अर्थात् सदैव शेष 0 प्राप्त नहीं होता हैं। अतः हम कह सकते है कि **किसी पूर्ण संख्या में दूसरी पूर्ण संख्या का भाग देने पर सदैव पूर्ण संख्या प्राप्त नहीं होती है।**

2. हम जानते है कि

$15 \div 15 = 1 \qquad 28 \div 28 = 1 \qquad 49 \div 49 = 1$

अतः किसी भी पूर्ण संख्या में उसी संख्या का भाग देने पर (शून्य को छोड़कर) भागफल सदैव 1 प्राप्त होता है।

अर्थात् **यदि a कोई पूर्ण संख्या है (शून्य को छोड़कर) तब $\mathbf{a \div a = 1}$**

अब $15 \div 1 = 15$ $28 \div 1 = 28$

$40 \div 1 = 40$

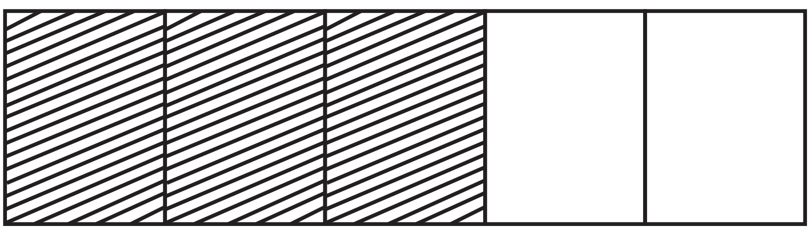
किसी पूर्ण संख्या को एक से विभाजित करने पर भागफल सदैव वही संख्या प्राप्त होती है। अर्थात् **यदि a कोई पूर्ण संख्या है तब $a \div 1 = a$**

भिन्न संख्या (Fractional number)

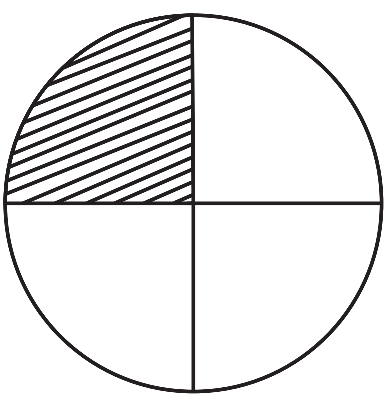
आइए, हम 21 में 4 का भाग करके देखते हैं। 21 में 4 के भाग को $\frac{21}{4}$ लिखते हैं और ऐसी संख्या भिन्न कहलाती है।

भिन्न संख्याएँ– वे संख्याएँ है जिनमें अंश और हर दोनों होते है।

नीचे कुछ चित्र दिए गए है जो यह इंगित करते हैं कि एक इकाई में कितने हिस्से किए गए एवं उनमें से कितने हिस्से (रेखांकित) लिए गए हैं।

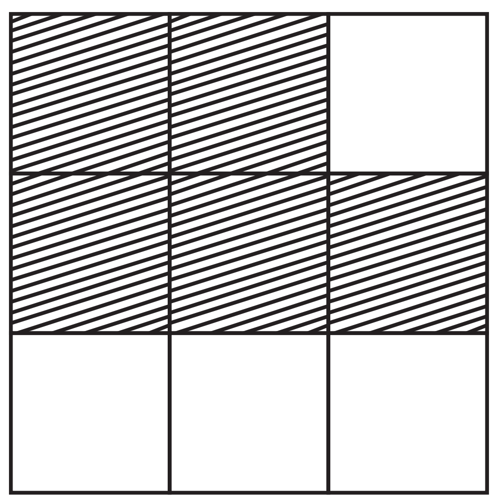


(i)



(iii)

चित्र 17.2

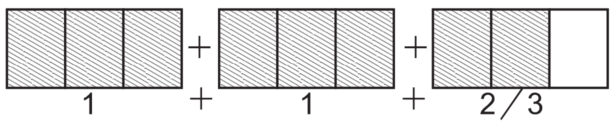


(ii)

ऊपर दिए गए चित्रों में रेखाकिंत व रिक्त भाग को भिन्नों के रूप में लिखिए –

	रेखांकित भाग	कुल भाग	भिन्न
(i)	3	5	$\frac{3}{5}$
(ii)	----------------	----------------	----------------
(iii)	----------------	----------------	----------------

ये सभी उचित भिन्न हैं। उचित भिन्न वे भिन्न होती हैं जिनमें अंश का मान हर के मान से छोटा होता है तथा वे भिन्न जिनमें अंश का मान हर के मान से बड़ा होता है। उन्हें अनुचित (विषम) भिन्न कहते हैं। इन भिन्नों में कई पूर्ण इकाईयाँ हो सकती है। अनुचित भिन्न में कितनी पूर्ण व कितनी अपूर्ण इकाइयाँ हैं इसको प्रदर्शित करने के लिए मिश्र भिन्न का उपयोग करते हैं। जैसे $\frac{8}{3}$ को चित्रानुसार इस प्रकार प्रकट कर सकते हैं।



चित्र 17.3

अर्थात् इसमें तीन इकाईयों के तीन समान भाग करके उसमें से दो इकाइयाँ पूरी तथा एक इकाई के तीन में से दो हिस्से लेना है।

मिश्र भिन्न को हम विभाजन के नियम के आधार पर भी लिख सकते हैं जैसे $\frac{78}{37}$ में 78 भाज्य व 37 भाजक है।

```
37)  78  (2
     74
-----------
      4     शेषफल
```

तब $\frac{78}{37}$ को मिश्र भिन्न के रूप में $2\frac{4}{37}$ लिख सकते हैं।

जब भिन्नों के अंश समान हो तो हर के बड़ा होने पर भिन्न का मान छोटा होता जाता है। जैसे : $\frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4} > \frac{1}{5} > \frac{1}{6}$.... एवं जब भिन्नों के हर समान हो तो जिस भिन्न का अंश बड़ा हो वह भिन्न बड़ा होगा। जैसे $\frac{1}{8} < \frac{2}{8} < \frac{3}{8} < \frac{4}{8} < \frac{5}{8} < \frac{6}{8} < \frac{7}{8}$

प्रश्नावली 17.1 (Exercise 17.1)

प्र.1. निम्न में से उचित एवं अनुचित भिन्नों को छांटिए –

(i) $\frac{16}{5}$ (ii) $\frac{12}{13}$ (iii) $\frac{78}{41}$ (iv) $\frac{6}{7}$

प्र.2. निम्न भिन्नों को चित्रों में प्रदर्शित कीजिए –

(i) $\frac{6}{5}$ (ii) $\frac{3}{8}$ (iii) $\frac{7}{11}$ (iv) $\frac{4}{15}$

प्र.3. बताइए निम्न भिन्नों में कितनी पूर्ण इकाईयाँ हैं? साथ ही इन्हें मिश्र भिन्न के रूप में भी लिखिए।

(i) $\frac{14}{9}$ (ii) $\frac{89}{12}$ (iii) $\frac{119}{18}$ (iv) $\frac{267}{61}$

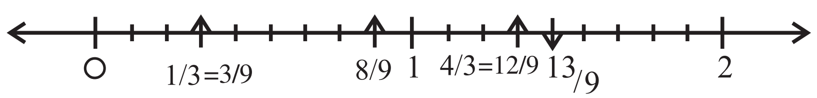
प्र.4. भिन्नों को बढ़ते क्रम में लिखिए।

(i) $\frac{8}{9}, \frac{6}{9}, \frac{4}{3}, \frac{2}{5}$ (ii) $\frac{1}{9}, \frac{4}{9}, \frac{2}{9}, \frac{8}{9}, \frac{7}{9}$

भिन्नों को संख्या रेखा पर प्रदर्शित करना (Fraction on number line)

हम पूर्ण संख्याओं की भांति भिन्नों को संख्या रेखा पर प्रदर्शित कर सकते हैं।

भिन्नात्मक संख्याओं $\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{8}{9}$ एवं $\frac{13}{9}$ को संख्या रेखा पर नीचे लिखे तरीके से दर्शाया गया है।



चित्र 17.3

ऊपर संख्या रेखा में प्रदर्शित भिन्नों $\frac{4}{3}$ व $\frac{13}{9}$ पास–पास हैं परन्तु इनके बीच भी अनेक भिन्न संख्याएँ हो सकती है जैसे : $\frac{25}{18}, \frac{37}{27}, \frac{51}{36}$ इत्यादि।

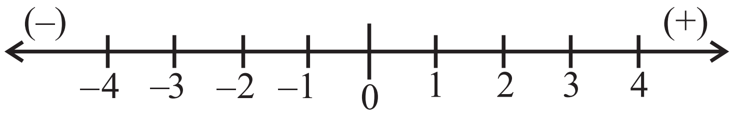
पूर्णांक (Integer)

पूर्ण संख्याओं को घटाते समय हमें ऋणात्मक संख्याओं की आवश्यकता होती है और यदि पूर्ण संख्याओं और ऋणात्मक संख्याओं के समूह को मिला दिया जाए तो हमें पूर्णांकों का समूह मिलता है। पूर्णांकों में धनात्मक तथा ऋणात्मक संख्याओं के साथ शून्य भी होता हैं। पूर्णांक संख्याओं के समूह को I से व्यक्त करते हैं जैसे –

$I = \{\ldots -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4 \ldots\}$

पूर्णांकों को संख्या रेखा पर दर्शाना (Whole number on number line)

रेखा पर एक बिन्दु शून्य मान कर उसके दाईं ओर धनात्मक एवं बाईं ओर ऋणात्मक संख्याएँ लेते हैं और इसमें न तो सबसे बड़ी कोई संख्या होती है और न सबसे छोटी।



चित्र 17.4

परिमेय संख्या–

परिमेय संख्याएँ– वे संख्याएँ होती हैं जिन्हें $\frac{p}{q}$ जहाँ p तथा q पूर्णांक है परन्तु $(q \neq 0)$ के रूप में लिखा जा सकता है। ये संख्याएँ धनात्मक भी हो सकती हैं और ऋणात्मक भी।

सभी संख्याएँ $\frac{4}{-5}, \frac{6}{4}, \frac{-13}{4}, \frac{8}{1}, \frac{-9}{-1}, \frac{0}{-7}, ---$ परिमेय संख्याएँ हैं।

सभी भिन्न परिमेय संख्याएँ हैं तथा सभी पूर्णांक भी परिमेय संख्याएँ है। हम परिमेय संख्याओं की तुलना कर सकते है। साथ ही परिमेय संख्याओं को संख्या रेखा पर निरूपित किया जा सकता है। परिमेय संख्याओं को मानक रूप में परिवर्तन किया जा सकता है जैसे $\frac{16}{20}$ का मानक रूप $\frac{4}{5}$ होता है।

प्रश्नावली 17.2

प्र.1. निम्न भिन्नात्मक संख्याओं को संख्या रेखा पर प्रदर्शित कीजिए।

(i) $\frac{3}{5}$ (ii) $\frac{6}{5}$ (iii) $\frac{7}{8}$

प्र.2. निम्नलिखित परिमेय संख्याओं को पूर्णांकों के रूप में लिखिए।

(i) $\frac{8}{1}$ (ii) $\frac{-12}{1}$ (iii) $\frac{20}{1}$

(iv) $\frac{-39}{1}$ (v) $\frac{59}{1}$

प्र.3. नीचे दी हुई संख्याओं के युग्म में से बड़ी संख्या बताइए।

(क) $\frac{5}{9}$ और 0 (ख) $\frac{-6}{7}$ और 0

(ग) $\frac{-5}{3}$ और $\frac{17}{-10}$ (घ) $\frac{6}{-5}$ और $\frac{-13}{-8}$

प्र.4. संख्या $\frac{4}{9}$ के अंश में क्या जोड़े कि यह $\frac{2}{3}$ बन जाए।

प्र.5. संख्या $\frac{5}{6}$ के हर में क्या घटाया जाए कि संख्या 1 प्राप्त हो।

प्र.6. किसी भिन्न का अंश उसके हर से 2 अधिक है यदि भिन्न का अंश 5 हो, तो भिन्न क्या होगी।

क्रियाकलाप 1. (Activity 1)

0, 4, 7 अंकों का उपयोग कर तीन अंकों की कितनी संख्याएँ बनाई जा सकती हैं? सारणी में निम्नानुसार लिखिए –

सारणी 1

क्र.सं.	संख्या	स्थानीय मान में प्रसारित रूप	क्या संख्या तीन अंकों की हैं?
1.	047	000 + 40 + 7	नहीं
2.	407	400 + 00 + 7	हाँ
3.	------		----------------
4.	------	----------------	----------------
5.	------	----------------	----------------
6.	------	----------------	----------------

अवलोकन 1. तीन अंकों से बनी संख्याएँ कौन–कौन सी हैं?

2. 047 तीन अंकों की संख्या क्यों नहीं है?

किसी भी पूर्णांक संख्या के पूर्व 0 (शून्य) का कोई मान नहीं होता है। अतः 047 = 47 जो दो अंकों की संख्या है।

क्रियाकलाप 2. (Activity 2)

सारणी को पूर्ण कीजिए –

क्र.सं.	a, b, c के मान	$100 \times a + 10 \times b + c$	संख्या
1.	a = 9, b = 2, c = 8	$100 \times 9 + 10 \times 2 + 8$	900 + 20 + 8 = 928
2.	a = 3, b = 0, c = 4	....	......................= 304
3.	a = 0, b = 7, c = 5	....	....
4.	a = .., b = .., c = ..	....	....
5.	a = .., b = .., c = ..	....	....

अभ्यास 1 (Practice 1)

1. कोई भी तीन अंकों को उपयोग कर उनसे तीन अंकों की कितनी संख्याएँ बना सकते हैं? उन्हें बढ़ते क्रम में लिखिए।
2. निम्न संख्याओं को 100 a + 10b + c के रूप में व्यक्त कीजिए –

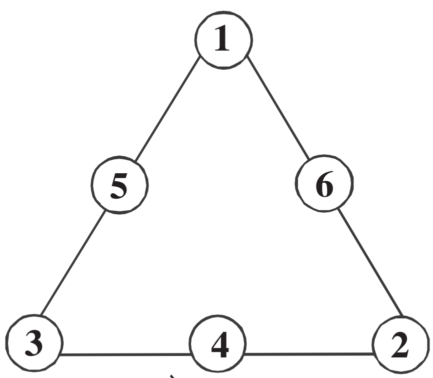
   (i) 376 (ii) 850 (iii) 69 (iv) 207

कुछ गणितीय खेल –

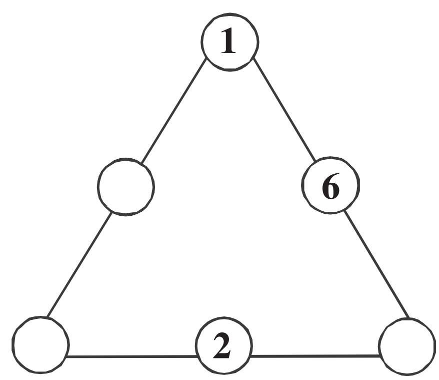
क्रियाकलाप 3.

जादूई त्रिभुज (Magic Triangle)

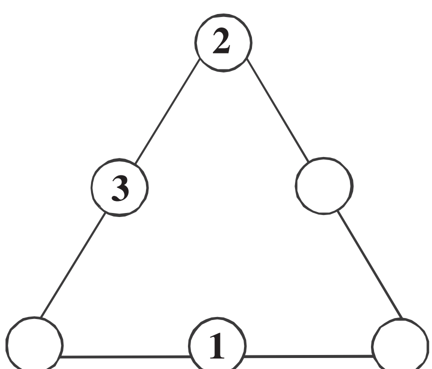
दिये गये त्रिभुज में 1, 2, 3, 4, 5, 6 तक संख्याओं को इस प्रकार भरिए जिससे इसके प्रत्येक भुजा की संख्याओं का योग समान हो –



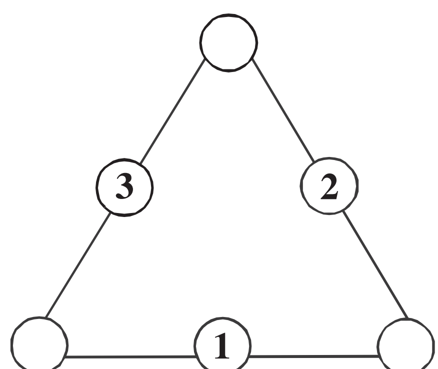
योगफल – 9



योगफल – 10



योगफल – 11



योगफल – 12

इन त्रिभुजों में आप देख सकते हैं कि 1, 2, 3, 4, 5, 6 संख्या से एक ही त्रिभुज में विभिन्न तरीकों से व्यवस्थित करने पर योगफल समान प्राप्त होता है।

इसी प्रकार आप भी क्रम से कोई भी छः संख्याओं से अलग–अलग समूह बनाकर समान योगफल प्राप्त कर सकते हैं।

क्रियाकलाप 4.

दिये गये क्रम (श्रेणी) को पूर्ण कीजिए –

(i) 1, 2, 3, __, __, __, __, 8

(ii) 3, 5, 7, __, __, 13, __

(iii) 26, 23, 20, __, __, __, 8, __

(iv) 7, 12, 18, __, __, 42, __, __, 75

(v) 1, 4, 9, __, 25, __, __, 64, __

क्रियाकलाप 5.

निम्न क्रम को जारी रखते हुए रिक्त स्थानों (बॉक्स) की पूर्ति कीजिए –

$$1\frac{1}{2}\times 3 = 1\frac{1}{2}+3$$

$$1\frac{1}{3}\times 4 = 1\frac{1}{3}+\square$$

$$1\frac{1}{\square}\times 5 = \square+5$$

$$\square\times\square = 1\frac{1}{5}+\square$$

इन श्रेणियों को पूरा करने के पश्चात् आप स्वयं कोई भी दो श्रेणी बनाइये।

पहेली –

बिना कुछ पूछे संख्या का अनुमान लगाना –

भारती अपनी मित्र जयंती को तीन अंकों की कोई ऐसी संख्या सोचने को कहती है, जिसके प्रथम और अंतिम अंक बराबर न हों। फिर उस संख्या के अंकों के क्रम को उलटकर दूसरी संख्या बनाने को कहती है। उसके बाद प्राप्त संख्याओं में से बड़ी संख्या में छोटी संख्या को घटाने को कहती है। इस प्रकार प्राप्त अंतर के अंकों के क्रम को पुनः उल्टे क्रम में रखकर एक अन्य संख्या बनाकर उसे अंतर से जोड़ने को कहती है। इतना सब कहने के बाद भारती अपनी मित्र जयंती को कहती है कि इतना सब करने के बाद तुम्हारे पास अंतिम योगफल 1089 आता है। इससे जंयती आश्चर्य में पड़ गई कि बिना कुछ बताये भारती को यह कैसे पता चला कि अंतिम योगफल 1089 है।

आइये, इस समस्या को हल करके देखते हैं –

माना कि जयंती के द्वारा सोची गई संख्या – 102 है।

तब 102 का उल्टा क्रम = 201

कथनानुसार

$$\begin{array}{r} 201 \\ -\ 102 \\ \hline 099 \end{array} \quad \text{(अन्तर)}$$

अब अंतर का उल्टा क्रम = 990

उनका योग

$$\begin{array}{r} 099 \\ +\ 990 \\ \hline 1089 \end{array}$$

इस प्रकार आप भी अपने साथियों के साथ ऐसा खेल खेल सकते हैं।

क्रियाकलाप 6.

पहेली को निर्देशानुसार भरिये –

बाँयें से दाँये –

A - छः के वर्ग का पाँच गुना

D - दस के वर्ग से एक कम

E - नौ के वर्ग से दस अधिक

F - आठ सैकड़ा से चार कम

G - नौ का घन

A	B			C
D			E	
		F		
	G			

ऊपर से नीचे –

A - चौदह का वर्ग

B - क्रमशः दो अंक

C - छः का घन

E - तीन अंकों की सबसे बड़ी संख्या

F - सबसे छोटी दो क्रमागत अभाज्य संख्याओं के गुणनफल के वर्ग का दुगना।

पहेली –

कक्षा 8 वीं के सभी छात्र–छात्राएँ अपनी उम्र बता रहे थे उनमें से अंजु एवं राजू ने अपनी उम्र बताने से मना कर दिया। तब कक्षा की छात्रा सुनीता बोली कि ठीक है तुम अपनी उम्र मत बताओ, लेकिन मेरे सवालों के जवाब दो तो मैं तुम दोनों की उम्र बता सकती हूँ।

इस पर अंजु एवं राजू तैयार हो गए।

अब सुनीता ने अंजु को कुछ ऐसा करने को कहा – अंजु, आप अपनी उम्र को दुगुना करके उसमें पाँच जोड़ दो और प्राप्त संख्या को 50 से गुणा कर दो। इसके बाद प्राप्त संख्या में राजू की आयु जोड़ दो, फिर उसमें एक वर्ष के दिनों की संख्या (365) जोड़ दो। उसके बाद इस योगफल में से 615 घटा दो।

अब बताओं कि तुम्हें कौनसी संख्या प्राप्त हुई।

इतना सब करने के बाद अंजु और राजू ने अपना उत्तर बताया। उसी उत्तर से ही सुनीता ने

अंजु और राजू की उम्र बता दी।

अब अंजु और राजू आश्चर्य में पड़ गए कि उन्होंने तो केवल अपने मन ही मन अपनी उम्र का हिसाब किया था फिर भी सुनीता को पता कैसे चला?

अब अंजु–राजू को सुनीता के उस तरीके को जानने की बड़ी उत्सुकता हुई। उनके पूछने पर राहुल और विवेक ने बताया –

माना कि अंजु तुम्हारी आयु 14 वर्ष है

उसके दुगुने में 5 जोड़ने पर $= 14 \times 2 + 5$

$= 28 + 5 = 33$

अब प्राप्त संख्या को 50 से गुणा करने पर $= 33 \times 50 = 1650$

अब इसमें राजू की उम्र (माना कि 13 वर्ष है) तथा वर्ष के दिनों की संख्या इसमें जोड़ने पर

$= 1650 + 13 + 365 = 2028$

अब इसमें 615 घटाने पर $= \frac{-615}{1413}$

प्राप्त उत्तर 1413 में अंतिम दो अंक (इकाई व दहाई अंक से बनी संख्या) राजू की आयु तथा शुरू के दो अंक अंजु की आयु हैं।

इस प्रकार का खेल आप अपने दोस्तों के साथ खेल कर देखिए।

क्रियाकलाप 7.

जादुई वर्ग (Magic Square)

दिये गये जादुई वर्ग में 1 से 16 तक की संख्याओं का प्रयोग करते हुए रिक्त स्थानों को इस प्रकार भरिए कि आड़ा, खड़ा, तिरछा सभी तरह से जोड़ने पर योगफल 34 प्राप्त हो।

16			13
	10		
9		7	12
	15		1

34 योगफल

इस प्रकार आप भी क्रमशः 16 संख्याओं को लेकर कोई जादुई वर्ग बनाकर देखिए।

पहेली –

तीन अंकों की कोई भी एक संख्या लीजिए और उसे पुनः उसी क्रम में एक बार और लिखकर उसे छः अंकों की संख्या बना लीजिए। अब प्राप्त संख्या में क्रमशः 7, 11 और 13 से विभाजित कीजिए। क्या आपको उत्तर वही संख्या प्राप्त हुई जो आपने शुरू में ली थी? ऐसा क्यों हुआ कारण खोजिए?

प्रश्नावली – 17.3

1. 3,0,5 अंकों के उपयोग से कुल कितनी संख्या बनाई जा सकती है? इनमें से दो अंकों एवं तीन अंकों से बनी संख्याओं को छाँटिए।
2. दिये गये प्रश्नों को हल कीजिए –

(A) $37 \times 3 =$ ---------------
$37 \times 6 =$ ---------------
$37 \times 9 =$ ---------------
$37 \times 12 =$ ---------------

(B) $12345679 \times 9 =$ ---------------
$12345679 \times 18 =$ ---------------
$12345679 \times 27 =$ ---------------
$12345679 \times 36 =$ ---------------

----

3. दिये गये क्रम को पूर्ण कीजिए –
(a) 2, 5, 10, 17, __, __, 50, __, 82, __
(b) 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, __, 21, __, 55, __,
(c) 125, 120, 114, 107, __, __, __, 69, __
(d) 20, 15, 11, __, __, 5
4. दिये गये संबंध पर ध्यान दीजिए –
$043 = 0^1 + 4^2 + 3^3 = 0 + 16 + 27 = 043$
$135 = 1^1 + 3^2 + 5^3 = 1 + 9 + 125 = 135$
$2427 = 2^1 + 4^2 + 2^3 + 7^4 = 2 + 16 + 8 + 2401 = 2427$
इसी प्रकार निम्न को हल कीजिए –
063, 175, 518, 1306
5. 1 से 9 तक के अंकों को क्रम से लेकर व चिन्हों का उपयोग करते हुए विभिन्न प्रकार से 100 प्राप्त होंगे? करके देखिए –
6. दिये गये वर्ग में A, B, C, ... J का मान, योग करते हुए ज्ञात कीजिए –

					योग
	57	49	30	A	B
	32	C	30	27	114
	28	D	26	29	E
	13	15	17	F	71
	37	35	G	H	120
योग	I	136	128	130	J

7. विजय ने एक संख्या में 5 का गुणा करके उसमें 5 घटा दिया तथा उसके बाद प्राप्त संख्या में 5 का भाग दे दिया। अब आप बताइये विजय को कौनसी संख्या प्राप्त हुई। क्या प्राप्त

संख्या ली गई संख्या से 1 कम हैं? ऐसा क्यों हुआ?

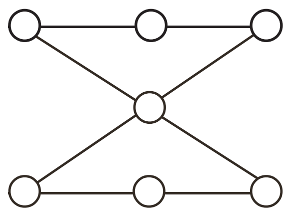
8. जरीना तीन अंकों की संख्या 258 को लेकर उसे छः अंकों की 258258 बनायी तथा इस संख्या को तीन अभाज्य संख्याओं 7, 11 और 13 से क्रमशः विभाजित किया। बताइये जरीना को भागफल कौनसी संख्या प्राप्त हुई। क्या यह उसके द्वारा ली गई प्रारम्भिक संख्या है? ऐसा क्यों हुआ?

9. सिमंस का मकान क्रमांक 57 है। उसके दोगुने में 5 जोड़ने के बाद उसे 50 से गुणा करके उसमें अपने दोस्त कैलाश का आयु जोड़ 15 वर्ष जोड़ दिया और फिर उसमें वर्ष के दिनों की संख्या (365) जोड़कर उसमें 615 घटा दिया? इन संक्रियाओं के बाद प्राप्त उत्तर क्या 5715 है? क्या उत्तर में सिमंस का मकान क्रमांक एवं कैलाश की उम्र है? ऐसा क्यों हुआ?

10. संख्या 2 को पाँच बार लेकर उसमें चिन्हों +, –, × व ÷ में से एक से अधिक चिन्हों का (आवश्यकता होने पर एक से अधिक बार) उचित प्रयोग करके 3 एवं 7 संख्या प्राप्त कीजिए। इसी प्रकार अन्य अंकों को भी प्राप्त करने का प्रयास कीजिए।

11. यहाँ 7 अभाज्य संख्याएँ दी गई हैं, इन संख्याओं को दी गयी आकृति में इस प्रकार स्थान दीजिए कि इसकी भुजाओं का योगफल 41 आ जाए।

5, 7, 11, 13, 17, 19, 23



विभाज्यता की जाँच (Verification rule of Divisibility)

कोई एक संख्या किसी दूसरी संख्या को पूरी तरह विभाजित करती है या नहीं, इस प्रश्न का उत्तर पता लगाने के लिए हम भाग की क्रिया करते हैं। लेकिन क्या आप जानते हैं कि कुछ ऐसे सरल नियम भी हैं जिनकी मदद से हम बिना भाग की क्रिया किए पता लगा सकते हैं कि कोई संख्या किसी निश्चित संख्या से पूरी तरह विभाजित होगी या नहीं। आइए ऐसे कुछ नियम देखें। (इस पाठ में आगे 'पूरी तरह विभाजित' के स्थान पर हम 'विभाजित' ही लिखेंगे। विभाज्यता का अर्थ भी पूरी तरह विभाजित होने के संदर्भ में लें।)

1. 2 से विभाज्यता – यदि किसी संख्या की इकाई का अंक 2 से विभाजित होता है तो वह संख्या 2 से विभाजित होगी। ऊपर लिखी बात को दूसरे शब्दों में ऐसे भी कहा जा सकता है कि –

"यदि किसी संख्या की इकाई का अंक 2, 4, 6, 8 या 0 हो तो वह संख्या 2 से विभाजित होगी।

अर्थात् 612, 298, 520 आदि संख्याएँ 2 से विभाजित होंगी जबकि 231, 369, 5127 आदि संख्याएँ 2 से विभाजित नहीं होंगी।

2. **3 से विभाज्यता** – यदि किसी संख्या के अंकों का योग 3 से विभाजित होता है तो वह संख्या 3 से विभाजित होगी। संख्या 5142 के अंकों का योग $5 + 1 + 4 + 2 = 12$ है। यह योग 12, संख्या 3 से विभाजित होता है इसलिए संख्या 5142, संख्या 3 से विभाजित होगी।

3. **5 से विभाज्यता** – जिन संख्याओं की इकाई के स्थान पर अंक 0 या 5 हो वे 5 से विभाजित होती हैं।

   985, 270, 665 सभी 5 से विभाज्य हैं और 827, 453, 509 की इकाई के स्थान पर 0 या 5 नहीं हैं, ये संख्याएँ 5 से विभाजित नहीं होंगी।

4. **7 से विभाज्यता** – किसी संख्या की इकाई के अंक को दोगुना कर शेष अंकों से बनी संख्या से घटाइए तथा अब प्राप्त संख्या पर फिर से यही प्रक्रिया तब तक दोहराइए जब तक एक या दो अंकों की संख्या प्राप्त न हो। इस प्रकार प्राप्त संख्या 7 से विभाजित हो तो वह संख्या भी 7 से विभाजित होगी।

   उदाहरण के लिए 2457 की इकाई का अंक 7 है। 7 का दोगुना $= 14$

   $245 - 14 = 231$

   231 की इकाई का अंक 1 है। 1 का दोगुना $= 2$

   $23 - 2 = 21$

   21 संख्या 7 से विभाज्य है इसलिए 2457 भी 7 से विभाजित होगी।

5. **11 से विभाज्यता** – इकाई से शुरू कर संख्या के विषम स्थानों के अंकों का योग निकालिए। इसी प्रकार संख्या के सम स्थानों के अंकों का योग निकालिए। यदि इन दोनों योगों का अंतर 0 अथवा 11 गुणज हो तो वह संख्या 11 से विभाजित होगी।

   जैसे – संख्या 934461 के विषम स्थानों पर स्थित अंकों का योग $1 + 4 + 3 = 8$

   सम स्थानों पर स्थित अंकों का योग $6 + 4 + 9 = 19$

   दोनों योगों का अंतर $19 - 8 = 11$

   अतः संख्या 934461, संख्या 11 से विभाज्य है।

6. **4 से विभाज्यता** – यदि किसी संख्या के इकाई व दहाई के अंकों से बनी संख्या 4 से विभाजित होती है तो वह संख्या भी 4 से विभाजित होगी। यदि इकाई, दहाई पर 0 हो तो भी वह संख्या 4 से विभाजित होगी।

जैसे – 3436, 5812, 7096 आदि 4 से विभाज्य है और 3858, 7627 आदि 4 से विभाज्य नहीं हैं।

7. **6 से विभाज्यता** – यदि कोई संख्या 2 से तथा 3 से अलग–अलग विभाजित होती हो तो वह संख्या 6 से भी विभाजित होगी।

जैसे – 456, 2 से विभाज्य है। (इकाई का अंक 6 है।)

456, 3 से विभाज्य है। (अंकों का योग 15 है।)

अतः 456, 6 से भी विभाज्य है।

8. **8 से विभाज्यता** – यदि किसी संख्या के इकाई, दहाई और सैकड़ा के अंकों वाली संख्या 8 से विभाज्य हो तो वह संख्या भी 8 से विभाज्य होगी।

यदि संख्या के इकाई, दहाई और सैकड़ा तीनों स्थानों पर 0 हो तब भी वह संख्या 8 से विभाज्य होगी।

जैसे – 93816 के इकाई, दहाई व सैकड़ा के अंकों से बनी संख्या 816, 8 से विभाजित होती है, इसलिए 93816 भी 8 से विभाज्य है। इसी प्रकार 56713, 8 से विभाज्य नहीं है।

9. **9 से विभाज्यता** – किसी संख्या के 9 से विभाजित होने का नियम 3 से विभाज्यता के नियम जैसा ही है।

यदि संख्या के अंकों का योग 9 से विभाजित होता हो तो वह संख्या 9 से विभाजित होगी।

जैसे – 23436 के अंकों का योग

$2 + 3 + 4 + 3 + 6 = 18$

संख्या 18, 9 से विभाजित होती है, इसलिए 23436 भी 9 से विभाज्य है।

10. **10 से विभाज्यता** – किसी संख्या की इकाई के स्थान पर 0 हो तो वह संख्या 10 से विभाजित होगी।

उदाहरण के लिए 93410 की इकाई के स्थान पर 0 है इसलिए 93410, 10 से विभाज्य है। वहीं 30857 की इकाई के स्थान पर 0 नहीं है, इसलिए 30857, 10 से विभाज्य नहीं है।

प्रश्नावली — 17.4

1. जाँच कीजिए कि क्या निम्नलिखित संख्याएँ 2 से विभाजित होती हैं —

   (i) 252 (ii) 457 (iii) 436 (iv) 3509 (v) 94241

2. 3 से विभाज्यता की जाँच कीजिए —

   (i) 324 (ii) 2500 (iii) 20325 (iv) 83812 (v) 24033

3. कौन–कौन सी संख्याएँ 5 से विभाजित होती हैं —

   (i) 932 (ii) 815 (iii) 6570 (iv) 45864 (v) 77129

4. दी गई कौन–कौन सी संख्याएँ 7 से विभाजित होती हैं —

   (i) 560 (ii) 791 (iii) 5623 (iv) 7007

हमने सीखा (We have learnt)

1. दो पूर्ण संख्याओं का योगफल एक पूर्ण संख्या होती है।
2. दो पूर्ण संख्याओं का योग एवं उनका क्रम बदल कर योग करने पर योगफल समान होगा।
3. किसी पूर्ण संख्या में शून्य जोड़ने या शून्य में कोई पूर्ण संख्या जोड़ने पर मान पूर्ण संख्या हो रहेगा।
4. यदि a, b और c तीन पूर्ण संख्याएँ हैं तो $(a+b) + c = a + (b+c)$
5. दो पूर्ण संख्याओं a और b हो तो $a>b$ तथा $a=b$ स्थिति में घटाने पर एक पूर्ण संख्या होगी।
6. यदि a कोई पूर्ण संख्या हो तो $a - 0 = a$
7. यदि a कोई पूर्ण संख्या हो तो $a - a = 0$
8. दो पूर्ण संख्याओं का गुणनफल भी एक पूर्ण संख्या होगा–

   $a \times b = c$

   यदि a व b दो पूर्ण संख्या है तो उनका गुणनफल c भी एक पूर्ण संख्या होगा।
9. दो पूर्ण संख्याओं का गुणनफल एवं उनका क्रम बदलकर गुणा करने पर गुणनफल समान रहेगा।

   $a \times b = b \times a$
10. तीन पूर्ण संख्याओं का विभिन्न स्थितियों में गुणनफल समान होता है। $(a\times b) \times c = a \times (b \times c)$
11. यदि a कोई पूर्ण संख्या हो एवं उसे शून्य से गुणा करें तो गुणनफल शून्य होगा $a\times 0 = 0$
12. यदि a कोई पूर्ण संख्या हो एवं उसे 1 से गुणा करें तो गुणनफल $a \times 1 = a$ होगा।

AD7F22