प्रायिकता

Ex 14.1

प्रश्न 1. बल्बों के एक कार्टून में से 3 बल्ब यादृच्छया निकाले जाते हैं। प्रत्येक बल्ब को जाँचा जाता है और उसे खराब (D) या ठीक (N) में वर्गीकृत करते हैं। इस परीक्षण का प्रतिदर्श समष्टि ज्ञात कीजिए।

हल- यादृच्छया तीन बल्ब निकालने पर प्राप्त अभीष्ट प्रतिदर्श समष्टि S = {DDD, DDN, DNN, NDD, NND, NDN, DNN, NNN}

जहाँ D = खराब (Defective) बल्ब
N = ठीक (Non-defective) बल्ब

प्रश्न 2. एक ताश की गड्डी से 4 पत्ते निकाले जाते हैं, तो n(E) क्या होगा, जबकि E एक बादशाह, एक बेगम, एक गुलाम व एक इक्का निकालने की घटना है।

हल- यहाँ ताश की गड्डी में चार तरह के बादशाह, चार तरह की बेगम, चार तरह के गुलाम व चार तरह के इक्का के पत्ते होते हैं। तब 52 पत्तों में से चार पत्ते निकालने पर घटना E अर्थात् एक बादशाह, एक गुलाम, एक बेगम व एक इक्का होने पर E में अवयवों की संख्या = n(E) = 4 x 4 x 4 x 4 = 256

प्रश्न 3. एक पासा फेंका जाता है। यदि पासे पर 4 दर्शाना E घटना है। तथा सम संख्या आना F घटना है। क्या E तथा F परस्पर अपवर्जी घटना है ?

हल- यहाँ प्रतिदर्श समष्टि S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}
घटना E = {4}

F = {2, 4, 6}
यहाँ $E \cap F = \{4\} \neq \Phi$
अतः E तथा F परस्पर अपवर्जी घटना नहीं है।

प्रश्न 4. दो पासों को एक साथ उछाला जाता है, तो

(i) युग्मक होने का प्रतिदर्श समष्टि क्या है ?
(ii) अंकों का योग 8 होने का प्रतिदर्श समष्टि क्या है ?

हल- (i) दो पासों को उछालने पर युग्मक होने का प्रतिदर्श समष्टि
= {(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4,4), (5, 5), (6, 6)}।

(ii) अंकों का योग 8 होने का प्रतिदर्श समष्टि
= {(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)}।

Ex 14.2

प्रश्न 1. एक पासे को उछालने पर 4 से बड़ी अंक आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हल- एक पासे के उछालने पर 6 तरह के अंक आने की सम्भावना रहती है।
अतः घटना की नि:शेष स्थितियाँ = 6
प्रदत्त घटना के लिए 4 से बड़े अंक होंगे।

= {5, 6} आना अनुकूल स्थितियाँ
इनकी संख्या = 2 है
अतः घटना के लिए अनुकूल स्थितियाँ = 2
∴अभीष्ट प्रायिकता = $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

प्रश्न 2. एक सिक्के को दो बार उछाला जाता है। दोनों बार चित्त आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हल- एक सिक्के को दो बार उछालने पर प्राप्त स्थितियों का समुच्चय
= {HH, HT, TH, TH}
अतः घटना की नि:शेष स्थितियाँ = 4

प्रदत्त घटना के लिए दोनों बार चित्त (TT) आना
= (TT)
अतः अनुकूल स्थितियाँ = 1
∴ अभीष्ट प्रायिकता = $\frac{1}{4}$

प्रश्न 3. 1 से 17 तक की प्राकृत संख्याओं में से एक संख्या का यादृच्छिक चयन किया जाता है। प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि वह एक अभाज्य संख्या हो।

हल- 1 से 17 तक की प्राकृत संख्याओं में से एक संख्या का यादृच्छिक चयन 17 प्रकार से हो सकता है अर्थात्
{1, 2, 3,........ 17}

अतः घटना की नि:शेष स्थितियाँ = 17
प्रदत्त घटना के लिए अभाज्य अंक होंगे-

{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17} जो कि अनुकूल स्थितियाँ हैं।
इनकी संख्या = 7

अतः घटना के लिए अनुकूल स्थितियाँ = 7
∴ अभीष्ट प्रायिकता = $\frac{7}{17}$

प्रश्न 4. एक सिक्के के लगातार तीन उछालों में एकान्तरत: चित्त या पट आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हल- एक सिक्के को लगातार तीन बार उछालने पर आने वाले समस्त
सम्भावित परिणाम
= {HHH, HHT, HTH, HTT, TTT, TTH, THT, THH}

इनकी कुल संख्या = 8
अतः घटना की नि:शेष स्थितियाँ = 8
एकान्तरतः चित्त या पट आने की स्थितियाँ

= {HTH, THT}
इनकी कुल संख्या = 2
अतः अनुकूल स्थितियाँ = 2
∴ अभीष्ट प्रायिकता = $\frac{2}{8}$ = $\frac{1}{4}$

प्रश्न 5. यदि दो पासों को एक साथ उछाला जाता है तो युग्मक (doublet) अथवा 9 प्रदर्शित होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हल- दो पासों को एक साथ उछालने पर आने वाले समस्त सम्भावित
परिणाम- {(1,1), (1, 2), (1, 3)………….. (1, 6)

= (2, 1)……………………………….. (2, 6)
= (3, 1)……………………………….. (3, 6)
…………………………………………………..
…………………………………………………..
= (6, 1)…………………………………(6, 6)}

इनकी कुल संख्या = 36
अतः घटना की नि:शेष स्थितियाँ = 36
अब युग्मक अथवा योग 9 आने की स्थितियाँ-

= {(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6), (3, 6), (6, 3), (4, 5), (5, 4)}
इनकी कुल संख्या = 10
अतः अनुकूल स्थितियाँ = 10
∴ अभीष्ट प्रायिकता = $\frac{10}{36}$ = $\frac{5}{18}$

प्रश्न 6. एक अलीप वर्ष में केवल 52 रविवार आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हल- अलीप वर्ष में दिनों की संख्या = 365
∴ अत: सप्ताहों की संख्या = $\frac{365}{7}$ = 52 सप्ताह तथा 1 दिन शेष 52 सप्ताह का अर्थ है कि अलीप वर्ष में 52 रविवार तो होंगे। ही। अब 1 शेष दिन निम्न में से कोई हो सकता है–

(रविवार, सोमवार, मंगलवार, बुधवार, गुरुवार, शुक्रवार, शनिवार)
इनकी कुल स्थितियाँ = 1
अतः नि:शेष स्थितियाँ = 7

अब 52 रविवार तो अलीप वर्ष में होते ही हैं। इसलिए शेष 1 दिन रविवार न होकर अन्य दिवस होना चाहिए।
अतः अनुकूल 'स्थितियाँ = 6
अतः अलीप वर्ष में 52 रविवार आने की प्रायिकता = $\frac{6}{7}$

प्रश्न 7. ताश की एक गड्डी के 52 पत्तों में से एक पत्ता खींचा जाता है, उस पत्ते के इक्का होने के पक्ष में संयोगानुपात ज्ञात कीजिए।

हल- यहाँ कुल स्थितियाँ = 52
अर्थात् नि:शेष स्थितियाँ = 52
इक्का होना अनुकूल स्थिति है।

अर्थात् अनुकूल स्थितियाँ = 4 (4 इक्के होते हैं)
प्रतिकूल स्थितियाँ = (52 − 4) = 48
अतः घटना के पक्ष में संयोगानुपात ।

= अनुकूल स्थितियाँ : प्रतिकूल स्थितियाँ
= 4 : 48
= 1 : 12

प्रश्न 8. 12 विद्यार्थियों की एक कक्षा में 5 लड़के और शेष लडकियाँ हैं । एक विद्यार्थी के चयन में लड़की होने के विपक्ष में संयोगानुपात ज्ञात कीजिए।

हल- विद्यार्थियों की कुल संख्या = 12
विद्यार्थी के चयन की नि:शेष स्थितियाँ = 12
विद्यार्थी के लड़की होने की अनुकूल स्थितियाँ

= लड़कियों की संख्या
= (12 − 5) = 7

तथा विद्यार्थी के लड़की नहीं होने की अनुकूल स्थितियाँ

= 12 − 7 = 5 प्रतिकूल स्थितियाँ
अतः लड़की होने के विपक्ष में संयोगानुपात

= प्रतिकूल स्थितियाँ : अनुकूल स्थितियाँ
= 5 : 7

प्रश्न 9. n व्यक्ति एक गोल मेज के चारों तरफ बैठते हैं। दो विशिष्ट व्यक्तियों के एक साथ बैठने के विपक्ष में क्या संयोगानुपात होंगे ?

हल- n व्यक्तियों के गोल मेज के चारों तरफ बैठने के कुल तरीके होंगे =

$\lfloor\underline{n-1}$

यदि दो विशिष्ट व्यक्ति एक साथ बैठते हैं तो शेष (n − 2) व्यक्ति =

$\lfloor\underline{n-1}$

तरीकों से बैठ सकते हैं। परन्तु वे दोनों भी एक साथ =

$\lfloor\underline{2}$

तरीकों से बैठ सकते हैं। अतः दो विशिष्ट व्यक्तियों के साथ बैठने की अनुकूल स्थितियाँ

$$= \lfloor\underline{n-2} \times \lfloor\underline{2}$$

∴ दो विशिष्ट व्यक्तियों के साथ बैठने की प्रायिकता

$$= \frac{\lfloor\underline{n-2} \times \lfloor\underline{2}}{\lfloor\underline{n-1}}$$

$$= \frac{2 \times \lfloor\underline{n-2}}{(n-1)\lfloor\underline{n-1}} = \frac{2}{(n-1)}$$

अत: एक साथ बैठने के विपक्ष में संयोगानुपात

$$= \frac{P(\bar{A})}{P(A)} = \frac{1 - \frac{2}{n-1}}{\frac{2}{n-1}}$$

$$= \frac{n-1-2}{2}$$

$$= (n-3) : 2$$

प्रश्न 10. तीन पत्र तथा तीन उनके संगत लिफाफे हैं। यदि सभी पत्र लिफाफों में यादृच्छया रखे जाते हैं, तो सभी पत्रों के सही लिफाफों में न रखने की क्या प्रायिकता है?

हल- तीन पत्रों के तीन लिफाफों में रखे जाने के कुल तरीके

$$= \underline{|3} = 3 \times 2 \times 1 = 6$$

सही लिफाफों में रखने का केवल एक ही तरीका है।
अतः सभी पत्रों के सही लिफाफों में रखे जाने की प्रायिकता

$$= \frac{1}{\underline{|3}} = \frac{1}{6}$$

∴ सभी पत्रों के सही लिफाफों में न रखे जाने की प्रायिकता

$$= 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

प्रश्न 11. प्रथम दो सौ पूर्णाकों में से एक अंक यादृच्छया चुना जाता है, इसकी 6 या 8 से विभाजित होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हल- पूर्णांकों की संख्या = 200
अतः नि:शेष स्थितियाँ = 200

अनुकूल स्थितियाँ = (6 से भाज्य संख्या) + (8 से भाज्य संख्या) − (24 से भाज्य संख्याएँ)

= {6, 12, 18, ... 198} + {8, 16, 24,..... 200} − {24, 48, 72, ... 192}
= 33 + 25 − 8
= 58 − 8
= 50
अतः अभीष्ट प्रायिकता = $\frac{50}{200} = \frac{1}{4}$

प्रश्न 12. तीन पासों की एक फेंक में योग 15 से अधिक आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हल- तीन पासे फेंकने पर नि:शेष स्थितियाँ होंगी = 6 x 6 x 6 = 216
प्रदत्त घटना के लिए अनुकूल स्थितियाँ होंगी = अंकों का योग 15 से अधिक लाना है अर्थात् 16, 17 तथा 18 लाना।

- तीनों पासों के अंकों का योग 16 निम्नलिखित 6 प्रकार से आ सकता है- (4, 6, 6); (6, 4, 6); (6, 6, 4); (6, 5, 5); (5, 6, 5); (5, 5, 6)
- तीनों पासों के अंकों का योग 17 निम्नलिखित 3 प्रकार से . हो सकता है- (5, 6, 6), (6, 5, 6), (6, 6, 5) अर्थात् तीन तरह से
- तीनों पासों के अंकों का योग 18 निम्नलिखित 1 प्रकार से हो सकता है (6, 6, 6)

∴ तीनों पासों के अंकों का योग 15 से अधिक प्राप्त होने के कुल तरीकों की संख्या = 6 + 3 + 1 = 10
तब तीनों पासों के अंकों का योग 15 से अधिक आने की प्रायिकता
$= \frac{10}{216} = \frac{5}{108}$

प्रश्न 13. शब्द ANGLE के अक्षर यादृच्छिक क्रम से एक पंक्ति में व्यवस्थित किये जाते हैं। स्वरों के एक साथ आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हल- ANGLE को एक पंक्ति में व्यवस्थित करने पर बनने वाले क्रमचयों की संख्या

$= \lfloor 5 = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$
अतः निःशेष स्थितियाँ = 120
अब स्वर एक साथ आने पर निम्न स्थिति सम्भव होगी—
(AE), N, G, L
अतः अनुकूल स्थितियाँ $= \lfloor 4 \times \lfloor 2$
$= 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 2 \times 1$
$= 48$
अतः अभीष्ट प्रायिकता $= \frac{48}{120} = \frac{2}{5}$

प्रश्न 14. एक ताश की गड्डी में से एक पत्ता यादृच्छिक रूप से निकाला जाता है। इसके इक्का, राजा या रानी होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हल- ताश की गड्डी में पत्तों की संख्या = 52
अतः निःशेष स्थितियाँ = 52
ताश की गड्डी में इक्का, राजा या रानी की संख्या

= 4 + 4 + 4 = 12
अतः अनुकूल स्थितियाँ = 12
अतः अभीष्ट प्रायिकता $= \frac{12}{52} = \frac{3}{13}$

प्रश्न 15. एक थैले में 6 सफेद, 7 लाल और 5 काली गेंदें हैं। इनमें से 3 गेंदें यादृच्छिक रूप से एक के बाद एक निकाली जाती हैं। इन तीनों गेंदों के सफेद होने की प्रायिकता क्या होगी जबकि निकाली

गई गेंद वापस थैले में न रखी जाए?

हल- 6 सफेद, 7 लाल, 5 काली गेंदें हैं।
कुल गेंदों की संख्या = 6 + 7 + 5 = 18

जिनमें से 3 गेंद निकालनी हैं।

∴ कुल नि:शेष स्थितियाँ = $^{18}C_3$
सफेद गेंदों की संख्या = 6
जिनमें से तीन गेंद लेनी हैं = $^{6}C_3$

∴ तीनों गेंदों के सफेद होने की प्रायिकता = $\frac{^{6}C_3}{^{18}C_3}$

$$= \frac{\frac{\lfloor 6}{\lfloor 3 \times \lfloor 3}}{\frac{\lfloor 18}{\lfloor 15 \times \lfloor 3}} = \frac{20}{3 \times 17 \times 16}$$

$$= \frac{5}{12 \times 17}$$

$$= \frac{5}{204}$$

Ex 14.3

प्रश्न 1. घटना A की प्रायिकता $\frac{2}{11}$ है तो घटना 'A नहीं ' की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हल- घटना 'A नहीं ' की प्रायिकता = P(A')
= 1 − P(A)
= 1 − $\frac{2}{11}$
= $\frac{9}{11}$

प्रश्न 2. ग्राम पंचायत में चार पुरुष व छः स्त्रियाँ सदस्य हैं। यदि एक समिति के लिए यादृच्छया एक सदस्य चुना जाता है, तो एक स्त्री के चुने जाने की कितनी सम्भावना है ?

हल- कुल सदस्य = 4 पुरुष सदस्य + 6 स्त्रियाँ सदस्य
= 10 सदस्य

एक समिति के लिए याद्दच्छया एक सदस्य चुना जाता है तो कुल नि:शेष स्थितियाँ = $^{10}C_1$ = 10
तब एक स्त्री के चुने जाने की सम्भावना

$$= \frac{^6C_1}{^{10}C_1} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

प्रश्न 3. एक पासा उछाले जाने पर निम्नलिखित घटनाओं की प्रायिकता ज्ञात कीजिए
(i) एक अभाज्य संख्या का आना,
(ii) 1 या 1 से छोटी संख्या आना,
(iii) 6 से छोटी संख्या का आना।

हल- एक पासा उछालने पर नि:शेष स्थितियों का समुच्चय
= {1, 2, 3, 4, 5, 6}
तब

(i) अभाज्य संख्याएँ = {2, 3, 5}
एक अभाज्य संख्या आने की प्रायिकता

$$= \frac{\text{अनुकूल स्थितियों की संख्या}}{\text{कुल स्थितियाँ}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

(ii) एक या एक से छोटी संख्याएँ = {1}
अतः अभीष्ट प्रायिकता = $\frac{1}{6}$

(iii) छः से छोटी संख्याएँ = {1, 2, 3, 4, 5}
अतः अभीष्ट प्रायिकता = $\frac{5}{6}$

प्रश्न 4. एक सिक्का चार बार उछाला जाता है। इन उछालों में से कम से कम तीन बार चित्त आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हल- एक सिक्का चार बार उछाला जाता है, एक सिक्के के एक उछाल में चित्त या पट दो स्थितियाँ बनती हैं। अत: 4 उछाल में बनने वाली कुल स्थितियाँ
= 2 × 2 × 2 × 2
= 16

अनुकुल स्थितियों में कम से कम तीन बार चित्त आना चाहिए।
∴ कम से कम तीन बार चित्त आने के तरीके
= $^4C_3 + {^4C_4}$
= 4 + 1

= 5

∴ अभीष्ट प्रायिकता = $\frac{5}{16}$

अन्य विधि–यहाँ प्रतिदर्श समष्टि = {HHHH, HHHT, HHTH, HTHH, THHH, HHTT, HTHT, HTTH, TTHH, THTH, THHT, TTTH, TTHT, THTT, HTTT, TTTT}
कुल = 16 स्थितियाँ, चित्त = H, पट = T

यहाँ कम से कम तीन बार चित्त आने वाली स्थितियाँ = {HHHH, HHHT, HHTH, HTHH, THHH}
कुल = 5 स्थितियाँ
अतः कम से कम तीन बार चित्त आने की प्रायिकता
= $\frac{5}{16}$

प्रश्न 5. यदि एक सिक्के तथा एक पासे को एक साथ उछाला जाये, तो सिक्के पर चित्त तथा पासे पर सम संख्या आने की प्रायिकता क्या होगी ?

हल- सिक्का फेंकने पर चित्त आने की प्रायिकता को A से प्रदर्शित करें तो।
P(A) = $\frac{1}{2}$

पासे पर सम अंक 2, 4, 6 आ सकते हैं। पासे पर सम संख्या आने की प्रायिकता

$$P(B) = \frac{\text{अनुकूल स्थितियाँ}}{\text{कुल नि:शेष स्थितियाँ}}$$

$$= \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$P(B) = \frac{1}{2}$$

प्रायिकता का गुणन प्रमेय या मिश्र प्रायिकता नियम से

$$P(AB) = P(A) \, . \, P(B)$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$$

[∵ A तथा B स्वतन्त्र घटनाएँ हैं)

$$= \frac{1}{4}$$

अन्य विधि–यहाँ एक सिक्के तथा एक पासे को एक साथ उछालें तो प्राप्त कुल स्थितियाँ = {H1, H2, H3, H4, H5, H6, T1, T2, T3, T4, T5, T6}
कुल = 12 स्थितियाँ

सिक्के पर चित्त तथा पासे पर सम संख्या आने वाली अनुकूल स्थितियाँ = {H2, H4, H6}

$$\text{अतः अभीष्ट प्रायिकता} = \frac{\text{अनुकूल स्थितियाँ}}{\text{कुल स्थितियाँ}} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

प्रश्न 6. 20 मनुष्यों की कम्पनी में 5 स्नातक हैं। यदि यादृच्छिक रूप में 3 मनुष्य चुने जाये तो क्या प्रायिकता है कि उनमें से एक स्नातक हैं।

हल- 20 में से 3 मनुष्य चुनने के तरीके
= $^{20}C_3$
अत: नि:शेष स्थितियाँ = $^{20}C_3$

अब एक स्नातक होने की स्थिति = $^{5}C_1$
तथा शेष दो अन्य होने की स्थिति = $^{15}C_2$
अतः अनुकूल स्थितियाँ = $^{15}C_2 \times {}^{5}C_1$

$$\therefore \text{अभीष्ट प्रायिकता} = \frac{^{15}C_2 \times {}^{5}C_1}{^{20}C_3}$$

$$= \frac{\frac{15\times14}{2\times1}\times5}{\frac{20\times19\times18}{3\times2\times1}}$$

$$= \frac{15\times14\times5\times3}{20\times19\times18}$$

$$= \frac{5\times7}{2\times19\times2} = \frac{35}{76}$$

अब कम से कम एक स्नातक होने की प्रायिकता—

$$= \frac{^{15}C_2\times{}^{5}C_1 + {}^{15}C_1\times{}^{5}C_2 + {}^{5}C_3}{^{20}C_3}$$

$$= \frac{15\times7\times5+15\times5\times2+10}{20\times19\times3}$$

$$= \frac{5[105+30+2]}{4\times3\times19}$$

$$= \frac{137}{228}$$

प्रश्न 7. किसी समस्या के हल करने के लिए A के विपक्ष में संयोगानुपात 4 : 3 है, B के पक्ष में संयोगानुपात 7 : 5 है। क्या सम्भावना है कि

(i) समस्या हल हो जायेगी ?
(ii) समस्या हल नहीं होगी?
(iii) केवल एक के द्वारा ही हल हो पायेगी ?

हल- A के विपक्ष में संयोगानुपात = 4 : 3
अत: A द्वारा समस्या हल होने की प्रायिकता P(A) = $\frac{3}{4+3}$
P(A) = $\frac{3}{7}$

अतः A द्वारा समस्या हल नहीं होने की प्रायिकता
P(A') = P($\overline{A}$) = $\frac{4}{7}$
अब B के पक्ष में संयोगानुपात = 7 : 5

अत: B द्वारा समस्या हल करने की प्रायिकता
P(B) = $\frac{7}{7+5}$ = $\frac{7}{12}$
तथा B द्वारा समस्या हल नहीं करने की प्रायिकता
P(B') = P($\overline{A}$) = $\frac{5}{12}$

(i) समस्या हल हो पायेगी यदि A अथवा B दोनों में से एक अथवा दोनों समस्या को हल कर दें।

अर्थात् $P = P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap B) + P(A \cap B)$
A व B स्वतन्त्र घटनाएँ हैं, अत:

$$P = P(A) \times P(\overline{B}) + P(\overline{A}) \times P(B) + P(A) \times P(B)$$
$$= \frac{3}{7} \times \frac{5}{12} + \frac{4}{7} \times \frac{7}{12} + \frac{3}{7} \times \frac{7}{12}$$
$$= \frac{15}{84} + \frac{28}{84} + \frac{21}{84} = \frac{64}{84} = \frac{16}{21}$$

(ii) समस्या हल नहीं होगी यदि A व B दोनों ही समस्या को हल नहीं कर पाये अर्थात् अभीष्ट प्रायिकता

$$P = P(\overline{A} \cap \overline{B})$$
$$= P(\overline{A}) \times P(\overline{B})$$
$$= \frac{4}{7} \times \frac{5}{12} = \frac{5}{21}$$

(iii) केवल एक के द्वारा हल होने की अभीष्ट प्रायिकता

$$\begin{aligned} P &= P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap B) \\ &= P(A) \times P(\overline{B}) + P(\overline{A}) \times P(B) \\ &= \frac{3}{7} \times \frac{5}{12} + \frac{4}{7} \times \frac{7}{12} \\ &= \frac{15}{84} + \frac{28}{84} = \frac{43}{84} \end{aligned}$$

प्रश्न 8. एक उपकरण तभी काम करेगा जबकि उसके तीनों घटक A, B और C काम कर रहे हों। एक वर्ष में A के खराब होने की प्रायिकता 0.15, B की 0.05 और C की 0.10 है। वर्ष के अन्त होने से पहले उपकरण के खराब होने की प्रायिकता क्या है ?

हल- यदि A, B, C के खराब होने की प्रायिकता क्रमशः P(A), P(B) और P(C) से व्यक्त करें, तो

P(A) = 0.15
P(B) = 0.05
P(C) = 0.10
P($\overline{A}$) = 1 − 0.15 = 0.85
P($\overline{B}$) = 1 − 0.05 = 0.95
P($\overline{C}$) = 1 − 0.10 = 0.90

चूँकि घटक A, B, C का ठीक काम करना परस्पर स्वतन्त्र घटनाएँ हैं। इसलिए मिश्र प्रायिकता प्रमेय से

P ($\overline{A}$ $\overline{B}$ $\overline{C}$) = P($\overline{A}$). P($\overline{B}$). P($\overline{C}$)
= 0.85 x 0.95 x 0.90
= 0.72675

अतः तीनों घटकों के ठीक काम करने की प्रायिकता = 0.72675

∴ किसी एक घटक के खराब होने की प्रायिकता
= 1 − 72675
= 0.27325

अब चूँकि उपकरण वर्ष के अन्त से पहले खराब हो जायेगा यदि
उसका कम से कम एक घटक खराब है।
∴ अभीष्ट प्रायिकता = 0.27326

प्रश्न 9. एक ताश की गड्डी में से दो बार में दो-दो पत्ते यादृच्छिक रूप से निकाले जाते हैं। यदि पहली बार निकाले गये पत्ते गड्डी में वापस नहीं रखे जाते हैं, तो पहली बार में दो इक्के और दूसरी बार में दो

राजा निकलने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हल- ताश की गड्डी में 52 पत्ते होते हैं। इन पत्तों में से 2 पत्ते निकालने की कुल नि:शेष स्थितियाँ होंगी = $^{52}C_2$
ताश की गड्डी में कुल चार इक्के होते हैं जिनमें 2 इक्के खींचे जाते हैं, इसलिए इनकी कुल अनुकूल स्थितियाँ = $^{4}C_2$

पहली बार 2 इक्के निकालने की प्रायिकता

माना $(P_1) = \frac{\text{अनुकूल स्थितियाँ}}{\text{कुल नि:शेष स्थितियाँ}}$

$= \frac{^4C_2}{^{52}C_2} = \frac{6}{26 \times 51}$

इसी प्रकार से 2 बादशाह निकालने की प्रायिकता ज्ञात करेंगे, उसको हमने P_2 (माना)

$(P_2) = \frac{\text{अनुकूल स्थितियाँ}}{\text{कुल नि:शेष स्थितियाँ}}$

$= \frac{^4C_2}{^{50}C_2} = \frac{6}{25 \times 49}$

प्रायिकता के गुणन प्रमेय से

$P(AB) = P(A) \times P(B)$

$= \frac{6}{26 \times 51} \times \frac{6}{25 \times 49}$

$= \frac{6}{13 \times 17} \times \frac{1}{25 \times 49}$

$= \frac{6}{13 \times 17 \times 25 \times 49}$

$= \frac{6}{270725}$

प्रश्न 10. A और B दो घटनाएँ हैं जिसमें P(A) = $\frac{1}{3}$. P(B) = $\frac{1}{4}$ तथा P(AB) = $\frac{1}{12}$ है, तो $P\left(\frac{B}{A}\right)$ ज्ञात कीजिए।

हल- P(A) = $\frac{1}{3}$

P(B) = $\frac{1}{4}$
यहाँ P(A) x P(B) = $\frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$

अतः P(A) x P(B) = P(AB)
∴ A तथा B स्वतन्त्र घटनाएँ हैं इसलिए
$P\left(\frac{B}{A}\right)$ = P(B) = $\frac{1}{4}$

प्रश्न 11. कल्पना करें कि पुरुष व बच्चों का अनुपात 1: 2 है, प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि एक परिवार में 5 बच्चों में

(i) सभी लड़के होंगे
(ii) उनमें से तीन लड़के एवं दो लड़कियाँ होंगी।

हल- पुरुष व बच्चों का अनुपात = 1 : 2
लड़का होने की प्रायिकता = $\frac{1}{2}$
लड़की होने की प्रायिकता = $1 - \frac{1}{2}$ = $\frac{1}{2}$

(i) परिवार में 5 बच्चों में से सभी लड़के होंगे तब इसकी प्रायिकता

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{32}$$

(ii) तीन लड़के व दो लड़कियाँ होने की प्रायिकता

$$= {}^5C_3 \times \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\right)$$

$$= 10 \times \frac{1}{32}$$

$$= \frac{5}{16}$$

नोट-5 बच्चों में से लड़का (B) व लड़की (G) होने की कुल 32 स्थितियाँ होंगी। जैसे—B1B2B3B4B5; (पाँच लड़के), B1B2B3B4G5; (प्रथम चार लड़के व पाँचवीं लड़की), B1B2B3G4B5, B1B2G3B4B5, B1G2B3B4B5, …… इत्यादि । तीन लड़के व दो लड़कियों की कुल स्थितियाँ 10 होंगी। जैसे— B1B2B3G4G5, B1B2G3G4B5, B1B2G3B4G5; ……. इत्यादि।

प्रश्न 12. A एक निशाने को 6 में से 3 बार सही लगा सकता है, B, 4 में से 2 बार सही लगा सकता है तथा C, 4 में से एक बार सही लगा सकता है। वे एक साथ निशाना लगाते हैं। बताइये कि कम से कम दो व्यक्तियों द्वारा सही निशाना लगाये जाने की प्रायिकता क्या होगी?

हल- A के सही निशाना लगने की प्रायिकता

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$P(\bar{A}) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

B के सही निशाना लगाने की प्रायिकता

$$P(B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$P(\bar{B}) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

C के सही निशाना लगाने की प्रायिकता

$$P(C) = \frac{1}{4}$$

$$P(\bar{C}) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

अतः कम से कम दो व्यक्तियों द्वारा सही निशाना लगाये जाने की प्रायिकता-

$$P = P(A \cap B \cap \bar{C}) + P(A \cap \bar{B} \cap C) + P(\bar{A} \cap B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

$$= P(A) \times P(B) \times P(\bar{C}) + P(A) \times P(\bar{B}) \times P(C) + P(\bar{A}) \times P(B) \times P(C) + P(A) \times P(B) \times P(C)$$

$$= \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}$$

$$= \frac{3}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16}$$

$$= \frac{6}{16} = \frac{3}{8}$$

Miscellaneous Exercise

प्रश्न 1. एक सिक्के को n बार उछालने पर n(S) है

(A) 2n
(B) 2^n
(C) n^2

(D) n/2

हल : (B)

प्रश्न 2. दो पासों के उछालने पर उनका योगफल 3 आने की प्रतिदर्श समष्टि है

(A) (1, 2)
(B) {(2, 1)}
(C) {(3, 3)}
(D) {(1, 2), (2, 1}}

हल : (D)

प्रश्न 3. एक सिक्का तथा एक पासा एक साथ उछालने पर प्रतिदर्श समष्टि के अवयवों की संख्या है

(A) 12
(B) 6
(C) 64
(D) 36

हल : (A)

प्रश्न 4. सी अभिप्रयोग का प्रत्येक परिणाम कहलाता है

(A) प्रतिदर्श समष्टि
(B) यादृच्छिक परीक्षण
(C) प्रतिदर्श बिन्दु
(D) क्रमित-युग्म

हल : (C)

प्रश्न 5. तीन सिक्कों के उछालने पर कम से कम शीर्ष आने की घटना E हो, तो n(E) होगा

(A) 6
(B) 3
(C) 4
(D) 8

हल : (C)

प्रश्न 6. यदि $E_1 \cap E_2 = \Phi$ हो, तो E_1 व E_2 घटनाएँ होंगी
(A) अपवर्जी
(B) स्वतन्त्र
(C) आश्रित
(D) पूरक

हल : (D)

प्रश्न 7. एक लीप वर्ष में 53 सोमवार होने की अनुकूल घटनाएँ होंगी
(A) 7
(B) 2
(C) 1
(D) 14

हल : (B)

प्रश्न 8. एक कलश में 4 सफेद, 3 काली तथा 2 लाल गेंदें हैं। तीनों गेंदे अलग-अलग रंग की होने की अनुकूल स्थितियाँ होंगी-

(A) 9
(B) 24
(C) 12
(D) 7

हल : (B)

प्रश्न 9. दो परस्पर अपवर्जी घटनाओं में $P(A \cup B)$ का मान है–

(A) $P(A) + P(B)$
(B) $P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
(C) $P(A) . P(B)$
(D) $P(A). P(B/A)$

हल : (A)

प्रश्न 10. तीन विद्यार्थियों A, B तथा C के द्वारा प्रश्न हल करने की प्रायिकताएँ क्रमशः $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}$ तथा $\frac{1}{4}$ हैं तो कम से कम एक द्वारा प्रश्न हल करने की प्रायिकता है-

(A) $\frac{1}{24}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{3}{4}$ (D) $\frac{1}{9}$

हल : (C)

प्रश्न 11. दो पासों के एक साथ उछाले जाने पर उन पर प्रदर्शित अंकों का अन्तर एक होने की प्रायिकता होगी-

(A) $\frac{5}{18}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{2}{9}$ (D) $\frac{7}{36}$

हल : (A)

प्रश्न 12. ताश की गड्डी से एक पत्ता निकाला जाता है, इसके लाल या काला पत्ता होने की प्रायिकता है-

(A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{3}{4}$ (D) $\frac{26}{51}$

हल : (B)

प्रश्न 13. दो पासों को उछालने पर अंकों का योग 4 का गुणज आने की प्रायिकता है

(A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{9}$ (D) $\frac{5}{9}$

हल : (A)

प्रश्न 14. 1, 2, 3, 4, 5, 6 एवं 8 अंकों से 5 अंकों की संख्याएँ बनाई जाएँ तो दोनों सिरों पर सम अंक आने की प्रायिकता है

(A) $\frac{5}{7}$ (B) $\frac{4}{7}$ (C) $\frac{3}{7}$ (D) $\frac{2}{7}$

हल : (D)

प्रश्न 15. तीन पासों की फेंक में तीनों पर समान अंक आने की प्रायिकता

(A) $\frac{1}{36}$ (B) $\frac{3}{22}$ (C) $\frac{1}{6}$ (D) $\frac{1}{18}$

हल : (A)

प्रश्न 16. एक तैराकी दौड़ में A के पक्ष में संयोगानुपात 2 : 3 तथा B के विपक्ष में संयोगानुपात 4 : 1 है। A या B के दौड़ जीतने की प्रायिकता है

(A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{2}{5}$ (C) $\frac{3}{5}$ (D) $\frac{4}{5}$

हल : (C)

प्रश्न 17. एक पंक्ति में यादृच्छिक रूप से 10 विद्यार्थी बैठे हैं। दो विशेष प्रकार के विद्यार्थी पास-पास नहीं बैठने की प्रायिकता है

(A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{2}{5}$ (C) $\frac{3}{5}$ (D) $\frac{4}{5}$

हल : (D)

प्रश्न 18. एक ढेरी में 12 मद हैं जिसमें 4 दोषपूर्ण हैं । 3 मद यादृच्छिक रूप से एक के बाद एक करके बिना देरी में वापस रखे निकाले ज़ाते हैं। उनमें कोई भी दोषपूर्ण नहीं होने की प्रायिकता है–

(A) $\frac{3}{55}$ (B) $\frac{13}{55}$ (C) $\frac{14}{55}$ (D) $\frac{17}{55}$

हल : (C)

प्रश्न 19. किसी निश्चित घटना की प्रायिकता होगी

(A) 0 (B) $\frac{1}{2}$ (C) 1 (D) 2

हल : (C)

प्रश्न 20. एक परिवार में तीन बच्चों में से कम से कम एक लड़का हो तो उस परिवार में 2 लड़के और 1 लड़की होने की प्रायिकता है

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{3}{4}$

हल : (B)

प्रश्न 21. एक अध्यापक के कक्षा में परीक्षा लेने की प्रायिकता है। यदि एक विद्यार्थी दो बार अनुपस्थित रहे, तो वह कम से कम एक परीक्षा नहीं दे सकने की प्रायिकता है

(A) $\frac{9}{25}$ (B) $\frac{11}{25}$ (C) $\frac{13}{25}$ (D) $\frac{23}{25}$

हल : (A)

प्रश्न 22. किसी वर्ष में जो लीप वर्ष न हो में 53 रविवार आने की प्रायिकता बताइए।

हल- एक अलीप वर्ष में 365 दिन होते हैं अर्थात् एक अलीप वर्ष में $\frac{365}{7}$ = 52 सप्ताह व 1 दिन होते हैं। इससे यह अर्थ निकलता है कि 52 सप्ताह में 52 रविवार तो होंगे ही, अब 1 दिन जो बचा है वह निम्न में से एक हो सकता हैं –

(रविवार, सोमवार, मंगलवार, बुधवार, गुरुवार, शुक्रवार, शनिवार)
अतः कुल नि:शेष स्थितियाँ = 7

रविवार के पक्ष में अनुकूल स्थिति = 1
अतः अभीष्ट प्रायिकता = $\frac{1}{7}$

प्रश्न 23. A और B दो परस्पर अपवर्जी घटनाएँ ऐसी हैं कि P(A) = 0.3, P(B) = K और P(A ∪ B) = 0.5 तो K का मान ज्ञात कीजिए।

हल- यहाँ A व B दो परस्पर अपवर्जी घटनाएँ हैं अतः $P(A \cap B) = 0$
अब P(A) = 0.3, P(B) = K
तथा $P(A \cup B) = 0.5$

$P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.5$
$0.3 + K - 0 = 0.5$
$K = 0.5 - 0.3$
$K = 0.2$

प्रश्न 24. 'PEACE' शब्द के अक्षरों से बनने वाले शब्दों में दोनों E के साथ आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हल- यहाँ नि:शेष स्थितियाँ = PEACE शब्द के अक्षरों से बनने वाले

सभी शब्दों की संख्या = $\frac{\lfloor 5}{\lfloor 2}$

तथा अनुकूल स्थितियाँ = $\lfloor 4$

$\therefore$ अभीष्ट प्रायिकता $= \frac{\lfloor 4}{\lfloor 5 / \lfloor 2}$

$$= \frac{4.3.2.1}{5.4.3}$$

$$= \frac{2}{5}$$

प्रश्न 25. एक थैले में 6 लाल तथा 8 काली गेंदें हैं। चार-चार गेंदों को दो बार उससे निकाला जाता है। पहली बार के चारों गेंदों को निकालकर पुनः उसमें रख दिया जाता है। क्या प्रायिकता होगी कि पहली बार चारों गेंदें लाल तथा दूसरी बार चारों गेंदें काली हों ?

हल- थैले में कुल गेंदें = 6 + 8 = 14

$\therefore$थैले में से चार गेंदें निकालने के तरीके = $^{14}C_4$
6 लाल गेंदों में से 4 गेंदें निकालने के कुल तरीके = $^{6}C_4$

$\therefore$ पहली बार 4 लाल गेंदें आने की प्रायिकता $= \frac{^{6}C_4}{^{14}C_4}$

8 काली गेंदों में से 4 गेंदें निकालने के तरीके = $^{8}C_4$

$\therefore$ दूसरी बार 4 काली गेंदें आने की प्रायिकता $= \frac{^{8}C_4}{^{14}C_4}$

उपर्युक्त घटनाएँ स्वतन्त्र हैं, अत:

अभीष्ट प्रायिकता $= \frac{^{6}C_4}{^{14}C_4} \times \frac{^{8}C_4}{^{14}C_4}$

$$= \frac{\frac{\lfloor 6}{\lfloor 4 \times \lfloor 2} \times \frac{\lfloor 8}{\lfloor 4 \lfloor 4}}{\frac{\lfloor 14}{\lfloor 4 \lfloor 10} \times \frac{\lfloor 14}{\lfloor 4 \lfloor 10}}$$

$$= \frac{\lfloor 6}{\lfloor 2} \times \frac{\lfloor 8}{\lfloor 4} \times \frac{\lfloor 10 \times \lfloor 10}{\lfloor 14 \times \lfloor 14}$$

$$= \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5}{14 \times 13 \times 12 \times 11 \times 14 \times 13 \times 12 \times 11}$$

$$= \frac{150}{143143}$$

प्रश्न 26. एक व्यक्ति 5 में से 3 बार सत्य बोलता है। उसका कथन है कि 6 सिक्कों को उछालने पर 2 चित्त आये तो इस घटना के वास्तविक रूप में सत्य होने की क्या प्रायिकता है?

हल- माना व्यक्ति द्वारा कहा गया कथन कि 6 सिक्कों के उछालने पर 2 चित्त आये, E से निरूपित है। माना S_1, 6 सिक्कों को

उछालने पर 2 चित्त आना और S_2, 6 सिक्कों को उछालने पर 2 चित्त नहीं आना है । तब
$P(S_1)$ = 6 सिक्कों को उछालने पर 2 चित्त आने की प्रायिकता

$$= {}^6C_2\left(\frac{1}{2}\right)^{6-2}\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$= {}^6C_2\left(\frac{1}{2}\right)^6$$

$$= \frac{\lfloor 6}{\lfloor 2 \lfloor 4} \times \frac{1}{2^6}$$

$$= \frac{6 \times 5 \times \lfloor 4}{2 \times \lfloor 4} \times \frac{1}{2^6}$$

$$= \frac{15}{64}$$

$P(S_2)$ = 6 सिक्कों को उछालने पर 2 चित्त नहीं आना

$$= 1 - P(\bar{S}_1) = 1 - \frac{15}{64} = \frac{49}{64}$$

$P\left(\frac{E}{S_1}\right)$ = जब 6 सिक्कों को उछालने पर 2 चित्त आये तब व्यक्ति द्वारा सत्य कथन की प्रायिकता

$= \frac{3}{5}$ [∵ व्यक्ति 5 में से 3 बार सत्य बोलता है।]

$P\left(\frac{E}{S_2}\right)$ = जब 6 सिक्कों को उछालने पर 2 चित्त नहीं आये फिर भी व्यक्ति द्वारा कहना अर्थात् व्यक्ति द्वारा सत्य नहीं बोलने की प्रायिकता

$$= 1-\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$$

तब $P\left(\frac{S_1}{E}\right)$ = 6 सिक्कों को उछालने पर 2 चित्त आने का वास्तविक रूप में सत्य होने की प्रायिकता

$$= \frac{P(S_1)\,P\left(\frac{E}{S_1}\right)}{P(S_1)\,P\left(\frac{E}{S_1}\right)+P(S_2)\,P\left(\frac{E}{S_2}\right)}$$ [बेस प्रमेय से]

$$= \frac{\frac{15}{64}\times\frac{3}{5}}{\frac{15}{64}\times\frac{3}{5}+\frac{49}{64}\times\frac{2}{5}}$$

$$= \frac{45}{45+98}=\frac{45}{143}$$

प्रश्न 27. दो पासों का एक साथ फेंकने पर इस बात की क्या प्रायिकता है। कि उन पर न तो समान अंक आये और न ही अंकों का योग 9 आये।

हल- यहाँ समस्त सम्भावित स्थितियाँ–

{(1,1), (1, 2), ... (1, 6)
(2, 1) .... (2, 6)
(3, 1) .... (3, 6)

(4, 1) ………… (4, 6)
(5, 1) ………… (5, 6)
(6, 1) ………….. (6, 6)}

कुल नि:शेष स्थितियाँ = 36
समान अंक व 9 योग आने की स्थितियाँ = {(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6), (3, 6), (6, 3), (4, 5), (5,4)}

कुल प्रतिकूल स्थितियाँ = 10
अतः अनुकूल स्थितियाँ = 36 − 10 = 26
अभीष्ट प्रायिकता = $\frac{26}{36}$ = $\frac{13}{18}$

प्रश्न 28. तीन सिक्कों को एक साथ उछाला जाता है, तो प्रायिकता ज्ञात कीजिए जबकि

(i) ठीक दो शीर्ष हों
(ii) कम से कम दो शीर्ष हों
(iii) अधिक से अधिक दो शीर्ष हों
(iv) तीन शीर्ष हों

हल- तीन सिक्कों को एक साथ उछालने पर आने वाली सम्भावित स्थितियाँ = [HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT]
कुल संख्या = 8
अतः नि:शेष स्थितियाँ = 8

(i) अनुकूल स्थितियाँ = [HHT, HTH, THH] = संख्या 3
अतः अभीष्ट प्रायिकता = $\frac{3}{8}$

(ii) कम से कम दो शीर्ष होने पर अनुकूल स्थितियाँ = [HHH, HHT, HTH, THH]
संख्या = 4
अतः अभीष्ट प्रायिकता = $\frac{4}{8}$ = $\frac{1}{2}$

(iii) अधिक से अधिक दो शीर्ष होने पर अनुकूल स्थितियाँ
[HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT]
संख्या = 7.
अतः अभीष्ट प्रायिकता = $\frac{7}{7}$

(iv) तीनों शीर्ष होने पर अनुकूल स्थितियाँ = [HHH]
संख्या = 1
अतः अभीष्ट प्रायिकता = $\frac{1}{8}$

प्रश्न 29. एक घुड़दौड़ में 4 घोड़े A, B, C, D दौड़ते हैं। A, B, C व D के पक्ष में संयोगानुपात क्रमशः 1 : 3, 1 : 4, 1 : 5 तथा 1 : 6 है। इनमें से किसी एक के जीतने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हल- A, B, C व D के पक्ष में संयोगानुपात दिए गए हैं, इसलिए

$$P(A) = \frac{1}{1+3} = \frac{1}{4}$$

$$P(B) = \frac{1}{1+4} = \frac{1}{5}$$

$$P(C) = \frac{1}{1+5} = \frac{1}{6}$$

$$P(D) = \frac{1}{1+6} = \frac{1}{7}$$

यहाँ पर परस्पर अपवर्जी घटनाएँ हैं।

सूत्र—

$$\therefore P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n)$$

$$\therefore \quad P(A + B + C + D) = P(A) + P(B) + P(C) + P(D)$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} = \frac{9}{20} + \frac{13}{42}$$

$$= \frac{189 + 130}{420} = \frac{319}{420}$$

प्रश्न 30. अगले 25 वर्षों में एक व्यक्ति के जीवित रहने की प्रायिकता $\frac{3}{5}$ और उसकी पत्नी के उन्हीं 25 वर्षों जीवित रहने की प्रायिकता $\frac{2}{3}$ है। निम्नलिखित प्रायिकताएँ ज्ञात कीजिए

(i) दोनों के जीवित रहने की।
(ii) किसी के भी जीवित न रहने की।
(iii) कम से कम एक के जीवित रहने की।
(iv) केवल पत्नी के जीवित रहने की ।

हल- अगले 25 वर्षों तक व्यक्ति के जीवित रहने की प्रायिकता

P(A) = $\frac{3}{5}$
∴ P($\overline{A}$) = $1 - \frac{3}{5}$ = $\frac{2}{5}$

व्यक्ति की पत्नी के अगले 25 वर्षों तक जीवित रहने की प्रायिकता
P(B) = $\frac{2}{3}$
∴ P($\overline{B}$) = $1 - \frac{2}{3}$ = $\frac{1}{3}$

(i) दोनों के जीवित रहने की प्रायिकता

P = P(A∩B) = P(A) x P(B)

$= \frac{3}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{5}$

(ii) किसी के भी जीवित न रहने की प्रायिकता

$P = P(\overline{A} \cap \overline{B})$

$= P(\overline{A}) \times P(\overline{B})$

$= \frac{2}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{15}$

(iii) कम के कम एक के जीवित रहने की प्रायिकता

$P = P(A \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap B) + P(A \cap B)$

$= P(A).P(\overline{B}) + P(\overline{A}).P(B) + P(A).P(B)$

$= \frac{3}{5} \times \frac{1}{3} + \frac{2}{5} \times \frac{2}{3} + \frac{3}{5} \times \frac{2}{3}$

$= \frac{3}{15} + \frac{4}{15} + \frac{6}{15} = \frac{13}{15}$

(iv) केवल पत्नी के जीवित रहने की प्रायिकता

$P = P(\overline{A} \cap B)$

$= P(\overline{A}) \times P(B)$

$= \frac{2}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{15}$

प्रश्न 31. किसी तथ्य में A और B स्वतन्त्र गवाह हैं। A के सत्य बोलने की प्रायिकता x तथा B के सत्य बोलने की प्रायिकता है। यदि किसी कथन पर A और B दोनों सहमत हों तो सिद्ध कीजिए कि इस कथन के सत्य होने की प्रायिकता = $\frac{xy}{1-x-y+2xy}$ होगी ।

हल- माना A तथा B के सत्य बोलने की घटनाएँ क्रमशः x और y हैं।

∴ P(X) = x
तथा P(Y) = y

⇒ P($\overline{X}$) = (1 − x) तथा P($\overline{Y}$) = (1 − y)

यदि Z किसी कथन पर दोनों की सहमति की घटना को व्यक्त करता है, तो

$$Z = AB \cup \overline{A}\,\overline{B}$$

$$P(Z) = P\left(AB \cup \overline{A}\,\overline{B}\right)$$

$$= P(AB) + P\left(\overline{A}\,\overline{B}\right)$$

$$= P(A).P(B) + P\left(\overline{A}\right).P\left(\overline{B}\right)$$

[∴ घटनाएँ स्वतन्त्र हैं]

$$P(Z) = xy + (1 - x)(1 - y)$$

यदि 'C' उस कथन की सत्यता को व्यक्त करता हो, तो

$$\text{अभीष्ट प्रायिकता} = P\left(\frac{C}{Z}\right)$$

$$= \frac{P(CZ)}{P(Z)} = \frac{P(X).P(Y)}{P(Z)}$$

$$= \frac{xy}{xy + (1-x)(1-y)}$$

$$= \frac{xy}{1 - x - y + 2xy}$$ **इतिसिद्धम्**

प्रश्न 32. A, B, C तीन पुरुष बारी-बारी से एक सिक्का उछालते हैं। जिसके पहले चित्त आये उसी की जीत होती है। यदि A की पारी पहले हो तो उनकी जीत की सम्भावनाएँ क्या हैं?

हल- चित्त आने पर जीत होती है तथा चित्त आने की प्रायिकता = $\frac{1}{2}$
अब माना A के चित्त आने की प्रायिकता P(A) = $\frac{1}{2}$

तथा $P(\overline{A}) = \frac{1}{2}$

इसी प्रकार $P(B) = \frac{1}{2}$

$P(\overline{B}) = \frac{1}{2}$

तथा $P(C) = \frac{1}{2}$

$P(\overline{C}) = \frac{1}{2}$

A के जीत की प्रायिकता—

$$P = P(A) + P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C} \cap A) + P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C} \cap \overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C} \cap A) + ...$$

$$= P(A) + P(\overline{A}) P(\overline{B}) P(\overline{C}) P(A) + P(\overline{A}).P(\overline{B}) P(\overline{C}).P(\overline{A}).P(\overline{B}).P(\overline{C}) P(A) + ...$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + ...$$

$$= \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + ...$$

$\left[\because \text{G.P. का } S\infty = \frac{a}{1-r}\right]$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{0} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^6} + ...\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1 - \frac{1}{2^3}}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1 - \frac{1}{8}}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{7/8}\right]$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{8}{7} = \frac{4}{7}$$

अत: A के जीतने की प्रायिकता $= \frac{4}{7}$

B के जीतने की प्रायिकता—

$$P = P(\overline{A} \cap \overline{B}) + P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C} \cap \overline{A} \cap B) + P(\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C} \cap \overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C} \cap \overline{A} \cap B) + ...$$

$$= P(\overline{A}).P(B) + P(\overline{A}).P(\overline{B}).P(\overline{C}).P(\overline{A}).P(B) + P(\overline{A}).P(\overline{B}).P(\overline{C}).P(\overline{A}).P(\overline{B}).P(\overline{C}).P(\overline{A}).P(B)$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^8} + ...$$

$$= \frac{1}{2^2}\left[1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^6} + ...\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{1 - \frac{1}{2^3}}\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{1 - \frac{7}{8}}\right] = \frac{1}{4} \times \frac{8}{7} = \frac{2}{7}$$

C के जीतने की प्रायिकता—

P = 1 – [A के जीतने की प्रायिकता + B के जीतने की प्रायिकता]

$$= 1 - \left[\frac{4}{7} + \frac{2}{7}\right]$$

$$= 1 - \frac{6}{7} = \frac{1}{7}$$

प्रश्न 33. सुलक्षणा और सुनयना बारी-बारी से एक सिक्का उछालती है। जिसके पहले चित्त आये उसी की जीत होती है। यदि सुलक्षणा की बारी पहले आये तो दोनों की जीतने की प्रायिकताएँ ज्ञात कीजिए।

हल- माना सुलक्षणा A है तथा सुनयना B है। तब सिक्के को उछालते हैं तो कुल नि:शेष स्थितियाँ = 2 होंगी और अनुकूल स्थितियाँ = 1 चित्त आने की प्रायिकता

$$P(E_1) = \frac{1}{2}$$

चित्त न आने की प्रायिकता

$$P(\bar{E}_1) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

(i) पहले फेंकने पर चित्त आ जायेगा उसकी प्रायिकता = $\frac{1}{2}$

(ii) पहले फेंकने पर चित्त नहीं आता है। दूसरे फेंकने में चित्त फेंकने की प्रायिकता

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\right)$$

(iii) अब पहली तथा दूसरी बार में चित्त नहीं आता है। तीसरी बार में चित्त आता है। उसकी प्रायिकता

$$= \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\right)$$

इसी प्रकार आगे की फेंक के लिए प्रायिकता ज्ञात की जा सकती है। अतः A के जीतने की प्रायिकता निम्न प्रकार से हो सकती है

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\right)^3 + \ldots\ldots$$

यह गुणोत्तर श्रेणी है। अनन्त पदों वाली गुणोत्तर श्रेणी के अनन्त पदों का योग हम निम्न सूत्र से ज्ञात करते हैं-

$$S_\infty = \frac{a}{1-r}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}}{1 - \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\right)}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3}$$

A के जीतने की प्रायिकत = $\frac{2}{3}$

इसलिए A के हारने की प्रायिकता = $1 - \frac{2}{3}$
= $\frac{1}{3}$

A के हारने की प्रायिकता B के जीतने की प्रायिकता होगी।
अत: B के जीतने की प्रायिकता = $\frac{1}{3}$

प्रश्न 34. संख्याओं के निम्न दो समूहों में से एक-एक अंक का चुनाव किया जाता है- (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9), (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) यदि p_1 दोनों अंकों को योग 10 होने तथा p_2 दोनों अंकों का योग 8 होने की प्रायिकता हो तो $p_1 + p_2$ ज्ञात कीजिए।

हल- p_1 प्रायिकता दोनों अंकों का योग 10 होने पर है। अंकों का योग 10 निम्न प्रकार से आ सकता है। (1, 9), (2, 8), (3, 7), (4, 6), (5,5), (6, 4), (7, 3), (8, 2), (9, 1)

इसलिए अनुकूल स्थितियाँ = 9
कुल नि:शेष स्थितियाँ = 9 x 9

$$\text{प्रायिकता } (p_1) = \frac{\text{अनुकूल स्थितियाँ}}{\text{कुल नि:शेष स्थितियाँ}}$$
$$= \frac{9}{9 \times 9}$$
$$= \frac{1}{9}$$

p_2 प्रायिकता दोनों अंकों का योग 8 होने पर है । अंकों का योग 8 निम्न प्रकार से आ सकता है (1, 7), (2, 6), (3, 5), (4,4), (5, 3), (6, 2), (7, 1)
अतः अनुकूल स्थितियाँ होंगी = 7

$$\therefore \quad \text{प्रायिकता } (p_2) = \frac{\text{अनुकूल स्थितियाँ}}{\text{कुल नि:श्शेष स्थितियाँ}}$$
$$= \frac{7}{9 \times 9} = \frac{7}{81}$$

$$\text{अत:} \quad p_1 + p_2 = \frac{1}{9} \times \frac{7}{81}$$
$$= \frac{9 + 7}{81}$$
$$= \frac{16}{81}$$

प्रश्न 35. यदि P(A) = 0.4. P(B) = 0.8. $P\left(\frac{B}{A}\right)$ = 0.6 तो $P\left(\frac{A}{B}\right)$ और P(A ∪ B) ज्ञात कीजिए।

हल- P(A) = 0.4, P(B) = 0.8

अब $$P\left(\frac{B}{A}\right) = 0.6$$

$$\Rightarrow \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = 0.6$$

$$\Rightarrow P(A \cap B) = 0.6 \times P(A)$$

$$\Rightarrow P(A \cap B) = 0.6 \times 0.4$$

$$= 0.24$$

$$\therefore \text{(i) } P\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$= \frac{0.24}{0.8} = \frac{24}{80} = \frac{3}{10}$$

(ii) P(A ∪ B) = P(A) + P(B) − P(A ∩ B)
= 0.4 + 0.8 − 0.24
= 1.2 − 0.24
= 0.96

प्रश्न 36. यदि P(E) = 0.35, P(F) = 0.45, P(E ∪ F) = 0.65 तो $P\left(\frac{F}{E}\right)$ ज्ञात कीजिए।

हल- P(E) = 0.35, P(F) = 0.45
अब P(E ∪ F) = 0.65
P(E) + P(F) − P(E ∩ F) = 0.65

0.35 + 0.45 − P(E ∩ F) = 0.65
0.80 − P(E ∩ F) = 0.65
P(E ∩ F) = 0.8 − 0.65
= 0.15

अतः $$P\left(\frac{F}{E}\right) = \frac{P(E \cap F)}{P(E)}$$

$$= \frac{0.15}{0.35}$$

$$= \frac{15}{35} = \frac{3}{7}$$

प्रश्न 37. एक पासे की पाँच उछालों में केवल 1 अंक आने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हल- एक पासे को उछालने पर अंक 1 आने की प्रायिकता = $\frac{1}{6}$
अतः पासे की पाँच उछालों में केवल 1 अंक आने की प्रायिकता

$$= \frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}$$

$$= \frac{1}{6^5}$$