गणित का इतिहास
HISTORY OF MATHEMATICS

इकाई – 1

गणित का आरंभ कहाँ और किस रूप में हुआ यह ठीक–ठीक बता पाना कठिन है। जिन्हें हम सबसे पुराना लिखित दस्तावेज मानते हैं इनसे भी बहुत पहले के कुछ ऐसे चित्र या संकेत मिलते हैं जो मूल गणित के कुछ ज्ञान की ओर संकेत करते हैं। उदाहरण के लिए जीवाश्म विज्ञानियों ने दक्षिण अफ्रीका की गुफाओं में 'ओकरे' (ochre) चट्टानों की खोज की जिसमें खुरच कर बनाए हए ज्यामितीय पैटर्न दिखाई पड़ते हैं। कांगो में नील नदी के पास मिली 'इशांगो अस्थि' (Ishango bone) के बारे में धारणा है कि यह अभाज्य संख्याओं की श्रृंखला का सबसे पुराना ज्ञात प्रदर्शन है। यह मान्यता है कि यह 20,000 वर्ष पुराना हो सकता है।

लगभग 5000 ई.पू. पहले इजिप्ट के लोगों ने ज्यामितिक स्थानिक आकृतियों (Spatial design) का प्रदर्शन किया। प्राचीन भारत का सबसे प्राचीन ज्ञात गणित 3000–2600 ई.पू. का माना जाता है। उत्तर भारत की सिंधु घाटी (हड़प्पा) सभ्यता ने समान वजन और मापन की प्रणाली का विकास किया। एक आश्चर्यजनक रूप से उन्नत ईंट तकनीक जिसमें अनुपात का प्रयोग किया गया, का प्रमाण यहाँ मिलता है। यहाँ समकोण पर बनाई गई गलियाँ, कई ज्यामितीय आकारों जैसे घनाभ, शंकु, बेलन, वृत्त, त्रिभुज का मिलना यह संकेत देता है कि उस समय के लोगों का गणित बहुत विकसित था।

सिंधु घाटी (हड़प्पा) सभ्यता के अवशेष

चीनी गणित का सबसे पुराना उदाहरण 'शांग राजवंश' (1600–1046 ई.पू.) से मिलता है जिसमें कछुए के कवच पर खरोंच कर बनाए गए अंक शामिल हैं। लिखित गणित का प्रमाण 'सुमेरियन सभ्यता' में भी मिलता है। जिन्होंने मेसोपोटामिया में सबसे पुरानी सभ्यता का निर्माण किया, ऐसा माना जाता है। उन्होंने 2500–3000 ई.पू. में मापन विज्ञान की एक जटिल प्रणाली का विकास किया।

प्राचीन सभ्यताओं में इजिप्ट, ग्रीक, बेबीलोन और अरब के लोगों ने भी गणित के क्षेत्र में अपना महत्वपूर्ण योगदान दिया। ईसा के बाद के काल में भी दुनिया के अलग–अलग हिस्सों में गणित का निरंतर विकास होता रहा। क्रमशः यह ज्ञान एक दूसरे तक पहुँचकर और भी समृद्ध हुआ।

गणित के विकास की यह कथा आप अलग–अलग स्रोतों से प्राप्त कर सकते हैं। इनका अध्ययन आपको एक अलग आनंददायक अनुभूति दे सकता है। नवीं कक्षा में हम भारतीय गणित के विकास क्रम का एक अंश सम्मिलित कर रहे हैं। आशा है यह आपको प्रेरित करेगा कि आप दुनिया में गणित की विकासयात्रा को देखना समझना चाहें।

गणित का इतिहास

[History of Mathematics]

01

गणित का इतिहास

गणित, विज्ञान एवं तकनीकी का मेरुदण्ड है। अतः वेदांग ज्योतिष में ऋषि लगध ने लिखा है :–

यथा शिखा मयूराणाम् नागानाम् मणयो यथा।
तद्वद् वेदांगशास्त्राणाम् गणितम् मूर्धनिस्थितम् ।।

अर्थात सभी वेदांग शास्त्रों के शीर्ष पर गणित उसी प्रकार सुशोभित है जैसे मोर के सिर पर शिखा तथा सर्प के फन पर मणि सुशोभित है।

गणित के इतिहास पर दृष्टि डालने पर हम देखते हैं कि गणित में भारत का योगदान अत्यंत विशिष्ट एवं विश्वप्रसिद्ध है। प्राचीन काल से ही भारत में गणित की विभिन्न शाखाओं पर कार्य किया गया है। कुछ की संक्षिप्त चर्चा यहाँ करेंगे।

अंक गणितः–अंक गणित, गणित की प्रमुख शाखा है। दैनिक व्यवहार में इसका सर्वाधिक उपयोग है। अंक गणित का आधार अंक प्रणाली है जिसमें शून्य का महत्वपूर्ण स्थान है।

शून्य का आविष्कारः– शून्य की संकल्पना वेदों में निहित है। "ऊँ खं ब्रह्म" यजुर्वेद अध्याय 40/ मंत्र 17 इस ऋचा में "खं" शब्द का प्रयोग हुआ है। "खं" शब्द का तात्पर्य आकाश और शून्य भी होता है। ज्योतिषादि ग्रन्थों में "खं" को शून्य के अर्थ में प्रयुक्त किया गया है।

लीलावती में भास्कराचार्य ने शून्य परिकर्माष्टक में शून्य के लिए "खं" का प्रयोग किया है।

योगेखंक्षेपसमं, वर्गादौखं, खभाजितो राशिः।
खहरः स्यात्, खगुणः खं, खगुणश्चिन्त्यश्च शेष विधौ।।

शून्य में किसी संख्या को जोड़ने पर योगफल उस संख्या के तुल्य ही होता है। शून्य के वर्गादि शून्य ही होते हैं। किसी राशि को शून्य से भाग देने से उस राशि की संज्ञा खहर (जिसका हर ख हो) होती है। शून्य से किसी राशि को गुणा करने पर गुणनफल शून्य होता है।

संकेत–श्लोक, सूक्त संदर्भ हेतु दिये गये हैं इनका सीधे–सीधे परीक्षा में पूछा जाना वांछित नहीं है।

शून्य की संकल्पना का श्रेय महान संस्कृत व्याकरणाचार्य पाणिनी (500ई.पू.) तथा पिंगल (200ई.पू.) को दिया जाता है शून्य का आविष्कार वैदिक ऋषि गृत्समद ने किया था इस प्रकार का भी उल्लेख मिलता है।

शून्य के लिए एक चिह्न निश्चित करने का सर्वप्रथम साक्ष्य बक्शाली पांडुलिपि (300–400ई) में पाया जाता है। प्राचीन भारत की अंकीय पद्धति में शून्य तथा इसके चिह्न का योगदान सर्वाधिक महत्वपूर्ण है।

प्रोफेसर जी.बी. हालस्टेड ने कहा है –

''बुद्धि और शक्ति के विकास के लिए गणित की कोई भी संकल्पना शून्य से महत्वपूर्ण सिद्ध नहीं हुई है।''

अंक पद्धति : विश्व के विभिन्न देशों में प्राचीन काल से संख्या लेखन की अलग–अलग पद्धतियाँ प्रचलित रही हैं। देवनागरी, रोमन तथा हिन्दू–अरेबिक संख्या प्रणाली का अध्ययन हमने पूर्व कक्षाओं में किया है। अब हम इसकी ऐतिहासिक पृष्ठभूमि की जानकारी प्राप्त करेंगे।

प्रो. गिन्सबर्ग कहते हैं : लगभग 770 ई. में उज्जैन के एक हिन्दू विद्वान कंक को बगदाद के प्रसिद्ध दरबार में अब्बासईद खलीफा अलमन्सूर ने आमंत्रित किया। इस प्रकार हिन्दू अंकन पद्धति अरब पहुँची। कंक ने हिन्दू ज्योतिष विज्ञान तथा गणित अरब के विद्वानों को पढ़ाया। कंक की सहायता से उन्होंने ब्रम्हगुप्त के ''ब्रह्मस्फुट सिद्धान्त'' का अरबी में अनुवाद किया।

फ्रांसीसी विद्वान एम.एफ.नाउ की खोज यह प्रमाणित करती है कि सीरिया में मध्य सातवीं सदी में हिन्दू अंक अच्छी तरह ज्ञात थे तथा उसकी सराहना की जाती थी।

बी.बी.दत्त कहते हैं –

''अरब से मिश्र तथा उत्तरी अरब होते हुए भारतीय अंक प्रणाली ग्यारहवीं सदी तक पूर्ण रूप से यूरोप पहुँच गयी। यूरोपवासियों ने उन्हें अरबी अंक कहा क्योंकि वे उन्हे अरबों से मिले किन्तु, स्वयं अरबों ने एकमत से उन्हें हिन्दू अंक (अल–अरकान अल–हिन्दू) कहा इन दस अंकों को अरबवासी "हिन्दसा" कहते हैं।''

स्थानीयमान : किसी भी संख्या को शून्य सहित दस अंकों में व्यक्त करना और प्रत्येक अंक को एक निरपेक्षमान और एक स्थानीयमान देने के कारण यह अंक पद्धति वैज्ञानिक अंक पद्धति है। स्थानीय मान आधुनिक संख्या प्रणाली (हिन्दू–अरेबिक प्रणाली) की विशेषता है।

फ्रांस के महान गणितज्ञ पीयरे लाप्लास ने लिखा है: भारत ने ही हमें प्रत्येक संख्या को दस अंकों द्वारा व्यक्त करने (जिसमें प्रत्येक अंक का एक निरपेक्ष और एक स्थानीय मान है) की अत्यंत उत्तम प्रणाली दी है। दशमलव पद्धति का आधार दस है। इसी कारण से इसे दाशमिक या दशमलव प्रणाली कहते हैं।

भारतीय अंकों का इतिहास एवं बड़ी संख्याएँ: भारतीय अंकों का विकास क्रम निम्नानुसार है–

- खरोश्थी प्रणाली (चौथी शताब्दी ई.पू.)
- ब्राह्मी प्रणाली (तीसरी शताब्दी ई.पू.)
- ग्वालियर प्रणाली (9वीं शताब्दी)
- देवनागरी प्रणाली (11वीं शताब्दी)

- आधुनिक प्रणाली :

ई.पू. चौथी शताब्दी से लेकर ईसा पश्चात् दूसरी शताब्दी तक के अभिलेखों में खरोश्थी अंक पाए जाते हैं। ब्राह्मी अंकों में दस के अतिरिक्त, सौ तक इसके गुणक तथा नौ सौ तक सौ के गुणक पाए गए हैं।

यजुर्वेद संहिता, रामायण तथा उसके बाद के धार्मिक ग्रंथों में 1 से लेकर 10^{53} तक की संख्याओं को अलग–अलग नाम दिये गये हैं :

- नियुतम 10^{11}
- उत्संग 10^{21}
- हेतुहीलम 10^{31}
- नित्रवाद्यम् 10^{41}
- तल्लक्षणा 10^{53}

कूटांक परिचय: किसी संख्या को जब अक्षर के रुप में व्यक्त किया जाता है उसे "कूटांक" कहते हैं। प्राचीन गणितज्ञों ने इस संकल्पना का प्रयोग संख्याओं को अभिव्यक्त करने में किया था। प्राचीनकाल में कूटांक पद्धतियाँ प्रचलित थीं जिनका प्रयोग ज्योतिषादि ग्रंथों में किया गया है।

- वर्णांक प्रणाली
- शब्दांक प्रणाली
- व्यंजनांक प्रणाली

बीजगणित :– बीजगणित तथा अंक गणित में संरचना और सिद्धान्त के विचार से अनेक समानताएँ हैं।

इन दोनों में मुख्य अंतर यह है कि अंक गणित में व्यक्त (ज्ञात) राशि की बात की जाती है जबकि बीजगणित में अव्यक्त (अज्ञात) राशि की बात की जाती है। अव्यक्त राशि से तात्पर्य उस राशि से है जिसका मान प्रारंभ में ज्ञात न हो। इसे बीज राशि भी कहते हैं, इसलिए अव्यक्त गणित को बीजगणित कहते हैं।

बीजगणित का उपयोग शुल्वसूत्रों के काल से ही प्रारंभ हुआ प्रतीत होता हैं विभिन्न प्रकार की यज्ञवेदियों के निर्माण में ऐसी समस्याएँ उत्पन्न हुई जिसके लिए रेखीय (Linear) और अपरिमित समीकरणों का समाधान ढूँढना पड़ा। आर्यभट का अंकगणित के साथ–साथ बीजगणित में भी उल्लेखनीय योगदान है। बीजगणित ब्रह्मगुप्त के काल से ही गणित की एक अलग शाखा के रूप में विकसित हुआ। इसे कुट्टक गणित तथा अव्यक्त गणित भी कहा जाता था।

गणितज्ञ पृथूदक स्वामी (860ई.) ने इसका नाम बीजगणित रखा।

रेखागणित (ज्यामिति):– भारतीय गणित के इतिहास पर दृष्टि डालने पर यह ज्ञात होता है कि अपने देश में वैदिक काल में ही रेखागणित की नींव पड़ गई थी। वैदिक काल में गणित की जानकारी ''कल्प'' नामक वेदांग में शुल्व सूत्रों के रूप में मिलती है। वेदी के मापन में प्रयुक्त रस्सी को शुल्व कहा जाता है। सूत्र का अर्थ है–जानकारी को संक्षिप्ततम रूप में प्रस्तुत करना।

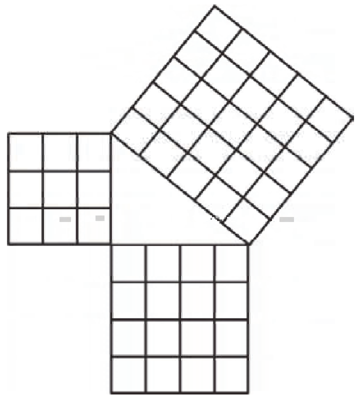
शुल्व सूत्र उनके रचयिताओं–बौधायन, आपस्तंभ, कात्यायन, मानव, मैत्रायण आदि के नाम से जाने जाते हैं। शुल्व सूत्रों में विभिन्न ज्यामिति आकारों की वेदियाँ बनाने का वर्णन है:–

- गरुण वेदी
- कूर्म वेदी
- श्री यंत्र

शुल्व सूत्र ज्यामिति के कुछ **उदाहरण** निम्नलिखित हैं –

त्रिभुजों, वर्गों, आयतों तथा अन्य जटिल ज्यामितीय आकारों की रचना, ऐसी ज्यामितीय आकारों की रचना जिनका क्षेत्रफल दिये गये आकारों के क्षेत्रफल के जोड़ या अन्तर के बराबर हो।

ज्यामिति के क्षेत्र में आर्यभट (476–550ई.) ब्रह्मगुप्त (600ई.), भास्कर प्रथम (629ई.), महावीर (850ई.) का उल्लेखनीय योगदान है।



बौधायन प्रमेय

दीर्घ चतुरस्त्रस्य अक्षण्या रज्जुः पार्श्वमानी तिर्यक् मानी च।
यत पृथग्भूते कुरूतः तत् उभयं करोति (इति क्षेत्र ज्ञानम्)।।

।। 48 (1) बौधायन शुल्व सूत्र।।

इसका आशय है:– एक आयत के विकर्ण पर बने वर्ग का क्षेत्रफल आयत की दोनों भुजाओं पर बने वर्गों के क्षेत्रफलों के योग के बराबर होता है हम जानते हैं कि आयत का विकर्ण आयत को दो समकोण त्रिभुजों में विभाजित करता है तथा समकोण त्रिभुज में कर्ण का वर्ग शेष दो भुजाओं के वर्गों के योग के बराबर होता है।

समकोण त्रिभुज की भुजाओं की बीच यह संबंध पाइथागोरस प्रमेय के नाम से जाना जाता है। किन्तु डॉ. ब्रजमोहन की पुस्तक–गणित का इतिहास (पृष्ठ 243) पर उल्लेख है कि यह बात अब अधिकांश इतिहासज्ञ मानने लगे हैं कि पाइथागोरस का प्रमेय शुल्व सूत्रों के लेखकों को पाइथागोरस के जन्म से सैकड़ों वर्ष पहले ज्ञात हो चुका था। यूनानी दार्शनिक पाइथागोरस का जीवन काल 572 ई.पू. से 501 ई.पू. तक माना जाता है। जबकि भारतीय गणितज्ञ बौधायन ने इस प्रमेय को पाइथागोरस से सैकड़ों वर्ष पूर्व सोदाहरण सर्वाधिक व्यापक रूप में व्यक्त किया है।

अतः यह प्रमेय वास्तव में बौधायन प्रमेय है। इसे शुल्व प्रमेय भी कहते हैं।

पाई (π) का भारतीय इतिहास :–

(1) आर्यभट (476 ई.–550 ई.) पहले गणितज्ञ थे जिन्होंने परिधि और व्यास के अनुपात अर्थात पाई (π) का लगभग परिमित मान निकाला था।

चतुरधिकम् शतमष्टगुणं द्वाषष्टिस्तथा सहस्त्राणाम्।
अयुतद्वय विष्कम्भस्य आसन्नो वृत्त परिपाहः ।।

सौ में चार जोड़कर उसे 8 से गुणा करें और उसमें 62000 जोड़ें। यह योगफल 20,000 व्यास के वृत्त की परिधि का लगभग माप होगा अर्थात् 20,000 व्यास के वृत्त की परिधि 62832 होगी।

$$\text{पाई}(\pi) = \frac{\text{परिधि}}{\text{व्यास}} = \frac{62832}{20000}$$

इस प्रकार उनके अनुसार पाई =3.1416 जो दशमलव के 4 स्थानों तक आज भी सही है।

(2) भास्कराचार्य (1114–1193ई.) ने अपने ग्रंथ लीलावती में पाई (π) का मान दिया है।

व्यासे भनन्दाग्नि हते विभक्ते खबाण सूर्यैः परिधिः स सूक्ष्मः।

द्वाविंशतिघ्ने विहृतेऽथशैलैः स्थूलोऽथवास्याद् व्यवहार् योग्यः।।

व्यास को 3927 से गुणा कर 1250 से भाग देने पर सूक्ष्म परिधि होती है। अथवा व्यास को 22 से गुणा कर 7 से भाग देने पर व्यवहार के योग्य परिधि का स्थूल मान प्राप्त होता है।

(3) स्वामीभारती कृष्णतीर्थ (1884–1960) ने पाई/10 का मान सुविदित अनुष्टुप छंद में तथा वर्णमाला की कूट भाषा में दिया हैः–

गोपी भाग्यमधुव्रात–श्रृंगिशोदधिसंधिग।

खलजीवित खाताव गलहाला रसंधर ।।

स्वामी जी के अनुसार, इस छंद के तीन उपयुक्त अर्थ निकाले जा सकते हैं। पहले अर्थ में तो यह भगवान कृष्ण जी की स्तुति है। दूसरे अर्थ में भगवान शंकर की स्तुति है तथा तीसरे अर्थ में $\pi/10$ का मान दशमलव के बत्तीस स्थान तक है।

$\pi/10 =$ 0.3 1 4 1 5 9 2 6 5 3 5 8 9 7 9 3 2 3 8 4 6 2 6 4 3 3 8 3 2 7 9 2

इन्होंने वैदिक गणित नामक ग्रंथ की रचना की। इसमें 16 सूत्र तथा 13 उपसूत्र हैं

(4) श्रीनिवास रामानुजन (1887–1920 ई.) – रामानुजन का यूरोप में जो पहला शोध निबंध प्रकाशित हुआ उसका शीर्षक था प्रतिरूपक समीकरण और π के सन्निकट मान (मोड्यूलर इक्वेशन एंड एप्रोक्सिमेशन टू π) उन्होंने π के सन्निकट मान के लिए कई सूत्रों की खोज की।

त्रिकोणमितिः– त्रिकोणमिति गणित की वह शाखा है जिसमें त्रिभुज की भुजाओं और कोणों के सम्बन्ध का अध्ययन किया जाता है।

यह गणित की प्राचीन एवं महत्वपूर्ण शाखा है। भारतीय ज्योतिषशास्त्र एवं खगोल शास्त्र में इसका उपयोग ग्रहों के स्थान की गणना में होता था।

प्राचीन भारतीय गणितज्ञों आर्यभट, वराहमिहिर तथा ब्रह्मगुप्त आदि का त्रिकोणमिति के क्षेत्र में महत्वपूर्ण योगदान है।

त्रिकोणमिति की संकल्पनाओं, सूत्रों तथा सारणियों का वर्णन ''सूर्य सिद्धान्त''(400ई), वराहमिहिर के पंच सिद्धांत तथा ब्रह्मगुप्त के ब्रह्मस्फुट सिद्धांत (630 ई.) में मिलता है।

डा.ब्रजमोहन द्वारा लिखित पुस्तक ''गणित का इतिहास'' (पृष्ठ 314) में उल्लेख है कि इसमें संदेह नहीं है कि त्रिकोणमितीय फलनों में से तीन की स्पष्ट रूप से परिभाषा सबसे पहले हिन्दुओं ने ही दी थी।

सबसे पहले ज्या का प्रयोग आर्यभट ने (लगभग 510 ई.) किया था। आर्यभट ने ज्या और उत्क्रम ज्या (उज्ज्या) की सारणियाँ भी दी हैं।

भारत से ''ज्या'' शब्द अरब गया जहाँ ''जीबा'' के रूप में प्रचलित हो गया। कुछ समय पश्चात् जीबा का ''जैब'' हो गया। अरबी में ''जैब'' का अर्थ ''वक्ष'' है लगभग 1150 ई. में अरबी की पुस्तकों का लेटिन में अनुवाद किया गया, तो जैब के स्थान पर साइनस (Sinus) का प्रयोग किया गया है जिसका लेटिन मे एक अर्थ ''वक्ष'' भी है।

ब्रह्मगुप्त ने ज्या के अर्थ में ही ''क्रमज्या'' का प्रयोग किया है। इसका यह नाम इसलिए रखा कि ''उत्क्रम ज्या'' से इसका अंतर स्पष्ट दिखाई पड़े। अरबी में यही शब्द ''करज'' के रूप में प्रचलित हो गया। अलख्वारिजमी ने भी ''करज'' का ही प्रयोग किया है। भारतीय ज्या और कोटिज्या ही यूरोपीयन भाषाओं में साइन (sine) और को साइन (co-sine) बन गए।

त्रिकोणमिति का ज्योतिष, खगोलशास्त्र, अभियांत्रिकी एवं नौ–परिवहन (Navigation) तथा ऊँचाई, दूरी आदि के अध्ययन में उपयोग है।

प्रश्नावली – 1.1

प्र.1 सही जोड़ी बनाइए–

भारती कृष्णतीर्थ	ब्रह्मस्फुट सिद्धान्त
वराह मिहिर	सिद्धान्त शिरोमणी
ब्रह्मगुप्त	आर्यभटीय
भास्कराचार्य	पंच सिद्धान्त
आर्यभट	वैदिक गणित

प्र.2 रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए –

1. आकाश तथा शून्य के लिए........................शब्द का प्रयोग होता था।
2. तल्लक्षणा शब्द.....................संख्या हेतु होता था।
3. वर्णांक पद्धति का प्रयोग................गणितज्ञ ने अपने..............ग्रंथ में किया है।
4. ....को ही अव्यक्त गणित कहा जाता था।
5. वैदिक गणित में................... सूत्र हैं।

प्र.3 आधुनिक संख्या प्रणाली की विशेषताएँ लिखिए ?

प्र.4. शून्य के आविष्कार पर प्रकाश डालिए।

प्र.5 वर्णांक पद्धति का संक्षिप्त परिचय दीजिए ?

प्र.6 बौधायन प्रमेय क्या है ?

प्र.7 π के मान के संबंध में आर्यभट के योगदान को लिखिए ?

प्र.8 वैदिक गणित ग्रंथ के रचयिता का नाम लिखिए एवं ग्रंथ का संक्षिप्त परिचय दीजिए ?

प्रायोगिक गतिविधि

(1) अपने विद्यालय में गणित परिषद का गठन कीजिए।

(2) अपने विद्यालय में गणित के ग्रंथों को संकलित कीजिए।

(3) अपने विद्यालय में गणित की प्रयोगशाला विकसित कीजिए।

गणन संक्रिया की सरल विधियाँ : हम यहाँ गणना की जिन सरल विधियों का अध्ययन करने जा रहे हैं उन विधियों के शोधकर्ता गणितज्ञ एवं उनके ग्रंथ का संक्षिप्त परिचय प्राप्त करेंगे।

अनुपम गणितज्ञ स्वामी भारती कृष्ण तीर्थ शंकराचार्य गोवर्धनमठ जगन्नाथपुरी (1884–1960 ई.) ने ''वैदिक गणित'' नामक ग्रंथ की रचना कर एक अभिनव कार्य किया। इस ग्रंथ में उन्होंने असाधारण 16 सूत्रों और 13 उपसूत्रों का विवरण उनके गुणधर्म तथा प्रयोगों के साथ दिया है। इस ग्रंथ में चालीस अध्याय हैं। इसे नितान्त नवीन दृष्टिकोण के साथ प्रस्तुत किया गया है।

बीजांकः– किसी संख्या के अंकों का जोड़ एक अंक प्राप्त होने तक करते हैं यही अंक उसका बीजांक कहलाता है।

उदाहरण–1. 10, 11, 321, 78 के बीजांक ज्ञात कीजिए ?

हल : 10 का बीजांक → 1 + 0 → 1

11 का बीजांक → 1 + 1 → 2

321 का बीजांक → 3 + 2 + 1 → 6

78 का बीजांक → 7 + 8 → 15 यहाँ 15 प्राप्त हुआ है यह बीजांक नहीं है अतः इसके अंकों को पुनः जोड़ेंगे 1 + 5 → 6 अतः 78 का बीजांक 6 है।

उदाहरण–2. 8756904 का बीजांक ज्ञात कीजिए ?

हल : 8756904 का बीजांक हम निम्नलिखित तीन प्रकार से ज्ञात कर सकते हैं : –

प्रकार–1. संख्या 8756904 के सभी अंकों का योगफल ज्ञात करेंगे।

8+7+5+6+9+0+4 = 39, इसके अंकों को पुनः जोड़ने पर 3+9=12, इसके अंकों को पुनः जोड़ेंगे 1+2=3 बीजांक है।

प्रकार–2. संख्या 8756904 के अंकों को क्रमशःजोड़ते चले। जैसे ही योगफल दो अंकों की संख्या प्राप्त हो तुरंत योगकर एक अंक प्राप्त कर लेंगे।

8+7 →15 → 1+5 → 6+5 → 11 → 1+1→ 2+6 → 8+9→ 17
1+7 → 8+0 → 8+4 → 12 → 1+2 → 3 बीजांक है।

प्रकार–3. संख्या 8756904 के अंकों को ध्यान से देखिए शून्य, नौ तथा जिन दो अंको को जोड़ने पर नौ आता है उन्हें छोड़कर शेष अंकों के योगफल से बीजांक ज्ञात करेंगे। संख्या 8756904 में 0, 9 तथा 4+5=9 छोड़ने पर बचे अंक 8, 7 एवं 6 का योग 8+7+6 → 21 का बीजांक 2+1→ 3, अतः 3 बीजांक है।

बीजांक ज्ञात करने में ध्यान देने योग्य बातें

(1) बीजांक ज्ञात करते समय जैसे ही योग दो अंक की संख्या प्राप्त हो वहां तुरंत जोड़कर एक अंक प्राप्त कर लेना चाहिए।

(2) शून्य और नौ जोड़ने या छोड़ने से बीजांक में कोई अंतर नहीं आता।

(3) किसी संख्या का बीजांक उस संख्या में 9 से भाग देने पर बचने वाले शेषफल के बराबर होता है, अर्थात् बीजांक ज्ञात करने का अर्थ है उस संख्या मे 9 से भाग देने पर बचने वाला शेषफल ज्ञात करना।

(4) किसी संख्या का बीजांक 9 है अतः वह संख्या 9 से पूरी–पूरी विभाजित होगी। ऐसी परिस्थिति में उसका बीजांक शून्य न होकर 9 ही होगा।

(5) 3 की विभाज्यता की जाँच बीजांक से भी की जा सकती है – जिस संख्या का बीजांक 3, 6 या 9 हो वह संख्या 3 से पूरी–पूरी विभाजित होगी।

(6) बीजांक से उत्तर की जाँच की जा सकती है अतः इसका पर्याप्त अभ्यास करना चाहिए जिससे बीजांक मुखाग्र ज्ञात किया जा सके।

प्रश्नावली – 1.2

प्रश्न 1. बीजांक किसे कहते हैं ?

प्रश्न 2. निम्नलिखित संख्याओं के बीजांक ज्ञात कीजिए।

15, 38, 88, 99, 412, 867, 4852, 9875, 24601, 48956701.

प्रश्न 3. निम्नलिखित संख्याओं में क्या जोड़ दिया जाए की संख्या 9 से विभाजित हो जाए :–

241, 861, 4441, 83504 .

प्रश्न 4. बीजांकों की उपयोगिता लिखिए।

बीजांक से उत्तर की जाँच : – वैदिक गणित में उत्तर की जाँच की अनेक विधियाँ है, यहाँ हम बीजांक से उत्तर की जाँच करना सीखेंगे।

जोड़ना :–

जोड़ की जाँच:– संख्याओं के बीजांकों के योगफल का बीजांक =उत्तर का बीजांक होने पर उत्तर सही होगा।

उदाहरण–3. 3469, 2220 एवं 1239 का योगफल ज्ञात कर उत्तर की जाँच बीजांक से कीजिए:–

हल : जाँच

	3469	4
	2220	6
+	1239	6
	6928	7

(1) संख्याओं के बीजांक क्रमशः 4, 6 एवं 6 है।

(2) संख्याओं के बीजांको के योगफल का बीजांक

4+6+6 → 16 का बीजांक 7 है।

(3) उत्तर 6928 का बीजांक 7 है।

(4) क्रमांक (2) एवं (3) से दोनों बीजांक 7 है।

अतः उत्तर सही है।

घटाना:–

घटाने की जाँच :– इसमें घटने वाली (नीचे) की संख्या का बीजांक +उत्तर के बीजांक के योगफल का बीजांक = ऊपर की संख्या का बीजांक

उदाहरण–4. 7816–3054 हल कर उत्तर की जाँच बीजांक से करें।

हल : जाँच

	7816	4
–	3054	3
	4762	1

(1) घटने वाली (नीचे)की संख्या बीजांक 3 है।
उत्तर 4762 का बीजांक 1 है।
(2) दोनों बीजांकों का योग 3+1=4 है।
(3) ऊपर की संख्या 7816 का बीजांक = 4 है।
(4) क्रमांक (2) एवं (3) से बीजांक 4 है। अतः उत्तर सही है।

गुणा :–

गुणा की जाँच :–

उदाहरण–5. 456 X 814 हल कर उत्तर की जाँच बीजांक से कीजिए?

हल :

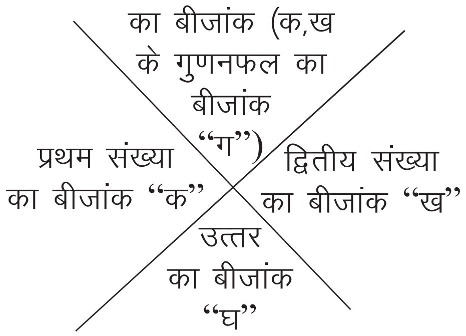
456 X 814
1824
4560
364800
371184

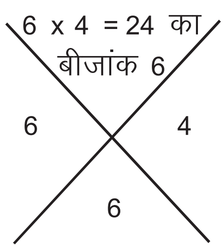
जाँच (प्रथम संख्या का बीजांक X द्वितीय संख्या का बीजांक)
प्राप्त गुणनफल का बीजांक = उत्तर का बीजांक

(1) 6×4=24 का बीजांक→ 6
(2) उत्तर 371184 का बीजांक → 6
(3) क्रमांक (1) एवं (2) से दोनों बीजांक 6 है। अतः उत्तर सही है।

गुणा की जाँच हेतु

दोनों बीजांकों के गुणनफल





यदि “ग” एवं “घ” असमान हैं तो उत्तर निश्चित गलत है। यदि वे समान है तो उत्तर ठीक है।

भाग

उदाहरण–6. 7481÷ 31 हल कर उत्तर की जाँच बीजांक से कीजिए ?

हल : भाजक भाज्य भागफल

$$
\begin{array}{l}
31)\ 7481\ (241 \\
\underline{-62} \\
\ \ 128 \\
\underline{-124} \\
\ \ 0041 \\
\ \ \ \underline{-31} \\
\ \ \ \ 10
\end{array}
$$

जाँच :

भाज्य का बीजांक = (भागफल का बीजांक x भाजक का बीजांक)+शेषफल का बीजांक

2 → (7 X 4) + 1

→ 28 + 1 = 29 का बीजांक 2

2 = 2 अर्थात उत्तर सही है।

गुणा की वैदिक गणित विधियाँ

(1) ऊर्ध्व तिर्यक विधि – इस विधि में सूत्र ऊर्ध्वतिर्यग्भ्याम् का प्रयोग होता है।

सूत्र का अर्थ ऊर्ध्व = (खड़ा) लम्बवत ↑

तिर्यक = तिरछा ↖ ↗ = ✕

उदाहरण–7. 41 X38 सूत्र ऊर्ध्वतिर्यग्भ्याम् के प्रयोग से हल कीजिए।

हल :

	4	1
X	3	8
15	5	8
3		

$\boxed{1558\text{ उत्तर}}$

सूत्र ऊर्ध्वतिर्यग्भ्याम्

(1) प्रथम स्तंभ(इकाई में इकाई का गुणा)

1 ↑ ऊर्ध्वगुणा

X 8

8 (नीचे इकाई स्थान में लिखेंगे)

(2) प्रथम एवं द्वितीय स्तंभ (इकाई एवं दहाई स्थान)

41 तिर्यकगुणा कर जोड़िए

X 38

(4X8)+(1X3)

32 + 3 = 35 (35 के 5 तथा हासिल 3)

(3) द्वितीय स्तंभ (दहाई स्थान)

4 ऊर्ध्वगुणा

X 3

12

12 + 3 (हासिल) = 15 (पूरा 15 बाएँ लिखेंगे)

उदाहरण–8. 56 सूत्र ऊर्ध्वतिर्यग्भ्याम् के प्रयोग से हल कीजिए।

X 82

हल : 56 सूत्र ऊर्ध्वतिर्यग्भ्याम् (देखिए और समझिए)

X 82

45	9	2
5	1	

ऊर्ध्वगुणा

5 5 6 6

8 8 2 2

ऊर्ध्वगुणा

तिर्यकगुणा कर जोड़िए

उदाहरण–9. 231 सूत्र ऊर्ध्वतिर्यग्भ्याम् के प्रयोग से हल कीजिए।

X 425

हल : 231 सूत्र ऊर्ध्वतिर्यग्भ्याम्

X 425

9	8	1	7	5
1	2	1		

2 2 3 2 3 1 3 1 1

4 4 2 4 2 5 2 5 5

(1) प्रथम स्तंभ (इकाई में इकाई का गुणा)

1

X 5 ऊर्ध्वगुणा

5

(2) प्रथम एवं द्वितीय स्तंभ (इकाई एवं दहाई स्थान)

31 तिर्यक गुणा करने पर

X 25

(3X5)+(1X2)

15+2=17 (17 के 7 को दहाई के स्थान पर रखें तथा हासिल 1 रखें।)

(3) प्रथम, द्वितीय एवं तृतीय स्तंभ (इकाई, दहाई एवं सैकड़ा का स्थान)

231 संकेत के अनुसार प्रथम एवं तृतीय स्थान का तिर्यक गुणा

X 425 तथा द्वितीय स्तंभ का ऊर्ध्व गुणा कर गुणनफलों को जोड़िए

(2x5)+(1x4)+(3x2)

10 + 4 + 6 =20

20 +1 हासिल = 21 (1 को सैकड़े के स्थान पर रखें तथा 2 हासिल रखें।)

(4) द्वितीय एवं तृतीय स्तंभ (प्रथम स्तंभ छोड़िए)

23

X 42

(2X2) + (3X4)

4 + 12 =16

16 + 2 (हासिल) = 18 (8 को हजार के स्थान पर रखें तथा 1 हासिल रखें।)

(5) तृतीय स्तंभ(प्रथम एवं द्वितीय स्तंभ छोड़िए)

2 ऊर्ध्वगुणा

X 4

8

8 + 1 = 9 (9 को दस हजार के स्थान पर रखें।)

प्रश्नावली – 1.3

सूत्र ऊर्ध्वतिर्यग्भ्याम् के प्रयोग से गुणा कर उत्तर की जाँच कीजिए –

(1) 23 X 32 (2) 44 X 52 (3) 92 X 37 (4) 55 X 55

(5) 123 X 321 (6) 414 X 232 (7) 504 X 618 (8) 812 X 453

(2) **एकन्यूनेन पूर्वेण विधिः–** (सूत्र का अर्थ है पहले से एक कम के द्वारा) इस सूत्र का उपयोग तब करते है जब एक संख्या अंक नौ की बनी हो। इसमें तीन स्थितियाँ है जब गुणक और गुण्य में:–

1. अंकों की संख्या बराबर हो
2. गुणक में अंकों की संख्या गुण्य के अंकों की संख्या से अधिक हो (अर्थात नौ अधिक हो)
3. गुणक में अंकों की संख्या गुण्य के अंकों की संख्या से कम हो (अर्थात नौ कम हो)

स्थिति–1

उदाहरण–10. 63 X 99 सूत्र एक न्यूनेनपूर्वेण की सहायता से हल कीजिए।

हल : 63 X 99

62 | 37

(1) दोनों ओर दो–दो अंक हैं।

(2) उत्तर का बायाँ भागः 63 एक न्यूनेन 62

(3) उत्तर का दायाँ भाग : 99 – 62 = 37

उदाहरण–11. 3452 X 9999 सूत्र एक न्यूनेनपूर्वेण की सहायता से हल कीजिए।

हल : 3452 X 9999 सूत्र एक न्यूनेन पूर्वेण से

3451 | 6548

(1) उत्तर का बायाँ भाग 3452 का एक न्यूनेन 3451

(2) उत्तर का दायाँ भाग 9999 – 3451 = 6548

स्थिति–2

उदाहरण–12. 43 X 999 सूत्र एकन्यूनेन पूर्वेण की सहायता से हल कीजिए।

हल : 043 X 999

042 | 957

(1) 43 के बायें एक शून्य रखकर दोनों संख्याओं में अंक बराबर करते हैं।

(2) उत्तर का बायाँ भाग : 043 का एकन्यूनेन 042

(3) उत्तर का दायाँ भाग 999 – 042 = 957

$\boxed{42957 \text{ उत्तर}}$

उदाहरण–13. 347 X 99999 सूत्र एकन्यूनेन पूर्वेण की सहायता से हल कीजिए।

हल : 00347 X 99999

00346 | 99653

34699653 उत्तर

(1) 347 के बायें दो शून्य लगाकर दोनों संख्याओं में अंक बराबर करते हैं।

(2) उत्तर का बायाँ भाग : 00347 का एकन्यूनेन 00346

(3) उत्तर का दायाँ भाग 99999
– 00346
99653

स्थिति–3

उदाहरण–14. 438 X 99 सूत्र एकन्यूनेन पूर्वेण से हल कीजिए।

हल :

438 X 99
43799
– 437
43362

(1) इसमें 438 का एक न्यूनेन 437
किया तथा 437 के बाद 99 यथावत लिख दें।
प्राप्त हुआ 43799 इसमें से 437 घटा दें। अर्थात 43362 उत्तर

प्रश्नावली – 1.4

सूत्र एक न्यूनेन पूर्वेण के प्रयोग से हल करें : (जाँच भी कीजिए)

(1) 57 X 99 (2) 4378 X 9999 (3) 87 X 999

(4) 345 X 99999 (5) 48 X 9 (6) 9457 X 999

(3) **एकाधिकेन पूर्वेण विधिः–** इसमें सूत्र एकाधिकेनपूर्वेण तथा अन्त्ययोर्दशकेऽपि का प्रयोग होता है।

इस विधि का प्रयोग तब करते है जब गुण्य और गुणक की इकाइयों का योग (10) हो तथा शेष समूह समान हो।

उदाहरण–15. 12 X 18 सूत्र एकाधिकेनपूर्वेण की सहायता से हल कीजिए।

हल : 12 X 18

2 | 16

सूत्र एकाधिकेनपूर्वेण एवं अन्त्ययोर्दशकेऽपि

(1) उत्तर का बायाँ भाग(दहाई का एकाधिक X दहाई)
= (2 X 1) = 2

(2) उत्तर का दायाँ भाग = इकाइयों का गुणनफल = 2 X 8 = 16

$\therefore 12 \times 18 = 216$ उत्तर

उदाहरण–16. 21 X 29 सूत्र एकाधिकेनपूर्वेण की सहायता से हल कीजिए।

हल : 21 X 29 सूत्र एकाधिकेनपूर्वेण एवं अन्त्ययोर्दशकेऽपि

6 | 09

(1) उत्तर का बायाँ भाग (दहाई का एकाधिक X दहाई)

= (3 X 2) = 6

(2) उत्तर का दायाँ भाग = इकाइयों का गुणनफल = 1 X 9 = 9

$\therefore 21 \times 29 = 609$ उत्तर

टीपः– (1) इकाइयों का योग 10 है। दस (10) में एक शून्य है अतः उत्तर के दायें भाग में दो अंक रखना होगा अतः 9 के पहले 0 शून्य रखा जाना अनिवार्य है।

उदाहरण–17. 102 X 108 सूत्र एकाधिकेनपूर्वेण की सहायता से हल कीजिए।

हल : 102 X 108 सूत्र एकाधिकेन पूर्वेण एवं अन्त्ययोर्दशकेऽपि

110 | 16

(1) उत्तर का बायाँ भाग (दस का एकाधिक X दस)

= (11 X 10) = 110

(2) उत्तर का दायाँ भाग = इकाइयों का गुणनफल

= 2 X 8 = 16

$\therefore 102 \times 108 = 11016$ उत्तर

उदाहरण–18. 194 X 196 सूत्र एकाधिकेनपूर्वेण की सहायता से हल कीजिए।

हल : 194 X 196 सूत्र एकाधिकेन पूर्वेण एवं अन्त्ययोर्दशकेऽपि

380 | 24

(1) उत्तर का बायाँ भाग (उन्नीस का एकाधिक X उन्नीस)

= (20 X 19) = 380

(2) उत्तर का दायाँ भाग = इकाइयों का गुणनफल

= 4 X 6 = 24

$\therefore 194 \times 380 = 38024$ उत्तर

प्रश्नावली – 1.5

सूत्र एकाधिकेन पूर्वेण एवं अन्त्ययोर्दशकेऽपि के प्रयोग से हल कीजिए तथा बीजांक से जाँच कीजिए।

(1) 13 X 17 (2) 22 X 28 (3) 34 X 36 (4) 91 X 99

(5) 35 X 35 (6) 42 X 48 (7) 72 X 78 (8) 93 X 97

(9) 104 X 106	(10) 105 X 105	(11) 203 X 207	(12) 405 X 405
(13) 502 X 508	(14) 603 X 607	(15) 704 X 706	(16) 905 X 905
(17) 193 X 197	(18) 292 X 298	(19) 392 X 398	(20) 495 X 495

निखिलम् विधि :– इस विधि से तब गुणा करते हैं जब संख्याएं आधार या उपाधार के निकट होती हैं।

आधार : 10, 100, 1000,............आदि को आधार कहते हैं।

उपाधार 20, 30,...............200,300,......आदि उपाधार कहलाती हैं।

आधार से विचलन :–

(1) सर्वप्रथम 10 की घात के रूप में आधार ज्ञात करना चाहिए जो दी हुई संख्या के निकट हो।

(2) यदि दी गई संख्या आधार से बड़ी है तब उस संख्या में से आधार को घटाकर विचलन धनात्मक चिन्ह के साथ लिखते हैं।

(3) यदि दी हुई संख्या आधार से छोटी है तब उस संख्या को आधार में से घटाकर विचलन ऋणात्मक चिह्न के साथ लिखते हैं।

संख्या	आधार	विचलन
12	10	+2
9	10	–1
104	100	+04
98	100	–02
1002	1000	+002
992	1000	–008

....आदि।

गुणा निखिलम् : (आधार)

उदाहरण–19. 12 X 14 निखिलम् सूत्र से हल कीजिए।

हल :

संख्या	विचलन
12	+ 2
X 14	+ 4
16	8

उत्तर– 168

(1) दोनों संख्याओं का आधार 10 है।

(2) 12 का आधार 10 से विचलन = + 2

(3) 14 का आधार 10 से विचलन =+4

(4) उत्तर का दायाँ भाग =विचलनों का गुणा

= 2 X 4 = 8

(5) उत्तर का बायाँ भाग =(प्रथम संख्या+दूसरी का विचलन)

या (द्वितीय संख्या+ प्रथम का विचलन)

= 12 + (+4) = 16

या = 14 + (+2) = 16

टीपः– इस विधि में उत्तर के दायें भाग में उतने ही अंक रखते हैं जितने आधार में शून्य होते हैं।

उदाहरण–20. 16 X 15 निखिलम् सूत्र से हल कीजिए।

हल : संख्या विचलन

16 + 6

X15 + 5

24 | 0

उत्तर – 240

(1) दोनों संख्याओं का आधार 10 है।

(2) 16 का आधार 10 से विचलन = + 6

15 का आधार 10 से विचलन = + 5

(3) उत्तर का दायाँ भाग =विचलनों का गुणनफल

= 6 X 5 = 30

(4) उत्तर का बायाँ भाग = 16 + 5 + 3.(हासिल)= 24

या = 15 + 6 + 3. (हासिल)= 24

उदाहरण–21. 8 X 13 निखिलम् सूत्र से हल कीजिए।

हल : 8 – 2

X 13 + 3

11 | $\overline{6}$

(1) आधार 10 है।

(2) उत्तर का दायाँ भाग = विचलनों का गुणनफल

= –2 X (+3) = –6

(4) उत्तर का बायाँ भाग = 8 + (+ 3) = 11

या = 13 + (–2) = 11

उत्तर :– 116 या 110–6 = 104

उदाहरण–22. 104 X 108 निखिलम् सूत्र से हल कीजिए।

हल : 104 +04

X108 + 08

112 | 32

(1) आधार 100 है। आधार में दो शून्य हैं अतः उत्तर के दायें भाग में दो अंक रखेंगे।

(2) उत्तर का दायाँ भाग = विचलनों का गुणनफल

= 04 X 08 = 32

(4) उत्तर का बायाँ भाग =एक संख्या + दूसरी का विचलन

या = 104 + 08 = 112

या = 108 + 04 = 112

उत्तर :– 11232

उदाहरण–23. 103 X 101 निखिलम् सूत्र से हल कीजिए।

हल :

$$\begin{array}{r|l} 103 & +03 \\ \text{X}101 & +01 \\ \hline 104 & 03 \end{array}$$

(1) आधार 100 है।

(2) उत्तर का दायाँ भाग = विचलनों का गुणनफल

= 3 X 1 = 3

(3) दायें भाग में दो अंक रखना होगा क्योंकि आधार में दो शून्य हैं अतः 3 के सामने शून्य रखा गया है।

(4) उत्तर का बायाँ भाग =एक संख्या + दूसरी का विचलन

या = 103 + 01 = 104

या = 101 + 03 = 104

उत्तर :– 10403

उदाहरण–24. 92 X 107 निखिलम् सूत्र से हल कीजिए।

हल :

$$\begin{array}{r|l} 92 & -08 \\ \text{X}107 & +\overline{0}7 \\ \hline 99 & 56 \end{array}$$

(1) आधार 100 है। तथा विचलन क्रमशः –08, +07 हैं।

(2) उत्तर का दायाँ भाग = विचलनों का गुणनफल

$=(-08)\ \text{X}\ (+07) = \overline{56}$

(3) उत्तर का बायाँ भाग =एक संख्या + दूसरी का विचलन

या = 92 + 7 = 99

या = 107 + (–08) = 99

उत्तर :– 9956 = 9900–56

= 9844

उदाहरण–25. 1014 X 994 निखिलम् सूत्र से हल कीजिए।

हल :

$$\begin{array}{r|l} 1014 & +014 \\ \text{X}\ 994 & -006 \\ \hline 1008 & 084 \end{array}$$

(1) आधार 1000 है। तथा विचलन क्रमशः +014, –006 हैं।

(2) उत्तर का दायाँ भाग = विचलनों का गुणनफल

$= 14\ \text{X}\ (-006) = -84 \quad = \overline{84}$

(3) उत्तर का बायाँ भाग =एक संख्या + दूसरी का विचलन

या = 1014 + (–6) = 1008

या = 994 + (014) = 1008

(4) आधार में तीन शून्य हैं, अतः दाएँ भाग में तीन अंक होने चाहिए। इसलिए 84 के पहले शून्य लगाया गया है।

उत्तर :– 1008000 _ 084 = 1007916

प्रश्नावली – 1.6

निखिलम् विधि से प्रश्नों को हल कर उत्तर की जाँच बीजांक से कीजिए :–

(1) 13×13 (2) 104×102 (3) 105×106 (4) 98×94

(5) 122×102 (6) 96×107 (7) 1012×1004 (8) 998×974 (9) 1016×998

किसी संख्या का वर्ग ज्ञात करना

गुणा की हमने चार विधियों का अभ्यास किया है:–

(1) ऊर्ध्वतिर्यक विधि (2) एकन्यूनेन पूर्वेण विधि (3) एकाधिकेन पूर्वेण विधि (4) निखिलम् विधि इन विधियों से हम सरलता पूर्वक वर्ग ज्ञात कर सकते हैं। यहाँ एकाधिकेन पूर्वेण विधि तथा अन्य कुछ विशिष्ट विधियों द्वारा वर्ग करने का अभ्यास करेंगे।

(1) एकाधिकेन पूर्वेण तथा अन्त्ययोर्दशकेऽपि : जिन संख्याओं की इकाई 5 हो तो इस विधि से उन संख्याओं का वर्ग मुखाग्र ज्ञात किया जा सकता है।

उदाहरण–26. 65^2 को हल कीजिए।

हल : $65^2 = 65 \times 65$ सूत्र एकाधिकेन पूर्वेण से

42 | 25

(1) उत्तर का बायाँ भाग = दहाई X दहाई का एकाधिकेन

$= 6 \times 7 = 42$

(1) उत्तर का दायाँ भाग = $5 \times 5 = 25$

4225 उत्तर

प्रश्नावली – 1.7

सूत्र एकाधिकेन पूर्वेण के प्रयोग से मुखाग्र उत्तर दीजिए :–

15^2, 25^2, 35^2, 45^2, 55^2, 75^2, 85^2, 95^2, 105^2, 115^2.

(2) **आनुरूप्येण विधि** :– इस विधि का प्रयोग साधारणतः दो अंकों की संख्या के वर्ग के लिए किया जाता है। हम जानते हैं कि $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ इसे निम्नलिखित प्रकार से लिखेंगे $(a | b)^2 = a^2 | 2ab | b^2$ तथा इसके अनुप्रयोग से दो अंकों की संख्या का वर्ग इकाई की ओर से करेंगे प्रत्येक खण्ड में दाएँ तथा मध्य में एक–एक अंक शेष अंक बायें खण्ड में रखेंगे।

उदाहरण–27. 64^2 हल कीजिए।

हल : 64^2 को सूत्र $(a | b)^2 = a^2 | 2ab | b^2$ से हल करेंगे

(1) $b^2 = 4^2 = 16$

4 1

(2) $2ab = 2 \times 6 \times 4 = 48$

(48 + 1 हासिल) = 49

(3) $a^2 = 6^2 = 36$

36 + 4 (हासिल) = 40

अतः $64^2 = 40\ 9\ 6$

4 1

उदाहरण–28. 48^2 हल कीजिए।

हल : 48^2 को $a^2 | 2ab | b^2$ के अनुसार हल करेंगे (देखिए और समझिए)

$48^2 = 23\quad 0\quad 4 \qquad = 2304$

प्रश्नावली – 1.8

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ का प्रयोग कर हल कीजिए

(1) 34^2 (2) 19^2 (3) 54^2 (4) 64^2 (5) 92^2

(3) **यावत् ऊनम् तावत् ऊनी कृत्य वर्गम् च योजयेत सूत्र से** –इस विधि में जिस संख्या का वर्ग करना हो उसका आधार से विचलन ज्ञात कर लेते हैं (1) विचलन कम हो तो उतना संख्या में घटा देने पर तथा अधिक हो तो संख्या में उतना जोड़ देने पर उत्तर का बायाँ भाग प्राप्त होता है। विचलन का वर्ग दाएँ तरफ रख देने पर हल पूर्ण हो जाता है।

प्रश्न हल करने में निम्नलिखित सूत्र की सहायता ले सकते हैं।

संख्या² = संख्या ± विचलन	(± विचलन)²
उदाहरण $13^2 = 13 + 3$	3^2 (आधार 10से 13, तीन अधिक है)
= 169	उत्तर

उदाहरण 7^2 = 7– 3 | 3^2 (आधार 10 से 7 तीन कम है)

= 49 | उत्तर

उदाहरण 98^2 = 98 –2 | $(02)^2$

= 96 04 | उत्तर

उदाहरण 106^2 = 106 + 6 6^2

= 112 36 उत्तर

प्रश्नावली – 1.9

सूत्र– यावत ऊनं तावत् ऊनी कृत्य वर्गं च योजयेत के प्रयोग से हल कीजिए।

12^2, 14^2, 102^2, 105^2, 108^2, 94^2, 996^2,

वर्गमूल

वर्ग मूल ज्ञात करने की गुणनखण्ड एवं भाग विधि हम जानते हैं अब हम पूर्ण वर्ग संख्याओं के लिए विलोकनम् सूत्र से वर्गमूल ज्ञात करने का अभ्यास करेंगे।

विधि–विलोकनम : चार, पाँच, अंकों तक की पूर्ण वर्ग संख्या का वर्गमूल हम अवलोकन से ही ज्ञात कर सकते हैं। तालिका का अवलोकन कीजिए:–

संख्या	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
संख्या^{2}	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
बीजांक	1	4	9	7	7	9	4	1	9	1

मुखाग्र याद कीजिए

वर्ग संख्या की इकाई	–	1	4	5	6	9	0
वर्गमूल संख्या की इकाई	–	1 या 9	2 या 8	5	4 या 6	3 या 7	0

टीप (1) जिन संख्याओं की इकाई 2, 3, 7, 8 हो तो वे पूर्ण वर्ग संख्याएँ नही होंगी।

(2) वर्ग संख्या के अंकों के जितने जोड़े बनेंगे वर्गमूल की संख्या में उतने अंक होंगे।

(3) जिन संख्याओं का बीजांक 2, 3, 5, 6, या 8 हो तो वह संख्या पूर्णवर्ग नहीं है।

उदाहरण–29. 6889 पूर्णवर्ग संख्या का वर्गमूल विलोकनम् से ज्ञात कीजिए।

हल : $\sqrt{6889}$ सूत्र विलोकनम्

$\sqrt{6889}$ = 83 या 87

(1) दो जोड़े बन रहे हैं अतः वर्गमूल में दो अंक होंगे।

(2) दाएँ जोड़े (89) से इकाई निश्चित करेंगे तथा बायें से (68) से दहाई निश्चित करेंगे।

(3) वर्ग संख्या की इकाई 9 अतः वर्गमूल की इकाई 3 या 7 होगी।

(4) बायें जोड़े 68 से दहाई निश्चित करेंगे।

68 का निकटतम वर्गमूल 8 है। अतः $8^2=64$ तथा $9^2=81$, 9^2 यह 68 से अधिक है अतः हम दहाई में 8 रखेंगे।

(5) 83 या 87 में से कोई एक संख्या हमारा उत्तर है।

(6) 83 और 87 के बीच ऐसी संख्या जिसकी इकाई 5 हो 85 है। 85^2 सूत्र एकाधिकेन पूर्वेण से $85^2 = 7225$

(7) 7225 से 6889 संख्या छोटी है अतः 85 से छोटी संख्या अर्थात 83 उत्तर है अतः

$\sqrt{6889} = 83$

प्रश्नावली – 1.10

वर्गमूल सूत्र विलोकनम् से ज्ञात कीजिए।

(1) 9409 (2) 7569 (3) 8281 (4) 3249.

बीजगणित

गुणा (ऊर्ध्वतिर्यक विधि) से – इस सूत्र के प्रयोग से अंक गणित गुणा के साथ–साथ बीजगणित गुणा के प्रश्न भी सरलता से हल किए जा सकते हैं।

उदाहरण–30. $3x+1$ को $2x+4$ से गुणा कर उत्तर की जाँच कीजिए।

हल : ऊर्ध्व तिर्यक विधि

$$\begin{array}{r} 3x+1 \\ \times\ 2x+4 \\ \hline 6x^2+14x+4 \end{array}$$

(1) प्रथम स्तंभ

$$\begin{array}{r} +1 \\ \times\ +4 \\ \hline +4 \end{array} \uparrow \text{ ऊर्ध्वगुणा}$$

(2) प्रथम एवं द्वितीय स्तंभ

$$\begin{array}{r} 3x+1 \\ \times\ 2x+4 \\ \hline \end{array} \times \text{ तिर्यक गुणा कर}$$

जोड़िए

$$(3x \times 4) + (2x \times 1)$$

$$= 12x + 2x = 14x$$

(3) तृतीय स्तंभ

$$\begin{array}{r} 3x \\ \times 2x \\ \hline 6x^2 \end{array} \uparrow \text{ ऊर्ध्वगुणा}$$

उत्तर की जाँच

[(प्रथम व्यंजक के गुणांकों का बीजांक) X (द्वितीय व्यंजक के गुणांकों का बीजांक)] का बीजांक = उत्तर के गुणांकों का बीजांक

(1) 4X6 = 24 का बीजांक → 6

(2) 6 + 4 + 14 = 24 का बीजांक 6

क्रमांक (1) और (2) में बीजांक 6 है। अतः उत्तर सही है।

उदाहरण–31. $2x + y \times 3x - 5y$ संकेतों की सहायता लेकर हल कीजिए।

हल :

$$\begin{array}{r} 2x + y \\ \times\ 3x - 5y \\ \hline +6x^2 - 7xy - 5y^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} 2x & 2x & +y & +y \\ \uparrow & \times & & \uparrow \\ 3x & 3x & -5y & -5y \end{array}$$

उदाहरण–32. बहुपदों $x^2 + 3x + 2$ और $5x^2 + x + 1$ का गुणनफल ऊर्ध्वतिर्यक विधि से ज्ञात कीजिए।

हल :

$$\begin{array}{r} x^2 + 3x + 2 \\ \times\ 5x^2 + x + 1 \\ \hline 5x^4 + 16x^3 + 14x^2 + 5x + 2 \end{array}$$

सूत्र ऊर्ध्वतिर्यग्भ्याम्

(1) प्रथम स्तंभ

$$\begin{array}{r} +2 \\ +1 \\ \hline +2 \end{array} \quad \uparrow$$ ऊर्ध्वगुणा

(2) प्रथम एवं द्वितीय स्तंभ

$$\begin{array}{r} +3x + 2 \\ \times\ \ +x + 1 \\ \hline (3x \times 1) + (x \times 2) \end{array}$$

तिर्यक गुणा कर जोड़िए

$3x + 2x = 5x$

(3) प्रथम,द्वितीय एवं तृतीय स्तंभ

$$\begin{array}{r} x^2 + 3x + 2 \\ 5x^2 + x + 1 \\ \hline (x^2 \times 1) + (5x^2 \times 2) + (3x \times x) \end{array}$$

$= x^2 + 10x^2 + 3x^2 = 14x^2$

संकेत के अनुसार प्रथम एवं तृतीय स्तंभ का तिर्यक गुणा तथा द्वितीय स्तंभ का ऊर्ध्वगुणा

(4) तृतीय एवं द्वितीय स्तंभ

$$x^2 + 3x$$
$$\times\ 5x^2 + x$$

तिर्यक गुणा कर जोड़िए

$$(x^2 \times x) + (5x^2 \times 3x)$$
$$x^3 + 15x^3 = 16x^3$$

(5) तृतीय स्तंभ

$$x^2$$
$$\times\ 5x^2$$

ऊर्ध्वगुणा

$$5x^4$$

प्रश्नावली – 1.11

सूत्र ऊर्ध्वतिर्यग्भ्याम् विधि से हलकर उत्तर की जाँच कीजिए।

(1) $4x+1$ X $x+5$

(2) $4x+2y$ X $3x+3y$

(3) $x - 3y$ X $x+3y$

(4) $x+4$ X $x+4$

(5) x^2+2x+1 X x^2+3x+4

(6) $2x^2+3y-4$ X $3x^2+4y+5$

भाग

परावर्त्य विधिः अंक गणित तथा बीजगणित भाग हेतु परावर्त्य विधि उपयोगी है।

उदाहरण–33. $7x^2-5x+3$ को $x+1$ से भाग दीजिए।

हल : भाजक $x+1$

संशोधित भाजक -1

	$7x^2$	$-5x$	$+3$
	$+7$	-5	$+3$
		-7	$+12$
	$+7$	-12	$+15$

(1) भाजक एवं भाज्य को यथा स्थान लिखेंगे। भाजक $x+1$ का विचलन $+1$ है इसका परावर्त्य –1 यह संशोधित भाजक है।

(2) भाज्य में चरों के गुणांक चिह्न सहित लिखेंगे।

(3) संशोधित भाजक में एक अंक है अतः भाज्य का इकाई की ओर से एक अंक छोड़कर विभाजन रेखा खीचेंगे।

(4) भाज्य का प्रथम अंक 7 ही उत्तर का प्रथम अंक हैं। नीचे लिखेंगे।

(5) (उत्तर का प्रथम अंक X संशोधित भाजक) इस गुणनफल को अगले अंक–5 के नीचे लिखेंगे।

+7 X (–1) = –7

(6) (–5) + (–7)= –12 उत्तर का द्वितीय अंक है।

(7) उत्तर का द्वितीय अंक X संशोधित भाजक, इस गुणनफल को भाज्य में अगले अंक +3 के नीचे लिखेंगे।

–12 X (–1) = +12

(8) अब विभाजन रेखा पार कर चुके अतः +3 +12 = +15

(9) 7x–12 भागफल एवं +15 शेषफल है।

उदाहरण–34. $x^3 + 2x + 12$ को $x + 2$ से भाग दीजिए।

हल :

भाजक $x + 2$	$x^3 + 0x^2$	$+ 2x$	$+ 12$
संशोधित भाजक –2	+1 +0	+ 2	+ 12
	–2		
		+ 4	– 12
	+1 –2	+ 6	0

(1) भाजक $x + 2$ है। विचलन +2 है विचलन का परावर्त्य –2 यही संशोधित भाजक है।

(2) भाज्य को घटती घात के रूप में लिखेंगे। x^2 भाज्य में नहीं है। अतः इसका गुणांक 0 शून्य लिखेंगे।

(3) संशोधित भाजक में (–2) एक अंक है अतः भाज्य का एक अंक इकाई की ओर से छोड़कर विभाजन रेखा खीचेंगे।

(4) भाज्य का प्रथम अंक +1 उत्तर का प्रथम अंक है।

(5) उत्तर का प्रथम अंक X संशोधित भाजक

+1 × – 2 =–2 अगले अंक 0 के नीचे लिखेंगे।

(6) +0 + –2 =–2 उत्तर का द्वितीय अंक है।

(7) उत्तर का द्वितीय अंक X संशोधित भाजक

–2 X –2 =4 अगले अंक +2 के नीचे लिखेंगे।

(8) +2 + (+4) = +6 उत्तर का तृतीय अंक है।

(9) उत्तर का तृतीय अंक X संशोधित भाजक

+6 X (–2) =–12 विभाजन रेखा के बाद +12 के नीचे लिखेंगे। विभाजन रेखा के बाद +12–12=0 शेषफल है।

(10) अतः भागफल +1 −2 + 6 को x की इकाई की ओर से बढ़ती घात में लिखेंगे

भागफल $x^2 - 2x + 6$

शेष = 0

उदाहरण−35. $4x^3\text{-}5x\text{-}9$ को $2x+1$ से भाग दीजिए।

हल : भाजक भाज्य भाज्य को घात के घटते क्रम में

$2x + 1$ $4x^3\text{-}5x\text{-}9$ $4x^3+0x^2\text{-}5x\text{-}9$

(1) भाजक $2x + 1$ में 2 का भाग देकर x का गुणांक 1 कर लेंगे क्योंकि इस विधि में भाजक में चर की अधिकतम घात वाले पद का गुणांक 1 (एक) होना चाहिए।

अतः $\frac{2x+1}{2} = x + \frac{1}{2}$

भाज्य के गुणांक चिह्न सहित घात के घटते क्रम में

नया भाजक $x + \frac{1}{2}$	+4	+0	−5	−9
संशोधित भाजक $-\frac{1}{2}$		−2		+2
			+1	
	+4	−2	−4	−7

(1) उत्तर का प्रथम अंक +4

(2) संशोधित भाजक × उत्तर का प्रथम अंक

-½ × 4 = −2 को शून्य के नीचे लिखेंगे।

(3) +0 −2 = −2 उत्तर का द्वितीय अंक है।

(4) संशोधित भाजक × उत्तर का द्वितीय अंक

-½ × -2 = 1 अगले अंक −5 के नीचे लिखेंगे।

(5) −5 + 1 = −4 उत्तर का तृतीय अंक है।

(6) संशोधित भाजक x उत्तर का तृतीय अंक

-½ × -4 = 2 विभाजन रेखा के बाद −9 के नीचे लिखेंगे।

(7) −9 + 2 = −7 शेषफल है।

(8) +4 −2−4 भागफल में 2 का भाग देंगे क्योंकि भाजक में 2 का भाग दिया है।

अतः +2 −1 −2 इसमें x सहित लिखने पर

$2x^2 - x - 2$ भागफल है तथा शेषफल −7

उदाहरण–36. p(x) को g(x) से भाग दीजिए जबकि

$p(x) = x^4 + 1$ और $g(x)=x+1$

हल : भाजक भाज्य

$x+1$ x^4+1

(1) भाज्य x^4+1 को घात के घटते क्रम में लिखेंगे जो घात इसमें नहीं है उनके गुणांक शून्य (0) लिखेंगे। भाग देने की प्रक्रिया पूर्ववत है। देखिए और समझिए –

भाजक भाज्य

$x+1$ $x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 0x + 1$

भाज्य के गुणांक चिह्न सहित

भाजक $x+1$	+1	+0	+0	+0	+1
संशोधित भाजक −1		−1	+1	−1	+1
	+1	−1	+1	−1	+2

भागफल x^3-x^2+x-1 (भागफल के इकाई में x^0, दहाई में x^1......इस क्रम में बढ़ते हुए लिखते हैं)

शेषफल = 2

<u>उत्तर की जाँच</u>

भाज्य के गुणांकों का बीजांक =

(भाजक के गुणांकों का बीजांक × भागफल के गुणांक का बीजांक) + शेषफल का बीजांक

2 = (2 X 0) + 2

2 = 2 दोनों बीजांक बराबर हैं अतः उत्तर सही है।

AQ4FKH