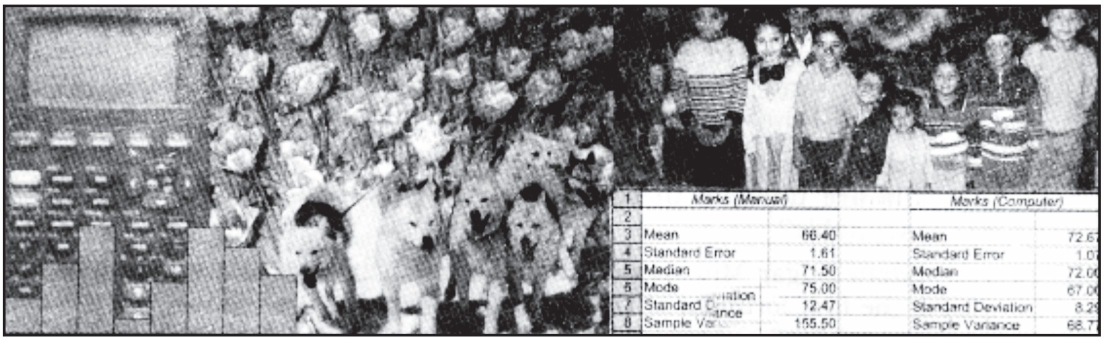
কেন্দ্ৰীয় প্ৰবৃত্তিৰ মাপ (Measures of Central Tendency)



> এই অধ্যায়ৰ অধ্যয়নে তোমাক জানিবলৈ দিব ঃ
> - এক নির্দিষ্ট সংখ্যাৰ দ্বাৰা কোনো তথ্যৰ সংহতিক সংক্ষিপ্তকৰণ কৰাৰ প্ৰয়োজনীয়তা;
> - বিভিন্ন প্ৰকাৰৰ গড়ৰ (Average) চিনাক্তকৰণ আৰু সেইবোৰৰ পৃথকিকৰণ;
> - বিভিন্ন প্ৰকাৰৰ গড় (Average) নিৰূপণ কৰাৰ পদ্ধতি;
> - কোনো তথ্যৰ সংহতিৰ পৰা অৰ্থপূৰ্ণ সাৰাংশ নিৰ্ণয় কৰা;
> - এক বিশেষ পৰিস্থিতিত কোন প্ৰকাৰৰ গড় আটাইতকৈ উপযোগী সেইটো বুজি উঠা।

1. সূচনা

ইয়াৰ আগৰ অধ্যায়ত তোমালোকে তালিকা আৰু লেখৰ দ্বাৰা তথ্য উপস্থাপন কৰিবলৈ শিকিছা। এই অধ্যায়ত, তোমালোকে কেন্দ্ৰীয় প্ৰবৃত্তিৰ মাপৰ বিষয়ে শিকিবা। এই মাপ তথ্যসমূহক বৰ্ণনা কৰাৰ এক সাংখ্যিক পদ্ধতি। দৈনন্দিন জীৱনত এক বৃহৎ তথ্যৰ সংহতিক সংক্ষিপ্তকৰণৰ বহু উদাহৰণ পাবা যেনে কোনো এক শ্ৰেণীৰ পৰীক্ষাত ছাত্ৰ-ছাত্ৰীসকলে আহৰণ কৰা গড় নম্বৰ, এটা অঞ্চলৰ গড় বৰষুণৰ পৰিমাণ, এটা কাৰখানাৰ গড় উৎপাদন, এটা অঞ্চল বা এখন ব্যৱসায়িক প্ৰতিষ্ঠানত (Firm) কাম কৰা মানুহৰ গড় আয় ইত্যাদি।

বাইজু এজন খেতিয়ক। তেওঁ বিহাৰৰ বাক্সাৰ জিলাৰ অন্তৰ্গত বালাপুৰ গাঁৱত খাদ্য-শস্য উৎপাদন কৰে। গাঁওখনত 50 জন ক্ষুদ্ৰ কৃষক আছে। বাইজুৰ 1 একৰ ভূমি আছে। তুমি বালাপুৰ গাঁৱৰ ক্ষুদ্ৰ কৃষকসকলৰ আৰ্থিক অৱস্থা জানিবলৈ ইচ্ছুক। বালাপুৰ গাঁৱত বাইজুৰ আৰ্থিক অৱস্থা আনৰ সৈতে তুলনা কৰিবলৈও বিচাৰিছা। ইয়াৰ বাবে তেওঁৰ ভূমিৰ পৰিমাণ জুখিব লাগিব আৰু বালাপুৰ গাঁৱৰ আন কৃষকসকলৰ ভূমিৰ পৰিমাণৰ লগত তুলনা কৰিব লাগিব। তুমি জানিবলৈ বিচাৰিব পাৰা যদি বাইজুৰ মালিকানাত থকা ভূমি—

(1) সাধাৰণ অৰ্থত গড় পৰিমাণৰ উৰ্দ্ধত (তলত দিয়া গাণিতিক মাধ্য চোৱা)

(2) অৰ্দ্ধ সংখ্যক কৃষকৰ মালিকানাত থকা ভূমিৰ পৰিমাণতকৈ অধিক (তলত দিয়া মধ্যমা চোৱা)

(3) অধিক সংখ্যক কৃষকৰ মালিকানাত থকা ভূমিতকৈ ওপৰত (তলত দিয়া বহুলক চোৱা)

বাইজুৰ তুলনামূলক আৰ্থিক অৱস্থা নিৰূপণ কৰিবলৈ বালাপুৰ গাঁৱৰ কৃষকসকলৰ মালিকানাত থকা ভূমিৰ তথ্যৰ সংহতিক সংক্ষিপ্তকৰণ কৰিব লাগিব। কেন্দ্ৰীয় প্ৰবৃত্তিৰ মাপৰ দ্বাৰা ই সম্ভৱ। কাৰণ এই মাপে এটা মাত্ৰ মানৰ দ্বাৰা গোটেইখিনি তথ্যক প্ৰতিনিধিত্ব কৰিব পাৰে।

কেন্দ্ৰীয় প্ৰবৃত্তিৰ মাপ বা 'গড়'ৰ বিভিন্ন পৰিসাংখ্যিক জোখ আছে। সাধাৰণতে ব্যৱহাৰ কৰা তিনিটা জোখ হ'ল ঃ

- গাণিতিক মাধ্য (Arithmetic Mean)
- মধ্যমা (Median)
- বহুলক (Mode)

এইটো মন কৰিব লগীয়া যে গুণোত্তৰ মাধ্য (Geometric Mean) আৰু হৰাত্মক মাধ্য (Harmonic Mean) নামৰ আৰু দুই প্ৰকাৰৰ গড় আছে। বিশেষ পৰিস্থিতি সাপেক্ষে এইকেইটা উপযোগী হয়। যি কি নহওক, বৰ্তমানৰ আলোচনা ওপৰত উল্লিখিত তিনি প্ৰকাৰৰ মাধ্যৰ মাজত সীমাবদ্ধ ৰখা হ'ব।

2. গাণিতিক মাধ্য

ধৰি লোৱা হ'ল ছয়টা পৰিয়ালৰ মাহিলি আয় (টকাৰ হিচাপত) দিয়া আছে;

1600, 1500, 1400, 1525, 1625, 1630

পৰিয়ালৰ গড় আয় নিৰ্ণয় কৰিবলৈ হ'লে পৰিয়ালসমূহৰ আয়ৰ যোগফলক পৰিয়ালৰ সংখ্যাৰে হৰণ কৰিব লাগিব।

$$= \frac{1600+1500+1400+1525+1625+1630}{6}$$

= 1,547 টকা

ইয়াৰ পৰা এইটো বুজা যায় যে গড় হিচাপে এটা পৰিয়ালে 1,547 টকা উপাৰ্জন কৰে।

গাণিতিক মাধ্য আটাইতকৈ বেছি ব্যৱহাৰ হোৱা কেন্দ্ৰীয় প্ৰবৃত্তিৰ মাপ। যিকোনো বিষয়ৰ তথ্য ৰাশিৰ মানসমূহক একেলগে যোগ কৰি সেই যোগফলক মুঠ তথ্যৰাশিৰ সংখ্যাৰে হৰণ কৰিলে যি পোৱা যায়, তাকেই গাণিতিক মাধ্য বোলা হয়। সাধাৰণতে, যদি $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$, N- সংখ্যক তথ্যৰাশি (Observation) হয়, তেতিয়া গাণিতিক মাধ্য ($\overline{X}$) হ'ব ঃ

$$\overline{X} = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + \ldots\ldots + X_n}{N}$$

$$= \frac{\sum X}{N}$$

য'ত $\sum X$ = সকলো তথ্যৰাশিৰ মুঠ যোগফল আৰু N মুঠ তথ্যৰাশিৰ সংখ্যা

গাণিতিক মাধ্য কেনেকৈ নিৰূপণ কৰা হয়

গাণিতিক মাধ্যৰ নিৰ্ণয় প্ৰণালী দুটা বহল শ্ৰেণীত অধ্যয়ন কৰিব পাৰি ঃ

(1) অসমূহিত তথ্যৰ (Ungrouped data) বাবে গাণিতিক মাধ্য।

(2) সমূহিত তথ্যৰ (Grouped data) বাবে গাণিতিক মাধ্য।

অসমূহিত তথ্য ৰাশিৰ বাবে গাণিতিক মাধ্য

প্ৰত্যক্ষ পদ্ধতি (Direct Method)

প্ৰত্যক্ষ পদ্ধতিত কোনো বিষয়ৰ তথ্যৰাশিৰ মানসমূহৰ যোগফলক মুঠ ৰাখিব সংখ্যাৰে হৰণ কৰিব লাগে।

উদাহৰণ 1

কোনো এটা শ্ৰেণীৰ অৰ্থনীতিৰ পৰীক্ষাত ছাত্ৰ-ছাত্ৰীসকলৰ নম্বৰৰ তথ্যৰ পৰা গাণিতিক মাধ্য নিৰ্ণয় কৰা ঃ 40, 50, 55, 78, 58।

$$\overline{X} = \frac{\sum X}{N}$$

$$= \frac{40+50+55+78+58}{5} = 56.2$$

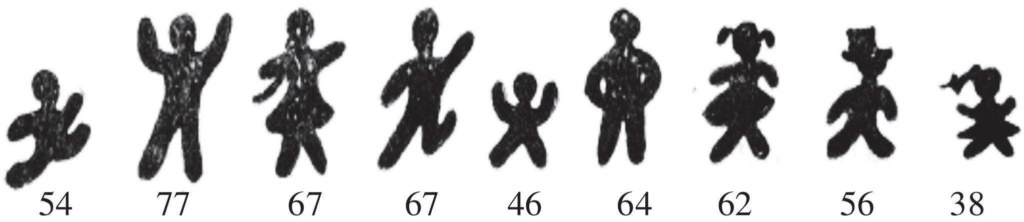
অৰ্থনীতি পৰীক্ষাত ছাত্ৰ-ছাত্ৰীসকলৰ গড় নম্বৰ হ'ল 56.2।

অনুমিত মাধ্য পদ্ধতি (Assumed Mean Method)

যদি তথ্যৰাশিৰ সংখ্যা বেছি আৰু / নাইবা অংকসমূহ ডাঙৰ হয়, তেতিয়া প্ৰত্যক্ষ পদ্ধতিৰ দ্বাৰা গাণিতিক মাধ্য নিৰ্ণয় কৰাটো অসুবিধাজনক হয়। এনে ক্ষেত্ৰত অনুমিত মাধ্য পদ্ধতিৰে গণনা সহজ কৰিব পাৰি।

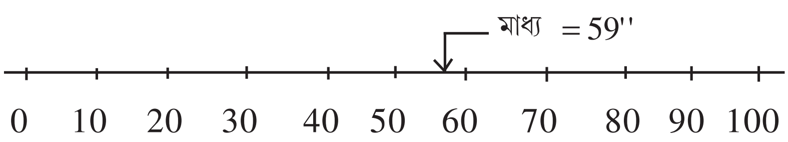
বেছি সংখ্যক তথ্যৰাশি আৰু ডাঙৰ অংক (Large numerical figures) থকা সংহতিৰ পৰা গাণিতিক মাধ্য কম সময়ত উলিয়াবলৈ অনুমিত মাধ্য পদ্ধতি ব্যৱহাৰ কৰিব পাৰি। এই পদ্ধতিত যুক্তি/অভিজ্ঞতাৰ ভিত্তিত তথ্যৰাশিৰ মাজৰ পৰা এটা নিৰ্দিষ্ট অংক গাণিতিক মাধ্য হিচাপে ধৰি লোৱা হয়। ইয়াৰ পিছত প্ৰতিটো তথ্যৰাশিৰ অনুমিত মাধ্যৰ পৰা বিচলন (Deviation) উলিয়াই লোৱা হয়। পৰৱৰ্তী পৰ্যায়ত বিচলনসমূহৰ যোগফলক তথ্য ৰাশিৰ মুঠ সংখ্যাৰে হৰণ কৰা হয়। অনুমিত মাধ্যৰ যোগফল আৰু বিচলনসমূহৰ যোগফল আৰু তথ্যৰাশিৰ সংখ্যাৰ অনুপাত উলিয়াই প্ৰকৃত গাণিতিক মাধ্য নিৰূপণ কৰা হয়।

মাধ্য



(ইঞ্চিৰ হিচাপত উচ্চতা)

$$\text{মাধ্য} = \frac{\sum X}{N} = \frac{54+77+67+67+46+64+62+56+38}{9} = \frac{531}{9} = 59''$$



প্ৰতীকৰ সহায়ত (Symbolically),

ধৰি লোৱা হ'ল A = অনুমিত মাধ্য

X = স্বকীয় তথ্যৰাশি

N= মুঠ তথ্যৰাশিৰ সংখ্যা

d = স্বকীয় তথ্যৰাশিৰ পৰা অনুমিত মাধ্যৰ বিচলন

অৰ্থাৎ d=X-A

সকলো বিচলনৰ যোগফলক প্ৰকাশ কৰা হয় এইদৰে

$$\sum d = \sum (X - A)$$

ইয়াৰ পিছত $\frac{\sum d}{N}$ নিৰ্ণয় কৰা হয়।

$\overline{X}$ পাবলৈ $\frac{\sum d}{N}$ আৰু A যোগ কৰা হয়।

গতিকে, $\overline{X} = A + \frac{\sum d}{N}$

মনত ৰখা উচিত যে তথ্যৰাশিৰ মাজত থকা বা নথকা যিকোনো মানকে অনুমিত মাধ্য হিচাপে ধৰিব পাৰি। অৱশ্যে গণনাৰ সৰলীকৰণৰ বাবে, তথ্যসমূহৰ কেন্দ্ৰত থকা মানকেই অনুমিত মাধ্য হিচাপে নিৰ্বাচন কৰা হয়।

উদাহৰণ 2

তলত দিয়া তথ্যই 10 টা পৰিয়ালৰ সাপ্তাহিক আয় দেখুৱাইছে।

পৰিয়াল	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
সাপ্তাহিক আয়	850	700	100	750	5000	80	420	2500	400	360

(টকাৰ হিচাপত)

পৰিয়ালৰ গড় আয় নিৰ্ণয় কৰা।

তালিকা নং 5.1

অনুমিত মাধ্য পদ্ধতিৰে গাণিতিক মাধ্য নিৰূপণ

পৰিয়াল	আয় (x)	d= x-850	d' =(x-850)/10
A	850	0	0
B	700	- 150	- 15
C	100	- 750	- 75
D	750	- 100	- 10
E	5000	+ 4150	+ 415
F	80	- 770	- 77
G	420	- 430	- 43
H	2500	+ 1650	+ 165
I	400	- 450	- 45
J	360	- 490	- 49
	11160	+ 2660	+ 266

অনুমিত মাধ্য পদ্ধতিৰে নিৰ্ণয় কৰা গাণিতিক মাধ্য

$$\overline{X} = A + \frac{\sum d}{N} = 850 + 2660/10 = 1{,}116 \text{ টকা}$$

পৰিয়ালৰ গড় সাপ্তাহিক আয় দুয়োটা পদ্ধতিতেই 1,116 টকা হ'ব। প্ৰত্যক্ষ পদ্ধতি ব্যৱহাৰ কৰি পৰীক্ষা কৰি চাব পাৰা।

উপ-বিচলন পদ্ধতি (Step Deviation Method)

গণনা পদ্ধতি অধিক সৰলীকৰণ (simplification) কৰিবলৈ অনুমিত গড়ৰ পৰা লোৱা সকলো বিচলনকে (deviation) এটা সাধাৰণ উৎপাদক 'c' (common factor) ৰে হৰণ কৰিব পাৰি। ডাঙৰ অংক (large numerical figure) এৰাই চলাটোৱেই এই পদ্ধতিৰ উদ্দেশ্য। যদি d=X-A যথেষ্ট ডাঙৰ সংখ্যা হয়, তেতিয়া 'd'' তলত দিয়া ধৰণে উলিয়াই ল'ব পৰা যায়।

$$d' = \frac{d}{c} = \frac{X-A}{c}$$

সূত্ৰটো হ'ব $\overline{X} = A + \frac{\sum d'}{N} \times c$

য'ত $d' = \frac{X-A}{c}$

c = সাধাৰণ উৎপাদক

N = তথ্যৰাশিৰ সংখ্যা

A = অনুমিত মাধ্য

গতিকে, উপ-বিচলন পদ্ধতিৰ দ্বাৰা উদাহৰণ 2 ত দিয়া তথ্যৰ গাণিতিক মাধ্য নিৰ্ণয় কৰিব পাৰি।

$$\overline{X} = 850 + \frac{266}{10} \times 10 = 1,116 \text{ টকা}$$

সমূহিত তথ্যৰ বাবে গাণিতিক মাধ্য

বিচ্ছিন্ন শ্ৰেণী ঃ প্ৰত্যক্ষ পদ্ধতি

বিচ্ছিন্ন শ্ৰেণীৰ ক্ষেত্ৰত প্ৰতিটো তথ্যৰাশিক তাৰ বিপৰীতে থকা বাৰংবাৰতাৰে পূৰণ কৰিব লাগে। ইয়াৰ ফলত যি মান পোৱা যাব তাৰ যোগফলক মুঠ বাৰংবাৰতাৰ সংখ্যাৰে হৰণ কৰিব লাগিব। প্ৰতীকৰ সহায়ত,

$$\overline{X} = \frac{\sum fX}{\sum f}$$

য'ত, $\sum fX$ = চলক আৰু বাৰংবাৰতাৰ পূৰণৰ যোগফল

Σf = বাৰংবাৰতাসমূহৰ যোগফল।

উদাহৰণ 3

তলত দিয়া তথ্যৰ পৰা কোনো এখন গাঁৱৰ পৰিয়ালে প্ৰতি কৃষিপামৰ গড় আকাৰ নিৰ্ণয় কৰা।

কৃষিপামৰ আকাৰ (একৰত)	64	63	62	61	60	59
কৃষি কৰা পৰিয়ালৰ সংখ্যা	8	18	12	9	7	6

তালিকা নং 5.2

প্ৰত্যক্ষ পদ্ধতিৰে গাণিতিক মাধ্য নিৰূপণ

কৃষিপামৰ আকাৰ (x) (একৰত)	কৃষি কৰা পৰিয়ালৰ সংখ্যা(f)	fx (1×2)	d (x-62)	fd (2×4)
[1]	[2]	[3]	[4]	[5]
64	8	512	+ 2	+ 16
63	18	1134	+ 1	+ 18
62	12	744	0	0
61	9	549	-1	- 9
60	7	420	-2	- 14
59	6	354	- 3	- 18
	60	3713	- 3	- 7

প্ৰত্যক্ষ পদ্ধতিৰ দ্বাৰা নিৰ্ণয় কৰা গাণিতিক মাধ্য,

$$\overline{X} = \frac{\sum fX}{\sum f} = \frac{3713}{60} = 61.88 \text{ একৰ}$$

গতিকে, গাঁওখনৰ কৃষিপামৰ গড় আকাৰ হ'ব 61.88 একৰ

অনুমিত মাধ্য পদ্ধতি

বিচ্ছিন্ন শ্ৰেণীৰ ক্ষেত্ৰতো আগত উল্লেখ কৰা স্বকীয় ৰাশিৰ (individual series) দৰেই সামান্য সালসলনিৰে অনুমিত মাধ্য ব্যৱহাৰ কৰি গণনা সৰলীকৰণ কৰিব পাৰি। যিহেতু বাৰংবাৰতা (f) দিয়া আছে, প্ৰতিটো বিচলনক (d) বাৰংবাৰতাৰে পূৰণ কৰিলে fd পোৱা যায়। ইয়াৰ পিছত $\sum fd$ উলিয়াই লোৱা হয়। মুঠ বাৰংবাৰতা ($\sum f$) উলিয়াই লৈ $\sum fd$ ক $\sum f$ ৰে হৰণ কৰিব লাগিব।

অনুমিত মাধ্য পদ্ধতিৰে নিৰ্ণয় কৰা গাণিতিক গড়ৰ সূত্ৰটো

হ'ল $\overline{X} = A + \frac{\sum fd}{\sum f}$

উপ-বিচলন পদ্ধতি

এই পদ্ধতিত বিচলনক (d) সাধাৰণ উৎপাদক 'c' ৰে হৰণ কৰিব লাগিব। গণনা সহজ কৰিবলৈ $d' = \frac{d}{c} = \frac{X-A}{c}$ নিৰ্ণয় কৰা হয়। ইয়াৰ পিছত fd' আৰু $\sum fd'$ নিৰূপণ কৰা হয়।

উপ-বিচলন পদ্ধতিৰে নিৰূপণ কৰা গাণিতিক মাধ্যৰ সূত্ৰটো হৈছে

$$\overline{X} = A + \frac{\sum fd'}{\sum f} \times c$$

কাৰ্যাৱলী (Activity)

- অনুমিত মাধ্য আৰু উপ-বিচলন পদ্ধতিৰ দ্বাৰা উদাহৰণ 3ত দিয়া তথ্যৰ পৰা কৃষিপামৰ গড় আকাৰ নিৰ্ণয় কৰা।

অবিচ্ছিন্ন শ্ৰেণী

ইয়াত শ্ৰেণী বিভাগ দিয়া থাকে। বিচ্ছিন্ন শ্ৰেণীৰ দৰে অবিচ্ছিন্ন শ্ৰেণীৰ ক্ষেত্ৰতো একে পদ্ধতিৰে গাণিতিক মাধ্য নিৰূপণ কৰা হয়। একমাত্ৰ পাৰ্থক্য হ'ল অবিচ্ছিন্ন শ্ৰেণীত শ্ৰেণী বিভাগৰ মধ্যমান (mid points) দিয়া থাকে। শ্ৰেণী বিভাগ অন্তৰ্ভুক্ত (inclusive), বৰ্হিভুক্ত (exclusive) বা অসমান হ'ব পাৰে। বহিৰ্ভুক্ত শ্ৰেণী বিভাগৰ উদাহৰণ হ'ল 0-10, 10-20 ইত্যাদি। অন্তৰ্ভুক্ত শ্ৰেণী বিভাগৰ উদাহৰণ হ'ল 0-9, 10-19 ইত্যাদি। অসমান শ্ৰেণী বিভাগ হ'ল 0-20, 20-50 ইত্যাদি। এই সকলোবোৰতেই গাণিতিক মাধ্য একে পদ্ধতিৰেই নিৰ্ণয় কৰা হয়।

উদাহৰণ 4

(a) প্ৰত্যক্ষ পদ্ধতি আৰু (b) উপ-বিচলন পদ্ধতি ব্যৱহাৰ কৰি তলত দিয়া তথ্যৰ পৰা ছাত্ৰ-ছাত্ৰীসকলৰ গড় নম্বৰ নিৰূপণ কৰা।

প্ৰত্যক্ষ পদ্ধতি

নম্বৰ	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70
ছাত্ৰ-ছাত্ৰীৰ সংখ্যা	5	12	15	25	8	3	2

তালিকা নং 5.3

প্ৰত্যক্ষ পদ্ধতিৰে বহিৰ্ভুক্ত শ্ৰেণী বিভাগৰ গড় নম্বৰ গণনা

নম্বৰ (x) (1)	ছাত্ৰ-ছাত্ৰীৰ সংখ্যা (f) (2)	মধ্যমান (m) (3)	fm (2)×(3) (4)	$d=\frac{(m-35)}{10}$ (5)	fd' (6)
0-10	5	5	25	-3	-15
10-20	12	15	180	-2	-24
20-30	15	25	375	-1	-15
30-40	25	35	875	0	0
40-50	8	45	360	1	8
50-60	3	55	165	2	6
60-70	2	65	130	3	6
	70		2110		- 34

স্তৰসমূহ ঃ

1. প্ৰতিটো শ্ৰেণীৰ মধ্যমান (m) নিৰ্ণয় কৰা।

2. $\sum fm$ উলিয়াই প্ৰত্যক্ষ পদ্ধতিৰ সূত্ৰ প্ৰয়োগ কৰা ঃ

$$\overline{X} = \frac{\sum fm}{\sum f} = \frac{2110}{70} = 30.14 \text{ নম্বৰ}$$

উপ-বিচলন পদ্ধতি

1. $d' = \frac{(m-A)}{c}$ নিৰ্ণয় কৰা।

2. ধৰি লোৱা A = 35 [যিকোনো যাদৃচ্ছিক (arbitrary) সংখ্যা]

c = সাধাৰণ উৎপাদক

$$\overline{X} = A + \frac{\sum fd'}{\sum f} \times c = 35 + \frac{(-34)}{70} \times 10$$

= 30.14 নম্বৰ

গাণিতিক মাধ্যৰ এক উল্লেখযোগ্য বৈশিষ্ট্য ঃ

গাণিতিক মাধ্যৰ এক উল্লেখযোগ্য বৈশিষ্ট্য হৈছে গাণিতিক মাধ্যৰ পৰা চলকৰ মানসমূহৰ বিচলনৰ যোগফল সদায় শূন্য (0) হয়। তোমাৰ গণনা শুদ্ধ হোৱাৰ প্ৰমাণ এই বৈশিষ্ট্যই দিয়ে।

প্ৰতীকৰ সহায়ত, $\sum(X - \overline{X}) = 0$।

যি কি নহওঁক, গাণিতিক মাধ্য চৰম মানৰ (extreme values) দ্বাৰা প্ৰভাৱিত হয়। প্ৰান্ত বিন্দুত থকা সৰু বা ডাঙৰ, যিকোনো সংখ্যাৰ দ্বাৰা ইয়াৰ মান উচ্চ বা নিম্ন হ'ব পাৰে।

ভাৰযুক্ত গাণিতিক মাধ্য (Weighted Arithmetic Mean)

গাণিতিক মাধ্য নিৰূপণ কৰিবলৈ কেতিয়াবা তথ্যৰাশিসমূহৰ গুৰুত্ব অনুযায়ী ভাৰ (weight) নিৰ্দ্ধাৰণ কৰিব লগীয়া হয়। উদাহৰণস্বৰূপে, ধৰি লোৱা হ'ল আম আৰু আলু দুবিধ সামগ্ৰী আছে। তুমি আমৰ গড় দাম (p_1) আলুৰ গড় দাম (p_2) উলিয়াব বিচাৰিছা। গাণিতিক মাধ্য হ' $\frac{P_1 + P_2}{2}$ । যি কি নহওঁক, তুমি আলুৰ দাম (p_2) বৃদ্ধিক অধিক গুৰুত্ব দিব বিচাৰিছা। এইটো কৰিবলৈ আমৰ পৰিমাণ (q_1) আৰু আলুৰ পৰিমাণ (q_2) ক ভাৰ হিচাপে ব্যৱহাৰ কৰিব বিচাৰিছা। এতিয়া ভাৰযুক্ত গাণিতিক মাধ্য হ'ব $\frac{q_1 p_1 + q_2 p_2}{q_1 + q_2}$ ।

সাধাৰণতে ভাৰযুক্ত গাণিতিক মাধ্যৰ সূত্ৰ হৈছে

$$\frac{w_1 x_1 + w_2 x_2 + \ldots\ldots + w_n x_n}{w_1 + w_2 + \ldots\ldots\ldots + w_2} = \frac{\sum wx}{\sum w}$$

যেতিয়া দাম বাঢ়ে, যিবোৰ বস্তু তোমাৰ বাবে বেছি গুৰুত্বপূৰ্ণ সেইবোৰৰ বৃদ্ধিৰ প্ৰতিহে তুমি বেছি আগ্ৰহী হ'বা। অষ্টম অধ্যায়ৰ (Chapter 8) আলোচনাত এই বিষয়ে অধিক জানিবলৈ পাৰিবা।

কাৰ্যাৱলী (Activities)

- তলত দিয়া উদাহৰণৰ পৰা গাণিতিক মাধ্যৰ (ওপৰত দিয়া) বৈশিষ্ট্য পৰীক্ষা কৰাঃ
  X ঃ 4 6 8 10 12
- ওপৰৰ উদাহৰণত যদি গাণিতিক মাধ্য বৃদ্ধিৰ পৰিমাণ 2 হয় আৰু সকলোবোৰ তথ্যৰ মান যদি সমানে প্ৰভাৱিত হয়, তেতিয়া স্বকীয় ৰাশিসমূহৰ কি হয়?
- প্ৰথম তিনিটা ৰাশি যদি 2 কৈ বৃদ্ধি পায়, তেতিয়া গাণিতিক মাধ্য অপৰিৱৰ্তিত হৈ থাকিবলৈ শেষৰ দুটা ৰাশিৰ মান কি হোৱা উচিত?
- 12 ৰ পৰিৱৰ্তে 96 লিখা। গাণিতিক মাধ্য কি হ'ব মন্তব্য আগ বঢ়োৱা।

3. মধ্যমা (MEDIAN)

গাণিতিক মাধ্য প্ৰান্ত-বিন্দুত থকা তথ্যৰ চৰম মানৰ (extreme values) দ্বাৰা প্ৰভাৱিত হয়। কেন্দ্ৰীয় প্ৰবৃত্তিৰ এনে এটা মাপ লোৱা যিটো তথ্যৰাশিৰ মধ্যম স্থানৰ ওপৰত নিৰ্ভৰশীল আৰু প্ৰান্ত-বিন্দুত থকা চৰম মানৰ দ্বাৰা

প্ৰভাৱিত নহয়। মধ্যমা হৈছে এনে এটা স্থানগত মান যিয়ে তথ্যৰাশিক দুটা সমান ভাগত ভাগ কৰে। তথ্যৰাশিৰ এটা অংশ মধ্যমাৰ সমান বা তাতকৈ বেছি মানৰ আৰু আন এটা অংশ মধ্যমাৰ সমান বা তাতকৈ সৰু মানৰ। তথ্যৰ সংহতিক মাত্ৰা (magnitude) অনুসৰি সজালে মধ্যমা তথ্যসমূহৰ মাজত অৱস্থিত 'কেন্দ্ৰীয় মান'।

মধ্যমা নিৰূপণ

তথ্যৰাশি সমূহক সৰুৰ পৰা ডাঙৰলৈ সজাই লৈ কেন্দ্ৰীয় বা মাজত থকা মানটোকেই মধ্যমা হিচাপে সহজতে নিৰূপণ কৰিব পাৰি।

উদাহৰণ 5

ধৰি লোৱা তথ্য সংহতিত থকা ৰাশিসমূহ হৈছে ঃ 5, 7, 6, 1, 8, 10, 12, 4 আৰু 3।

তথ্যসমূহক উৰ্দ্ধমুখী ক্ৰমত (ascending order) সজালে আমি পাম ঃ

1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 12

↑

'কেন্দ্ৰীয় মানটো' হৈছে 6, গতিকে মধ্যমা 6 হ'ব। এই তথ্যসমূহৰ আধা অংশ 6 তকৈ ডাঙৰ আৰু বাকী আধা সৰু।

তথাৰাশিৰ সংখ্যা যদি যুগ্ম হয়, তেতিয়া কেন্দ্ৰত বা মাজত দুটা মান থাকিব। এইক্ষেত্ৰত মাজত থকা মান দুটাৰ গাণিতিক মাধ্যক মধ্যমা হিচাপে নিৰূপণ কৰা হ'ব।

উদাহৰণ 6

তলৰ তথ্যই 20 জন ছাত্ৰ-ছাত্ৰীৰ নম্বৰ দেখুৱাইছে। তুমি নম্বৰৰ মধ্যমা নিৰ্ণয় কৰিব লাগে।

25, 72, 28, 65, 29, 60, 30, 54, 32, 53
33, 52, 35, 51, 42, 48, 45, 47, 46, 33

তথ্যসমূহক উৰ্দ্ধমুখী ক্ৰমত সজালে তুমি পাবা

25, 28, 29, 30, 32, 33, 33, 35, 42
45, 46, 47, 48, 51, 52, 53, 54, 60
65, 72।

তোমালোকে দেখিছা যে মাজত 45 আৰু 46 দুটা মান আছে। এই দুটা মানৰ গাণিতিক মাধ্য উলিয়াই মধ্যমা নিৰ্ণয় কৰিব পাৰি।

মধ্যমা $=\dfrac{45+46}{2}=45.5$ নম্বৰ

মধ্যমা গণনা কৰিবলৈ তাৰ স্থান জনাটো অতি আৱশ্যকীয়। মধ্যমাৰ স্থান তলত দিয়া সূত্ৰ প্ৰয়োগ কৰি উলিয়াব পাৰি ঃ

মধ্যমাৰ স্থান $=\dfrac{N+1}{2}$ তম ৰাশি (Item)

য'ত N = ৰাশিৰ সংখ্যা

এইটো মন কৰিব লগীয়া যে ওপৰৰ সূত্ৰটোৱে মধ্যমা নিৰ্ণয় নকৰে। ই মাথোন এক ক্ৰম শৃংখলাৰ পৰা মধ্যমাৰ স্থানহে নিৰূপণ কৰে। মধ্যমা নিৰ্ণয় কৰা সূত্ৰটো হ'ল ঃ

মধ্যমা $=\dfrac{(N+1)}{2}$ তম ৰাশিৰ মান

বিচ্ছিন্ন শ্ৰেণী

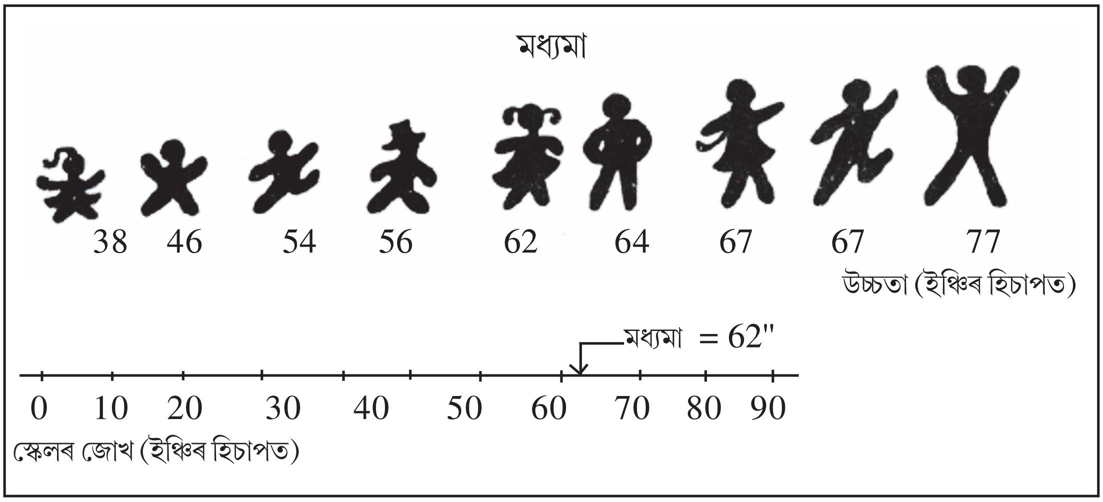
বিচ্ছিন্ন শ্ৰেণীৰ ক্ষেত্ৰত মধ্যমাৰ স্থান অৰ্থাৎ $\dfrac{(N+1)}{2}$ তম ৰাশিৰ মান সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতাৰ মাধ্যমেৰে উলিয়াব পাৰি। উক্ত স্থানত থকা তদনুৰূপ ৰাশিৰ মানেই মধ্যমা।

উদাহৰণ 7

তলত দিয়া বাৰংবাৰতা বিভাজন তালিকাত মানুহৰ সংখ্যা আৰু তেওঁলোকৰ আয় (টকাৰ হিচাপত) দিয়া হৈছে। মধ্যমা আয় নিৰ্ণয় কৰা।

আয় (টকাৰ হিচাপত)	ঃ	10	20	30	40
মানুহৰ সংখ্যা	ঃ	2	4	10	4

মধ্যমা আয় নিৰ্ণয় কৰিবলৈ তলত দিয়া ধৰণে বাৰংবাৰতা বিভাজন তালিকা প্ৰস্তুত কৰিব লাগিব।



তালিকা নং 5.4

বিচ্ছিন্ন শ্ৰেণীৰ মধ্যমা নিৰূপণ

আয় (টকাৰ হিচাপত)	মানুহৰ সংখ্যা (f)	সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতা (cf)
10	2	2
20	4	6
30	10	16
40	4	20

মধ্যমাৰ স্থান = $=\frac{(N+1)}{2}$ তম ৰাশি $=\frac{20+1}{2}=10.5$ তম ৰাশি

ইয়াক সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতাৰ মাধ্যমেৰে সহজতে উলিয়াব পৰা যাব। 10.5 তম ৰাশি সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতা 16 থকা শ্ৰেণীত থাকিব। সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতাৰ তদনুৰূপ (corresponding) আয়ৰ পৰিমাণ 30 টকা, সেয়েহে মধ্যমা আয় হৈছে 30 টকা।

অবিচ্ছিন্ন শ্ৰেণী

অবিচ্ছিন্ন শ্ৰেণীৰ ক্ষেত্ৰত মধ্যমা থকা স্থানটো হ'ব $\frac{N}{2}$ তম ৰাশিৰ মান [$\frac{(N+1)}{2}$ তম ৰাশিৰ মান নহয়]। তেতিয়া মধ্যমা তলত দিয়া ধৰণে নিৰ্ণয় কৰিব পাৰি ঃ

$$\text{মধ্যমা} = L + \frac{\left(\frac{N}{2} - c.f\right)}{f} \times h$$

য'ত, L = মধ্যমা থকা শ্ৰেণীটোৰ নিম্ন সীমা।
c.f. = মধ্যমা থকা শ্ৰেণীটোৰ আগৰ শ্ৰেণীৰ সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতা
f = মধ্যমা থকা শ্ৰেণীটোৰ বাৰংবাৰতা
h = মধ্যমা থকা শ্ৰেণীটোৰ শ্ৰেণী ব্যৱধান।

বাৰংবাৰতা অসমান বিস্তাৰৰ হ'লেও কোনো ধৰণৰ সংযোজনৰ (adjustment) প্ৰয়োজন নহয়।

উদাহৰণ 8

কোনো এটা কাৰখানাত কাম কৰা শ্ৰমিকৰ দৈনিক মজুৰিৰ তথ্য তলত দিয়া আছে। দৈনিক মজুৰিৰ মধ্যমা নিৰ্ণয় কৰা।

দৈনিক মজুৰি ঃ 55-60 50-55 45-50 40-45 35-40 30-35 25-30 20-25
(টকাৰ হিচাপত)
শ্ৰমিকৰ সংখ্যা ঃ 7 13 15 20 30 33 28 14

তথ্যখিনি উৰ্দ্ধমুখী ক্ৰমত সজাই ল'ব লাগিব।

ওপৰৰ উদাহৰণত মধ্যমা থকা শ্ৰেণীটো হ'ব $\frac{N}{2}$ তম ৰাশি অৰ্থাৎ $\frac{160}{2} = 80$ তম ৰাশি, যিটো 35-40 শ্ৰেণী বিভাগত থাকিব।

তালিকা 5.5

অবিচ্ছিন্ন শ্ৰেণীৰ মধ্যমা নিৰূপণ

দৈনিক মজুৰি (টকাৰ হিচাপত)	শ্ৰমিকৰ সংখ্যা (f)	সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতা
20-25	14	14
25-30	28	42
30-35	33	75
35-40	30	105
40-45	20	125
45-50	15	140
50-55	13	153
55-60	7	160

মধ্যমাৰ সূত্ৰ প্ৰয়োগ কৰিলে পোৱা যাব ঃ

$$\text{মধ্যমা} = L + \frac{\left(\frac{N}{2} - c.f\right)}{f} \times h$$

$$= 35 + \frac{80 - 75}{30} \times (40 - 35)$$

$$= 35.83 \text{ টকা}$$

গতিকে দৈনিক মজুৰিৰ মধ্যমা 35.83 টকা। ইয়াৰ অৰ্থ হ'ল 50% শ্ৰমিকে 35.83 টকা বা তাতকৈ কম উপাৰ্জন কৰে আৰু বাকী 50% শ্ৰমিকে 35.83 টকা বা তাতকৈ বেছি উপাৰ্জন কৰে।

মনত ৰাখিব লগীয়া যে, কেন্দ্ৰীয় প্ৰবৃত্তিৰ মাপ হিচাপে মধ্যমা তথ্যৰাশিৰ আটাইকেইটা মানৰ দ্বাৰা প্ৰভাৱিত নহয়। ই মাথোন কেন্দ্ৰীয় তথ্যৰ মানৰ ওপৰতহে গুৰুত্ব আৰোপ কৰে।

কাৰ্যাৱলী

- তলত দিয়া চাৰিটা শ্ৰেণীৰ মানৰ পৰা গাণিতিক মাধ্য আৰু মধ্যমা নিৰ্ণয় কৰা। কি পৰ্যবেক্ষণ কৰিলা?

তালিকা 5.6

বিভিন্ন শ্ৰেণীৰ গাণিতিক মাধ্য আৰু মধ্যমা

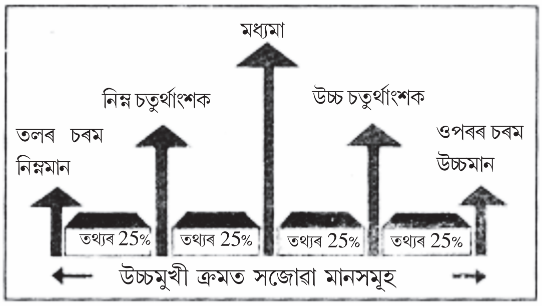
শ্ৰেণী	X (চলকৰ মান)	গাণিতিক মাধ্য	মধ্যমা
A	1,2,3	?	?
B	1,2,30	?	?
C	1,2,300	?	?
D	1,2,3000	?	?

- চৰম মানৰ দ্বাৰা মধ্যমা প্ৰভাৱিত হৈছেনে? দূৰৱতী (outliers) মানসমূহ কি?
- মধ্যমা গাণিতিক মাধ্যতকৈ উন্নতনে?

4. চতুৰ্থাংশক (Quartiles)

চতুৰ্থাংশক এনে এবিধ জোখ যিয়ে গোটেই তথ্যখিনিক চাৰিটা সমান ভাগত ভগায়। প্ৰতিটো অংশতে সমান সংখ্যক ৰাশি থাকে। চতুৰ্থাংশক তিনি প্ৰকাৰৰ। প্ৰথম চতুৰ্থাংশক বা নিম্ন চতুৰ্থাংশক Q_1 ৰে চিহ্নিত কৰা হয়। গোটেই তথ্যৰাশিৰ 25% প্ৰথম চতুৰ্থাংশকৰ তলত থাকে আৰু 75% প্ৰথম চতুৰ্থাংশকৰ ওপৰত থাকে। দ্বিতীয়

চতুৰ্থাংশক (Q_2 ৰে চিহ্নিত কৰা হয়) বা মধ্যমাৰ তলত আৰু ওপৰত সমানে 50% তথ্যৰাশি থাকে। তৃতীয় চতুৰ্থাংশকৰ (Q_3 ৰে চিহ্নিত কৰা হয়) তলত থাকে গোটেই তথ্য ৰাশিৰ 75% আৰু ওপৰত থাকে 25%। গতিকে Q_1 আৰু Q_3 য়ে দুটা সীমা নিৰ্দেশ কৰে যাৰ ভিতৰত কেন্দ্ৰীয় 50% তথ্য থাকে।



শতাংশক (Percentiles)

শতাংশকে গোটেই তথ্যৰাশিক 100 টা সমান ভাগত ভাগ কৰে। সেয়েহে আমি ইয়াৰ পৰা 99 টা বিভাজ্য স্থান পাম যাক চিহ্নিত কৰা হয় P_1, P_2, P_3,..............., P_{99}। মধ্যমা হ'ব P_{50}। তুমি যদি ব্যৱস্থাপনা (Management)ৰ প্ৰৱেশ পৰীক্ষাত 82 শতাংশক পাইছা, তেতিয়া এইটো বুজিব লাগিব যে তোমাৰ স্থান মুঠ পৰীক্ষাৰ্থীৰ 18% ৰ তলত। যদি এক লাখ ছাত্ৰ-ছাত্ৰীয়ে পৰীক্ষা দিছে, তোমাৰ স্থান ক'ত হ'ব?

চতুৰ্থাংশক নিৰূপণ কৰা পদ্ধতি

স্বকীয় বা বিশিষ্ট (Individual) আৰু বিচ্ছিন্ন (Discrete) শ্ৰেণীৰ ক্ষেত্ৰত একে পদ্ধতিৰে চতুৰ্থাংশক নিৰূপণ কৰা হয়। কোনো এক ক্ৰমত থকা শ্ৰেণীৰ পৰা Q_1 আৰু Q_3 তলত দিয়া সূত্ৰেৰে নিৰ্দ্ধাৰণ কৰিব পাৰি।

$$Q_1 = \frac{(N+1)}{4} \text{ তম ৰাশিৰ মান}$$

$$Q_3 = \frac{3(N+1)}{4} \text{ তম ৰাশিৰ মান}$$

য'ত N = ৰাশিৰ সংখ্যা

উদাহৰণ 9

কোনো এটা পৰীক্ষাত 10 জন ছাত্ৰ-ছাত্ৰীয়ে লাভ কৰা নম্বৰৰ তথ্যৰ পৰা নিম্ন চতুৰ্থাংশক নিৰূপণ কৰা।

22, 26, 14, 30, 18, 11, 35, 41, 12, 32

তথ্যখিনিৰ উৰ্দ্ধমুখী ক্ৰমত সজালে ঃ

11, 12, 14, 18, 22, 26, 30, 32, 35, 41

$$Q_1 = \frac{(N+1)}{4} \text{ তম ৰাশিৰ মান } = \frac{10+1}{4}$$

তম ৰাশিৰ মান = 2.75 তম ৰাশি

= দ্বিতীয় ৰাশি + .75 (তৃতীয় ৰাশি - দ্বিতীয় ৰাশি)

= 12+.75 (14-12) = 13.5 নম্বৰ

কাৰ্যাৱলী (Activity)

- Q_3 নিৰ্ণয় কৰা।

5. বহুলক (MODE)

কেতিয়াবা কোনো এক শ্ৰেণীৰ এটা নিৰ্দিষ্ট মানৰ চাৰিওফালে আনবোৰ ৰাশি ঘনীভূত (concentration) হোৱা দেখিবলৈ পাবা। উদাহৰণ স্বৰূপে, এজন উৎপাদনকাৰীয়ে কোন নম্বৰৰ জোতাৰ চাহিদা আটাইতকৈ বেছি নাইবা কেনে ধৰণৰ কামিজৰ (Shirt) চাহিদা বেছি জানিবলৈ বিচাৰিব পাৰে। এই ক্ষেত্ৰত 'বহুলক' আটাইতকৈ উপযুক্ত জোখ হ'ব। ইংৰাজী শব্দ 'Mode' টো ফৰাচী শব্দ 'la mode' ৰ পৰা গ্ৰহণ কৰা হৈছে। ইয়াৰ অৰ্থ হৈছে যিটো মূল্য তথ্যৰাশিত পুনঃ পুনঃ স্থান পায় অৰ্থাৎ যিটো মূল্য প্ৰচলিত (Fashionable) হৈ পৰিছে। বহুলক হৈছে আটাইতকৈ অধিক বাৰ উদ্ভৱ হোৱা তথ্যৰ মান। ইয়াক M_0 ৰে চিহ্নিত কৰা হয়।

বহুলক নিৰূপণ পদ্ধতি

বিচ্ছিন্ন শ্ৰেণী

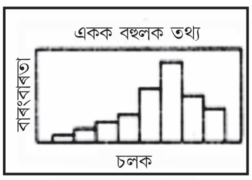
ধৰা হ'ল 1, 2, 3, 4, 4, 5 তথ্যৰ সংহতি। ইয়াত বহুলক হ'ব 4, কাৰণ 4 আটাইতকৈ বেছি (দুবাৰ) উদ্ভৱ হোৱা তথ্য।

উদাহৰণ 10

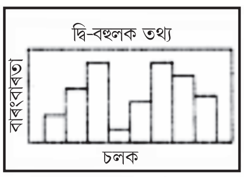
তলৰ বিচ্ছিন্ন শ্ৰেণীটো লক্ষ্য কৰা ঃ

চলক	10	20	30	40	50
বাৰংবাৰতা	2	8	20	10	5

ইয়াৰ সৰ্বোচ্চ বাৰংবাৰতা 20, গতিকে বহুলকৰ মান হ'ব 30। এইক্ষেত্ৰত বহুলকৰ মান মাত্ৰ এটা থকা বাবে তথ্যখিনিক একক-বহুলক (Unimodal) বুলি জনা যায়। কিন্তু গাণিতিক মাধ্য বা মধ্যমাৰ দৰে বহুলক একক হোৱাটো আৱশ্যক নহয়। দ্বি-বহুলক (bi-modal) আৰু বহুমুখী বহুলক (multi-modal) থকা শ্ৰেণীও পাব পাৰা। কোনো এক শ্ৰেণীত এটা ৰাশিৰ মান আনতকৈ যদি সঘনাই উদ্ভৱ নহয় তেতিয়া সেই শ্ৰেণীত বহুলক নাথাকিবও পাৰে। উদাহৰণস্বৰূপে, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4 এই শ্ৰেণীত কোনো বহুলক নাই।



একক-বহুলক তথ্য



দ্বি-বহুলক তথ্য

অবিচ্ছিন্ন শ্ৰেণী

অবিচ্ছিন্ন বাৰংবাৰতা বিভাজন তালিকাত সৰ্বোচ্চ বাৰংবাৰতা থকা শ্ৰেণীটোতেই বহুলক থাকে। বহুলক নিৰ্ণয় কৰা সূত্ৰটো হৈছেঃ

$$M_0 = L + \frac{D_1}{D_1 + D_2} \times h$$

য'ত, $L =$ বহুলক থকা শ্ৰেণীৰ নিম্নসীমা

$D_1 =$ বহুলক শ্ৰেণীৰ বাৰংবাৰতা আৰু তাৰ পূৰ্বৰ শ্ৰেণীৰ বাৰংবাৰতাৰ মাজত পাৰ্থক্য (যোগ বা বিয়োগ চিন উপেক্ষা কৰি)

$D_2 =$ বহুলক শ্ৰেণীৰ বাৰংবাৰতা আৰু তাৰ পিছৰ শ্ৰেণীৰ বাৰংবাৰতাৰ মাজৰ পাৰ্থক্য (যোগ বা বিয়োগ চিন উপেক্ষা কৰি)

$h =$ বহুলক শ্ৰেণীৰ শ্ৰেণী ব্যৱধান বা অন্তৰাল

মনত ৰখা উচিত যে, অবিচ্ছিন্ন শ্ৰেণীৰ ক্ষেত্ৰত শ্ৰেণী ব্যৱধান বা অন্তৰাল সমান হ'ব লাগিব আৰু বহুলক নিৰ্ণয় কৰাৰ বাবে বৰ্হিভুক্ত (exclusive) শ্ৰেণী হ'ব লাগিব। যদি মধ্যবিন্দু বা মধ্যমান দিয়া থাকে, শ্ৰেণী বিভাগ নিৰ্দ্ধাৰণ কৰিব লাগিব।

উদাহৰণ 11

তলত দিয়া তথ্যৰ পৰা শ্ৰমিক পৰিয়ালৰ মাহেকীয়া আয়ৰ বহুলক নিৰ্ণয় কৰা।

মাহেকীয়া আয় 50 তলত 45ৰ তলত 40ৰ তলত 35ৰ তলত 30ৰ তলত 25ৰ তলত 20ৰ তলত 15ৰ তলত
('000 টকাৰ হিচাপত)

পৰিয়ালৰ সংখ্যা 97 95 90 80 60 30 12 4

ওপৰৰ তথ্যখিনি সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতা বিভাজনৰ। বহুলক নিৰ্ণয় কৰিবলৈ ইয়াক বহিৰ্ভুক্ত (exclusive) শ্ৰেণীলৈ ৰূপান্তৰিত কৰিব লাগিব। এই উদাহৰণটোৰ শ্ৰেণীটো নিম্নমুখী ক্ৰমত আছে। গ্ৰুপিং আৰু বিশ্লেষণ তালিকা ব্যৱহাৰ কৰি বহুলক থকা শ্ৰেণী নিৰ্ণয় কৰিব লাগিব।

তালিকা 5.7

গ্ৰুপিং তালিকা (Grouping Table)

আয় ('000 টকাৰ হিচাপত)	গ্ৰুপ বাৰংবাৰতা I	II	III	IV	V	VI
45-50	97-95 = 2					
40-45	95-90 = 5	7		17		
35-40	90-80 =10		15			
30-35	80-60= 20	30			35	
25-30	60-30= 30		50			60
20-25	30-12= 18	48		68		
15-20	12- 4 = 8		26		56	
10-15	4	12				30

তালিকা 5.8

বিশ্লেষণ তালিকা (Analysis Table)

স্তম্ভ	শ্ৰেণী বিভাগ 45-50	40-45	35-40	30-35	25-30	20-25	15-20	10-15
I					×			
II					×	×		
III				×	×			
IV				×	×	×		
V					×	×	×	
VI			×	×	×			
মুঠ	-	-	1	3	6	3	1	-

বহুলক থকা শ্ৰেণী বিভাগটো হ'ব 25-30। নিৰীক্ষণ কৰিলেও এইটোৱেই হ'ব বহুলক শ্ৰেণী।

এতিয়া $L = 25$, $D_1 = (30\text{-}18) = 12$, $D_2 = (30\text{-}20) = 10$, $h=5$

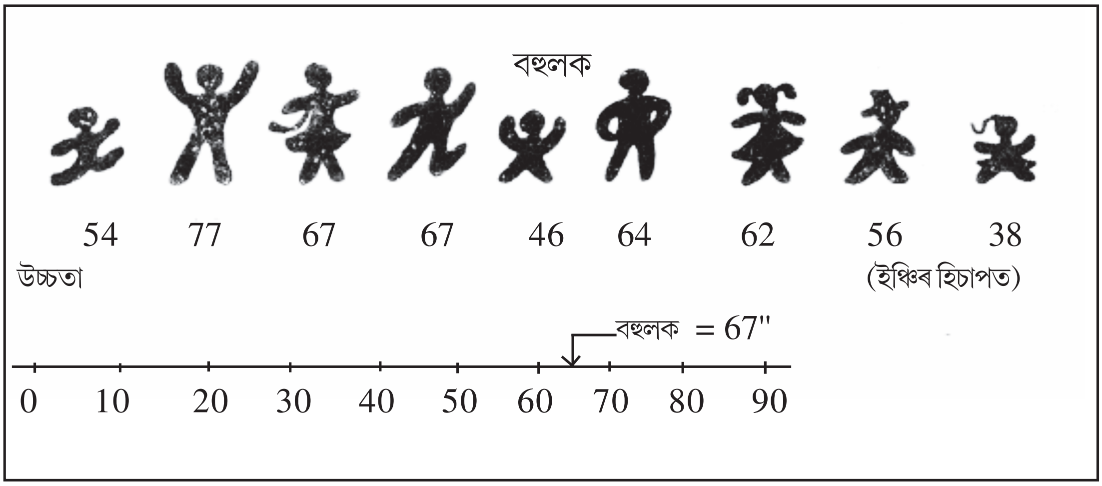
বহুলকৰ সূত্ৰ প্ৰয়োগ কৰিলে পোৱা যাব,

$$M_0 = L + \frac{D_1}{D_1 + D_2} \times h$$

$$= 25 + \frac{12}{10+12} \times 5$$

= 27,273 টকা

গতিকে শ্ৰমিক পৰিয়ালৰ মাহেকীয়া আয়ৰ বহুলক হ'ব 27,273 টকা।



কাৰ্যাৱলী (Activities)

- প্ৰাপ্তবয়স্ক লোকৰ বাবে জোতা প্ৰস্তুত কৰা জোতাৰ কাৰখানা এটাই আটাইতকৈ জনপ্ৰিয় জোতাৰ জোখ জানিবলৈ বিচাৰিছে। ইয়াৰ বাবে কোনটো গড় (average) বেছি উপযুক্ত হ'ব?
- উপযুক্ত কেন্দ্ৰীয় প্ৰবৃত্তিৰ মাপ প্ৰয়োগ কৰি ছাত্ৰ-ছাত্ৰীৰ চীনদেশৰ খাদ্যৰ (Chinese food) প্ৰতি আসক্তি জানিবলৈ এটা সৰু সমীক্ষা কৰা।
- লেখৰ (graph) সহায়ত বহুলকৰ অৱস্থিতি নিৰূপণ কৰিব পাৰিনে?

6. গাণিতিক মাধ্য, মধ্যমা আৰু বহুলকৰ আপেক্ষিক স্থিতি ঃ

ধৰি লোৱা হ'ল, গাণিতিক মাধ্য $= M_e$

মধ্যমা $= M_i$

বহুলক $= M_o$

যাতে e, i আৰু o প্ৰতিসৰ্গ (suffixes) হয়। তিনিওটাৰ আপেক্ষিক মান (relative magnitude) হ'ব $M_e>M_i>M_o$ বা $M_e<M_i<M$ (প্ৰতিসৰ্গ কেইটা বৰ্ণানুক্ৰমিক)। মধ্যমা সদায় গাণিতিক মাধ্য আৰু বহুলকৰ মাজত থাকে।

7. সামৰণি

তথ্যক সংক্ষিপ্ত বা চমু কৰিবলৈ কেন্দ্ৰীয় প্ৰবৃত্তিৰ মাপ ব্যৱহাৰ কৰা হয়। এটা নিৰ্দিষ্ট প্ৰতিনিধিত্বমূলক মান বা মূল্যৰ দ্বাৰা ই তথ্যৰ সংহতিক বৰ্ণনা কৰে। গাণিতিক মাধ্য আটাইতকৈ বেছি ব্যৱহৃত গড়। ইয়াক গণনা কৰিবলৈ সহজ আৰু ই সকলো ৰাশিকে সামৰি লয়। কিন্তু প্ৰান্ত বিন্দুত থকা চৰম মানৰ দ্বাৰাও ই প্ৰভাৱিত হয়। তথ্য সংক্ষিপ্ত কৰাৰ ক্ষেত্ৰত মধ্যমা গাণিতিক মাধ্যতকৈ বেছি ভাল। গুণগত তথ্য বৰ্ণনা কৰিবলৈ বহুলক সাধাৰণতে ব্যৱহাৰ কৰা হয়। লেখৰ সহায়ত মধ্যমা আৰু বহুলক সহজতে নিৰূপণ কৰিব পাৰি। তথ্য বিতৰণৰ প্ৰকৃতি আৰু বিশ্লেষণৰ উদ্দেশ্যৰ ওপৰত নিৰ্ভৰ কৰি এক উপযুক্ত গড় নিৰ্বাচন কৰাটো অতি গুৰুত্বপূৰ্ণ।

পুনৰুক্তি

- কেন্দ্ৰীয় প্ৰবৃত্তিৰ মাপে তথ্যক এটা নিৰ্দিষ্ট প্ৰতিনিধিত্বমূলক মানৰ দ্বাৰা সংক্ষিপ্তকৰণ কৰে।
- যিকোনো বিষয়ৰ ৰাশিৰ মানসমূহৰ যোগফলক মুঠ ৰাশিৰ সংখ্যাৰে হৰণ কৰিলে যি পোৱা যায়, তাকেই গাণিতিক মাধ্য বোলা হয়।
- গাণিতিক মাধ্যৰ পৰা চলকৰ মানসমূহৰ বিচলনৰ যোগফল সদায় শূন্য (0) হয়।
- কেতিয়াবা তথ্যৰাশিসমূহৰ গুৰুত্ব অনুযায়ী ভাৰ নিৰ্দ্ধাৰণ কৰিব লগীয়া হয়।
- মধ্যমা এটা বণ্টনৰ বা বিভাজনৰ (distribution) কেন্দ্ৰীয় মান। কাৰণ মধ্যমাৰ তলত থকা ৰাশিসমূহৰ সংখ্যা আৰু ওপৰত থকা ৰাশিসমূহৰ সংখ্যা সমান।
- চতুৰ্থাংশকে গোটেই তথ্যৰ সংহতিক চাৰিটা সমান অংশত ভাগ কৰে।
- বহুলক হৈছে সঘনাই বা পুনঃ পুনঃ স্থান পোৱা তথ্যৰ মান।

অনুশীলনী

1. তলত দিয়া উদাহৰণসমূহৰ ক্ষেত্ৰত কোনবিধ গড় (average) উপযুক্ত হ'ব?
   (i) পূৰ্বপ্ৰস্তুত সাজ-পোছাকৰ (readymade garments) গড় আকাৰ।
   (ii) এটা শ্ৰেণীৰ ছাত্ৰ-ছাত্ৰীৰ গড় বুদ্ধিমত্তা।
   (iii) এটা কাৰখানাৰ প্ৰতিটো পালৰ (shift) গড় উৎপাদন।
   (iv) এটা ঔদ্যোগিক প্ৰতিষ্ঠানৰ গড় মজুৰি।
   (v) যেতিয়া গড় বা মাধ্যৰ পৰা লোৱা সম্পূৰ্ণ বা পৰম (absolute) বিচলনৰ যোগফল নিম্নতম হয়।
   (vi) চলকৰ পৰিমাণবোৰ যেতিয়া অনুপাতত দিয়া থাকে।
   (vii) মুক্ত শ্ৰেণীৰ (open-ended) বাৰংবাৰতা বিভাজনৰ ক্ষেত্ৰত।
2. প্ৰতিটো প্ৰশ্নৰ বিপৰীতে থকা বিভিন্ন বিকল্পৰ মাজৰ পৰা আটাইতকৈ উপযুক্তটো বাচি উলিওৱা।
   (i) গুণগত জোখৰ বাবে আটাইতকৈ উপযুক্ত গড় (average) হ'ব
      (a) গাণিতিক মাধ্য
      (b) মধ্যমা
      (c) বহুলক
      (d) গুণোত্তৰ মাধ্য
      (e) ওপৰৰ এটাও নহয়
   (ii) চৰম মান থাকিলে কোনবিধ গড় আটাইতকৈ বেছি প্ৰভাৱিত হয়?
      (a) মধ্যমা
      (b) বহুলক

(c) গাণিতিক মাধ্য

(d) গুণোত্তৰ মাধ্য

(e) হৰাত্মক মাধ্য

(iii) গাণিতিক মাধ্যৰ পৰা কোনো এটা সংহতিৰ n-সংখ্যক মানৰ বিচলনৰ বীজগণিতীয় যোগফল

(a) n

(b) o

(c) 1

(d) ওপৰৰ এটাও নহয়।

[উত্তৰ ঃ (i) b (ii) c (iii) b]

3. তলত দিয়া উক্তিসমূহ শুদ্ধ নে অশুদ্ধ মন্তব্য আগ বঢ়োৱা।

(i) মধ্যমাৰ পৰা লোৱা চলকৰ মানৰ বিচলনৰ যোগফল শূন্য হয়।

(ii) শ্ৰেণীসমূহৰ তুলনা কৰিবলৈ মাত্ৰ গড় বা মাধ্য যথেষ্ট নহয়।

(iii) গাণিতিক মাধ্য এটা স্থানভিত্তিক মান।

(iv) কোনো তথ্যৰাশিৰ শীৰ্ষৰ 25% ৰ নিম্নতম মান হৈছে উচ্চ চতুৰ্থাংশ।

(v) চৰম মানৰ দ্বাৰা মধ্যমা যথেষ্ট প্ৰভাৱিত হয়।

[উত্তৰ ঃ (i) অশুদ্ধ, (ii) শুদ্ধ, (iii) অশুদ্ধ, (iv) শুদ্ধ, (v) অশুদ্ধ]

4. তলত দিয়া তথ্যখিনিৰ গাণিতিক মাধ্য যদি 28 হয়,

(a) বাদ পৰা বাৰংবাৰতা আৰু (b) মধ্যমা নিৰ্ণয় কৰা;

প্ৰতিখন খুচুৰা দোকানৰ লাভ (টকাৰ হিচাপত)	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
খুচুৰা দোকানৰ সংখ্যা	12	18	27	-	17	6

(উত্তৰ ঃ বাদ পৰা বাৰংবাৰতাৰ মান 20 আৰু মধ্যমা 27.41 টকা)

5. তলত দিয়া তালিকাত কোনো এটা কাৰখানাৰ 10 জন শ্ৰমিকৰ দৈনিক মজুৰি দিয়া হৈছে। গাণিতিক মাধ্য নিৰূপণ কৰা।

শ্ৰমিক	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
দৈনিক মজুৰি (টকাৰ হিচাপত)	120	150	180	200	250	300	220	350	370	260

(উত্তৰ ঃ 240 টকা)

6. তলত 150 টা পৰিয়ালৰ দৈনিক আয়ৰ তথ্য দিয়া হৈছে। গাণিতিক মাধ্য নিৰূপণ কৰা।

আয় (টকাৰ হিচাপত)	পৰিয়ালৰ সংখ্যা
75 তকৈ বেছি	150
85 ,, ,,	140
95 ,, ,,	115
105 ,, ,,	95
115 ,, ,,	70
125 ,, ,,	60
135 ,, ,,	40
145 ,, ,,	25

(উত্তৰ ঃ 116.3 টকা)

7. তলত এখন গাঁৱৰ 380 টা পৰিয়ালৰ ভূ-সম্পত্তিৰ আকাৰ দিয়া হৈছে। ভূ-সম্পত্তিৰ আকাৰৰ মধ্যমা নিৰূপণ কৰা।

ভূমি সম্পত্তিৰ আকাৰ ঃ (একৰত)	100 তকৈ কম	100-200	200-300	300-400	400 তকৈ বেছি
পৰিয়ালৰ সংখ্যা	40	89	148	64	39

(উত্তৰ ঃ 241.22 একৰ)

8. এখন প্ৰতিষ্ঠানৰ কৰ্মচাৰীসকলৰ দৈনিক আয় তলৰ শ্ৰেণীত দিয়া হৈছে।

(a) নিম্নতম 50% কৰ্মচাৰীৰ উচ্চতম আয় (b) শীৰ্ষৰ 25% কৰ্মচাৰীয়ে উপাৰ্জন কৰা নিম্নতম আয় (c) নিম্নতম 25% কৰ্মচাৰীয়ে উপাৰ্জন কৰা উচ্চতম আয় গণনা কৰি উলিওৱা।

দৈনিক আয় (টকাৰ হিচাপত)	10-14	15-19	20-24	25-29	30-34	35-39
	5	10	15	20	10	5

(পৰামৰ্শ ঃ মধ্যমা, নিম্ন চতুৰ্থাংশ আৰু উচ্চ চতুৰ্থাংশ নিৰ্ণয় কৰা)

(উত্তৰ ঃ (a) 25.11 টকা (b) 19.92 টকা (c) 29.19 টকা)

9. এখন গাঁৱৰ 150 খন কৃষিপামৰ প্ৰতি হেক্টৰত ঘেঁহুৰ উৎপাদন কিলোগ্ৰামত তলৰ তালিকাত দিয়া হৈছে। উৎপাদনৰ গাণিতিক মাধ্য, মধ্যমা আৰু বহুলক নিৰ্ণয় কৰা।

উৎপাদন (kg. প্ৰতি হেক্টৰত)	50-53	53-56	56-59	59-62	62-65	65-68	68-71	71-74	74-77
কৃষিপামৰ সংখ্যা	3	8	14	30	36	28	16	10	5

(উত্তৰ ঃ মাধ্য = 63.82 kg. প্ৰতি হেক্টৰত, মধ্যমা = 63.67 kg প্ৰতি হেক্টৰত, বহুলক = 63.29 kg প্ৰতি হেক্টৰত