

جوابات

مشق 1.1

1. (i) ، (iv) ، (v) ، (vi) ، (vii) اور (viii) سیٹ ہیں۔

2. (i) $\in$ (ii) $\notin$ (iii) $\notin$ (iv) $\in$ (v) $\in$ (vi) $\notin$

3. (i) $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ (ii) $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

(iii) $C = \{17, 26, 35, 44, 53, 62, 71, 80\}$ (iv) $D = \{2, 3, 5\}$

(v) $E = \{T, R, I, G, O, N, M, E, Y\}$ (vi) $F = \{B, E, T, R\}$

4. (i) $\{x : x = 3n \text{ اور } 1 \leq n \leq 4\}$ (ii) $\{x : x = 2^n \text{ اور } 1 \leq n \leq 5\}$

(iii) $\{x : x = 5^n \text{ اور } 1 \leq n \leq 4\}$ (iv) $\{x : \text{ایک جنت طبعی خود ہے } x\}$

(v) $\{x : x = n^2 \text{ اور } 1 \leq n \leq 10\}$

5. (i) $A = \{1, 3, 5, \dots\}$ (ii) $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

(iii) $C = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ (iv) $D = \{L, O, Y, A\}$

(v) $E = \{\text{فروری، اپریل، جون، ستمبر، نومبر}\}$

(iv) $F = \{b, c, d, f, g, h, j\}$

6. (i) $\leftrightarrow$ (c) (ii) $\leftrightarrow$ (a) (iii) $\leftrightarrow$ (d) (iv) $\leftrightarrow$ (b)

مشق 1.2

1. (i)، (iii)، (v)
 2. (i) محدود (ii) لامحدود (iii) محدود (iv) لامحدود (v) محدود
 3. (i) لامحدود (ii) محدود (iii) لامحدود (iv) محدود (v) لامحدود
 4. (i) ہاں (ii) نہیں (iii) ہاں (iv) نہیں
 5. (i) نہیں (ii) ہاں
 6. $E=G$ ، $B=D$

مشق 1.3

1. (i) $\subset$ (ii) $\not\subset$ (iii) $\subset$ (iv) $\not\subset$ (v) $\not\subset$ (vi) $\subset$
 2. (i) غلط (ii) صحیح (iii) غلط (iv) صحیح (v) غلط (vi) صحیح
 3. (i) جیسے $\{3, 4\} \in A$ (v) جیسے $1 \in A$ (vii) جیسے $\{1, 2, 5\} \subset A$
 (viii) جیسے $3 \notin A$ (ix) جیسے $\phi \subset A$ (xi) جیسے $\phi \subset A$
 4. (i) $\phi \{a\}$ (ii) ϕ ، $\{a\}$ ، $\{b\}$ ، $\{a, b\}$
 (iii) ϕ ، $\{1\}$ ، $\{2\}$ ، $\{3\}$ ، $\{1, 2\}$ ، $\{1, 3\}$ ، $\{2, 3\}$ ، $\{1, 2, 3\}$ (iv) ϕ
 5. 1
 6. $(-4, 6]$ (ii) $(-12, -10)$ (iii) $[0, 7)$ (vi) $[3, 4]$
 7. (i) $\{x : x \in \mathbb{R}, -3 < x < 0\}$ (ii) $\{x : x \in \mathbb{R}, 6 \leq x \leq 12\}$
 (iii) $\{x : x \in \mathbb{R}, 6 < x \leq 12\}$ (iv) $\{x \in \mathbb{R} : -23 \leq x < 5\}$ (v) $\{x \in \mathbb{R} : -23 \leq x < 5\}$ (vi) $\{x \in \mathbb{R} : -23 \leq x < 5\}$

مشق 1.4

1. (i) $X \cup Y = \{1, 2, 3, 5\}$ (ii) $A \cup B = \{a, b, c, e, i, o, u\}$
 (iii) $A \cup B = \{x : x = 1, 2, 4, 5 \text{ or a multiple of } 3\}$
 (iv) $A \cup B = \{x : 1 < x < 10, x \in \mathbb{N}\}$ (v) $A \cup B = \{1, 2, 3\}$

2. $A \cup B = \{a, b, c\}$ ہاں، **3.B**
4. (i) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ (ii) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ (iii) $\{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$
- (iv) $\{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ (v) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$
- (vi) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ (vii) $\{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$
5. (i) $X \cap Y = \{1, 3\}$ (ii) $A \cap B = \{a\}$ (iii) $\{3\}$
6. (i) $\{7, 9, 11\}$ (ii) $\{11, 13\}$ (iii) ϕ (iv) $\{11\}$
- (v) ϕ (vi) $\{7, 9, 11\}$ (vii) ϕ (viii) $\{7, 9, 11\}$
- (ix) $\{7, 9, 11\}$ (x) $\{7, 9, 11, 15\}$
7. (i) B (ii) C (iii) D (iv) ϕ (v) $\{2\}$
8. (vi) $\{x \mid x \text{ ایک طاق مرد عدد ہے: } x\}$ (iii).8
9. (i) $\{3, 6, 9, 15, 18, 21\}$ (ii) $\{3, 9, 15, 18, 21\}$ (iii) $\{3, 6, 9, 12, 18, 21\}$
- (iv) $\{4, 8, 16, 20\}$ (v) $\{2, 4, 8, 10, 14, 16\}$ (vi) $\{5, 10, 20\}$
- (vii) $\{20\}$ (viii) $\{4, 8, 12, 16\}$ (ix) $\{2, 6, 10, 14\}$
- (x) $\{5, 10, 15\}$ (xi) $\{2, 4, 6, 8, 12, 14, 16\}$ (xii) $\{5, 15, 20\}$
10. (i) $\{a, c\}$ (ii) $\{f, g\}$ (iii) $\{b, d\}$
11. غیر ناطق اعداد کا سیٹ
12. (i) F (ii) F (iii) T (iv) T

مشق 1.5

1. (i) $\{5, 6, 7, 8, 9\}$ (ii) $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ (iii) $\{7, 8, 9\}$
- (iv) $\{5, 7, 9\}$ (v) $\{1, 2, 3, 4\}$ (vi) $\{1, 3, 4, 5, 6, 7, 9\}$
2. (i) $\{d, e, f, g, h\}$ (ii) $\{a, b, c, h\}$ (iii) $\{b, d, f, h\}$
- (iv) $\{b, c, d, e\}$

3. (i) $\{x : \text{ایک طاق طبعی عدد ہے} : x\}$
(ii) $\{x : \text{ایک جفت طبعی عدد ہے} : x\}$
(iii) $\{x : 3 \text{ کا ضرب نہیں ہے اور } x \in \mathbb{N}\}$
(iv) $\{x : \text{ایک مثبت مرکب عدد ہے اور } x=1\}$
(v) $\{x : \text{ایک مثبت صحیح عدد ہے جو 3 سے تقسیم نہیں ہوتا یا 5 سے تقسیم نہیں ہوتا} : x\}$
(vi) $\{x : \text{ایک مکمل مربع نہیں ہے اور } x \in \mathbb{N}\}$
(vii) $\{x : \text{ایک مکمل کعب نہیں ہے اور } x \in \mathbb{N}\}$
(x) $\{x : x < 7 \text{ اور } x \in \mathbb{N}\}$
(xi) $\{x : x > \frac{9}{2} \text{ اور } x \in \mathbb{N}\}$
(xii) $\{x : x = 2 \text{ اور } x \in \mathbb{N}\}$
(xiii) $\{x : x = 3 \text{ اور } x \in \mathbb{N}\}$

6. تمام مساوی ضلعی مثلث کا سیٹ ہے

7. (i) U (ii) A (iii) ϕ (iv) ϕ

مشق 1.6

1. 2 5 3 42
2. 19 35 50 60
3. 30 7 25 8

متفرق مشق باب 1 پر

1. $D \subset C, D \subset B, D \subset A, B \subset C, A \subset C, A \subset B$
2. (i) غلط (ii) غلط (iii) صحیح (iv) غلط (v) غلط (vi) صحیح
7. غلط 12. ہم $C = \{2, 3\}, B = \{1, 3\}, A = \{1, 2\}$ لے سکتے ہیں
13. 325 14. 125 15. 52, 30 16. 11

مشق 2.1

1. $x = 2$ اور $y = 1$
2. $A \times B$ میں عناصر کی تعداد 9 ہے

$$\mathbf{G} \times \mathbf{H} = \{(7, 5), (7, 4), (7, 2), (8, 5), (8, 4), (8, 2)\} \quad 3.$$

$$\mathbf{H} \times \mathbf{G} = \{(5, 7), (5, 8), (4, 7), (4, 8), (2, 7), (2, 8)\}$$

$$\mathbf{P} \times \mathbf{Q} = \{(m, n), (m, m), (n, n), (n, m)\} \quad \text{غلط (i)} \quad 4.$$

$$y \in \mathbf{B} \text{ اور } x \in \mathbf{A} \quad \mathbf{A} \times \mathbf{B} \text{ مرتب جوڑے } (x, y) \text{ کا غیر حالی سیٹ ہے} \quad \text{(ii) غلط}$$

$$\text{(iii) صحیح}$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{A} = \{(-1, -1), (-1, 1), (1, -1), (1, 1)\} \quad 5.$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{A} \times \mathbf{A} = \{(-1, -1, -1), (-1, -1, 1), (-1, 1, -1), (-1, 1, 1), (1, -1, -1), (1, -1, 1), (1, 1, -1), (1, 1, 1)\}$$

$$\mathbf{A} = \{a, b\}, \mathbf{B} = \{x, y\} \quad 6.$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4)\} \quad 8.$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} \text{ کے } 2^4 = 16 \text{ ماتحت سیٹ ہوں گے۔}$$

$$\mathbf{B} = \{1, 2\} \text{ اور } \mathbf{A} = \{x, y, z\} \quad 9.$$

$$\mathbf{A} \times \mathbf{A} \text{ کے باقی ارکان ہیں } \mathbf{A} = \{-1, 0, 1\} \quad 10.$$

$$(-1, -1), (-1, 1), (0, -1), (0, 0), (1, -1), (1, 0), (1, 1)$$

مشق 2.2

$$\mathbf{R} = \{(1, 3), (2, 6), (3, 9), (4, 12)\} \quad 1.$$

$$\mathbf{R} \text{ کا علاقہ } = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$\mathbf{R} \text{ کی سمت } = \{3, 6, 9, 12\}$$

$$\mathbf{R} \text{ کا ہم علاقہ } = \{1, 2, \dots, 14\}$$

$$\mathbf{R} = \{(1, 6), (2, 7), (3, 8)\} \quad 2.$$

$$\mathbf{R} \text{ کا علاقہ } = \{1, 2, 3\}$$

$$\mathbf{R} \text{ کی وسعت } = \{6, 7, 8\}$$

$$\mathbf{R} = \{(1, 4), (1, 6), (2, 9), (3, 4), (3, 6), (5, 4), (5, 6)\} \quad .3$$

$$\mathbf{R} = \{(x, y) : y = x - 2 \text{ for } x = 5, 6, 7\} \quad .4 \quad (i)$$

$$\mathbf{R} = \{(5, 3), (6, 4), (7, 5)\} \quad .5 \quad (ii) \quad \mathbf{R} \text{ کا علاقہ } = \{5, 6, 7\}, \mathbf{R} \text{ کی وسعت } = \{3, 4, 5\}$$

$$\mathbf{R} = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 6), (2, 4), (2, 6), (2, 2), (4, 4), (6, 6)\} \quad .5 \quad (i)$$

$$(3, 3), (3, 6)\}$$

$$\mathbf{R} \text{ کا علاقہ } = \{1, 2, 3, 4, 6\} \quad (ii)$$

$$\mathbf{R} \text{ کی وسعت } = \{1, 2, 3, 4, 6\} \quad (iii)$$

$$\mathbf{R} = \{(2, 8), (3, 27), (5, 125), (7, 343)\} \quad .7 \quad \mathbf{R} \text{ کا علاقہ } = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$\mathbf{R} \text{ کی وسعت } = \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

$$\mathbf{A} \text{ سے } \mathbf{B} \text{ میں رشتوں کی تعداد } = 2^6 \quad .8$$

$$\mathbf{R} \text{ کا علاقہ } = \mathbf{Z} \quad \mathbf{R} \text{ کی وسعت } = \mathbf{Z} \quad .9$$

مشق 2.3

$$.1 \quad (i) \quad \text{ہاں، علاقہ (Domain)} = \{2, 5, 8, 11, 14, 17\}, \text{وسعت} = \{1\}$$

$$(ii) \quad \text{ہاں، علاقہ (Domain)} = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}, \text{وسعت} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

$$(iii) \quad \text{نہیں۔}$$

$$.2 \quad (i) \quad \mathbf{R} \text{ کا علاقہ } = (-\infty, 0], \text{وسعت} = (-\infty, 0]$$

$$(ii) \quad \text{فکشن کا علاقہ } = \{x : -3 \leq x \leq 3\}$$

$$(iii) \quad \text{فکشن کی وسعت} = \{x : 0 \leq x \leq 3\}$$

$$.3 \quad f(0) = -5 \quad (i) \quad f(7) = 9 \quad (ii) \quad f(-3) = -11 \quad (iii)$$

$$100 \text{ (iv)} \quad t(-10) = 14 \text{ (iii)} \quad t(28) = \frac{412}{5} \text{ (ii)} \quad t(0) = 32 \text{ (i)} \quad .4$$

$$R = \text{وسعت (iii)} \quad [2, \infty) = \text{وسعت (ii)} \quad (-\infty, 2) = \text{وسعت (i)} \quad .5$$

سبق 2 پر مشتمل متفرق مشق

$$2.1 \quad .2 \quad .3 \quad \text{تفاعل کا علاقہ وہ تمام حقیقی اعداد کا سیٹ ہے جس میں 2 اور 6 شامل نہیں ہیں۔}$$

$$[1, \infty) = \text{علاقہ} , [0, \infty) = \text{وسعت} \quad .4$$

$$.5 \quad \text{علاقہ } R = \text{وسعت} = \text{غیر منفی حقیقی اعداد}$$

$$.6 \quad \text{علاقہ } [0, 1)$$

$$.7 \quad (f+g)x = 3x-2 \quad .8 \quad a=2, b=-1 \quad .9 \quad \text{(i) نہیں (ii) نہیں (iii) نہیں}$$

$$(f-g)x = -x+4$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)x = \frac{x+1}{2x-3}, \quad x \neq \frac{3}{2}$$

$$.10 \quad \text{(i) ہاں (ii) نہیں} \quad .11 \quad \text{نہیں} \quad .12 \quad f \text{ کی وسعت } \{3, 5, 11, 13\}$$

مشق 3.1

$$.1 \quad \frac{5\pi}{36} \text{ (i)} \quad -\frac{19\pi}{72} \text{ (ii)} \quad \frac{4\pi}{3} \text{ (iii)} \quad \frac{26\pi}{9} \text{ (iv)}$$

$$.2 \quad 39^\circ 22' 30'' \text{ (i)} \quad -229^\circ 5' 29'' \text{ (ii)} \quad 300^\circ \text{ (iii)} \quad 210^\circ \text{ (iv)}$$

$$.3 \quad 12\pi \quad .4 \quad 12^\circ 36' \quad .5 \quad \frac{20\pi}{3} \quad .6 \quad 5:4$$

$$.7 \quad \frac{2}{15} \text{ (i)} \quad \frac{1}{5} \text{ (ii)} \quad \frac{7}{25} \text{ (iii)}$$

مشق 3.2

$$.1 \quad \sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \csc x = -\frac{2}{\sqrt{3}}, \sec x = -2, \tan x = \sqrt{3}, \cot x = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\operatorname{cosec} x = \frac{5}{3}, \cos x = -\frac{4}{5}, \sec x = -\frac{5}{4}, \tan x = -\frac{3}{4}, \cot x = -\frac{4}{3} \quad .2$$

$$\sin x = -\frac{4}{5}, \operatorname{cosec} x = -\frac{5}{4}, \cos x = -\frac{3}{5}, \sec x = -\frac{5}{3}, \tan x = \frac{4}{3} \quad .3$$

$$\sin x = -\frac{12}{13}, \operatorname{cosec} x = -\frac{13}{12}, \cos x = \frac{5}{13}, \tan x = -\frac{12}{5}, \cot x = -\frac{5}{12} \quad .4$$

$$\sin x = \frac{5}{13}, \operatorname{cosec} x = \frac{13}{5}, \cos x = -\frac{12}{13}, \sec x = -\frac{13}{12}, \cot x = -\frac{12}{5} \quad .5$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \quad .9 \quad \sqrt{3} \quad .8 \quad 2 \quad .7 \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \quad .6$$

مشق 3.3

$$\sqrt{3} \quad (\text{ii}) \quad \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} \quad (\text{i}) \quad .5$$

مشق 3.4

$$\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}, 2n\pi \pm \frac{\pi}{3} \quad .2 \quad \frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, n\pi + \frac{\pi}{3}, n \in \mathbb{Z} \quad .1$$

$$\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}, n\pi + (-1)^n \frac{7\pi}{6}, n \in \mathbb{Z} \quad .4 \quad \frac{5\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}, n\pi + \frac{5\pi}{6}, n \in \mathbb{Z} \quad .3$$

$$x = n\pi + (-1)^n \frac{7\pi}{6} \text{ or } (2n+1) \frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z} \quad .6 \quad x = \frac{n\pi}{3} \text{ or } x = n\pi, n \in \mathbb{Z} \quad .5$$

$$x = n\pi + (-1)^n \frac{7\pi}{6} \text{ or } (2n+1) \frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z} \quad .7$$

$$x = \frac{n\pi}{3}, \text{ or } n\pi \pm \frac{\pi}{3}, n \in \mathbb{Z} \quad .9 \quad x = \frac{n\pi}{2}, \text{ or } \frac{n\pi}{2} + \frac{3\pi}{8}, n \in \mathbb{Z} \quad .8$$

متفرق مشق باب 3 پر مشتمل

$$2, \frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{2\sqrt{5}}{5} \quad .8$$

$$\frac{\sqrt{6}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, -\sqrt{2} \quad .9$$

$$\frac{\sqrt{8+2\sqrt{15}}}{4}, \frac{\sqrt{8-2\sqrt{15}}}{4}, 4+\sqrt{15} \quad .10$$

مشق 5.1

$$14+28i \quad .4 \quad 0+i1 \quad .3 \quad 0+i0 \quad .2 \quad 3+i0 \quad .1$$

$$-4+i0 \quad .8 \quad \frac{17}{3}+i\frac{5}{3} \quad .7 \quad -\frac{19}{5}-\frac{21i}{10} \quad .6 \quad 2-7i \quad .5$$

$$\frac{4}{25}+i\frac{3}{25} \quad .11 \quad -\frac{22}{3}-i\frac{107}{27} \quad .10 \quad \frac{242}{27}-26i \quad .9$$

$$0-i \quad .14 \quad \frac{-7\sqrt{2}}{2}i \quad .13 \quad 0+i1 \quad .12 \quad \frac{\sqrt{5}}{14}-i\frac{3}{14} \quad .12$$

مشق 5.2

$$\sqrt{2}\left(\cos\frac{-\pi}{4}+i\sin\frac{-\pi}{4}\right) \quad .3 \quad 2, \frac{5\pi}{6} \quad .2 \quad 2, \frac{-2\pi}{3} \quad .1$$

$$\sqrt{2}\left(\cos\frac{-3\pi}{4}+i\sin\frac{-3\pi}{4}\right) \quad .5 \quad \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right) \quad .4$$

$$\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2} \quad .8 \quad 2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right) \quad .7 \quad 3(\cos\pi+isin\pi) \quad .6$$

مشق 5.3

$$\frac{-3\pm 3\sqrt{3}i}{2} \quad .3 \quad \frac{-1\pm\sqrt{7}i}{4} \quad .2 \quad \pm\sqrt{3}i \quad .1$$

$$\frac{1\pm\sqrt{7}i}{2} \quad .6 \quad \frac{-3\pm\sqrt{11}i}{2} \quad .5 \quad \frac{-1\pm\sqrt{7}i}{-2} \quad .4$$

$$\frac{-1\pm\sqrt{(2-\sqrt{2})}i}{2} \quad .9 \quad \frac{\sqrt{2}\pm\sqrt{34}i}{2\sqrt{3}} \quad .8 \quad \frac{-1\pm\sqrt{7}i}{2\sqrt{2}} \quad .7$$

$$\frac{-1\pm\sqrt{7}i}{2\sqrt{2}} \quad .10$$

متفرق مشق باب 5 پر مشتمل

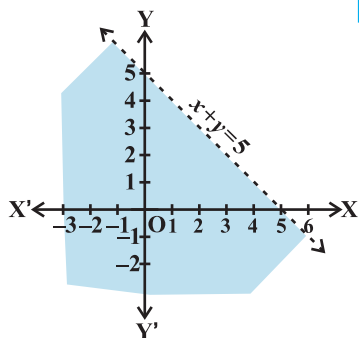
1. $2 - 2i$ 3. $\frac{307 + 599i}{442}$
5. $\sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)$ (i) $\sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)$ (ii)
6. $\frac{2}{3} \pm \frac{4}{3}i$ 7. $1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}i$ 8. $\frac{5}{27} \pm \frac{\sqrt{2}}{27}i$ 9. $\frac{14}{21} \pm \frac{\sqrt{14}}{21}i$
10. $\frac{4\sqrt{5}}{5}$ (i) $\frac{-2}{5}$ (ii) 0 13. $\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{3\pi}{4}$
14. $x = 3, y = -3$ 15. 2 17. 1 18. 0 20. 4

مشق 6.1

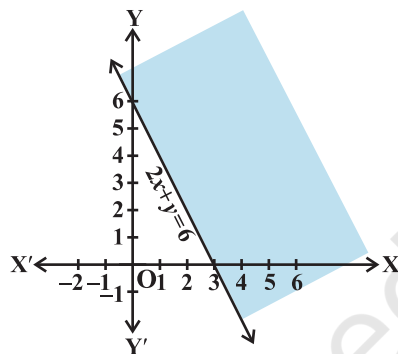
1. $\{1, 2, 3, 4\}$ (i) $\{\dots - 3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$ (ii)
2. کوئی حل نہیں ہے۔ (i) $\{\dots - 4, -3\}$ (ii)
3. $\{\dots - 2, -1, 0, 1\}$ (i) $(-\infty, 2)$ (ii)
4. $\{-1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ (i) $(-2, \infty)$ (ii)
5. $(-\infty, -3)$ 6. $(-\infty, -3)$ 7. $(-\infty, -3]$ 8. $(-\infty, 4]$
9. $(-\infty, 6)$ 10. $(-\infty, -6)$ 11. $(-\infty, 2]$ 12. $(-\infty, 120]$
13. $(4, \infty)$ 14. $(-\infty, 2]$ 15. $(4, \infty)$ 16. $(-\infty, 2]$
17. $(-\infty, 3)$ 18. $[-1, \infty)$ 19. $(-1, \infty)$ 20. $\left(-\frac{2}{7}, \infty\right)$
21. 35 یا 35 سے زیادہ 22. 8 سینٹی میٹر یا 8 سے زیادہ یا برابر لیکن 22 سینٹی میٹر سے کم یا برابر
23. $(5, 9), (5, 7)$ 24. $(10, 12), (8, 10), (6, 8)$

مشق 6.2

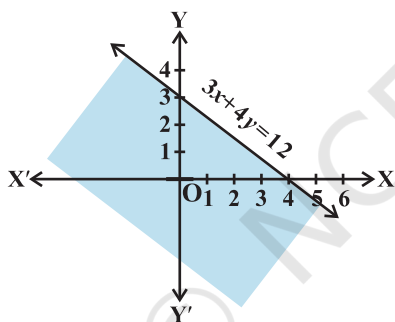
1.



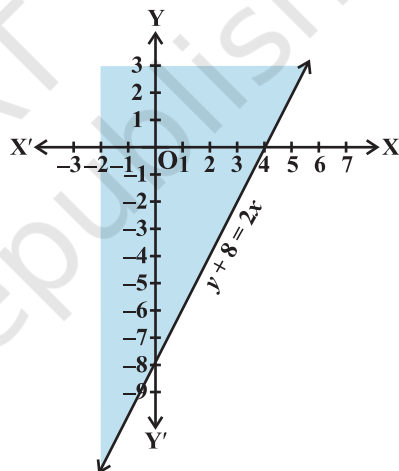
2.



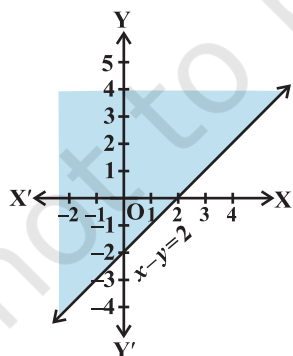
3.



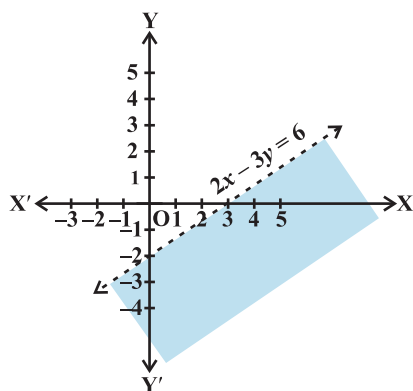
4.



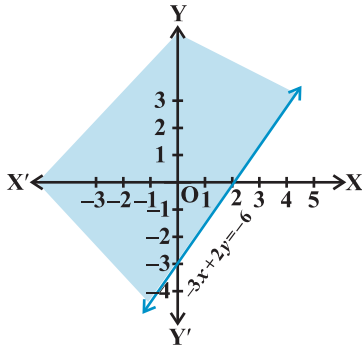
5.



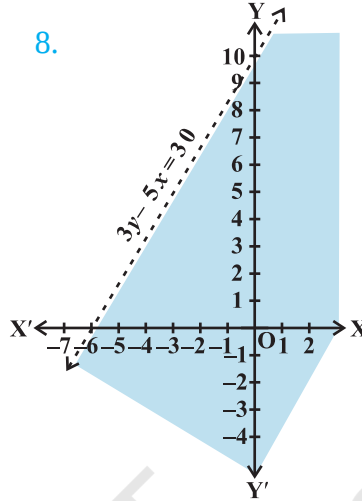
6.



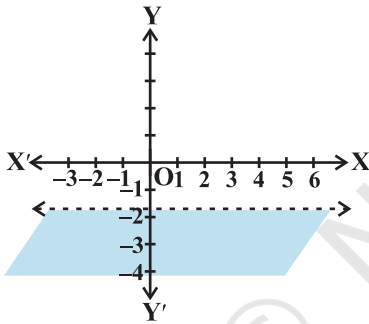
7.



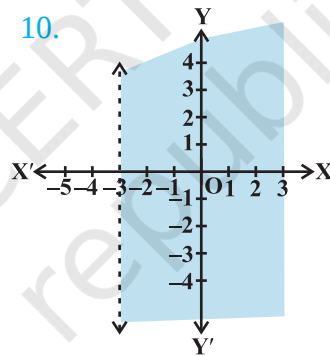
8.



9.

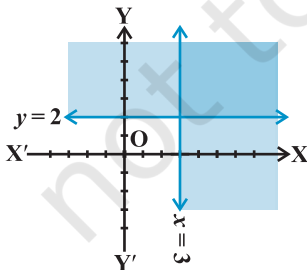


10.

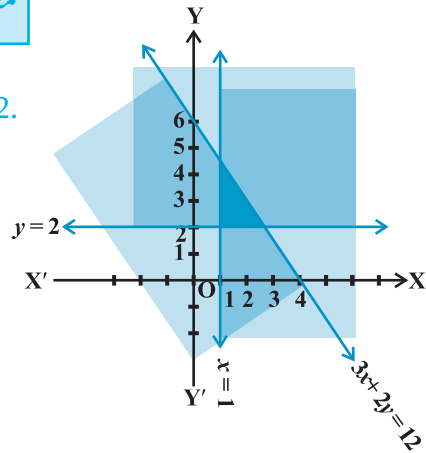


مشق 6.3

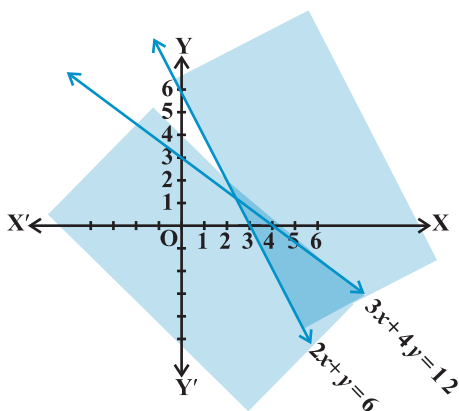
1.



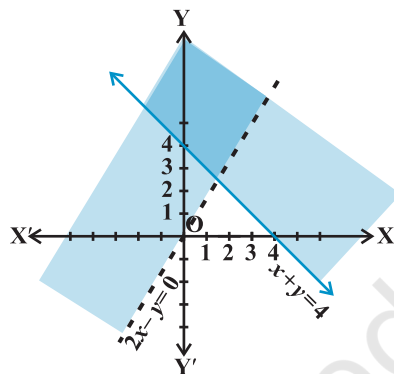
2.



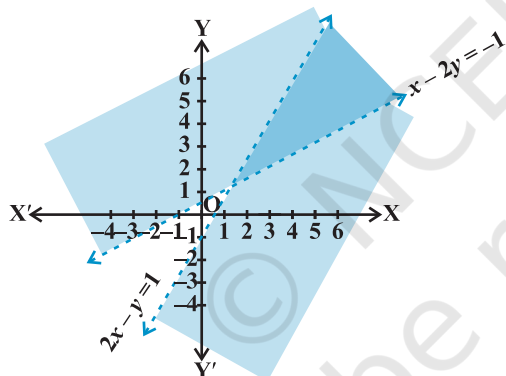
3.



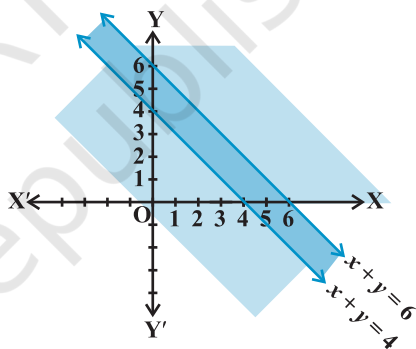
4.



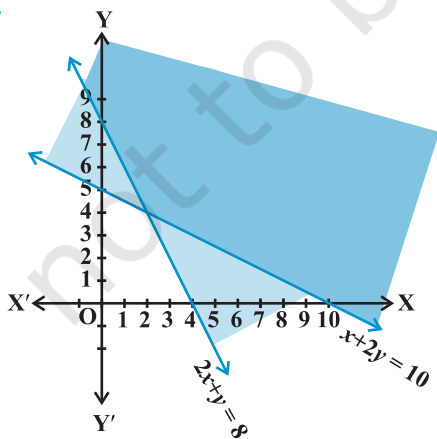
5.



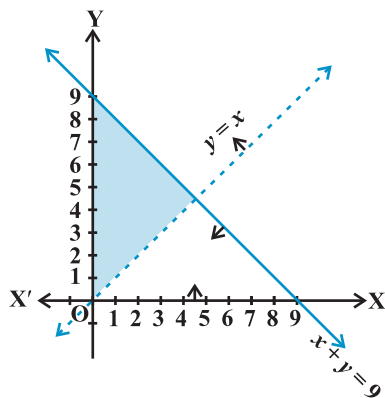
6.



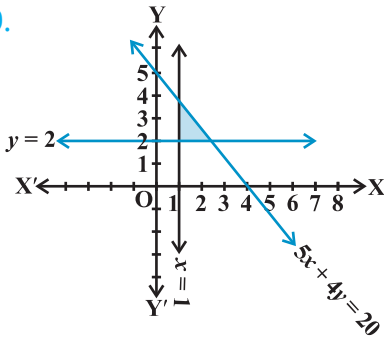
7.



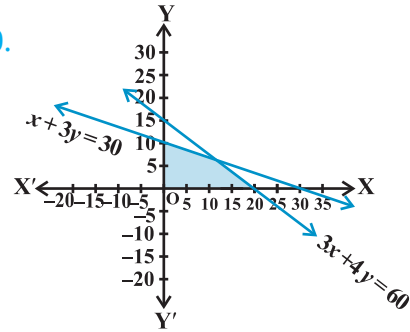
8.



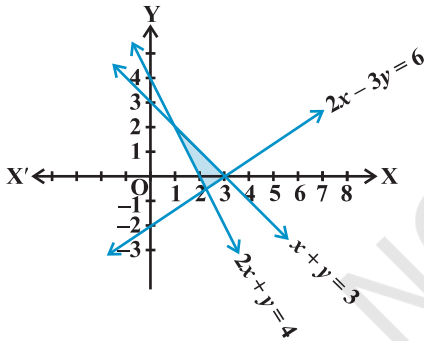
9.



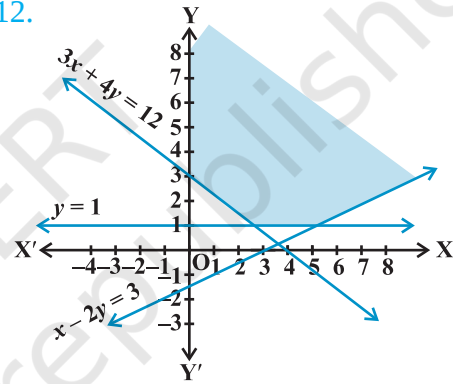
10.



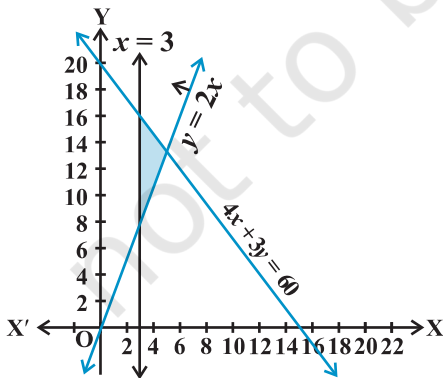
11.



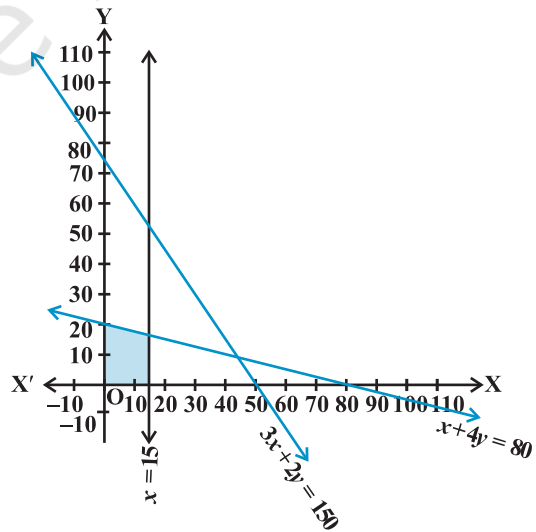
12.



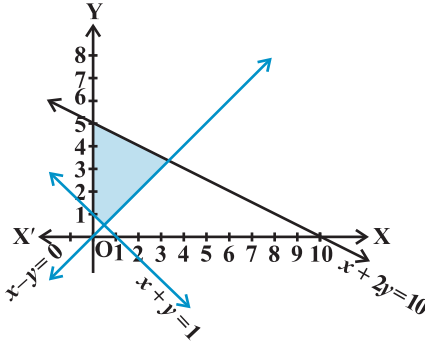
13.



14.



15.



باب 6 پر مشتمل متفرق مشق

1. $[2, 3]$ 2. $(0, 1]$ 3. $[-4, 2]$ 4. $(-23, 2)$

5. $\left(-\frac{80}{3}, -\frac{10}{3}\right]$ 6. $\left[1, \frac{11}{3}\right]$

7. $(-\infty, -5)$ 8. $(-\infty, -1)$ 9. $(5, \infty)$ 10. $[-7, 11]$

11. 20°C اور 25°C کے درمیان

12. 320 لیٹر سے زیادہ لیکن 1280 لیٹر سے کم

13. 562.5 لیٹر سے زیادہ لیکن 900 لیٹر سے کم

14. کم سے کم 9.6 لیکن 16.8 سے زیادہ

مشق: 7.1

1. (i) 125 ، (ii) 60 2. 108 3. 5040 4. 336

5. 8 6. 20

مشق 7.2

1. (i) 40320، (ii) 18، 30، نہیں، 28، 3. 64، 4. 15120(ii)، 30(i)، 5.

مشق 7.3

1. 504، 2. 4536، 3. 60، 4. 48، 120، 5. 56، 6. 9، 7. 3(i)، 4(ii)، 8. 40320، 9. 360(i)، 720(ii)، 240(iii)، 10. 33810، 11. 1814400(i)، 2419200(ii)، 25401600(iii)

مشق 7.4

1. 45، 2. 5(i)، 6(ii)، 3. 210، 4. 40، 5. 2000، 6. 778320، 7. 3960، 8. 200، 9. 151200

سبق 7 پر مشتمل متفرق مشق

1. 3600، 2. 1440، 3. 504(i)، 588(ii)، 1632(iii)، 4. 907200، 5. 120، 6. 50400، 7. 420، 8. ${}^4C_1 \times {}^{48}C_4$ ، 9. 2880، 10. ${}^{22}C_7 \times {}^{22}C_{10}$ ، 11. 151200

مشق 8.1

1. $1 - 10x + 40x^2 - 80x^3 + 80x^4 - 32x^5$ ، 2. $\frac{32}{x^5} - \frac{40}{x^3} + \frac{20}{x} - 5x + \frac{5}{8}x^3 - \frac{x^5}{32}$ ، 3. $64x^6 - 576x^5 + 2160x^4 - 4320x^3 + 4860x^2 - 2916x + 729$

$$\frac{x^5}{243} + \frac{5x^2}{81} + \frac{10}{27}x + \frac{10}{9x} + \frac{5}{3x^3} + \frac{1}{x^5} \quad .4$$

$$x^6 + 6x^4 + 15x^2 + 20 + \frac{15}{x^2} + \frac{6}{x^4} + \frac{1}{x^6} \quad .5$$

$$104060401 \quad .8$$

$$11040808032 \quad .7$$

$$884736 \quad .6$$

$$8(a^3b + ab^3); 40\sqrt{6} \quad .11$$

$$(1.1)^{10000} > 1000 \quad .10$$

$$9509900499 \quad .9$$

$$2(x^6 + 15x^4 + 15x^2 + 1), 198 \quad .12$$

مشق 8.2

$$(-1)^r {}^6C_r \cdot x^{12-2r} \cdot y^r \quad .3$$

$$-101376 \quad .2 \quad 1512$$

$$18564 \quad .6$$

$$-1760 x^9 y^3 \quad .5 \quad (-1)^r {}^{12}C_r \cdot x^{24-r} \cdot y^r$$

$$n = 7; r = 3 \quad .10$$

$$61236 x^5 y^5 \quad .8$$

$$\frac{-105}{8} x^9; \frac{35}{48} x^{12} \quad .7$$

$$m = 4 \quad .12$$

سبق 8 پر مشتمل متفرق مشق

$$a = \frac{9}{7} \quad .3$$

$$n = 7, 14 \quad .2$$

$$a = 3; b = 5; n = 6 \quad .1$$

$$2a^8 + 12a^6 - 10a^4 - 4a^2 + 2 \quad .6$$

$$396\sqrt{6} \quad .5$$

$$n = 10 \quad .8 \quad 0.9510 \quad .7$$

$$\frac{16}{x} + \frac{8}{x^2} - \frac{32}{x^3} + \frac{16}{x^4} - 4x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{16} - 5 \quad .9$$

$$27x^6 - 54ax^5 + 117a^2x^4 - 116a^3x^3 + 117a^4x^2 - 54a^5x + 27a^6 \quad .10$$

مشق 9.1

$$32, 16, 8, 4, 2 \quad .3$$

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6} \quad .2$$

$$3, 8, 15, 24, 35 \quad .1$$

4. $25, -125, 625, -3125, 15625$ اور $\frac{7}{6}, \frac{5}{6}, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{6}$.5
6. $\frac{49}{128}$.8 $65, 93$ اور $\frac{75}{2}, 21, \frac{21}{2}, \frac{9}{2}, \frac{3}{2}$.7
9. $\frac{360}{23}$.10 729
11. $3, 11, 35, 107, 323; 3+11+35+107+323+$.11
12. $-1, \frac{-1}{2}, \frac{-1}{6}, \frac{-1}{24}, \frac{-1}{120}; -1 + \left(\frac{-1}{2}\right) + \left(\frac{-1}{6}\right) + \left(\frac{-1}{24}\right) + \left(\frac{-1}{120}\right) + \dots$.12
13. $\frac{8}{5}$ اور $\frac{5}{3}, \frac{3}{2}, 2, 1$.14 $2, 2, 1, 0, -1; 2+2+1+0+(-1)+\dots$.13

مشق 9.2

1. 1002001 .1 98450 .2 20 یا 5 .4 4 .6
7. $\frac{n}{2}(5n+7)$.7 $2q$.8 $\frac{179}{321}$.9 0 .10
13. 27 .13 23 اور $20, 17, 14, 11$.14 1 .15
16. 14 .16 245 روپے .17 9 .18

مشق 9.3

1. $\frac{5}{2^{20}}, \frac{5}{2^n}$.1 3072 .2 -2187 .4
5. $(c) 9^{th}, (b) 12^{th}, (a) 13^{th}$.5 ± 1 .6 $\frac{1}{6}[1-(0.1)^{20}]$.7
8. $\frac{\sqrt{7}}{2}(\sqrt{3}+1)\left(3^{\frac{n}{2}}-1\right)$.8 $\frac{[1-(-a)^n]}{1+a}$.9 $\frac{x^3(1-x^{2n})}{1-x^2}$.10
11. $22 + \frac{3}{2}(3^{11}-1)$.11 $\frac{2}{5}, 1, \frac{5}{2}, \frac{5}{2}, 1, \frac{2}{5}$.12 $r = \frac{5}{2}$ یا $\frac{2}{5}$ ؛ ارکان ہیں
13. 4 .13 $\frac{16}{7}; 2; \frac{16}{7}(2^n-1)$.14 463 یا 2059 .15

16. 496 rR 20. 3, -6, 12, -24 21. 9 اور 27 26. $500(1.1)^{10}$ 31. $120,480,30(2^n)$ 30. $n = \frac{-1}{2}$ 27. $x^2 - 16x + 25 = 0$ 32.

مشق 9.4

1. $\frac{n(n+1)(n+2)}{4}$ 2. $\frac{n}{n+1}$ 3. $\frac{n}{6}(n+1)(3n^2+5n+1)$ 4. 2840 5. $\frac{n(n+1)^2(n+2)}{12}$ 6. $3n(n+1)(n+3)$ 7. $\frac{n(n+1)}{12}(3n^2+23n+34)$ 8. $\frac{n}{6}(n+1)(2n+1)+2(2^n-1)$ 9. $\frac{n}{3}(2n+1)(2n-1)$ 10.

سبق 9 پر مشتمل متفرق مشق

2. 5, 8, 11 3. 4 4. 8729 5. 3050 6. 1210 7. 160; 6 8. 4 9. ± 3 10. 8, 16, 32 11. 4 12. 11 13. $\frac{50}{81}(10^n-1) - \frac{5n}{9}$ (i) $\frac{2n}{3} - \frac{2}{27}(1-10^{-n})$ (ii) 14. 1680 15. $\frac{n}{3}(n^2+3n+5)$ 16. 23 17. 16680 روپے 18. 39100 روپے 19. 43690 روپے 20. 25 دن 21. 5120 روپے 22. 20,000؛ 17,000 روپے 23. 25 دن 24. 5120 روپے 25. 20,000؛ 17,000 روپے 26. 25 دن 27. 16680 روپے 28. 39100 روپے 29. 43690 روپے 30. 25 دن 31. 5120 روپے 32. 20,000؛ 17,000 روپے

مشق 10.1

1. $\frac{121}{2}$ مربع اکائی
2. $(\sqrt{3}a, 0)$ اور $(0, -a)$ ، $(0, a)$ یا $(-\sqrt{3}a, 0)$ اور $(0, -a)$ ، $(0, a)$
3. $|x_2 - x_1|$ (ii) ، $|y_2 - y_1|$ (i)
4. $\left(\frac{15}{2}, 0\right)$
5. $-\frac{1}{2}$
7. $-\sqrt{3}$
8. $x = 1$
10. 135°
11. 1 اور 2 ، یا $\frac{1}{2}$ اور 1 ، یا -1 اور -2 ، یا $-\frac{1}{2}$ اور -1 14۔ $\frac{1}{2}$ ، 104.5° کروڑ

مشق 10.2

1. $x = 0$ اور $y = 0$
2. $x - 2y + 10 = 0$ 3. $y = mx$
4. $(\sqrt{3} + 1)x - (\sqrt{3} - 1)y = 4(\sqrt{3} - 1)$
5. $2x + y + 6 = 0$
6. $x - \sqrt{3}y + 2\sqrt{3} = 0$
7. $5x + 3y + 2 = 0$
8. $\sqrt{3}x + y = 10$
9. $3x - 4y + 8 = 0$ 10. $5x - y + 20 = 0$
11. $(1 + n)x + 3(1 + n)y = n + 11$
12. $x + y = 5$
13. $2x + y - 6 = 0$ ، $x + 2y - 6 = 0$
14. $\sqrt{3}x + y - 2 = 0$ اور $\sqrt{3}x + y + 2 = 0$ 15. $2x - 9y + 85 = 0$
16. $2kx + hy = 3kh$ 17. $L = \frac{192}{90}(C - 20) + 124.942$ 19. 1340 لیٹر

مشق 10.3

1. $y = -\frac{1}{7}x + 0, -\frac{1}{7}, 0$ (i) (ii) $y = -2x + \frac{5}{3}, -2, \frac{5}{3}$ (iii) $y = 0x + 0, 0, 0$
2. $\frac{x}{3} + \frac{y}{-2} = 1, \frac{3}{2}, -2$ (ii) $\frac{x}{4} + \frac{y}{6} = 1, 4, 6$ (i)

(iii) $y = -\frac{2}{3}$ ، y -axis کے ساتھ intercept $-\frac{2}{3}$ اور x -axis کے ساتھ کوئی intercept نہیں ہے۔

3. (i) $x \cos 120^\circ + y \sin 120^\circ = 4$, $4, 120^\circ$ (ii) $x \cos 90^\circ + y \sin 90^\circ = 2$, $2, 90^\circ$

(iii) $x \cos 315^\circ + y \sin 315^\circ = 2\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}, 315^\circ$ 4. 5 اکائیاں

5. $(-2, 0)$ اور $(8, 0)$ 6. (i) $\frac{65}{17}$ اکائیاں، (ii) $\frac{1}{\sqrt{2}} \left| \frac{p+r}{l} \right|$ اکائیاں

7. $3x - 4y + 18 = 0$ 8. $y + 7x = 21$ 9. 30° اور 150°

10. $\frac{22}{9}$

12. $(\sqrt{3} - 2)x + (1 + 2\sqrt{3})y = -1 + 8\sqrt{3}$ یا $(\sqrt{3} + 2)x + (2\sqrt{3} - 1)y = 8\sqrt{3} + 1$

13. $2x + y = 5$ 14. $\left(\frac{68}{25}, -\frac{49}{25}\right)$ 15. $m = \frac{1}{2}, c = \frac{5}{2}$

17. $y - x = 1, \sqrt{2}$

سبق 10 پر مشتمل متفرق مشق

1. (a) 3، (b) ± 2 ، (c) $1\frac{1}{6}$ 2. $\frac{7\pi}{6}, 1$

3. $2x - 3y = 6, -3x + 2y = 6$ 4. $\left(0, -\frac{8}{3}\right), \left(0, \frac{32}{3}\right)$

5. $\left| \cos \left(\frac{\phi - \theta}{2} \right) \right|$ 6. $x = -\frac{5}{22}$ 7. $2x - 3y + 18 = 0$

8. k^2 مربع اکائیاں 9. 5 11. $x + 3y = 9, 3x - y = 7$

12. $13x + 13y = 6$ 14. $1 : 2$ 15. $\frac{23\sqrt{5}}{18}$ اکائیاں

16. خط x -axis کے متوازی ہے یا y -axis کے متوازی ہے۔

17. $x = 1, y = 1$ 18. $(-1, -4)$ 19. $\frac{1 \pm 5\sqrt{2}}{7}$

$$119x + 102y = 205 \quad .24$$

$$\left(\frac{13}{5}, 0\right) \quad .22$$

$$18x + 12y + 11 = 0 \quad .21$$

مشق 11.1

$$x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0 \quad .2 \quad x^2 + y^2 - 4y = 0 \quad .1$$

$$x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0 \quad .4 \quad 36x^2 + 36y^2 - 36x - 18y + 11 = 0 \quad .3$$

$$C(-5, 3), r = 6 \quad .6 \quad x^2 + y^2 + 2ax + 2by + 2b^2 = 0 \quad .5$$

$$C\left(\frac{1}{4}, 0\right); r = \frac{1}{4} \quad .9 \quad C(4, -5), r = \sqrt{53} \quad .8 \quad c(2, 4), r = \sqrt{65} \quad .7$$

$$x^2 + y^2 - 7x + 5y - 14 = 0 \quad .11 \quad x^2 + y^2 - 6x - 8y + 15 = 0 \quad .10$$

$$x^2 + y^2 - 12x + 11 = 0 \quad .12 \quad x^2 + y^2 + 4x - 21 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 4x - 4y = 5 \quad .14 \quad x^2 + y^2 - ax - by = 0 \quad .13$$

.15 دائرہ کے اندر؛ کیونکہ نقطہ کا فاصلہ دائرہ کے مرکز تک دائرہ کے نصف قطر سے کم ہے۔

مشق 11.2

$$12 = \text{Latus rectum} \cdot -3 = x \text{ (directrix)} \cdot \text{axis-x-axis} \cdot F(3, 0) \quad .1$$

$$6 = \text{Latus rectum} \cdot -\frac{3}{2} = x \text{ (directrix)} \cdot \text{axis-x-axis} \cdot F\left(\frac{3}{2}, 0\right) \quad .2$$

$$8 = \text{Latus rectum} \cdot L = x \text{ (directrix)} \cdot \text{axis-x-axis} \cdot F(-2, 0) \quad .3$$

$$16 = \text{Latus rectum} \cdot 4 = y \text{ (directrix)} \cdot \text{axis-x-axis} \cdot F(0, -4) \quad .4$$

$$10 = \text{Latus rectum} \cdot -\frac{5}{2} = x \text{ (directrix)} \cdot \text{axis-x-axis} \cdot F\left(\frac{5}{2}, 0\right) \quad .5$$

$$10 = \text{Latus rectum} \cdot -\frac{5}{2} = x \text{ (directrix)} \cdot \text{axis-x-axis} \cdot F\left(\frac{5}{2}, 0\right) \quad .5$$

$$9 = \text{Latus rectum} \cdot \frac{9}{4} = y \text{ (directrix)} \cdot \text{axis-y-axis} \cdot F\left(0, -\frac{9}{4}\right) \quad .6$$

$$y^2 = 12x \cdot 9 \quad x^2 = -12y \cdot 8 \quad y^2 = 24x \quad .7$$

$$2x^2 = 25y \quad .12$$

$$2y^2 = 9x \quad .11$$

$$y^2 = -8x \quad .10$$

مشق 11.3

$$1. \quad e = \frac{\sqrt{20}}{6} \quad 8 = (\text{Minor axis}) \quad 12 = (\text{Major axis}) \quad V(\pm 6, 0) \quad F(\pm \sqrt{20}, 0)$$

$$\text{Latus rectum} = \frac{16}{3}$$

$$2. \quad e = \frac{\sqrt{21}}{6} \quad 4 = (\text{Minor axis}) \quad 10 = (\text{Major axis}) \quad V(0, \pm 5) \quad F(0, \pm \sqrt{21})$$

$$\text{Latus rectum} = \frac{8}{5}$$

$$3. \quad e = \frac{\sqrt{7}}{4} \quad 6 = (\text{Minor axis}) \quad 8 = (\text{Major axis}) \quad V(\pm 4, 0) \quad F(\pm \sqrt{7}, 0)$$

$$\text{Latus rectum} = \frac{9}{2}$$

$$4. \quad \text{Latus rectum} = 5 \quad e = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad 10 = (\text{Minor axis}) \quad 20 = (\text{Major axis}) \quad V(0, \pm 10) \quad F(0, \pm \sqrt{75})$$

$$5. \quad \text{Latus rectum} = \frac{22}{7} \quad e = \frac{\sqrt{13}}{7} \quad 12 = (\text{Minor axis}) \quad 14 = (\text{Major axis}) \quad V(\pm 7, 0) \quad F(\pm \sqrt{13}, 0)$$

$$6. \quad \text{Latus rectum} = 10 \quad e = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad 20 = (\text{Minor axis}) \quad 40 = (\text{Major axis}) \quad V(0, \pm 20) \quad F(0, \pm 10\sqrt{3})$$

$$7. \quad \text{Latus rectum} = \frac{4}{3} \quad e = \frac{2\sqrt{2}}{3} \quad 4 = (\text{Minor axis}) \quad 12 = (\text{Major axis}) \quad V(0, \pm 6) \quad F(0, \pm 4\sqrt{2})$$

$$8. \quad \text{Latus rectum} = \frac{1}{2} \quad e = \frac{\sqrt{15}}{4} \quad 2 = (\text{Minor axis}) \quad 8 = (\text{Major axis}) \quad V(0, \pm 4) \quad F(0, \pm \sqrt{15})$$

$$9. \quad \text{Latus rectum} = \frac{8}{3} \quad e = \frac{\sqrt{5}}{3} \quad 4 = (\text{Minor axis}) \quad 6 = (\text{Major axis}) \quad V(\pm 3, 0) \quad F(\pm \sqrt{5}, 0)$$

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1 \quad .12$$

$$\frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{169} = 1 \quad .11$$

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1 \quad .10$$

$$\begin{array}{lll} \frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{144} = 1 & \text{.15} & \frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{5} = 1 \quad \text{.14} & \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \quad \text{.13} \\ \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1 & \text{.18} & \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1 \quad \text{.17} & \frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{100} = 1 \quad \text{.16} \\ \frac{x^2}{52} + \frac{y^2}{13} = 1 \quad \text{یا} \quad x^2 + 4y^2 = 52 & \text{.20} & & \frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{40} = 1 \quad \text{.19} \end{array}$$

مشق 11.4

$$\begin{array}{ll} \text{1. Foci } (\pm 5, 0), \text{ راس } (\pm 4, 0), e = \frac{5}{4}, \text{ Latus rectum} = \frac{9}{2} & \\ \text{2. Foci } (0, \pm 6), \text{ راس } (0, \pm 3), e = 2, \text{ Latus rectum} = 18 & \\ \text{3. Foci } (0, \pm \sqrt{13}), \text{ راس } (0, \pm 2), e = \frac{\sqrt{13}}{2}, \text{ Latus rectum} = 9 & \\ \text{4. Foci } (\pm 10, 0), \text{ راس } (\pm 6, 0), e = \frac{5}{3}, \text{ Latus rectum} = \frac{64}{3} & \\ \text{5. Foci } (0, \pm \frac{2\sqrt{14}}{\sqrt{5}}), \text{ راس } (0, \pm \frac{6}{\sqrt{5}}), e = \frac{\sqrt{14}}{3}, \text{ Latus rectum} = \frac{4\sqrt{5}}{3} & \\ \text{6. Foci } (0, \pm \sqrt{65}), \text{ راس } (0, \pm 4), e = \frac{\sqrt{65}}{4}, \text{ Latus rectum} = \frac{49}{2} & \\ \text{7. } \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1 & \text{.8. } \frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{39} = 1 & \text{.9. } \frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1 \\ \text{10. } \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1 & \text{.11. } \frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{144} = 1 & \text{.12. } \frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{20} = 1 \\ \text{13. } \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1 & \text{.14. } \frac{x^2}{49} - \frac{9y^2}{343} = 1 & \text{.15. } \frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{5} = 1 \end{array}$$

باب 11 پر مشتمل متفرق مشق

1. دیئے ہوئے قطر کے درمیانی نقطے پر ماسک (Focus) واقع ہے۔
2. 2.23 m (تقریباً)
3. 9.11 m (تقریباً)
4. 1.56 m (تقریباً)

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1 \quad .7$$

18. مربع اکائیاں

$$\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{9} = 1 \quad .5$$

$$8\sqrt{3}a \quad .8$$

مشق 12.1

1. y اور z مختص 'صفر' ہیں y مختص 'صفر' ہے

3. VII, III, II, VI, V, VIII, IV, I

4. (i) $-xy$ متوی (ii) $(x, y, 0)$ (iii) 8 علاقے

مشق 12.2

1. (i) $2\sqrt{5}$ (ii) $\sqrt{43}$ (iii) $2\sqrt{26}$ (iv) $2\sqrt{5}$

$$9x^2 + 25y^2 + 25z^2 - 225 = 0 \quad .5 \quad x - 2z = 0 \quad .4$$

مشق 12.3

1. (i) $\left(\frac{-4}{5}, \frac{1}{5}, \frac{27}{5}\right)$ (ii) $(-8, 17, 3)$ 2. 1:2

3. 2:3 5. $(8, -10, 2), (6, -4, -2)$

باب 12 پر مشتمل متفرق مشق

1. $(1, -2, 8)$ 2. $7\sqrt{34}, 7$

3. $c = 2, b = -\frac{16}{3}, a = -2$ 4. $(0, -6, 0)$ اور $(0, 2, 0)$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 7y + 2z = \frac{k^2 - 109}{2} \quad .6 \quad (4, -2, 6) \quad .5$$

مشق 13.1

1. 6 2. $\left(\pi - \frac{22}{7}\right)$ 3. π 4. $\frac{19}{2}$

$$\frac{108}{7} \quad .8 \quad \frac{11}{4} \quad .7 \quad 5 \quad .6 \quad -\frac{1}{2} \quad .5$$

$$-\frac{1}{4} \quad .12 \quad 1 \quad .11 \quad 2 \quad .10 \quad b \quad .9$$

$$.16 \quad \frac{1}{\pi} \quad .15 \quad .14 \quad \frac{a}{b} \quad .13$$

$$1 \quad .20 \quad 0 \quad .19 \quad \frac{a+1}{b} \quad .18 \quad 4 \quad .17$$

$$3,6 \quad .23 \quad 2 \quad .22 \quad 0 \quad .21$$

.24 $\lim_{x \rightarrow 1} x$ پر (انتہائی) موجود نہیں ہے

.25 $\lim_{x \rightarrow 0} x$ پر موجود نہیں ہے

.26 $\lim_{x \rightarrow 0} x$ پر موجود نہیں ہے

$$a = 0, b = 4 \quad .28 \quad 0 \quad .27$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = (a - a_1)(a - a_2) \dots (a - a_n) \quad \text{اور} \quad \lim_{x \rightarrow a_1} f(x) = 0 \quad .29$$

$$2 \quad .31 \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) \text{ کے لیے } a \neq 0 \text{ موجود ہیں}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \text{ کے وجود میں آنے کے لیے ہمیں ضرورت ہے } m = n \text{ کی؛ } m \text{ اور } n \text{ کی کسی بھی صحیح عددی قدر کے لیے}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \text{ وجود میں ہے: } m \text{ اور } n \text{ کی کسی بھی صحیح عددی قدر کے لیے}$$

مشق 13.2

$$1 \quad .3 \quad 99 \quad .2 \quad 20 \quad .1$$

$$\frac{-2}{(x-1)^2} \quad (iv) \quad \frac{-2}{x^3} \quad (iii) \quad 2x-3 \quad (ii) \quad 3x^2 \quad (i) \quad .4$$

$$nx^{n-1} + a(n-1)x^{n-2} + a^2(n-2)x^{n-3} + \dots + a^{n-1} \quad .6$$

$$\frac{a-b}{(x-b)^2} \quad (iii) \quad 4ax(ax^2+b) \quad (ii) \quad 2x-a-b \quad (i) \quad .7$$

$$\frac{nx^n - anx^{n-1} - x^n + a^n}{(x-a)^2} \quad .8$$

$$15x^4 + \frac{24}{x^5} \quad (iv) \quad \frac{-3}{x^4}(5+2x) \quad (iii) \quad 20x^3 - 15x^2 + 6x - 4 \quad (ii) \quad 2 \quad (i) \quad .9$$

$$-\sin x \quad .10 \quad \frac{-2}{(x+1)^2} - \frac{x(3x-2)}{(3x-1)^2} \quad (vi) \quad \frac{-12}{x^5} + \frac{36}{x^{10}} \quad (v)$$

$$\sec x \tan x \quad (ii) \quad \cos 2x \quad (i) \quad .11$$

$$-\operatorname{cosec} x \cot x \quad (iv) \quad 5 \sec x \tan x - 4 \sin x \quad (iii)$$

$$5 \cos x + 6 \sin x \quad (vi) \quad -3 \operatorname{cosec}^2 x - 5 \operatorname{cosec} x \cot x \quad (v)$$

$$2 \sec^2 x - 7 \sec x \tan x \quad (vii)$$

باب 13 پر مشتمل متفرق مشق

$$1.2 \quad -\sin\left(x - \frac{\pi}{8}\right) \quad (iv) \quad \cos(x+1) \quad (iii) \quad \frac{1}{x^2} \quad (ii) \quad -1 \quad (i) \quad .1$$

$$2c(ax+b)(cx+d) + a(cx+d)^2 \quad .4 \quad \frac{-qr}{x^2} + ps \quad .3$$

$$\frac{-(2ax+b)}{(ax^2+bx+c)^2} \quad .7 \quad \frac{-2}{(x-1)^2}, x \neq 0,1 \quad .6 \quad \frac{ad-bc}{(cx+d)^2} \quad .5$$

$$\frac{-4a}{x^5} + \frac{2b}{x^3} - \sin x \quad .10 \quad \frac{apx^2 + 2bpx + bq - ar}{(ax+b)^2} \quad .9 \quad \frac{-apx^2 - 2bpx + ar - bq}{(px^2 + 2x + r)^2} \quad .8$$

$$na(ax+b)^{n-1} \quad .12 \quad \frac{2}{\sqrt{x}} \quad .11$$

$$\cos(x+a) \quad .14 \quad (ax+b)^{n-1}(cx+d)^{m-1} [mc(ax+b) + na(cx+d)] \quad .13$$

$$\frac{-1}{1+\sin x} \quad .16 \quad -\operatorname{cosec}^3 x - \operatorname{cosec} x \cot^2 x \quad .15$$

$$n \sin^{n-1} x \cos x \quad .19 \quad \frac{2 \sec x \tan x}{(\sec x + 1)^2} \quad .18 \quad \frac{-2}{(\sin x - \cos x)^2} \quad .17$$

$$\frac{\cos \alpha}{\cos^2 x} \cdot 21 \frac{bc \cos x + ad \sin x + bd}{(c + d \cos x)^2} \quad .20$$

$$x^3 (5x \cos x + 3x \sin x + 20 \sin x - 12 \cos x) \quad .22$$

$$-x^2 \sin x - \sin x + 2x \cos x \quad .23$$

$$-q \sin x (ax^2 + \sin x) + (p + q \cos x)(2ax + \cos x) \quad .24$$

$$-\tan^2 x (x + \cos x) + (x - \tan x)(1 - \sin x) \quad .25$$

$$\frac{35 + 15x \cos x + 28 \cos x + 28x \sin x - 15 \sin x}{(3x + 7 \cos x)^2} \quad .26$$

$$\frac{1 + \tan x - x \sec^2 x}{(1 + \tan x)^2} \quad .28 \quad \frac{x \cos \frac{\pi}{4} (2 \sin x - x \cos x)}{\sqrt{2} \sin^2 x} \quad .27$$

$$(x + \sec x)(1 - \sec^2 x) + (x - \tan x)(1 + \sec x \tan x) \quad .29$$

$$\frac{\sin x - n x \cos x}{\sin^{n+1} x} \quad .30$$

مشق 14.1

1. (i) یہ جملہ ہمیشہ غلط ہے کیونکہ ایک مہینہ میں زیادہ سے زیادہ 31 دن ہوتے ہیں۔ اس لئے یہ ایک بیان ہے۔
 (ii) یہ ایک بیان نہیں ہے کیونکہ کچھ لوگوں کے لئے ریاضی آسان ہو سکتا ہے اور کچھ دوسروں کے لئے یہ مشکل ہو سکتا ہے۔

- (iii) یہ بیان ہمیشہ درست ہے کیونکہ مجموعہ 12 ہے اور یہ 10 سے بڑا ہے۔ اس لئے یہ ایک بیان ہے۔ طاق عدد ہے۔
 اس لئے یہ ایک بیان ہے۔

- (v) یہ بیان کبھی کبھی صحیح ہے اور کبھی کبھی غلط۔ مثال کے طور پر مربع اور معین (Rhombus) کے ضلعوں کی لمبائی برابر ہوتی ہے جب کہ مستطیلوں اور منحرف (trapezium) کی لمبائی برابر نہیں ہوتی۔ اس لئے یہ ایک بیان نہیں ہے۔

- (vi) یہ ایک حکم ہے اور اس لئے یہ ایک بیان نہیں ہے۔

- (vii) جملہ غلط ہے کیونکہ حاصل ضرب (-8) ہے۔ اس لئے یہ ایک بیان ہے۔

(viii) یہ جملہ ہمیشہ صحیح ہے اور اس لئے یہ ایک بیان ہے۔

(ix) یہ دلیل پیش کرنے سے صاف نہیں ہے کہ کس دن کو بتایا گیا ہے اور اس لئے یہ ایک بیان نہیں ہے۔

(x) یہ بیان درست ہے کیونکہ تمام حقیقی اعداد کو $a + i \times 0$ کی شکل میں لکھا جاسکتا ہے۔

2. تین مثالیں ہو سکتی ہیں:

(i) اس کمرہ میں ہر ایک بہادر ہے۔ یہ بیان نہیں ہے کیونکہ دلیل پیش کرنے سے یہ صاف نہیں ہے کہ یہاں کس کمرہ

کے بارے میں بتایا گیا ہے اور لفظ بہادر کی تعریف صاف طور پر نہیں بتائی گئی ہے۔

(ii) وہ ایک انجینئرنگ کی طالبہ ہے۔ یہ بھی ایک بیان نہیں ہے کیونکہ وہ کون ہے۔

(iii) ” $\cos^2 \theta$ ہمیشہ $\frac{1}{2}$ سے بڑا ہوتا ہے۔“ جب تک ہم یہ نہ جان لیں کہ θ کیا ہے، ہم نہیں کہہ سکتے کہ آیا جملہ صحیح

ہے یا غلط۔

مشق 14.2

1. (i) چنی تامل ناڈو کا دارالحکومت نہیں ہے۔

(ii) $\sqrt{2}$ ایک پیچیدہ (complex) عدد ہے۔

(iii) تمام مثلث مساوی ضلعی مثلث ہیں۔

(iv) عدد 2، 7 سے بڑا نہیں ہے۔

(v) ہر ایک طبعی عدد ایک صحیح عدد نہیں ہے۔

2. (i) پہلے بیان کا نفی (negation) ہے ”عدد x ایک ناطق عدد ہے۔“ جو کہ دوسرے بیان جیسا ہی ہے۔ یہ اس لئے ہے

کیونکہ جب عدد ایک غیر ناطق عدد نہیں ہے، یہ ایک ناطق عدد ہے۔ اس لئے دیے ہوئے جوڑے ایک دوسرے کے نفی

ہیں۔

(ii) پہلے بیان کا نفی ہے ” x ایک غیر ناطق عدد ہے“ جو کہ دوسرے بیان کی طرح ہے۔ اس لئے جوڑے ایک دوسرے

کے نفی ہیں۔

3. (i) عدد 3 مفرد ہے؛ عدد 3 طاق ہے (صحیح ہے)۔

- (ii) تمام صحیح اعداد مثبت ہیں؛ سبھی صحیح اعداد منفی ہیں (غلط)
- (iii) 100، 3 سے تقسیم ہوتا ہے، 100، 11 سے تقسیم ہوتا ہے اور 100، 5 سے تقسیم ہوتا ہے (غلط)۔

مشق 14.3

1. (i) ”اور“ جزو ترکیبی (Component) بیانات ہیں:

تمام ناطق اعداد حقیقی اعداد ہیں۔

تمام حقیقی اعداد پیچیدہ اعداد نہیں ہیں۔

(ii) ”یا“ جزو ترکیبی بیانات ہیں:

ایک صحیح عدد کا مربع مثبت ہے۔

ایک صحیح عدد کا مربع منفی ہے۔

(iii) ”اور“ جزو ترکیبی بیانات ہیں:

سورج کی موجودگی میں ریت بہت جلدی گرم ہو جاتی ہے۔

ریت رات میں بہت جلدی ٹھنڈا نہیں ہوتی ہے۔

(iv) ”اور“ جزو ترکیبی بیانات ہیں:

$x = 2$ مساوات $3x^2 - x - 10 = 0$ کا جذر ہے۔

$x = 3$ مساوات $3x^2 - x - 10 = 0$ کا جذر ہے۔

2. (i) ”There exists“ نفی ہے

ایسا کوئی نمبر موجود نہیں ہے جو اپنے مربع کے برابر ہے۔

(ii) ”ہر ایک کے لیے“ نفی ہے

ایک ایسا حقیقی عدد x ملتا ہے تاکہ x ، $x + 1$ سے کم نہیں ہے۔

(iii) ”There exists“ نفی ہے۔

ہندوستان میں ایک ایسا صوبہ موجود ہے جس کا دارالخلافہ نہیں ہے۔

3. نہیں۔ (i) میں موجود بیان کا نفی ہے ”حقیقی عدد x اور y موجود ہیں جن کے لئے $x + y \neq y + x$ “، (ii) میں دیے گئے بیان کے بدلے۔

4. (i) اخراجی (Exclusive)

(ii) شمولی (Inclusive)

(iii) اخراجی (Exclusive)

مشق 14.4

1. (i) ایک طبعی عدد طاق ہے تو اس کا مطلب ہے اس کا مربع بھی طاق ہے۔

(ii) ایک طبعی عدد طاق ہے اگر اس کا مربع بھی طاق ہے۔

(iii) ایک طبعی عدد طاق ہونے کے لیے یہ ضروری ہے کہ اس کا مربع بھی طاق ہو۔

(iv) ایک طبعی عدد کے مربع کو طاق ہونے کے لیے یہ کافی ہے کہ عدد بھی طاق ہو۔

(v) اگر ایک طبعی عدد کا مربع طاق نہیں ہے، تب طبعی عدد طاق نہیں ہے۔

2. (i) مثبت کا الٹا ہے (The contrapositive is)

اگر ایک عدد ق طاق نہیں ہے، تب x ایک منفرد عدد نہیں ہے۔

اس کا الٹا ہے (The Converse is)

اگر ایک عدد طاق ہے، تب یہ ایک مفرد عدد ہے۔

(ii) مثبت کا الٹا ہے (The contrapositive is)

اگر دو خط ایک مستوی میں ایک دوسرے کو کاٹتے ہیں، تب وہ متوازی نہیں ہیں۔

اس کا الٹا ہے۔

اگر دو خطوط ایک مستوی میں ایک دوسرے کو نہیں کاٹتے، تب وہ متوازی ہیں۔

(iii) مثبت کا الٹا ہے۔

اگر کوئی شے کم درجہ حرارت پر نہیں ہے، تب یہ ٹھنڈی نہیں ہے۔

اس کا الٹا ہے۔

اگر دو خطوط ایک مستوی میں ایک دوسرے کو نہیں کاٹتے، تب وہ متوازی ہیں۔

(iii) مثبت کا الٹا ہے۔

اگر کوئی شے کم درجہ حرارت پر نہیں ہے، تب یہ ٹھنڈی نہیں ہے۔

اس کا الٹا ہے۔

اگر کوئی شے کم درجہ حرارت پر ہے، تب یہ ٹھنڈی ہے۔

(iv) مثبت کا الٹا ہے۔

اگر آپ استخراجیہ توجیہ جانتے ہیں، تب آپ جیومیٹری کے بارے میں سمجھ سکتے ہیں۔ (Comprehend)

اس کا الٹا ہے۔

اگر آپ استخراجیہ توجیہ نہیں جانتے، تب آپ جیومیٹری کے بارے میں نہیں سمجھ سکتے۔

(v) یہ بیان اس طرح بھی لکھا جاسکتا ہے۔ ”اگر x ایک جفت عدد ہے، تب x 4 سے تقسیم ہو جائے گا۔“

مثبت کا الٹا ہے، اگر x 4 سے تقسیم ہوتا ہے، تب x ایک جفت عدد ہے۔

اس کا الٹا ہے، اگر x 4 سے تقسیم ہوتا ہے، تب x ایک جفت عدد ہے۔

3. (i) اگر آپ کونو کری (Job) مل جاتی ہے، تب آپ کے کاغذاتِ نمائندگی (Credential) اچھی ہیں۔

(ii) اگر کیلے درخت ایک ماہ تک گرم رہتا ہے، تب یہ خوب پھل دے گا۔

(iii) اگر ایک چار ضلعی کے وتر آپس میں ایک دوسرے کو تنصیف ہیں، تب یہ متوازی الاضلاع ہے۔

(iv) اگر آپ جماعت میں A+ حاصل کرتے ہیں، تب آپ کتاب میں موجود تمام مشقیں کرتے ہیں۔

4. (i) مثبت کا الٹا (Contrapositive)

(ii) الٹا (Converse)

(b) (i) مثبت کا الٹا

(ii) الٹا

مشق 14.5

5. (i) غلط ہے۔ قوسی وتر (Chord) کی تعریف سے، یہ دائرہ کو دو نقاط پر کاٹتی ہے۔
(ii) غلط ہے۔ یہ ایک جوابی مثال سے دکھایا جاسکتا ہے۔ ایک قوسی وتر جو قطر (diameter) نہیں ہے جوابی مثال دیتا ہے۔
(iii) صحیح ہے۔ ایک ناقص (ellipse) کی مساوات میں اگر ہم $a = b$ رکھیں۔ تب یہ ایک دائرہ ہے۔ (سیدھا طریقہ)
(iv) صحیح ہے، نامساواتوں کے اصول سے۔
(v) غلط ہے۔ کیونکہ '11' ایک مفرد عدد ہے اس لیے $\sqrt{11}$ غیر ناطق ہے۔

باب 14 کی مبنی متفرق مثالیں

1. (i) یہاں ایک مثبت حقیقی عدد x ملتا ہے تاکہ $x - 1$ مثبت نہیں ہے۔
(ii) یہاں ایک ملتی ملتی جو نو جتنی کھسٹتی نہیں ہے۔
(iii) یہاں ایک حقیقی عدد x ملتا ہے تاکہ $x > 1$ اور $x < 1$ سے
(iv) یہاں ایسا ایک عدد x نہیں ملتا تاکہ $0 < x < 1$
2. (i) بیان اس طرح بھی لکھا جاسکتا ہے ”اگر ایک مثبت صحیح عدد مفرد ہے، تب یہ '1' اور اپنے علاوہ کسی اور کو تقسیم علیہ نہیں رکھتا۔ بیان الٹا ہے۔
اگر ایک مثبت صحیح عدد کا تقسیم علیہ '1' اور اپنے علاوہ کوئی نہیں ہے تب یہ مفرد عدد ہے بیان کا Contrapositive ہے۔
اگر مثبت صحیح عدد '1' اور اپنے علاوہ کسی اور سے تقسیم ہو سکتا ہے تب یہ مفرد نہیں ہے۔
(ii) دیا ہوا بیان اس طرح بھی لکھا جاسکتا ہے۔ ”اگر یہ ایک گرم دن ہے، تب میں سمندر کے کنارے جاتا ہوں۔“
بیان الٹا ہے۔
اگر میں سمندر کے کنارے جاتا ہوں، تب یہ ایک گرم دن ہوتا ہے۔
اس کا مثبت الٹا ہے۔

اگر میں سمندر کے نہیں جاتا، تب یہ ایک گرم دن نہیں ہوتا ہے۔

(ii) اس کا الٹا ہے۔

اگر آپ کو پیاس محسوس ہو رہی ہے، تب باہر گرمی ہے۔

اس کا مثبت الٹا ہے۔ (The Contrapositive is)

اگر آپ کو پیاس نہیں لگ رہی، تب باہر گرمی نہیں ہے۔

3. (i) اگر سرور (Server) پر لاگ آن (Log) ہے تب آپ کے پاس پاس ورڈ Pass word ہے

(ii) اگر بارش ہوتی ہے، تب ٹریفک جام ہوگا۔

(ii) اگر آپ Website کا استعمال کرتے ہیں، تب آپ کو استعمال کرنے کی فیس دینی ہے۔

4. (i) آپ ٹیلی ویژن دیکھتے ہیں اگر آپ کا دماغ سکون میں ہے۔

(ii) آپ کو 'A' گریڈ ملتا ہے اگر آپ تمام ہوم ورک متواتر کرتے ہیں۔

(ii) ایک چار ضلعی کے زاویے اس وقت برابر ہوتے ہیں جب یہ ایک مستطیل ہوتا ہے۔

5. مرکب بیان کے ساتھ ”اور“ کیا 5، 25 اور 8 کا حاصل ضرب ہے۔

یہ ایک غلط بیان ہے۔

مرکب بیان کے ساتھ ”یا“ کیا 5، 25 یا 8 کا حاصل ضرب ہے۔

یہ ایک صحیح بیان ہے۔

7. مشق 14.4 کے سوال نمبر '1' کی طرح۔

مشق 15.1

3	1	2	3	4	7
8.4	2.33	7	3.23	8	5.1
16	6.32	10	11	12	7.35
11.28	157.92				

مشق 15.2

1. 9, 9.25
2. $\frac{n+1}{2}, \frac{n^2-1}{12}$
3. 16.5, 74.25
4. 19, 43.4
5. 100, 29.09
6. 64, 1.69
7. 107, 2276
8. 27, 132
9. 93, 105.58, 10.27
10. 5.55, 43.5

مشق 15.3

1. B
2. Y
3. B (ii), B (i)
4. A
5. وزن کلوگرام (weight)

باب 15 پڑنی متفرق مشق

1. 4, 8
2. 8.6
3. 12.24
4. 1.98, 10.2 (ii) 1.99, 10.1 (i)
5. سب سے زیادہ کیمسٹری (علم کیمیاوی) Chemistry اور سب کم ریاضی
6. 3.03620
7. 12.24

مشق 16.1

1. {HHH, HHT, HTH, THH, TTH, HTT, THT, TTT}
2. $\{(x, y) : x, y = 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
3. {HHHH, HHHT, HHTH, HTHH, THHH, HHTT, HTHT, HTTH, THHT, THTH, TTHH, HTTT, THTT, TTHT, TTTH, TTTT}
4. {H1, H2, H3, H4, H5, H6, T1, T2, T3, T4, T5, T6}
5. {H1, H2, H3, H4, H5, H6, T}
6. {XB₁, XB₂, XG₁, XG₂, YB₃, YG₃, YG₄, YG₅}

7. $\{R1, R2, R3, R4, R5, R6, W1, W2, W3, W4, W5, W6, B1, B2, B3, B4, B5, B6\}$

8. $\{0, 1, 2\}$ (ii) $\{BB, BG, GB, GG\}$ (i)

9. $\{RW, WR, WW\}$

10. $\{HH, HT, T1, T2, T3, T4, T5, T6\}$

11. $\{DDD, DDN, DND, NDD, DNN, NDN, NND, NNN\}$

12. $\{T, H1, H3, H5, H21, H22, H23, H24, H25, H26, H41, H42, H43, H44,$

$H45, H46, H61, H62, H63, H64, H65, H66\}$

13. $\{(1,2), (1,3), (1,4), (2,1), (2,3), (2,4), (3,1), (3,2), (3,4), (4,1), (4,2), (4,3)\}$

14. $\{1HH, 1HT, 1TH, 1TT, 2H, 2T, 3HH, 3HT, 3TH, 3TT, 4H, 4T, 5HH,$

$5HT, 5TH, 5TT, 6H, 6T\}$

15. $\{TR_1, TR_2, TB_1, TB_2, TB_3, H1, H2, H3, H4, H5, H6\}$

16. $\{6, (1,6), (2,6), (3,6), (4,6), (5,6), (1,1,6), (1,2,6), \dots, (1,5,6), (2,1,6), (2,2,6),$

$\dots, (2,5,6), \dots, (5,1,6), (5,2,6), \dots\}$

مشق 16.2

1. نہیں

2. $\{3, 6\}$ (iii) ϕ (ii) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ (i)

$\{6\}$ (v) $\{1, 2, 3\}$ (iv)

$\{3, 4, 5, 6\}, A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, A \cap B = \phi, B \cup C = \{3, 6\},$ (vi)

$E \cap F = \{6\}, D \cap E = \phi,$

$A - C = \{1, 2, 4, 5\}, D - E = \{1, 2, 3\}, E \cap F = \phi, F' = \{1, 2\}$

3. $A = \{(3,6), (4,5), (5, 4), (6,3), (4,6), (5,5), (6,4), (5,6), (6,5), (6,6)\}$

$$B = \{(1,2), (2,2), (3, 2), (4,2), (5,2), (6,2), (2,1), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6)\}$$

$$C = \{(3,6), (6,3), (5, 4), (4,5), (6,6)\}$$

(mutually exclusive) ہیں متشقی باہم اور A اور B اور C

$$D \text{ اور } B \text{ (ii)} \quad D \text{ اور } B \text{ (i)} \quad D \text{ اور } C, C \text{ اور } B, C \text{ اور } A, A \text{ اور } B \text{ اور } A \text{ (i)} \quad .4$$

(i) ”کم از کم دو head کا ملنا“، اور ”کم از کم دو tails کا ملنا“

(ii) ”کسی head کا نہیں ملنا“، صرف ایک ہیڈ کا ملنا“، اور ”کم سے کم دو ہیڈ کا ملنا“

(iii) ”زیادہ سے زیادہ دو tails کا ملنا“، اور ”صرف دو tails کا ملنا“

(iv) ”بالکل صحیح ایک head کا ملنا“، اور ”بالکل صحیح دو heads کا ملنا“

(v) ”بالکل صحیح ایک tail کا ملنا“، ”بالکل صحیح دو tails کا ملنا“، اور ”بالکل صحیح تین tails کا ملنا“

نوٹ مندرجہ بالا سوال کے دوسرے توقعات بھی جواب ہو سکتے ہیں۔

$$A = \{(2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\}$$

$$B = \{(1, 1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6)\}$$

$$C = \{(1, 1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (4,1)\}$$

$$A' = \{(1, 1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), (i)$$

$$(5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6)\} = B$$

$$B' = \{(2, 1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), (ii)$$

$$(6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\} = A$$

$$(iii) A \cup B = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (ii)$$

$$(3,5), (3,6), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6), (2,1), (2,2), (2,3),$$

$$(2,5), (2,6), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), (6,1), (6,2), (6,3),$$

$$(6,4), (6,5), (6,6) = S$$

$$A \cap B = \emptyset \quad (\text{iv})$$

$$A - C = \{(2,4), (2,5), (2,6), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\} \quad (\text{v})$$

$$B \cup C = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (3,5), (3,6), (4,1), (5,1), (5,2), (5,3), (5,4), (5,5), (5,6)\} \quad (\text{vi})$$

$$B \cap C = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (3,1), (3,2)\} \quad (\text{vii})$$

$$A \cap B' \cap C' = \{(2,4), (2,5), (2,6), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\} \quad (\text{viii})$$

7. (i) صحیح ہے (ii) صحیح ہے (iii) صحیح ہے (iv) غلط ہے (v) غلط ہے (vi) غلط ہے

مشق 16.3

1. (a) ہاں (b) ہاں (c) نہیں (d) نہیں (e) نہیں

$$2. \frac{3}{4} \quad 3. \frac{1}{2} \quad (\text{i}) \quad \frac{2}{3} \quad (\text{ii}) \quad \frac{1}{6} \quad (\text{iii}) \quad \frac{5}{6} \quad (\text{iv}) \quad \frac{1}{6} \quad (\text{v})$$

$$4. 52 \quad (\text{a}) \quad \frac{1}{52} \quad (\text{b}) \quad \frac{1}{13} \quad (\text{c}) \quad \frac{1}{2} \quad (\text{ii}) \quad \frac{1}{12} \quad (\text{i}) \quad \frac{1}{2} \quad (\text{iii})$$

$$6. \frac{3}{5} \quad 7. 4.00 \text{ روپے کا فائدہ، } 1.50 \text{ کا فائدہ، } 1.00 \text{ روپے کا نقصان، } 3.50 \text{ کا نقصان،}$$

$$6.00 \text{ روپے کا نقصان} - \frac{1}{16} = P(4.00 \text{ روپے جیتنا}) = \frac{1}{4}, P(1.50 \text{ روپے جیتنا}) = \frac{3}{8}, P(1.00 \text{ روپیہ ہارنا}) = \frac{7}{8},$$

$$P(3.50 \text{ روپے ہارنا}) = \frac{1}{4}, P(6.00 \text{ روپے ہارنا}) = \frac{1}{16}$$

$$8. \frac{1}{8} \quad (\text{i}) \quad \frac{3}{8} \quad (\text{ii}) \quad \frac{1}{2} \quad (\text{iii}) \quad \frac{7}{8} \quad (\text{iv}) \quad \frac{1}{8} \quad (\text{v}) \quad \frac{3}{8} \quad (\text{vi}) \quad \frac{1}{8} \quad (\text{vii}) \quad \frac{7}{8} \quad (\text{viii})$$

$$9. \frac{9}{11} \quad 10. \frac{6}{13} \quad (\text{i}) \quad \frac{7}{13} \quad (\text{ii}) \quad 11. \frac{1}{38760}$$

12. (i) نہیں، کیونکہ $P(A \cap B) P(A) P(B)$ کے برابر یا کم ہونا چاہیے۔ (ii) ہاں
13. (i) $\frac{7}{15}$ (ii) 0.5 (iii) 0.15 14. $\frac{4}{5}$ 15. (i) $\frac{5}{8}$ (ii) $P(A \cap B)$
16. نہیں 17. (i) 0.58 (ii) 0.74 18. 0.6 19. 0.55
20. 0.65 21. (i) $\frac{19}{30}$ (ii) $\frac{11}{30}$ (iii) $\frac{2}{15}$

باب 16 پر مشتمل متفرق مشق

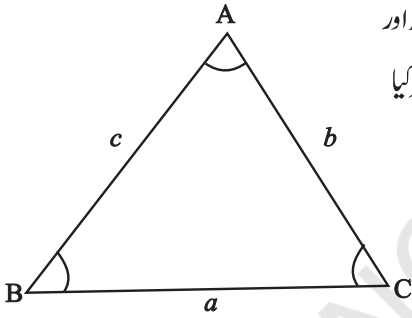
1. (i) $\frac{{}^{20}C_5}{{}^{60}C_5}$ (ii) $1 - \frac{{}^{30}C_5}{{}^{60}C_5}$ 2. $\frac{{}^{13}C_3 \cdot {}^{13}C_1}{{}^{52}C_4}$
3. (i) $\frac{1}{2}$ (ii) $\frac{1}{2}$ (iii) $\frac{5}{6}$ 4. (a) $\frac{999}{1000}$ (b) $\frac{{}^{9990}C_2}{{}^{10000}C_2}$ (c) $\frac{{}^{9990}C_{10}}{{}^{10000}C_{10}}$
5. (a) $\frac{17}{33}$ (b) $\frac{16}{33}$ 6. $\frac{2}{3}$
7. (i) 0.88 (ii) 0.12 (iii) 0.19 (iv) 0.34 8. $\frac{4}{5}$
9. (i) $\frac{2}{5}$ (ii) $\frac{3}{8}$ 10. $\frac{1}{5040}$

سپلی منٹری میٹرل (Supplementary Material)

باب 3

3.6 سائن اور کوسائن فارمولوں کے ثبوت اور ان کے بنیادی استعمال

فرض کیجیے کہ ABC ایک مثلث ہے۔ زاویہ A سے ہماری مراد اضلاع AB اور AC کے درمیان کے زاویہ سے ہے۔ جو 0° اور



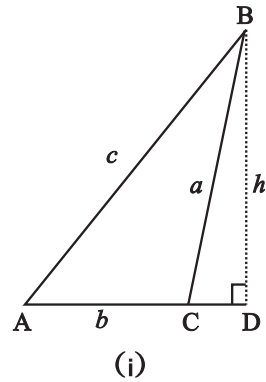
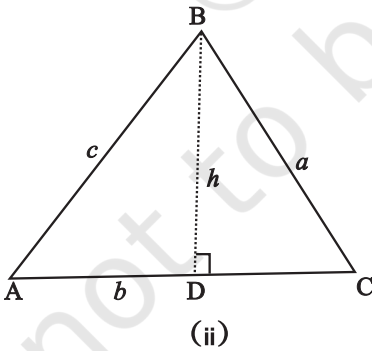
180° کے درمیان ہے۔ B اور زاویہ C کے لیے یکساں طور پر معرف میں۔ راس A, C اور

B کے مقابل اضلاع AB, AC, CA اور a, b, c کو بالترتیب سے ظاہر کیا جائے گا (شکل 3.15 ملاحظہ کیجیے)۔

مسئلہ 1 (سائن فارمولا) کسی بھی مثلث میں اضلاع مقابل زاویوں

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

ثبوت: فرض کیجیے کہ ABC مندرجہ ذیل شکل (i) اور (ii) میں دکھائے گئے مثلثوں میں سے کوئی ایک ہے۔



شکل 3.16

راس B سے ایک ارتفاع h کھینچا گیا ہے جو ضلع AC کو نقطہ D پر ملتا ہے۔ زاویہ مثلث ABD (شکل (i) 3.16) میں ہمارے پاس ہے۔

$$(1) \quad \sin A = \frac{h}{c}, \text{ i.e., } h = c \sin A$$

$$(2) \quad \sin (180^\circ - C) = \frac{h}{a} \Rightarrow h = a \sin C \text{ اور}$$

(1) اور (2) سے ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$(3) \quad c \sin A = a \sin C, \text{ i.e., } \frac{\sin A}{a} = \frac{\sin C}{c}$$

اسی طرح ہم ثابت کر سکتے ہیں

$$(4) \quad \frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b}$$

(3) اور (4) سے ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

شکل 3.16 میں مثلث ABC کے لیے مساوات (3) اور (4) اسی طرح۔

مسئلہ 2 (کوسائن فارمولا) فرض کیجیے B، A اور C ایک مثلث کے زاویے میں اور a، b اور c بالترتیب A، B اور C زاویوں کے

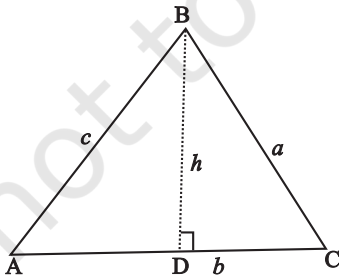
مقابل اضلاع کی لمبائیاں ہیں، تب

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

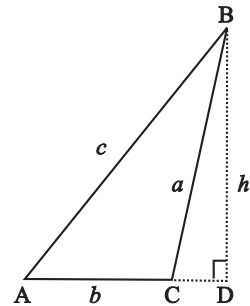
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

ثبوت: فرض کیجیے ABC ایک مثلث ہے جیسا کہ شکل (i) اور (ii) میں دکھایا گیا ہے



(ii)



(i)

شکل 3.17

شکل (ii) 3.17 کے حوالے سے ہمارے پاس ہے

$$\begin{aligned} BC^2 &= BD^2 + DC^2 = BD^2 + (AC - AD)^2 \\ &= BD^2 + AD^2 + AC^2 - 2AC \cdot AD \\ &= AB^2 + AC^2 - 2AC \cdot AB \cos A \end{aligned}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \quad \text{یا}$$

اسی طرح ہم مندرجہ ذیل کو حاصل کر سکتے ہیں

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C \quad \text{اور}$$

اسی مساوات کو شکل (i) 3.17 کے لیے حاصل کیا جاسکتا ہے جس میں C زاویہ منفرد ہے۔

کو سائن فارمولے کی آسان شکل جبکہ زاویوں کو معلوم کرنا مقصود ہو، مندرجہ ذیل ہے:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ac}$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

مثال 25: مثلث ABC میں ثابت کیجیے کہ

$$\tan \frac{B-C}{2} = \frac{b-c}{b+c} \cot \frac{A}{2}$$

$$\tan \frac{C-A}{2} = \frac{c-a}{c+a} \cot \frac{B}{2}$$

$$\tan \frac{A-B}{2} = \frac{a-b}{a+b} \cot \frac{C}{2}$$

ثبوت: کو سائن فارمولے کی رو سے

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = k(\text{say}).$$

$$\begin{aligned}
 \frac{b-c}{b+c} &= \frac{k(\sin B - \sin C)}{k(\sin B + \sin C)} \quad \text{لہذا،} \\
 &= \frac{2 \cos \frac{B+C}{2} \sin \frac{B-C}{2}}{2 \sin \frac{B+C}{2} \cos \frac{B-C}{2}} \\
 &= \cot \frac{(B+C)}{2} \tan \frac{(B-C)}{2} \\
 &= \cot \left(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2} \right) \tan \left(\frac{B-C}{2} \right) \\
 &= \frac{\tan \frac{B-C}{2}}{\cot \frac{A}{2}} \\
 \tan \frac{B-C}{2} &= \frac{b-c}{b+c} \cot \frac{A}{2} \quad \text{لہذا،}
 \end{aligned}$$

اسی طرح ہم دیگر نتائج کو ثابت کر سکتے ہیں۔ یہ نتائج نیپئر کی اینالوگی کہلاتے ہیں۔

مثال 26: مثلث ABC میں ثابت کیجیے کہ

$$a \sin (B - C) + b \sin (C - A) + c \sin (A - B) = 0$$

حل: مندرجہ ذیل پر غور کیجیے

$$(1) \quad a \sin (B - C) = a [\sin B \cos C - \cos B \sin C]$$

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} = k \text{ (say)} \quad \text{ب}$$

$$\sin A = ak, \sin B = bk, \sin C = ck \quad \text{لہذا،}$$

ان میں $\sin B$ اور $\sin C$ کی قدریں رکھنے اور کوسائن فارمولے کا استعمال کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\begin{aligned}
 a \sin(B-C) &= a \left[bk \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \right) - ck \left(\frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ac} \right) \right] \\
 &= \frac{k}{2} (a^2 + b^2 - c^2 - c^2 - a^2 + b^2) \\
 &= k(b^2 - c^2)
 \end{aligned}$$

اسی طرح $b \sin (C - A) = k (c^2 - a^2)$

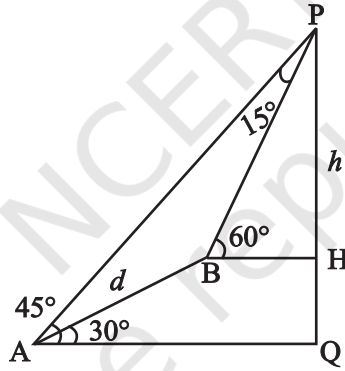
اور $c \sin (A - B) = k (a^2 - b^2)$

اس طرح $= k (b^2 - c^2 + c^2 - a^2 + a^2 - b^2)$

$$= 0 = \text{R.H.S.}$$

مثال 27: اونچائی والے ایک عمودی ٹاور PQ کی چوٹی کے نقطہ P کا زاویہ ارتقاع ایک نقطہ A سے 45° ہے اور نقطہ B سے زاویہ ارتقاع 60° ہے، جبکہ نقطہ A سے نقطہ B کا فاصلہ d ہے جس کی پیمائش خط AB کی سمت میں کی گئی ہے جو AQ کے ساتھ 30° کا زاویہ بناتا ہے۔ ثابت کیجیے کہ $d = h(\sqrt{3} - 1)$

ثبوت: شکل 3.18 میں ہمارے پاس ہے: $\angle PBH = 60^\circ$, $\angle BAQ = 30^\circ$, $\angle PAQ = 45^\circ$



شکل: 3.18

واضح طور پر $\angle APQ = 45^\circ$, $\angle BPH = 30^\circ$, giving $\angle APB = 15^\circ$

دوبارہ $\angle PAB = 15^\circ \Rightarrow \angle ABP = 150^\circ$

مثلث APQ سے ہمارے پاس ہے، $AP^2 = h^2 + h^2 = 2h^2$ (کیوں؟)

$$AP = \sqrt{2}h \quad \text{یا}$$

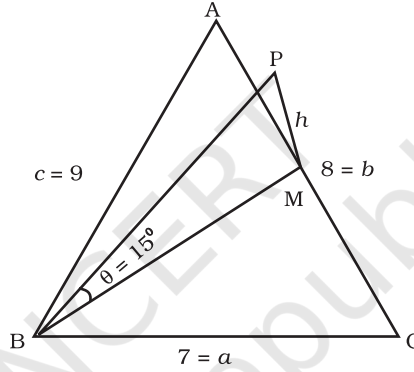
$\triangle BPD$ میں سائن فارمولے کا استعمال کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\frac{AB}{\sin 15^\circ} = \frac{AP}{\sin 150^\circ} \Rightarrow \frac{d}{\sin 15^\circ} = \frac{\sqrt{2}h}{\sin 150^\circ}$$

$$d = \frac{\sqrt{2}h \sin 15^\circ}{\sin 30^\circ} = h(\sqrt{3} - 1) \quad (\text{کیوں؟})$$

مثال: ایک لیمپ پوسٹ مثلث نما پلاٹ ABC کے ضلع AC کے وسطی نقطہ M پر واقع ہے۔ پلاٹ کے اضلاع CA=8m، BC=7m اور AB=9m ہے۔ لیمپ پوسٹ نقطہ B کے ساتھ 15° کا زاویہ بناتا ہے۔ لیمپ پوسٹ کی اونچائی معلوم کیجیے۔

حل: شکل 3.19 اور CA=8m، BC=7m، AB=9m



شکل: 3.19

M، ضلع AC کا وسطی نقطہ ہے جس پر h اونچائی کا لیمپ پوسٹ واقع ہے۔ یہ دیا ہوا ہے کہ لیمپ پوسٹ B پر ایک زاویہ q بناتا ہے جو 15° ہے۔ $\triangle ABC$ پر کوسائن فارمولا استعمال کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے:

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{49 + 64 - 81}{2 \times 7 \times 8} = \frac{2}{7} \quad (1)$$

اسی طرح $\triangle BMC$ پر کوسائن فارمولا استعمال کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$BM^2 = BC^2 + CM^2 - 2 BC \times CM \cos C.$$

یہاں $CM = \frac{1}{2} CA = 4$ کیوں کہ M ضلع AC کا وسطی نقطہ ہے۔

لہذا (1) کا استعمال کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$BM^2 = 49 + 16 - 2 \times 7 \times 4 \times \frac{2}{7}$$

$$BM = 49$$

$$BM = 7$$

یا

اس طرح M پر قائم زاوی مثلث BMP ہیں

$$\tan \theta = \frac{PM}{BM} = \frac{h}{7}$$

$$\frac{h}{7} = \tan(15^\circ) = 2 - \sqrt{3} \quad \text{یا}$$

$$h = 7(2 - \sqrt{3}) \text{ m.} \quad \text{یا}$$

مشق 3.5

کسی مثلث ABC میں، اگر $a=18$ ، $b=24$ ، $c=30$ ہے تو مندرجہ ذیل کو معلوم کیجیے

$$(0, \frac{3}{5}, \frac{4}{5} \text{ جواب}) \quad \cos A, \cos B, \cos C \quad -1$$

$$(1, \frac{4}{5}, \frac{3}{5} \text{ جواب}) \quad \sin A, \sin B, \sin C \quad -2$$

کسی مثلث ABC کے لیے ثابت کیجیے کہ

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\sin\frac{C}{2}} \quad -3$$

$$\frac{a-b}{c} = \frac{\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\cos\frac{C}{2}} \quad -4$$

$$\sin\frac{B-C}{2} = \frac{b-c}{a} \cos\frac{A}{2} \quad -5$$

$$a(b \cos C - c \cos B) = b^2 - c^2 \quad -6$$

$$a(\cos C - \cos B) = 2(b-c) \cos^2 \frac{A}{2} \quad -7$$

$$\frac{\sin(B-C)}{\sin(B+C)} = \frac{b^2 - c^2}{a^2} \quad -8$$

$$(b+c) \cos \frac{B+C}{2} = a \cos \frac{B-C}{2} \quad -9$$

$$a \cos A + b \cos B + c \cos C = 2a \sin B \sin C \quad -10$$

$$\frac{\cos A}{a} + \frac{\cos B}{b} + \frac{\cos C}{c} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2abc} \quad -11$$

$$(b^2 - c^2) \cot A + (c^2 - a^2) \cot B + (a^2 - b^2) \cot C = 0 \quad -12$$

$$\frac{b^2 - c^2}{a^2} \sin 2A + \frac{c^2 - a^2}{b^2} \sin 2B + \frac{a^2 - b^2}{c^2} \sin 2C = 0 \quad -13$$

14- ایک درخت کسی پہاڑ کی سطح پر عمودی حالت میں کھڑا ہے اور افقی سطح کے ساتھ 15 کا زاویہ بناتا ہے۔ درخت کے اساس سے پہاڑی پر زمین کی طرف نیچے $35\sqrt{2}m$ چلنے پر درخت کی چوٹی کا زاویہ ارتقاع 60° ہو جاتا ہے۔ درخت کی اونچائی معلوم کیجیے۔

15- دو جہاز کسی بندرگاہ سے ایک ہی وقت میں روانہ ہوتے ہیں۔ ایک جہاز 24 کلومیٹر فی گھنٹہ کی رفتار سے $N45^\circ E$ سمت میں اور دوسرا 32 کلومیٹر فی گھنٹہ کی رفتار سے $S75^\circ E$ سمت میں سفر کرتا ہے۔ 3 گھنٹے کے بعد دونوں جہازوں کے درمیان کا فاصلہ معلوم کیجیے۔

16- دو درخت A اور B کسی دریا کے ایک طرف 250 m اور 300 m ہے۔ اگر زاویہ c کی قدر 45° ہے تو دونوں درختوں کے درمیان کا فاصلہ معلوم کیجیے (استعمال $\sqrt{2} = 1.44$)۔ (جواب 5.215)

باب 5

5.72 پیچیدہ عدد کا جذر المربع

ہم نے درسی کتاب کے صفحہ 109-108 پر پیچیدہ اعداد پر مبنی دو درجی مساوات کو حل کرنے کا مطالعہ کیا ہے۔ یہاں ہم معیاری شکل میں ظاہر کیے گئے پیچیدہ عدد کا جذر المربع معلوم کرنے کے لیے خصوصی طریقے کی وضاحت کریں گے۔ ہم اس کی وضاحت ایک مثال کی مدد سے کریں گے۔

مثال 12i 24 - 7 کا جذر المربع معلوم کیجیے

$$x + iy = \sqrt{-7 - 24i} \quad \text{حل}$$

$$(x + iy)^2 = -7 - 24i \quad \text{تب}$$

$$x^2 - y^2 + 2xyi = -7 - 24i \quad \text{یا}$$

حقیقی اور مجازی حصوں کو مساوی کرنے پر

(1)

$$x^2 - y^2 = -7$$

$$2xy = -24$$

ہمیں معلوم ہے کہ

$$(x^2 + y^2)^2 = (x^2 - y^2)^2 + (2xy)^2$$

$$= 49 + 576$$

(2)

$$= 625$$

$$x^2 + y^2 = 25 \quad \text{اس طرح،}$$

$$(I) \text{ اور } (2) \text{ سے } x^2 = 9 \text{ اور } y^2 = 16$$

$$x = +3 \quad \text{یا}$$

چوں کہ حاصل ضرب xy منفی ہے، لہذا ہمارے پاس ہے

$$x = 3, y = -4 \text{ or } x = -3, y = 4$$

اس طرح $-7 - 24i$ کے جذور المربع $4i$ اور $-3 + 4i$ ہے

مشق 5.4

مندرجہ ذیل کا جذور المربع معلوم کیجیے

$$-15 - 8i \quad \text{(جواب } 1 - 4i, -1 + 4i \text{)}$$

$$-8 - 6i \quad \text{(جواب } 1 - 3i, -1 + 3i \text{)}$$

$$1 - i \quad \text{(جواب } \left(\pm \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} \mp \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}} i \right) \text{)}$$

$$-i \quad \text{(جواب } \left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}} \mp \frac{1}{\sqrt{2}} i \right) \text{)}$$

$$-5 \quad i \text{ (جواب) } \left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}} \pm \frac{1}{\sqrt{2}} i \right)$$

$$-6 \quad 1 + i \text{ (جواب) } \left(\pm \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} \pm \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}} i \right)$$

باب 9

9.7 لائنائی جیومیٹریائی تصاعد اور اس کا حاصل جمع

شکل والے GP کو لائنائی جیومیٹریائی تصاعد کہتے ہیں۔ لائنائی GP کا حاصل جمع معلوم کرنے کے مقصد سے فارمولا حاصل کرنے کے لیے ہم ایک مثال سے شروع کریں گے۔
آئیے ایک GP پر غور کرتے ہیں۔

$$1, \frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \dots$$

یہاں $a=1$ ، $r=\frac{2}{3}$ ہمارے پاس ہے۔

$$S_n = \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 - \frac{2}{3}} = 3 \left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n \right]$$

آئیے $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ کے طرز عمل کا مطالعہ کرتے ہیں جب کہ n مزید بڑا ہوتا ہے۔

n	1	5	10	20
$\left(\frac{2}{3}\right)^n$	0.6667	0.1316872428	0.01734152992	0.00030072866

ہم مشاہدہ کرتے ہیں کہ n جیسے جیسے بڑا ہوتا جاتا ہے $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ صفر کے قریب ہوتا جاتا ہے۔ ہم کہہ سکتے ہیں کہ جب n کافی

حد تک بڑھ جاتی ہے تو $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ کافی حد تک کم ہو جاتی ہے۔ بالفاظ دیگر جب $\left(\frac{2}{3}\right)^n \rightarrow 0$ ، $n \rightarrow \infty$ ہوتا ہے تو ہے۔ نتیجتاً

ہم دیکھتے ہیں کہ لامتناہی تعداد والے ارکان کا حاصل جمع $S_{\infty} = 3$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔
اب، جیومیٹریائی تصاعد $a, ar, ar^2, \dots$ کے لیے، اگر مشترک پست r کی قدر 1 سے کم ہے تو

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{(1-r)} = \frac{a}{1-r} - \frac{ar^n}{1-r}$$

اس معاملے میں چونکہ $\rightarrow \infty$ ہے لہذا $r^n \rightarrow 0$ کیوں کہ $|r| < 1$ ہے۔ اس طرح

$$S_n \rightarrow \frac{a}{1-r}$$

علاقی طور پر لامتناہی تعداد والے ارکان کے حاصل جمع کو S_{∞} یا S سے ظاہر کرتے ہیں۔

$$S = \frac{a}{1-r}$$

اس طرح، ہمارے پاس ہے

مثال کے طور پر

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2. \quad (i)$$

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} + \dots = \frac{1}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{2}{3} \quad (ii)$$

مشق 9.4

مندرجہ ذیل ہر ایک جیومیٹریائی تصاعد میں لامتناہی تک حاصل جمع معلوم کیجیے:

$$(7.5 \text{ جواب}) \quad 6, 1.2, .24, \dots \quad (1.5 \text{ جواب}) \quad 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \dots$$

$$\left(\frac{-3}{5} \text{ جواب}\right) \quad \frac{-3}{4}, \frac{3}{16}, \frac{-3}{64}, \dots \quad \left(\frac{35}{3} \text{ جواب}\right) \quad 5, \frac{20}{7}, \frac{80}{49}, \dots$$

$$-5 \quad \text{ثابت کیجیے کہ } 3^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{4}} \times 3^{\frac{1}{8}} \dots = 3$$

$$-6 \quad \text{جہاں } |a| < 1 \text{ اور } |b| < 1 \text{ ثابت کیجیے کہ } x = 1 + a + a^2 + \dots \text{ اور } y = 1 + b + b^2 + \dots$$

$$1 + ab + a^2b^2 + \dots = \frac{xy}{x+y-1}$$

باب 10

10.6 دو خط کے نقطہ تقاطع سے ہو کر گزرنے والے خطوط کے خاندان کی مساوات

فرض کیجیے کہ دو متقاطع خطوط l_1 اور l_2 مندرجہ ذیل ہیں:

$$(1) \quad A_1x + B_1y + C_1 = 0$$

$$(2) \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0 \quad \text{اور}$$

مساوات (1) اور (2) سے ہم مندرجہ ذیل مساوات کو حاصل کر سکتے ہیں۔

$$(3) \quad A_1x + B_1y + C_1 + k(A_2x + B_2y + C_2)$$

جہاں K ایک اختیاری مستقلہ ہے جسے پیرامیٹر کہتے ہیں۔ K کی کسی بھی قدر کے لیے مساوات (3) x اور y میں پہلے درجے کی ہے۔ لہذا یہ خطوط کی فیملی کی نمائندگی کرتی ہے۔ اس فیملی کے کسی مخصوص رکن کو K کی کسی قدر کے لیے معلوم کیا جاسکتا ہے۔ K کی قدر کو دیگر شرائط سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔

مثال 20

حل

$$(1) \quad \begin{aligned} x - 7y + 5 + k(3x + y - 7) &= 0 \\ \text{i.e., } (1 + 3k)x + (k - 7)y + 5 - 7k &= 0 \end{aligned}$$

اگر یہ خط y -محور کے متوازی ہے تو y کا ضریب صفر ہوگا یعنی $k - 7 = 0$ جو $k = 7$

k کی قدر مساوات (1) میں رکھنے پر $0 = x - 2$ ، i.e., $x = 2$ ، جو کہ مساوات ہے۔

مشق 10.4

1- خطوط $3x + 4y = 7$ اور $x - y + 2 = 0$ کے تقاطع سے ہو کر گزرنے والے اس خط کی مساوات معلوم کیجیے جس کا

سلاپ 5 ہے۔ (جواب $35x - 7y + 18 = 0$)

2- خطوط $x + 2y - 3 = 0$ اور $4x - y + 7 = 0$ کے تقاطع سے ہو کر گزرنے والے اس خط کی مساوات معلوم کیجیے

جو $5x + 4y - 20 = 0$ کے متوازی ہے۔ (جواب $15x + 12y - 7 = 0$)

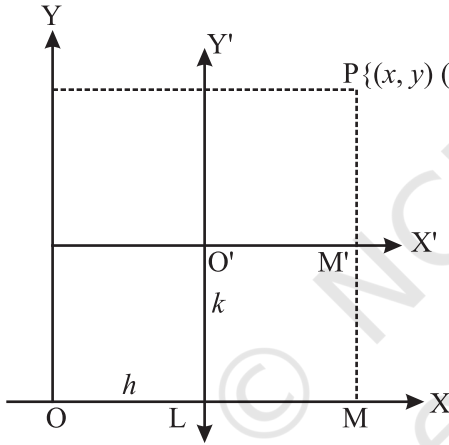
3۔ اس خط کی مساوات معلوم کیجیے جو خطوط $2x + 3y - 4 = 0$ اور $x - 5y = 7$ سے ہو کر گزرتا ہے اور اس کا x -قاطع

4۔ کے مساوی ہے۔ (جواب $10x + 93y + 40 = 0$)

4۔ اس خط کی مساوات معلوم کیجیے جو خطوط $5x - 3y = 1$ اور $2x + 3y - 23 = 0$ کے نقطہ تقاطع سے ہو کر گزرتا ہے

اور خط $5x - 3y - 1 = 0$ پر عمود ہے۔ (جواب $63x + 105y - 781 = 0$)

10.7 مبدا کی منتقلی



(شکل 10:21)

مختص محوروں کے نظام کے حوالے سے نقاط کے کسی سیٹ کے نظری مساوات کا حل کسی دوسرے مناسب مختص میں نقطوں کا سیٹ لے کر معلوم کیا جاسکتا ہے بشرطیکہ سبھی جیومیٹریائی خصوصیات بھی رہیں۔ اس قسم کی ایک تبدیلی جس میں نئے محور اصل محوروں کے متوازی بنائے جاتے ہیں اور مبدا کو ایک نئے نقطے پر منتقل کر دیا جاتا ہے۔ اس قسم کی تبدیلی کو محوروں کی منتقلی کہتے ہیں۔ محوروں کی منتقلی کے تحت مستوی کے ہر ایک نقطہ کے مختصات تبدیل ہو جاتے ہیں۔ نقطوں کے پرانے اور نئے مختصات کے درمیان رشتے کی معلومات کی بنیاد پر مختص محوروں کے نئے نظام کے ضمن میں تجزیاتی مسئلہ کا مطالعہ کر سکتے ہیں۔

یہ دیکھنے کے لیے کہ محوروں کی منتقلی کے نتیجے میں مستوی کے نقطہ کے مختصات کس طرح تبدیل ہوتے ہیں، آئیے

محور OY اور OX کے حوالے سے ایک نقطہ $P(x, y)$ لیتے ہیں۔

فرض کیجیے کہ $O'X'$ اور $O'Y'$ نئے محور ہیں جو بالترتیب OX اور OY کے متوازی ہیں، جہاں O' نیا مبدا ہے۔ مان لیجیے

(η, κ) پرانے محوروں کے حوالے سے O' کے مختصات ہیں یعنی $OL = h$ اور $LO' = k$ ۔ مزید یہ کہ $OM = x$ اور $MP = y$ ہے

فرض $M'P = y'$ اور $O'M' = x'$ نئے محوروں $O'X'$ اور $O'Y'$ کے حوالے سے نقطہ P کے بالترتیب عرضی مختص اور طولی مختص ہیں۔ شکل 10:21 سے یہ آسانی سمجھا سکتا ہے کہ

$$OM = OL + LM, \text{ i.e., } x = h + x'$$

$$MP = MM' + M'P, \text{ i.e., } y = k + y' \quad \text{اور}$$

$$x = x' + h, y = y' + k \quad \text{لہذا،}$$

یہ فارمولے، پرانے اور نئے مختصات کے درمیان رشتے کو بتاتے ہیں۔

مثال 21: نقطہ $(-4, 3)$ کے نئے مختصات معلوم کیجیے اگر ٹرانسلیشن (تبدیلی) کے ذریعے اس کے مبدا کو $(2, 1)$ پر منتقل کر دیا جاتا ہے۔

حل: نئے مبدا کے مختصات $h = 1, k = 2$ ہیں اور اصل مختصات $x = 3, y = -4$ ہیں۔

پرانے مختصات (x, y) اور نئے مختصات (x', y') کے درمیان منتقلی (ٹرانسفارمیشن) رشتہ مندرجہ ذیل کے ذریعے بیان کیا جاتا ہے۔

$$x' = x - h \quad \text{i.e.,} \quad x = x' + h$$

$$y' = y - k \quad \text{i.e.,} \quad y = y' + k \quad \text{اور}$$

قدروں کو رکھنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$y' = -4 - 2 = -6 \text{ اور } x' = 3 - 1 = 2$$

اس طرح، نئے نظام میں نقطہ $(-4, 3)$ کے مختصات $(2, -6)$ ہیں۔

مثال 22: مستقیم خط $2x - 3y + 5 = 0$ کی تبدیل شدہ مساوات لکھیے، اگر محوروں کی تبدیلی کے بعد مبدا، نقطہ $(-1, 3)$ پر منتقل ہو جاتا ہے۔

حل: فرض کیجیے کہ نقطہ P کے مختصات (x, y) سے تبدیل ہو کر نئے مختص محوروں میں (x', y') ہو جاتے ہیں، جس کے مبدا

کے مختصات $h = 3, k = -1$ ہیں لہذا، ٹرانسفارمیشن فارمولے کو ہم $x = x' + 3$ اور $y = y' - 1$ کی شکل میں لکھ سکتے ہیں ان

قدروں کو مستقیم خط کی دی ہوئی مساوات میں رکھنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے:

$$2(x' + 3) - 3(y' - 1) + 5 = 0$$

$$2x' - 3y' + 14 = 0 \quad \text{یا}$$

لہذا، نئے نظام میں مستقیم خط کی مساوات $2x - 3y + 14 = 0$ ہے۔

مشق 10.5

1- مندرجہ ذیل ہر ایک معاملے میں نقطوں کے مختصات معلوم کیجیے اگر نقطہ کو محوروں کی تبدیلی کے ذریعے $(-3, -2)$ پر منتقل کر دیا جاتا ہے۔

$$(1, 1) \text{ (i)} \quad (4, 3) \text{ (جواب)} \quad (0, 1) \text{ (ii)} \quad (3, 3) \text{ (جواب)}$$

$$(5, 0) \text{ (iii)} \quad (8, 2) \text{ (جواب)} \quad (-1, -2) \text{ (iv)} \quad (2, 0) \text{ (جواب)}$$

$$(3, -5) \text{ (v)} \quad (6, -3) \text{ (جواب)}$$

2- مندرجہ ذیل ہر ایک میں اگر مبدأ کو $(1, 1)$ پر منتقل کر دیا جائے تو مساوات کی شکل کیا ہوگی؟

$$x^2 + xy - 3y^2 - y + 2 = 0 \quad \text{(i)} \quad (x^2 - 3y^2 + xy + 3x - 6y + 1 = 0 \text{ (جواب)})$$

$$xy - y^2 - x + y = 0 \quad \text{(ii)} \quad (xy - y^2 = 0 \text{ (جواب)})$$

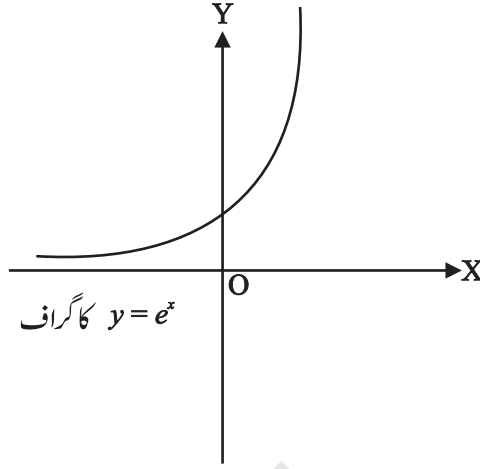
$$xy - x - y + 1 = 0 \quad \text{(iii)} \quad (xy = 0 \text{ (جواب)})$$

باب 13

13.5 قوت نما اور لوگارتھی تفاعل پر مشتمل لمٹ

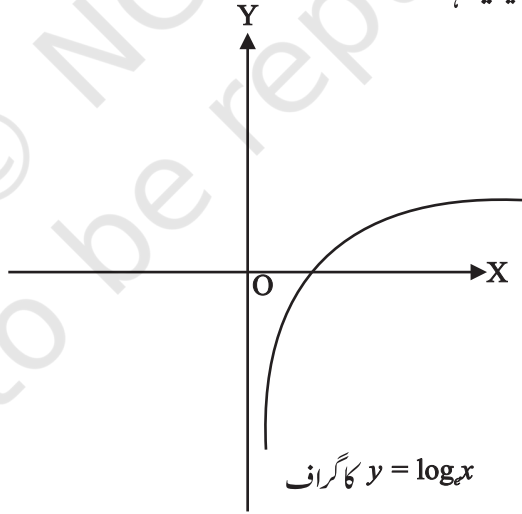
قوت نما اور لوگارتھی تفاعل پر مشتمل کی لمٹ کے اندازہ قدر پر بحث کرنے سے پہلے ہم ان دونوں تفاعلات کو ان کے ڈومین، رینج اور ان کے گراف کی تشکیل کو بیان کرتے ہوئے تعارف کرائیں۔

لیونارڈ یولر (1707-1783)، ایک عظیم سائنس ریاضی داں ہیں۔ انھوں نے عدد e کو متعارف کرایا جس کی قدر 2 اور 3 کے درمیان ہوتی ہے۔ یہ عدد قوت نمائی تفاعل کی وضاحت کے لیے کارآمد ہے۔ $f(x) = e^x$ ، $x \in \mathbb{R}$ سیٹ ہے اور اس کی رینج $\mathbb{R}$ ہے لوگارتھی تفاعل $y = e^x$ کے گراف کو شکل 13.11 میں دکھایا گیا ہے۔



(شکل 13:11)

اس طرح $\log_e R \rightarrow R$ سے ظاہر کیے گئے لوگارتھی تفاعل کو $y = \log_e x$ کے طور پر لکھا جاتا ہے اگر اور صرف اگر $e_y = x$ ہے۔ اس کا ڈومین R^+ ہوتا ہے جو سبھی قدرت حقیقی اعداد کا سیٹ ہے اور اس کی رینج R ہے لوگارتھی تفاعل $y = \log_e x$ کے گراف کو شکل 13.12 میں دکھایا گیا ہے۔



(شکل 13:12)

نتیجہ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ کو ثابت کرنے کے لیے ہم عبارت $\frac{e^x - 1}{x}$ پر مشتمل با مساوات کا استعمال کرتے ہیں جو اس طرح ہے:

$$\frac{1}{1+|x|} \leq \frac{e^x - 1}{x} \leq 1 + (e - 2)|x| \quad [-1, 1] \sim \{0\}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \text{ ثابت کیجیے کہ}$$

ثبوت: مذکورہ بالا مساوات کا استعمال کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\frac{1}{1+|x|} \leq \frac{e^x - 1}{x} \leq 1 + |x|(e - 2), x \in [-1, 1] \sim \{0\}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1+|x|} = \frac{1}{1+\lim_{x \rightarrow 0}|x|} = \frac{1}{1+0} = 1 \text{ مزید}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} [1 + (e - 2)|x|] = 1 + (e - 2)\lim_{x \rightarrow 0}|x| = 1 + (e - 2)0 = 1 \text{ اور}$$

لہذا سینڈویچ مسئلہ کے ذریعے ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_e(1+x)}{x} = 1 \text{ ثابت کیجیے کہ}$$

$$\text{غرض کیجیے کہ } \frac{\log_e(1+x)}{x} = y \text{ تب}$$

$$\log_e(1+x) = xy$$

$$\Rightarrow 1+x = e^{xy}$$

$$\Rightarrow \frac{e^{xy} - 1}{x} = 1$$

$$\frac{e^{xy} - 1}{xy} \cdot y = 1 \text{ یا}$$

$$\Rightarrow \lim_{xy \rightarrow 0} \frac{e^{xy} - 1}{xy} \lim_{x \rightarrow 0} y = 1 \text{ (since } x \rightarrow 0 \text{ gives } xy \rightarrow 0)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} y = 1 \left(\text{as } \lim_{xy \rightarrow 0} \frac{e^{xy} - 1}{xy} = 1 \right)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_e (1+x)}{x} = 1$$

مثال 5 تحسب کیجیے $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{x}$

حل ہمارے پاس ہے

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{x} = \lim_{3x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 1}{3x} \cdot 3$$

$$= 3 \left(\lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y} \right), \text{ where } y = 3x$$

$$= 3 \cdot 1 = 3$$

مثال 6 تحسب کیجیے $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \sin x - 1}{x}$

حل ہمارے پاس ہے $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \sin x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{e^x - 1}{x} - \frac{\sin x}{x} \right]$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 - 1 = 0$$

مثال 7 قدر معلوم کیجیے:

$x = 1 + h$ رکھیے تب چونکہ $h \rightarrow 0 \Rightarrow x \rightarrow 1$ ہے۔ لہذا،

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log_e x}{x-1} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log_e (1+h)}{h} = 1 \left(\text{since } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_e (1+x)}{x} = 1 \right)$$

مشق 13.2

مندرجہ ذیل لمٹ کی قدر معلوم کیجیے:

(جواب 2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{2+x} - e^2}{e^{\sin x} - 1}$

(جواب 4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x} - 1}{e^x - e^5}$

(جواب 1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - 1}{x(e^x - 1)}$

(جواب 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^5}{e^x - e^3}$

(جواب 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(e^x - 1)}{\log(1+x^3)}$

(جواب 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^3}{\log_e (1+2x)}$

(جواب 1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x^3)}{\sin^3 x}$

(جواب 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_e (1+2x)}{x}$

نوٹس

© NCERT
not to be republished

نوٹس

© NCERT
not to be republished



طلبا کے ایک طالب علم بنئے (Be a student of student)

ایک استاد جنہیں وہ تعلیم دیتا ہے ان سے ایک تعلق رکھتا ہے، ان کے ساتھ گھل مل جاتا ہے اور وہ ان سے پڑھانے سے زیادہ سیکھتا ہے۔ جو اپنے شاگردوں سے کچھ نہیں سیکھتا وہ بے وقوف ہے۔ میں جب بھی کسی سے بات کرتا ہوں میں اس سے سیکھتا ہوں۔ میں اسے دینے سے زیادہ لیتا ہوں۔ اس طرح ایک اچھا استاد اپنے آپ کو طلباء کا طالب علم سمجھتا ہے۔ اگر آپ اپنے شاگردوں کو اس نظریہ سے پڑھاؤ گے، آپ کو ان سے بہت زیادہ فائدہ ہوگا۔

کھادی ودیا لیے کے طلباء سے کی گئی بات، سیوا گرام

ہریجن سیوا، 15 فروری 1942 (CW 75, p. 269)

اپنے تمام ذریعوں (تعلقات) کو اچھائی اور ایک نیا پن لانے میں استعمال کیجیے

Use all Resources to be constructive and creative

ہمیں ان ماہر تعلیم صاحبان کی ضرورت ہے جو اصلیت (حقیقت) پسند ہوں، سچائی سے بھرے ہوئے ہوں، جو روز بروز یہ سوچیں کہ طلباء کو کیا پڑھانا ہے۔ استاد کو یہ علم (واقفیت) کتابوں سے نہیں مل سکتا ہے۔ اسے روز بروز ہونے والی تبدیلیوں کا بخوبی مشاہدہ کرنا، ان پر نظر ثانی کرنا اور اپنے اندر چھپی ہوئی صلاحیتوں کا استعمال کر کے بچوں کو یہ جانکاری دینی ہوگی دستکاری کی مدد سے۔ اس کا مطلب ہے پڑھانے کے انداز میں ایک انقلاب اور ساتھ ساتھ استاد کے انداز میں ایک انقلاب۔ اب تک آپ لوگ انسپکٹر کی رپورٹ پر ہی کام کرتے رہے۔ آپ وہی کرنا چاہتے تھے جو انسپکٹر چاہتا تھا تا کہ آپ اپنے ادارے کے لئے زیادہ سے زیادہ رقم اکٹھا کر سکیں یا اپنے لیے زیادہ تنخواہیں۔ لیکن ایک جدید استاد ان سب باتوں کی پروا نہیں کرتا۔ وہ یہ کہے گا میں نے اپنے شاگردوں کے لئے اپنا فرض ادا کر دیا ہے اگر میں نے اسے ایک اچھا انسان بنادیا اور یہ سب کچھ کرنے میں میں نے اپنے تمام ذریعوں کا بخوبی استعمال کیا ہے۔ میرے لئے یہ کافی ہے۔

ہریجن، 18 فروری 1939 (CW 68, pp. 374-75)