प्रतिशत
(Percentage)

'प्रतिशत' शब्द का मतलब है 'प्रति सैकड़ा'। इसे निम्नलिखित रूप में परिभाषित किया जा सकता है:

"जिस भिन्न का हर 100 हो, उसे प्रतिशत (percentage)कहते हैं और उस भिन्न का अंश प्रतिशत दर (rate per cent) कहा जाता है।"

निम्नलिखित उदाहरणों के सहारे प्रतिशत एवं उनके भिन्नात्मक मानों को समझा जा सकता है:

1. किसी विद्यार्थी को अंकगणित में 60 प्रतिशत अंक प्राप्त होने का मतलब है कि पूर्णांक 100 में से उसे 60 अंक प्राप्त होते हैं। अर्थात् यदि पूर्णांक 500 है तो उसे गणित में कुल 60 + 60 + 60 + 60 + 60 = 300 अंक प्राप्त हुए। उपर्युक्त पाँच '60' 'प्रत्येक 100 के लिए एक' को इंगित करता है।

   उस विद्यार्थी द्वारा प्राप्त कुल अंकों की गणना दूसरे ढंग से भी की जा सकती है:

   $$500 \text{ का } 60\% = \frac{60}{100} \times 500 = 300$$

   उपर्युक्त गणना को और भी आसान बनाया जा सकता है यदि भिन्नात्मक मान को उसके रूढ़ रूप में व्यक्त कर दें। प्रस्तुत उदाहरण में,

   $$60\% = \frac{60}{100} = \frac{3}{5}$$

   यदि हमलोग स्मरण रखें कि $60\% = \frac{3}{5}$ तो हमारी गणना आसान हो जाती है। ऐसी स्थिति में विद्यार्थी द्वारा प्राप्त कुल अंक $= \frac{3}{5} \times 500 = 300$

2. एक व्यक्ति अपनी आय का 5% शेयर में निवेश करता है। इसका मतलब है कि,
   i) वह अपनी आमदनी के प्रत्येक 100 रु. में से 5 रु. शेयर में निवेश करता है, या

   ii) वह अपनी आमदनी का $\frac{5}{100}$ शेयर में निवेश करता है, या

   iii) वह अपनी आमदनी का $\frac{1}{20}$ शेयर में निवेश करता है।

   अब, यदि उसकी आय 1050 रु. हो तो वह शेयर में कितना निवेश करता है?

   आप तुरंत उत्तर दे सकते हैं, $\frac{1050}{20} = 52.5$ रु.

हमारा सुझाव है कि हर के रूप में 100 लेकर आप कभी आगे न बढ़ें।

3. एक व्यापारी 15 प्रतिशत लाभ कमाता है। इससे तात्पर्य यह है कि यदि वह 100 रु. निवेश करता है तो उसे 15 रु. की आमदनी होती है। पर उसे कितना मुनाफा हुआ होता यदि उसने 900 रु. की पूँजी लगाई होती। यहाँ गणना के लिए उपर्युक्त में से कौन-सा तरीका बेहतर रहेगा? क्या आपको ऐसा नहीं लगता कि यहाँ उस भिन्न के प्रयोग से सुविधा होगी जिसके हर में 100 मौजूद हो! (क्यों ?) क्योंकि 100 एवं 900 के दोनों शून्य एक दूसरे को पूर्णतया विभाज्य बना देते हैं और हमें शीघ्रता से नतीजा प्राप्त हो जाता है:

$$\frac{15}{100}\times 900 = 15\times 9 = 135$$

(हमें उम्मीद है कि ऐसे प्रश्नों को हल करने के लिए आपको कुछ लिखना नहीं पड़ेगा।)

4. एक व्यक्ति को अपने वेतन का $33\frac{1}{3}\%$ आय-कर के रूप में देना पड़ता है। यदि उसका वेतन 3516 रु. हो तो उसे कितना आय-कर चुकाना पड़ेगा? इस प्रश्न में आप भिन्न के रूढ़ मान को लेकर आगे बढ़ें:

$$\text{आय-कर} = \frac{3516}{3} = 1172 \text{ रु.}$$

5. एक व्यक्ति अपने वेतन का 12.5% व्यवसाय में निवेश करता है। यदि उसकी वार्षिक आमदनी 50128 रु. हो, तो वह प्रतिवर्ष कितने रुपए व्यवसाय में लगाता है?

$$12\frac{1}{2}\% = \frac{1}{8}$$

$$\therefore \text{ अभीष्ट रुपए } = \frac{1}{8}\times 50128 = 6266 \text{ रु.}$$

अभी तक आपने देखा कि गणना के दौरान प्रतिशत मान का रूढ़ भिन्न (prime fraction) विशेष रूप से प्रयुक्त होता है। इसलिए कुछ महत्वपूर्ण रूढ़ भिन्नों को (जिनका बहुत अधिक इस्तेमाल होता है) याद रखें:

$$3\frac{1}{8}\% = \frac{1}{32} \qquad 6\frac{1}{4}\% = \frac{1}{16}$$

$$5\% = \frac{1}{20} \qquad 8\% = \frac{2}{25}$$

$$8\frac{1}{3}\% = \frac{1}{12} \qquad 10\% = \frac{1}{10}$$

$$12\% = \frac{3}{25} \qquad 12\frac{1}{2}\% = \frac{1}{8}$$

$13\frac{1}{3}\% = \frac{2}{15}$ $14\frac{2}{7}\% = \frac{1}{7}$

$15\% = \frac{3}{20}$ $16\% = \frac{4}{25}$

$16\frac{2}{3}\% = \frac{1}{6}$ $20\% = \frac{1}{5}$

$25\% = \frac{1}{4}$ $33\frac{1}{3}\% = \frac{1}{3}$

$37\frac{1}{2}\% = \frac{3}{8}$ $40\% = \frac{2}{5}$

$60\% = \frac{3}{5}$ $62\frac{1}{2}\% = \frac{5}{8}$

$66\frac{2}{3}\% = \frac{2}{3}$ $75\% = \frac{3}{4}$

$87\frac{1}{2}\% = \frac{7}{8}$

उदा. 1: 625 रु. का 8 प्रतिशत ज्ञात करें।

हल: 625 रु. का $8\% = \frac{2}{25} \times 625 = 50$ रु.

उदा. 2: $12\frac{1}{2}$ प्रतिशत को भिन्न में बदलें।

हल: $12\frac{1}{2}\% = \frac{12\frac{1}{2}}{100} = \frac{25}{200} = \frac{1}{8}$

उदा. 3: $\frac{3}{8}$ कितना प्रतिशत के समतुल्य है?

हल: $\frac{3}{8} \times 100 = \frac{75}{2} = 37\frac{1}{2}\%$

उदा. 4: $\frac{7}{11}$ कितना प्रतिशत के समतुल्य है? या, $\frac{7}{11}$ को प्रतिशत के रूप में अभिव्यक्त करें।

हल: $\frac{7}{11} \times 100 = \frac{700}{11} = 63\frac{7}{11}\%$

उदा. 5: यदि किसी शहर की जनसंख्या 60000 से बढ़कर 65000 हो गई तो जनसंख्या में कुल कितने प्रतिशत की वृद्धि हुई?

हल: जनसंख्या में वृद्धि $= 65000 - 60000 = 5000$

$$\therefore \text{ वृद्धि (प्रतिशत में)} = \frac{5000}{60000} \times 100 = \frac{25}{3} = 8\frac{1}{3}\%$$

उदा. 6: राम का वेतन 630 से बढ़ाकर 700 कर दिया जाता है। बताइए कि वेतन में कितने प्रतिशत की वृद्धि हुई?

हल: वेतन में वृद्धि $= (700 - 630)$ रु. $= 70$ रु.

$$\therefore \text{ वृद्धि (प्रतिशत में)} = \frac{70}{630} \times 100 = 11\frac{1}{9}\%$$

उदा. 7: दो उम्मीदवारों के एक चुनाव में, एक उम्मीदवार को 41% मत मिलता है तथा वह दूसरे उम्मीदवार से 2412 मतों से चुनाव हार जाता है। बताइए कुल मतों की संख्या क्या है?

हल : $(59\% - 41\%=)18\% \equiv 2412$

$$\therefore \quad 100\% \equiv \frac{2412}{18} \times 100 = 13400$$

उदा. 8: यदि 8 लिटर चीनी के घोल को जिसमें 5% चीनी है खौलाने पर 2 लिटर पानी वाष्पीकृत होकर उड़ जाता है तो बचे हुए घोल में चीनी का प्रतिशत ज्ञात करें।

हल : चूँकि चीनी घोल से वाष्पीकृत नहीं हो सकता है इसलिए चीनी की मात्रा 8 लिटर मूल घोल में = चीनी की मात्रा बचे हुए घोल यानि $(8 - 2 =) 6$ लिटर में

$\therefore$ 8 का 5% = 6 का x%

$$\therefore \quad x = \frac{5 \times 8}{6} = 6\frac{2}{3}\%$$

***द्वितीय विधि* (Second Method):**

चीनी का प्रतिशत (मूल घोल में) = 8 लिटर का 5%

= 0.4 लिटर

2 लिटर पानी वाष्पीकृत होने पर, शेष घोल की मात्रा = $(8 - 2 =) 6$ लिटर

$$\therefore \quad \text{चीनी का अभीष्ट प्रतिशत} = \frac{0.4}{6} \times 100$$

$$= 6\frac{2}{3}\%$$

उदा. 9: एक द्रव में 25% दूध है तथा दूसरे द्रव में 30% दूध है। एक केन को पहले द्रव का 6 भाग तथा दूसरे द्रव का 4 भाग से भरा जाता है। दूध का प्रतिशत नए मिश्रण में क्या है?

हल: नये मिश्रण में दूध का अभीष्ट प्रतिशत

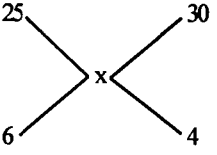
$$= \frac{\text{नए मिश्रण में दुध की मात्रा}}{\text{नए मिश्रण की मात्रा}} \times 100$$

$$= \frac{25\%\text{ दुध का 6 भाग} \times 30\%\text{ दुध का 4 भाग}}{\text{द्रव का (6 भाग} + 4\text{ भाग)}} \times 100$$

$$= \frac{6 \times \frac{25}{100} + 4 \times \frac{30}{100}}{10} \times 100$$

$$= (15 + 12) = 27$$

नोट : मिश्रण* (Alligation) *विधि से भी इस प्रश्न को हल किया जा सकता है।



$$\frac{30-x}{x-25} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

या, $60 - 2x = 3x - 75$

या, $5x = 60 + 75$

$\therefore \quad x = 27\%$

उदा. 10: किसी कारखाने में श्रमिकों की कमी की वजह से उसके उत्पादन में 25% की कमी आती है। कार्य-अवधि को कितना प्रतिशत बढ़ाया जाए ताकि उत्पादन पूर्ववत बनी रहे?

हल : उत्पादन में कमी की वजह है केवल श्रमिकों में कमी।

श्रमिको में कमी = 25%

अब, मान लिया कि कार्य अवधि को x% बढ़ा दिया जाता है। ताकि उत्पादन पूर्ववत बनी रहे।

उत्पादन = श्रमिक × कार्य अवधि = M × W (मान लिया)

अब, M × W = (M – M का 25%) × (W + W का x%)

या, $M \times W = \frac{75}{100} M \times \frac{100+x}{100} W$

या, $100 \times 100 = 75(100 + x)$

या, $\frac{400}{3} = 100 + x \quad \therefore \quad x = \frac{100}{3} = 33\frac{1}{3}\%$

***विधि* II :** गणना को आसान बनाने के लिए, मान लिया कि

श्रमिक = 100 इकाई एवं

कार्य-अवधि = 100 इकाई

पुनः मान लिया कि कार्य-अवधि को x% बढ़ा दिया जाता है।

तो, $(100-25)(100+x) = 100 \times 100$

या, $100+x = \frac{400}{3} \quad \therefore \quad x = \frac{100}{3} = 33\frac{1}{3}\%$

***सूत्र विधि* (Direct Formula) :**

कार्य-अवधि में अभीष्ट प्रतिशत वृद्धि $= \frac{25}{100-25} \times 100 = \frac{100}{3} = 33\frac{1}{3}\%$

एक राशि दूसरे का कितना प्रतिशत है यह ज्ञात करना

उदा. 11: 1.25 रु. 10 रु. का कितना प्रतिशत है? इसे भिन्न के रूप में व्यक्त करें।

हल: भिन्न $= \frac{1.25 \text{ रु.}}{10 \text{ रु.}} = \frac{125}{1000} = \frac{1}{8}$

अब, $\frac{1}{8} = \frac{\frac{1}{8} \times 100}{100} = \frac{12\frac{1}{2}}{100} = 12\frac{1}{2}\%$

नोट: उपर्युक्त प्रश्न को प्रायः इस प्रकार लिखा जाता है: "1.25 रु. 10 रु. का कितना प्रतिशत है?"

उदा. 12: 6 पैसे 1 रु. का कितना प्रतिशत है?

हल: अभीष्ट भिन्न $= \frac{6 \text{ पै.}}{1 \text{ रु.}} = \frac{6}{100} = \frac{3}{50} = \frac{\frac{3}{50} \times 100}{100} = 6\%$

उदा. 13: किसी सुनिश्चित रकम का 12%, 43.5 रु. है तो रकम बताइए।

हल: रकम का $\frac{12}{100} = 43\frac{1}{2}$ रु.

$\therefore$ रकम $= \frac{87}{2} \times \frac{100}{12} = 362.50$ रु.

प्रमेय: यदि दो राशियाँ तीसरी राशि से क्रमशः x% एवं y% बड़ी हों तो पहली राशि, दूसरी राशि की $\frac{100+x}{100+y} \times 100\%$ होती है।

प्रमाण: मान लिया कि तीसरी राशि = 100 है।

तो, पहली राशि = 100 + 100 का x% = 100 + x

एवं, दूसरी राशि = 100 + 100 का y% = 100 + y

$\therefore$ पहली राशि दूसरे की $\frac{100+x}{100+y} \times 100\%$ है।

उदा. 14: दो संख्याएँ तीसरी संख्या से क्रमशः 20% एवं 50% बड़ी है। तो पहला दूसरे का कितना प्रतिशत है?

हल: उपर्युक्त प्रमेय के आधार पर अभीष्ट मान $= \frac{120}{150} \times 100 = 80\%$

प्रमेय: यदि A, C का x% हो तथा B, C का y% हो तो A, B का $\frac{x}{y} \times 100\%$ होता है।

प्रमाण: स्वयं प्रयास करें।

उदा. 15: दो संख्याएँ तीसरी संख्या का क्रमशः x% एवं y% है तो पहली संख्या, दूसरी संख्या का कितना प्रतिशत है?

हल: उपर्युक्त प्रमेय के अनुसार, अभीष्ट मान $= \frac{20}{25} \times 100 = 80\%$

नोट: उपर्युक्त गणितीय संबंध बड़े सरल हैं। जब 'पहला दूसरे का क्या है?' पूछा जाए तो पहले को अंश बनाइए एवं दूसरे को हर। इसका विलोम भी उतना ही सत्य है।

उदा. 16: दो संख्याएँ तीसरी संख्या से क्रमशः 30% एवं 40% छोटी हैं तो दूसरी संख्या पहली संख्या का कितना प्रतिशत है?

हल: सर्वप्रथम आप स्वयं सूत्र प्राप्त करने का प्रयास करें। यदि आप ऐसा न कर सकें तो निम्नलिखित सूचनाओं पर ध्यान दें:

1. दो संख्याएँ तीसरी से छोटी है, तथा
2. हमें पहली संख्या की तुलना में दूसरी संख्या का प्रतिशत मान मालूम करना है। इसलिए हमारा सूत्र होना चाहिए,

$$\frac{100-40}{100-30} \times 100 = \frac{60}{70} \times 100 = 85\frac{5}{7}\%$$

उदा. 17: एक धनात्मक संख्या को 5 से गुणा करने के बजाए उस संख्या में 5 से भाग दिया जाता है। प्राप्त परिणाम अभीष्ट सही मान का कितना प्रतिशत है?

हल: मान लिया कि संख्या 1 है तो सही उत्तर = 5

गलत उत्तर जो प्राप्त होता है $= \frac{1}{5}$

$\therefore$ अभीष्ट प्रतिशत $= \frac{1}{5 \times 5} \times 100\% = 4\%$

उदा. 18: एक धनात्मक संख्या में 5 से भाग देने के बजाए गलती से उस संख्या में 5 से गुणा कर दिया जाता है। प्राप्त परिणाम सही उत्तर से कितना प्रतिशत अधिक या कम है?

हल: माना कि संख्या 1 है, तो सही उत्तर $= \frac{1}{5}$

$\therefore$ प्राप्त परिणाम सही उत्तर से $\left(5 - \frac{1}{5}\right) = \frac{24}{5}$ अधिक है।

$$\therefore \text{ अभीष्ट प्रतिशत } = \frac{\frac{25}{5}}{\frac{1}{5}} \times 100 = 2400\%$$

प्रतिशत व्यय एवं बचत

उदा. 19: एक व्यक्ति अपनी आमदनी का $12\frac{1}{2}\%$ खो देता है, तथा शेष का 70% खर्च कर देने के बाद उसके पास 210 रु. बच जाते हैं। उस व्यक्ति के पास प्रारंभ में कितने रुपए थे?

हल: उपर्युक्त प्रश्न को कई विधियों से हल किया जा सकता है। यहाँ हम उनमें से कुछ-एक की चर्चा करेंगे:

I. मान लिया कि प्रारंभ में उसके पास कुल x रु. थे। $12\frac{1}{2}\%$ या $\frac{1}{8}$ खो देने के बाद उसके पास $x - \frac{x}{8} = \frac{7x}{8}$ रु. बच जाते हैं।

70% खर्च करने के बाद उसके पास शेष $\frac{7x}{8}$ का 30% बच जाएगा।

$$\frac{7x}{8} \times \frac{3}{10} = 210$$

$$\therefore x = \frac{210 \times 10 \times 8}{3 \times 7} = 800 \text{ रु.}$$

II. मान लिया कि उसके पास आरंभ में 100 रु. थे। $12\frac{1}{2}$ रु. खोने के बाद उसके पास $87\frac{1}{2}$ रु. बच गए। उसने $87\frac{1}{2}$ का 70% खर्च कर दिया। इसलिए उसके पास ($87\frac{1}{2}$ का 30%) या $\frac{105}{4}$ रु. बच जाएँगे। लेकिन उसके पास 210 रु. बच गए हैं। इसलिए हमें निम्नलिखित समानुपातिक संबंध प्राप्त होता है:

$\frac{105}{4}$ रु. : 210 रु. :: 100 रु. : अभीष्ट रु. (रूल ऑफ थ्री से)

$$\therefore \text{ अभीष्ट रु. } = \frac{4 \times 210 \times 100}{105} \text{ रु. } = 800 \text{ रु.}$$

III. ***द्रुत विधि* (Quicker Method):** यह विधि न केवल संक्षिप्त है बल्कि गणना की दृष्टि से सरल एवं त्वरित भी। केवल सूत्र को सही ढंग से याद रखें।

प्रारंभ में उसके पास कुल रुपए $= \frac{210\times100\times100}{(100-12.5)(100-70)}$

$= \frac{210\times100\times100}{87.5\times30} = 800$ रु.

नोट: चूँकि प्रारंभ में जितने रु. थे, वे निश्चय ही शेष बचे रुपयों से कहीं अधिक होंगे। इसलिए आपको बड़ी संख्या 100 को अंश एवं छोटी संख्या $(100-12.5)$, या $(100-70)$ को हर की जगह रखने में कोई दुविधा नहीं होनी चाहिए।

उदा. 20: आय का 3.5% कर के रूप में ले लिया जाता है तथा शेष का 12.5% बचाया जाता है। ऐसा करने के बाद खर्च करने के लिए 4053 रु. बच जाते हैं। आय कितनी है?

हल: द्रुत विधि से जो परिणाम प्राप्त होता है, वह कुछ इस प्रकार है,

आय $= \frac{4053\times100\times100}{(100-3.5)(100-12.5)} = 4800$ रु.

इस प्रकार हमें एक सामान्य-सूत्र प्राप्त होता है, जिसे निम्नलिखित प्रमेय के रूप में व्यक्त किया जा सकता है:

प्रमेय: यदि किसी राशि का x% पहले व्यक्ति ने ले लिया हो, शेष का y% दूसरे व्यक्ति ने लिया हो तथा जो शेष बचे उसका z% तीसरे व्यक्ति द्वारा लेने के उपरान्त यदि A राशि बच जाए तो आरंभ में कुल राशि $\frac{A\times100\times100\times100}{(100-x)(100-y)(100-z)}$ रही होगी।

प्रमाण: आरंभिक राशि निश्चित रूप से A से अधिक होगी, इसलिए भिन्न के नियम से, A में ऐसे भिन्नों से गुणा करना होगा, जिसका मान 1 से अधिक है। समस्या है ऐसे भिन्नों को प्राप्त करने की। चूँकि हर चरण में राशि में कमी होती जाती है इसलिए हमारे भिन्न में 100 के अतिरिक्त $(100-x)$, $(100-y)$, एवं $(100-z)$ भी शामिल होने चाहिए। इस प्रकार, वे भिन्न, जिनका मान 1 से अधिक हो तथा जिनसे A में गुणा किया जाता है, वे इस प्रकार हैं:

$$\frac{100}{100-x}, \frac{100}{100-y} \text{ एवं } \frac{100}{100-z}$$

$$\therefore \text{ अभीष्ट आरंभिक राशि } = A\left(\frac{100}{100-x}\right)\left(\frac{100}{100-y}\right)\left(\frac{100}{100-z}\right)$$

प्रमेय: यदि किसी राशि में उसका x% जोड़ दिया जाए, इस बढ़ी हुई राशि में फिर इसका y% जोड़ दिया जाए तथा फिर जो राशि प्राप्त हो उसमें उसका z प्रतिशत जोड़ दिया जाए और इस प्रकार जो राशि प्राप्त हो उसे A से सूचित किया जाए तो आरंभिक राशि

$$= \frac{A\times100\times100\times100}{(100+x)(100+y)(100+z)}$$

प्रमाण: आरंभिक राशि निश्चय ही अंतिम राशि 'A' से कम होनी चाहिए। इसलिए 'भिन्न के नियम' के अनुसार A में ऐसे भिन्नों से गुणा करना होगा जिनका मान 1 से कम हो। चूँकि प्रत्येक चरण में राशि में वृद्धि होती जाती है, इसलिए 100 के अतिरिक्त (100 + x), (100 + y) एवं (100 + z) जैसे भिन्न भी प्राप्त होते हैं। इस प्रकार 1 से कम मान वाले वे भिन्न जिनसे हमें A में गुणा करना है, निम्नलिखित हैं :

$$\frac{100}{100+x}, \frac{100}{100+y} \text{ एवं } \frac{100}{100+z}$$

$$\therefore \text{ अभीष्ट आरंभिक राशि } = A\left(\frac{100}{100+x}\right)\left(\frac{100}{100+y}\right)\left(\frac{100}{100+z}\right)$$

उपर्युक्त प्रमेयों पर आधारित कुछ और उदाहरण

उदा. 21: किसी राशि में से 10 प्रतिशत घटाने के बाद जो शेष बचता है, उसका 20 प्रतिशत फिर उसमें से घटा लिया जाता है। इसके बाद 3600 रु. बच जाते हैं तो मूल राशि क्या है?

हल: निश्चय ही मूल राशि 3600 से अधिक होगी इसलिए इसमें $\frac{100}{(100-10)}$ एवं $\frac{100}{(100-20)}$ से गुणा करना होगा।

$$\therefore \text{ अभीष्ट राशि } = \frac{3600\times100\times100}{90\times80} = 5000 \text{ रु.}$$

उदा. 22: दो वर्ष पूर्व किसी व्यक्ति के लॉकर में 4800 रु. थे। पहले वर्ष में उसने इसका 20% उसमें जमा किया। दूसरे वर्ष में उसने लॉकर में बढ़ी हुई राशि का 25% जमा किया। इस समय लॉकर में कितने रु. हैं?

हल: निश्चय ही अभीष्ट राशि 4800 रु. से अधिक है। एवं प्रत्येक वर्ष रकम में कुछ बढ़त होती है। इसलिए इस राशि में $\left(\frac{100+20}{100}\right)$ एवं $\left(\frac{100+25}{100}\right)$ से गुणा किया जाना चाहिए।

$$\therefore \text{ अभीष्ट राशि } = \frac{4800\times120\times125}{100\times100} = 7200 \text{ रु.}$$

नोट: उपर्युक्त उदाहरण दूसरे उदाहरणों से अलग है। इस पर ध्यान दें।

जनसंख्या से संबंधित सूत्र

उदा. 23: यदि किसी शहर की मूल जनसंख्या P हो एवं यह r% प्रति वर्ष की दर से बढ़ रही हो तो n वर्षों के बाद जनसंख्या कितनी होगी?

हल: 1 साल के बाद जनसंख्या $= P + \frac{Pr}{100} = P\left[1+\frac{r}{100}\right]$

इसका मतलब यह है कि एक वर्ष के दौरान, वर्ष के प्रारंभ की जनसंख्या (P) $\left[1+\frac{r}{100}\right]$ से गुणित हो जाती है। अब, दूसरे साल के आरंभ में जनसंख्या = $P\left(1+\frac{r}{100}\right)$

$\therefore$ 2 वर्षों में जनसंख्या = $P\left(1+\frac{r}{100}\right)^2$

$\therefore$ n वर्षों में जनसंख्या = $P\left(1+\frac{r}{100}\right)^n$

नोट: यदि जनसंख्या में प्रतिवर्ष r% की दर से कमी होने लगे तो n वर्ष के बाद जनसंख्या $= P\left(1-\frac{r}{100}\right)^n$

उदा. 24: यदि किसी शहर की जनसंख्या 4% प्रति वर्ष की दर से बढ़ रही हो तथा लोगों की वर्तमान संख्या 15625 हो तो 3 वर्ष बाद जनसंख्या क्या होगी?

हल: अभीष्ट जनसंख्या $= 15625\left(1+\frac{4}{100}\right)^3$

$= 15625\times\frac{26}{25}\times\frac{26}{25}\times\frac{26}{25}=17576$

उदा. 25: यदि किसी शहर की जनसंख्या 4% प्रतिवर्ष की दर से बढ़ रही हो तथा इस समय जनसंख्या 17576 हो तो 3 वर्ष पूर्व जनसंख्या कितनी थी?

हल: 3 वर्ष पूर्व की जनसंख्या $\times\left(\frac{26}{25}\right)^3$ = वर्तमान जनसंख्या

$\therefore$ 3 वर्ष पूर्व की जनसंख्या $=\frac{17576\times25\times25\times25}{26\times26\times26}=15625$

नोट: उदा.-24. एवं उदा.-25 के सहारे भिन्नों के कमाल को देखा जा सकता है। उदा.-24 में अभीष्ट जनसंख्या निश्चय ही प्रदत्त जनसंख्या से बड़ी थी, इसलिए हमने बड़ी संख्या (26) को अंश बनाया एवं छोटी संख्या (25) को हर। उदा.-25 में ठीक इसका उल्टा किया गया है।

जब अलग-अलग वर्षों में अलग-अलग रफ्तार से वृद्धि हुई हो

प्रमेय: यदि किसी शहर की जनसंख्या P पहले वर्ष में x% की रफ्तार से बढ़े, दूसरे वर्ष में y% की रफ्तार से बढ़े एवं तीसरे वर्ष में z% की रफ्तार से बढ़े तो तीसरे वर्ष के अन्त में जनसंख्या

$$= \frac{P\times(100+x)(100+y)(100+z)}{100\times100\times100}$$

प्रमाण: भिन्न के नियम के अनुसार P में किसी ऐसे भिन्न से गुणा करना होगा जिसका मान 1 से अधिक हो।

$$\therefore \text{ 3 वर्ष बाद जनसंख्या } = P\left(\frac{100+x}{100}\right)\left(\frac{100+y}{100}\right)\left(\frac{100+z}{100}\right)$$

नोट: क्या आपने ध्यान दिया कि गुणक भिन्न $\left(\frac{100+x}{100}\right)$ है न कि $\left(\frac{100}{100-x}\right)$ क्यों?

क्योंकि जनसंख्या में x% प्रति वर्ष की दर से वृद्धि होती है, इसलिए हमारे पास दो राशियाँ हैं 100 एवं (100 + x) और चूँकि एक वर्ष बाद जनसंख्या P से निश्चय ही अधिक होगी, इसलिए हमलोग P में $\frac{100+x}{100}$ से गुणा करते हैं। बाकि वर्षों के लिए भी हम इसी प्रकार की गणना करते हैं।

उदा. 26: किसी शहर की जनसंख्या 8000 है। पहले वर्ष में यह 10 प्रतिशत की दर से बढ़ती है तथा दूसरे वर्ष में 20% की दर से वृद्धि होती है। दो वर्ष बाद जनसंख्या क्या होगी?

हल: अभीष्ट जनसंख्या $= \frac{8000\times110\times120}{100\times100} = 10560$

यदि जनसंख्या पहले वर्ष में बढ़ती हो एवं फिर दूसरे वर्ष में घट जाती हो

प्रमेय: उपर्युक्त प्रमेय में यदि दूसरे वर्ष में जनसंख्या y% घट जाए तथा पहले एवं तीसरे वर्ष में वैसी ही वृद्धि हुई हो तो, तीसरे वर्ष के अंत में जनसंख्या $= \frac{P(100+x)(100-y)(100+z)}{100\times100\times100}$

प्रमाण: स्वयं प्रयास करें।

उदा. 27: किसी शहर की जनसंख्या 10,000 है। पहले वर्ष में इसमें 10% की वृद्धि हुई। दूसरे वर्ष में यह 20% घट गई तथा तीसरे वर्ष इसमें फिर से 30% की वृद्धि हुई। 3 वर्ष बाद जनसंख्या कितनी होगी?

हल: अभीष्ट जनसंख्या $= \frac{10000\times110\times80\times130}{100\times100\times100} = 11440$

उदा. 28: किसी स्थान की जनसंख्या पहले वर्ष में 5 प्रतिशत बढ़ जाती है तथा अगले वर्ष 5 प्रतिशत कम हो जाती है। यदि दूसरे वर्ष के अंत में जनसंख्या 7980 हो, तो पहले वर्ष के आरंभ में जनसंख्या कितनी थी?

हल: अभीष्ट जनसंख्या $= 7980\times\left(\frac{100}{100-5}\right)\left(\frac{100}{100+5}\right)$

$$= \frac{7980\times100\times100}{95\times105} = 8000$$

नोट: उपर्युक्त उदाहरण में दो वर्षों के बाद की जनसंख्या दी हुई है तथा प्रथम वर्ष के आरंभ में कितनी जनसंख्या थी, यह पूछा गया है। यही कारण है कि भिन्नों को उलट दिया गया है। इस बात को ध्यान में रखें। अगले उदाहरण में भी यही दिखाया गया है।

उदा. 29: किसी शहर की जनसंख्या पहले वर्ष में 10% की दर से बढ़ती है तथा दूसरे वर्ष में यह 10% प्रतिवर्ष की दर से कम हो जाती है। यदि इस समय शहर में कुल 29700 लोग रह रहे हों तो 2 वर्ष पूर्व जनसंख्या कितनी थी?

हल: अभीष्ट जनसंख्या $= \dfrac{29700\times100\times100}{(100-10)\times(100+10)}$

$= \dfrac{29700\times100\times100}{90\times110} = 33000$

उदा. 30: किसी शहर की जनसंख्या 8000 है। यदि पुरुषों की संख्या 6 प्रतिशत की दर से बढ़े एवं महिलाओं की संख्या में वृद्धि की रफ्तार 10 प्रतिशत हो तो जनसंख्या 8600 हो जाएगी। शहर में महिलाओं की संख्या ज्ञात करें।

हल: मान लिया कि महिलाओं की संख्या = x

तो x का 110% + (8000 − x) का 106% = 8600

या, $\dfrac{110x}{100}+\dfrac{106(8000-x)}{100}=8600$

या, $x(110-106)=8600\times100-8000\times106$

$\therefore\ x=\dfrac{8600\times100-8000\times106}{110-106}=\dfrac{12000}{4}=3000$

नोट: यदि हम बीच के (intermediate) चरणों को नजरंदाज कर दें तो महिलाओं एवं पुरुषों की जनसंख्या निम्नलिखित प्रकार से सीधे भी निकाली जा सकती है:

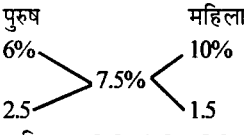
महिलाओं की जनसंख्या $= \dfrac{8600\times100-8000(100+6)}{10-6}=3000$

पुरुषों की जनसंख्या $= \dfrac{8600\times100-8000(100+10)}{6-10}=\dfrac{20000}{4}=5000$

***मिश्रण-विधि से* (By Method of Alligation):**

औसत प्रतिशत वृद्धि $= \dfrac{600}{8000}\times100=\dfrac{15}{2}=7.5\%$

अब,



$\therefore$ पुरुष : महिला = 2.5 : 1.5 = 5:3

$\therefore$ महिलाओं की संख्या $= \frac{8000}{5+3} \times 3 = 3000$

उपभोग में ह्रास (Reduction in Consumption)

उदा. 31: यदि किसी वस्तु के मूल्य में 20% की वृद्धि होती हो तो उस वस्तु की खपत कितना प्रतिशत कम की जाए ताकि खर्च बिल्कुल न बढ़ाना पड़े?

हल: **I.** मान लिया कि मूल्य एवं खपत दोनों 100 इकाई हैं।

प्रश्नानुसार, प्रारंभ में व्यय = (100 × 100) रु.

नया मूल्य = 120 इकाई

मान लें कि व्यय को पूर्ववत रखने के लिए वह खपत में x% की कटौती करता है। तो उसका कुल व्यय = [120 × (100 – x)] रु.

प्रश्नानुसार, $100 \times 100 = 120(100 - x)$

या, $120x = 120 \times 100 - 100 \times 100$

या, $x = \frac{100(120-100)}{120} = 16\frac{2}{3}\%$

II. बढ़ा हुआ मूल्य = पुराने मूल्य का $\frac{120}{100}$

$\therefore$ खपत = मूल मात्रा का $\frac{100}{120}$ $\left[\frac{120}{100} \text{ का व्युत्क्रम}\right]$

$\therefore$ खपत में कमी = मूल खपत का $\left(1 - \frac{100}{120}\right)$

= मूल खपत का $\frac{1}{6} = 16\frac{2}{3}\%$

III. ***द्रुत विधि*** **(Quicker Method):**

प्रमेय: यदि किसी वस्तु की कीमत में r% की वृद्धि हो तो खपत में $\left(\frac{r}{100+r} \times 100\right)\%$ की कटौती करने से खर्च बराबर बना रहेगा।

प्रमाण: सूत्र को $\left(r \times \frac{100}{100+r}\right)$ के रूप में लिखा जा सकता है। यदि आप ध्यानपूर्वक देखें तो पाएँगे कि भिन्न $\frac{100}{100+r}$ का मान 1 से कम है (क्योंकि अंश हर से कम है)। क्यों? क्योंकि इस स्थिति में हमारा अभीष्ट मान प्रदत्त मान (20%) से कम है। इस प्रकार इस स्थिति में भी, भिन्न के नियम का प्रयोग किया गया है।

इस प्रकार,

$$\text{अभीष्ट उत्तर} = \frac{20}{100+20}\times 100 = \frac{50}{3} = 16\frac{2}{3}\%$$

उदा. 32: यदि चीनी की कीमत 10% गिर जाती हो तो कोई गृहपति अपनी खपत कितना बढ़ा दे ताकि उसके खर्च में कोई कमी नहीं आए।

हल: यह प्रश्न, उदा.-31 के अनुरूप है। उदा.- 31 के संदर्भ में प्रयुक्त तीनों विधियों से भी इसे हल किया जा सकता है। लेकिन हमलोग यहाँ केवल तीसरी विधि का इस्तेमाल करेंगे। अन्य दोनों विधियों के सहारे खुद ही हल करने का प्रयत्न करें।

***द्रुत विधि* (Quicker Method):**

प्रमेय: यदि किसी वस्तु का मूल्य r% कम हो जाता हो तो खपत में $\left[\frac{r}{(100-r)}\times 100\right]\%$ की वृद्धि करने से उस वस्तु पर किया जानेवाला व्यय समान बना रहता है।

प्रमाण: यदि हम सूत्र को $r\times\frac{100}{(100-r)}$ के रूप में लिखें तो पाते हैं कि भिन्नात्मक मान $\left[\frac{100}{100-r}\right]$, 1 से बड़ा है। क्यों? (इसका उत्तर स्वयं ढूँढ़े)।

इसलिए, इस स्थिति में,

$$\text{अभीष्ट उत्तर} = \frac{10}{(100-10)}\times 100 = 11\frac{1}{9}\%$$

***प्रतिशत संबंध* (Percentage Relationship)**

यदि पहला मान दूसरे मान से r प्रतिशत अधिक हो, तो दूसरा मान पहले मान से $\left(\frac{r}{100+r}\times 100\right)\%$ कम होगा।

प्रमाण: भिन्न के नियम से, r में ऐसे भिन्न से गुणा किया जाना चाहिए, जिसका मान 1 से कम हो। यह अभीष्ट भिन्न है: $\frac{r}{100+r}$.

साधारण गणितीय गणना की विधि

मान लिया कि दूसरा मान 100 है।

$\therefore$ पहला मान $= (100+r)$

अब चूँकि, जब पहला मान $(100+r)$ है तो दूसरा पहले मान से r कम है।

$\therefore$ जब पहला मान 100 है तो दूसरा पहले मान से $\left[\frac{r}{100+r}\times 100\right]$ कम है।

$\therefore$ दूसरा मान पहले की तुलना में $\left[\frac{r}{100+r}\times 100\right]\%$ कम है।

प्रमेय: यदि पहलो मान दूसरे मान से r प्रतिशत कम हो तो दूसरा मान पहले मान से $\left[\frac{r}{100-r}\times 100\right]\%$ अधिक होता है।

प्रमाण: स्वयं कोशिश करें।

उदा. 33: यदि A का वेतन B से 25% अधिक हो तो B का वेतन A से कितना प्रतिशत कम है?

हल: **I.** मान लिया कि B का वेतन 100 रु. प्रति माह है। तब A का वेतन 125 रु. प्रति माह होगा।

अब चुँकि जब A का वेतन 125 है तो B, 25 कम है।

$\therefore$ जब A का वेतन 100 हो तो B, $\frac{25}{125}\times 100$ कम है। या, 20 रु. कम है।

अर्थात् B का वेतन A से 20% कम है।

II. *द्रुत विधि* (Quicker Method):

यदि A की आय B की आय से r% अधिक हो तो B की आय A की तुलना में $\left(\frac{r}{100+r}\times 100\right)\%$ कम होगा।

प्रदत्त प्रश्न में,

अभीष्ट उत्तर $= \frac{25}{100+25}\times 100\% = 20\%$

नोट: क्या आपने उदा.-32 में प्रयुक्त सूत्र एवं इस सूत्र मे कोई समानता देखी?

उदा. 34: यदि A का वेतन B के वेतन से 30% कम हो तो B का वेतन A से कितना अधिक होगा?

हल: ***द्रुत विधि* (Quicker Method):**

यदि A का वेतन B से r प्रतिशत कम हो तो B का वेतन A की तुलना में $\left(\frac{r}{100-r}\times 100\right)\%$ अधिक होगा।

$\therefore$ प्रस्तुत प्रश्न में, अभीष्ट उत्तर $= \frac{30}{100-30}\times 100 = 42\frac{6}{7}\%$

नोट: उदा.-32 एवं उदा.-34 में आपको कोई एकरूपता दिखी?

उदा. 35: एक संख्या दूसरी से 50% अधिक है तो, दूसरी संख्या पहली संख्या से कितना प्रतिशत कम है?

हल: पिछले प्रश्न में जिस सूत्र की चर्चा की गई उसका यहाँ भी उपयोग किया जा सकता है।

उस सूत्र के अनुसार दूसरी संख्या पहली संख्या से $\left[\frac{50}{100+50}\times 100\right]\% = 33\frac{1}{3}\%$ कम होगी।

उदा. 36: एक संख्या दूसरी से 20% कम है तो दूसरी संख्या पहली से कितना प्रतिशत अधिक है?

हल: उदा.-32 एवं उदा.-34 में दिए गए सूत्र का इस्तेमाल करें।

किसी राशि को दूसरी राशि के प्रतिशत के रूप में व्यक्त करना

उदा. 37: 20 को 80 के प्रतिशत के रूप में व्यक्त करें।

हल: यदि पहली राशि 80 है तो दूसरी 20 है।

$\therefore$ यदि पहली राशि 100 है तो दूसरी $\frac{20}{80}\times 100 = 25$

$\therefore$ 20, 80 का 25% है।

इस प्रकार, बिना विस्तार में गए हुए, हम कह सकते हैं कि x, y के प्रतिशत के रूप में, $\left[\frac{x}{y}\times 100\right]\%$ है।

उदा. 38: 250 को 50 के प्रतिशत के रूप में व्यक्त करें।

हल: अभीष्ट प्रतिशत $= \frac{250}{50}\times 100 = 500\%$

उदा. 39: 160 को 120 के प्रतिशत के रूप में व्यक्त करें।

हल: अभीष्ट प्रतिशत $= \frac{160}{120}\times 100 = \frac{400}{3} = 133\frac{1}{3}\%$

उदा. 40: 20 को '200 के प्रति हजार' के रूप में व्यक्त करें।

हल: अभीष्ट उत्तर $= \frac{20}{200}\times 1000 = 100$ प्रति हजार

जब शुरू में वृद्धि हो एवं बाद में ह्रास हो

उदा. 41: किसी श्रमिक के वेतन में आरंभ में 10% की वृद्धि होती है एवं फिर इसमें 10 प्रतिशत की कमी आ जाती है। वेतन में कुल मिलाकर कितना फर्क आया?

हल: मान लिया कि श्रमिक का वेतन 100 रुपए था।

वृद्धि के उपरान्त वेतन = 100 + 100 का 10% = 110 रु.

वेतन में कटौती के बाद, वेतन = 110 – 110 का 10% = 99 रु.

$\therefore$ प्रतिशत परिवर्तन = 100 – 99 = 1%

***द्रुत विधि* (Quicker Method):**

प्रमेय: यदि किसी संख्या में आरंभ में x% की वृद्धि होती हो एवं फिर x% की कमी हो तो कुल

मिलाकर उस संख्या का मान कम हो जाता है और यह कमी x का x% अर्थात् $\frac{x^2}{100}$ के बराबर होता है।

प्रमाण: मान लिया कि संख्या = A

यदि इसमें x% की वृद्धि हो तो यह

$$A + A \text{ का } x\% = A + \frac{Ax}{100} = \frac{A(100+x)}{100} \text{ हो जाता है।}$$

जब इस बढ़े हुए मान में x% की कमी आती है तो यह

$$\left\{\frac{A(100+x)}{100} - \frac{A(100+x)}{100} \text{ का } x\%\right\} \text{ हो जाता है।}$$

$$= \frac{A(100+x)}{100} - \frac{Ax(100+x)}{100\times100}$$

$$= \frac{100A(100+x) - Ax(100+x)}{100\times100}$$

$$= \frac{[A(100+x)][100-x]}{100\times100} = \frac{A(100+x)(100-x)}{100\times100}$$

$$= \frac{\left|A(100)^2 - x^2\right|}{(100)^2}$$

$$\therefore \text{ कुल परिवर्तन } = \frac{A\left|(100)^2 - x^2\right|}{[100]^2} - A = \frac{-Ax^2}{(100)^2}$$

$$\therefore \text{ प्रतिशत परिवर्तन } = \frac{-Ax^2\times100}{(100)^2\times A} = \frac{-x^2}{100}\%$$

इस प्रकार, आपने देखा कि कुल मिलाकर संख्या के मान में कमी आती है (क्योंकि चिह्न ऋणात्मक है) और यह कमी $\frac{x^2}{100}\%$ के रूप में व्यक्त की जा सकती है। उपर्युक्त उदाहरण में, ह्रास (प्रतिशत में) = $\frac{10^2}{100} = 1\%$

उदा. 42: एक दुकानदार अपने सामान का दाम 12% बढ़ाकर रखता है। इसके बाद वह 12% की छूट भी देता है। कुल मिलाकर उसे हानि होती है या लाभ? इसे प्रतिशत में व्यक्त करें।

हल: ऐसी स्थिति में हमेशा हानि ही होती है और इस हानि का प्रतिशत है $\frac{(12)^2}{100} = 1.44\%$

उदा. 43: यदि किसी शहर की जनसंख्या पहले वर्ष में 15% बढ़ जाती हो एवं दूसरे वर्ष में 15% घट जाती हो तो कुल मिलाकर जनसंख्या में कितना परिवर्तन आता है?

हल: जनसंख्या में कुल मिलाकर कमी आती है और यह कमी $\frac{(15)^2}{100}\% = 2.25\%$ के बराबर है।

यदि दोनों मान अलग-अलग हों

प्रमेय: यदि किसी संख्या का मान शुरू में x% बढ़ जाता हो एवं फिर इसमें y% की कमी आती हो तो उसमें कुल मिलाकर $\left[x - y - \frac{xy}{100}\right]\%$ की वृद्धि या कमी आती है। यदि वृद्धि हो तो चिह्न धनात्मक होता है अन्यथा चिह्न ऋणात्मक होता है।

प्रमाण: मान लिया कि संख्या A है।

x% वृद्धि के बाद इसका मान

$A + A \text{ का } x\% = A + \frac{Ax}{100} = \frac{A(x+100)}{100}$ हो जाता है।

जब इस बढ़े हुए मान में y% की कमी आ जाती है तो परिवर्तित मान

$$= \frac{A(x+100)}{100} - \frac{A(x+100)}{100} \text{ का } y\%$$

$$= \frac{A(x+100)}{100} - \frac{Ay(x+100)}{(100)^2}$$

$$= \frac{A(x+100)(100-y)}{(100)^2}$$

कुल परिवर्तन $$= \frac{A(x+100)(100-y)}{(100)^2} - A$$

$$= \frac{A\{(100)^2 + 100x - 100y - xy\} - (100)^2 A}{(100)^2}$$

$$= \frac{A\{100x - 100y - xy\}}{(100)^2}$$

$\therefore$ परिवर्तन (प्रतिशत में) $$= \frac{A\{100x - 100y - xy\}}{(100)^2} \times \frac{100}{A}$$

$$= \left[x - y - \frac{xy}{100}\right]\%$$

प्रमेय: यदि वृद्धि एवं ह्रास का क्रम बदल दिया जाए तब भी परिणाम अपरिवर्तित रहता है।

प्रमाण: स्वयं कोशिश करें।

उपर्युक्त दोनों प्रमेयों को सम्मिलित करके निम्नलिखित रूप में लिखा जा सकता है:

$$\text{कुल परिवर्तन} = \text{प्रतिशत वृद्धि} - \text{प्रतिशत ह्रास} - \frac{(\%\ \text{वृद्धि}) \times (\%\ \text{ह्रास})}{100}$$

उपर्युक्त सूत्र का प्रयोग आपकी कठिनाइयों को दूर कर देगा।

उदा. 44: एक श्रमिक का वेतन आरंभ में 10 प्रतिशत बढ़ा दिया जाता है तथा बाद में 5% कम कर दिया जाता है, तो उसके वेतन में कितने का फर्क आया?

हल: मान लिया कि श्रमिक का वेतन 100 रु. था।

वेतन में 10% वृद्धि के बाद बढ़ा हुआ वेतन = 100 + 100 का 10% = 110 रु.

वेतन में कमी के बाद घटा हुआ वेतन = 110 – 110 का 5% = 104.5 रु.

प्रतिशत वृद्धि = 104.5 – 100 = 4.5%

***द्रुत विधि* (Quicker Method):**

उपर्युक्त प्रमेय के अनुसार,

यदि किसी संख्या को पहले x% बढ़ा दिया जाता हो तथा फिर उसमें y% की कमी आ जाती हो तो कुल मिलाकर उसमें $\left(x - y - \frac{xy}{100}\right)\%$ की वृद्धि या ह्रास होता है और यह परिवर्तन क्रमशः धनात्मक या ऋणात्मक चिह्न से अभिव्यक्त होता है।

$$\text{उपर्युक्त प्रश्न में कुल परिवर्तन} = 10 - 5 - \frac{10 \times 5}{100} = 4.5\%$$

∴ चिह्न धनात्मक (+) है, इसलिए 4.5% की वृद्धि हुई।

उदा. 45: एक दुकानदार अपने वस्तुओं की कीमत मूल कीमत से 20% बढ़ा कर लिखता है। इसके बाद वह हर खरीददार को 10% की छूट देता है। उसे कितना प्रतिशत लाभ या हानि हुआ?

हल: ***प्रमेय से:***

$$20 - 10 - \frac{20 \times 10}{100} = 8\%$$

∵ चिह्न धनात्मक (+) है, इसलिए उसे 8% का मुनाफा हुआ।

उदा. 46: यदि किसी श्रमिक का वेतन पहले 20 प्रतिशत घटा दिया जाता हो तथा फिर 10 प्रतिशत बढ़ा दिया जाता हो तो वेतन पर कितना प्रतिशत प्रभाव पड़ा?

हल: ***द्रुत विधि से:***

$$\%\ \text{प्रभाव} = \%\ \text{वृद्धि} - \%\ \text{कमी} - \frac{(\%\ \text{वृद्धि}) \times (\%\ \text{कमी})}{100}$$

$$= 10 - 20 - \frac{10 \times 20}{100} = -12\%$$

इस प्रकार उसके वेतन में 12% की कमी आई क्योंकि चिह्न ऋणात्मक है।

नोट: वृद्धि एवं कमी के क्रम में परिवर्तन का मतलब है कि उपर्युक्त उदाहरण में, सर्वप्रथम 10% बढ़ाया जाता है और फिर 20%घटाया जाता है। दोनों ही स्थितियों में समान परिणाम प्राप्त होता है।

उदा. 47: 1988 में किसी शहर की जनसंख्या 12% कम हो गई। 1989 में इसमें 15% की वृद्धि हुई। 1990 के आरंभ में शहर की जनसंख्या पर कुल मिलाकर कितना प्रभाव पड़ा था।

हल: $\%\text{ प्रभाव } = \%\text{ वृद्धि} - \%\text{ ह्रास} - \dfrac{(\%\text{ वृद्धि})(\%\text{ ह्रास})}{100}$

$$= 15 - 12 - \frac{15\times 12}{100} = 15 - 13.8 = 1.2$$

$\therefore$ जनसंख्या में 1.2% की वृद्धि हुई।

क्रमागत वृद्धि या ह्रास (Successive Increase or Decrease)

प्रमेय: यदि किसी संख्या का मान पहले x% एवं फिर y% बढ़ा दिया जाता हो तो कुल मिलाकर $\left(x + y + \dfrac{xy}{100}\right)\%$ की वृद्धि होती है।

प्रमाण: पिछले सूत्र में यदि y की जगह (–y) रख दिया जाए तो हमें अभीष्ट परिणाम मिल जाता है। ऐसा इसलिए कि, हम ऐसा कह सकते हैं कि

वृद्धि = – ह्रास

उदा. 48: एक दुकानदार अपने वस्तुओं की कीमत वास्तविक मूल्य से 15% बढ़ा कर रखता है। मांग में वृद्धि के कारण वह एक बार फिर मूल्य में 10 प्रतिशत की वृद्धि करता है। उसे कितना प्रतिशत मुनाफा होगा?

हल: उपर्युक्त प्रमेय के अनुसार,

$$\%\text{ मुनाफा} = 15 + 10 + \frac{15\times 10}{100} = 26.5\%$$

उदा. 49: किसी शहर की जनसंख्या लगातार दो वर्षों तक घटती रही। पहले वर्ष में इसमें 10% की कमी आई एवं दूसरे वर्ष में 20% की। दो वर्षों बाद जनसंख्या में कुल कितने प्रतिशत की कमी आई?

हल: x = –10 एवं y = -20 रखने पर,

$$-10 - 20 - \frac{(-10)(20)}{100} = -28\%$$

$\therefore$ जनसंख्या में 28% की कमी आई।

राजस्व पर प्रभाव

प्रमेय: i) यदि किसी वस्तु की कीमत x% घटा दी जाए एवं उसकी खपत में y% की वृद्धि हो, या

ii) यदि वस्तु की कीमत x% बढ़ा दी जाए एवं उसकी खपत में y% की कमी हो तो राजस्व पर प्रभाव

$$= \text{मान में \% वृद्धि} - \text{मान में \% ह्रास} - \frac{\text{प्रतिशत वृद्धि} \times \text{प्रतिशत ह्रास}}{100}$$

एवं मान में ऋण एवं धन चिह्न के अनुरूप क्रमशः ह्रास एवं वृद्धि होती है।

नोट: उपर्युक्त सूत्र स्थिति (i) एवं (ii) के लिए एक सामान्य सूत्र है। अलग-अलग इसके निम्नलिखित रूप हैं:

स्थिति* (i) *के लिए:

$$y - x - \frac{yx}{100}$$

स्थिति* (ii) *के लिए:

$$x - y - \frac{xy}{100}$$

इस प्रकार, यह स्पष्ट है कि दोनों ही स्थितियों के लिए समान रूप से उपयोगी सामान्य सूत्र को स्मरण रखना कहीं अधिक आसान है।

प्रमाण: स्थिति (i) के संदर्भ में:

मान लिया कि वस्तु का मूल्य A प्रति इकाई है तथा उसकी खपत B इकाई है।

कुल राजस्व व्यय = AB रु.

नया मूल्य = A − A का x%

$$= A - \frac{Ax}{100} = \frac{A(100-x)}{100}$$

एवं नई खपत = B + B का y% $= B + \frac{By}{100} = \frac{B(100+y)}{100}$

$$\therefore \text{ नया राजस्व व्यय} = \frac{A(100-x)}{100} \times \frac{B(100+y)}{100}$$

$$= \frac{AB(100-x)(100+y)}{100 \times 100}$$

$$\therefore \text{ राजस्व व्यय में परिवर्तन} = \frac{AB(100-x)(100+y)}{100 \times 100} - AB$$

$$= \frac{AB\left(100^2 + 100y - 100x - xy\right) - 100^2 AB}{100^2}$$

$$= \frac{AB\{100y - 100x - xy\}}{100^2}$$

$\therefore$ राजस्व पर पड़ने वाला प्रतिशत प्रभाव $= \frac{AB\{100y - 100x - xy\}}{100^2} \times \frac{100}{AB}$

$$= y - x - \frac{xy}{100}$$

इसी तरह स्थिति (ii) के लिए भी सूत्र को प्रमाणित किया जा सकता है।

उदा. 50: किसी वस्तु पर लगाए जाने वाले कर में 20% की कमी की जाती है एवं इसकी खपत में 15% की वृद्धि होती है। राजस्व पर कितना प्रभाव पड़ता है?

हल: नया राजस्व = खपत × कर

= (वास्तविक राजस्व का) (115% × 80%)

= वास्तविक राजस्व का $\left(\frac{115}{100} \times \frac{80}{100}\right)\%$

= वास्तविक राजस्व का $\left(\frac{115}{100} \times 80\right)\%$

= वास्तविक राजस्व का 92%

$\therefore$ राजस्व में $(100 - 92 =)$ 8% की कमी आती है।

प्रमेय से: राजस्व पर प्रभाव

$$= \text{मान में \% वृद्धि} - \text{मान में \% ह्रास} - \frac{\text{मान मे \% वृद्धि} \times \text{मान मे \% ह्रास}}{100}$$

$$= 15 - 20 - \frac{15 \times 20}{100} = -8\%$$

इसलिए 8% की कमी होती है।

उदा. 51: यदि मूल्य 10% बढ़ा दिया जाए तथा बिक्री 5% कम हो जाए तो आय पर क्या प्रभाव पड़ेगा?

हल: मान लिया कि प्रति वस्तु कीमत 100 रु. है तथा 100 वस्तुओं की ही बिक्री भी होती है।

$\therefore$ 100 वस्तुओं को बेचने के बाद प्राप्त राशि = 100 × 100 = 10000 रु..

बढ़ा हुआ मूल्य 110 रु. प्रति वस्तु है तथा घटी हुई बिक्री 95 वस्तुओं की है।

$\therefore$ कुल 95 वस्तुओं की बिक्री से प्राप्त राशि = 110 × 95 = 10450 रु.

$\therefore$ मुनाफा = 10450 – 10000 = 450 रु.

$\therefore$ % मुनाफा $= \frac{450 \times 100}{10000} = 4.5\%$

प्रमेय से:

$$\% \text{ प्रभाव} = \% \text{ वृद्धि} - \% \text{ ह्रास} - \frac{(\% \text{ वृद्धि}) \times (\% \text{ ह्रास})}{100} = 10 - 5 - \frac{10 \times 5}{100} = 4.5\%$$

$\therefore$ उसके आय में 4.5% की वृद्धि होती है।

उदा. 52: यदि मूल्य में 12% की कमी आती हो तथा बिक्री में 10 प्रतिशत की वृद्धि होती हो तो आय पर पर क्या प्रभाव पड़ेगा?

हल: ***प्रमेय से:***

$$\% \text{ प्रभाव} = 10 - 12 - \frac{12 \times 10}{100} = -3.2\%$$

$\therefore$ आय में 3.2% की कमी आती है।

उदा. 53: यदि किसी व्यक्ति के पास जमीन के रकवा (landholding) में 10% की कमी आती हो तथा मॉनसून में बिलम्ब की वजह से उत्पादन में 8% की कमी आती हो तो राजस्व पर कुल कितना प्रभाव पड़ेगा?

हल: किसी भी प्रकार के ह्रास को वृद्धि में बदल लें। मान लीजिए कि

10% ह्रास = –10% वृद्धि

उपर्युक्त सूत्र में इन मानों को रखने पर,

$$\% \text{ प्रभाव} = -10 - 8 - \frac{(-10) \times 8}{100}$$

$$= -18 + 0.8 = -17.2\%$$

$\therefore$ राजस्व में 17.2% की कमी आती है।

अब मान लीजिए कि हमलोग 8% ह्रास को 8% वृद्धि में बदल देते हैं, तब

8% ह्रास = –8% वृद्धि

उपर्युक्त सूत्र में इस मान को रखने पर,

$$\text{राजस्व पर प्रभाव (प्रतिशत में)} = -8 - 10 - \frac{(-8)(10)}{100}$$

$$= -18 + 0.8 = -17.2\%$$

इस प्रकार हमें दोनों ही स्थितियों में समान परिणाम की प्राप्ति होती है। इसलिए, इस बात का विशेष महत्त्व नहीं है कि कौन-सा मान अपना रूप बदल देता है।

उदा. 54: किसी सिनेमा हॉल में सीटों की संख्या 25% बढ़ा दी जाती है। टिकट का मूल्य भी 10% बढ़ा दिया जाता है। संगृहीत राजस्व पर क्या प्रभाव पड़ता है?

हल: चूँकि यहाँ सीटों की संख्या एवं मूल्य दोनों मे वृद्धि होती हैं। इसलिए हम निम्नलिखित तर्क का उपयोग करते हैं:

ह्रास = - वृद्धि

अब, सूत्र के प्रयोग से:

$$\% \text{ प्रभाव} = 25 - (-10) - \frac{25 \times (-10)}{100}$$

$$= 35 + 2.5 = 37.5$$

$\therefore$ राजस्व में कुल 37.5% की वृद्धि होती है।

इस उदाहरण में भी किसी भी वृद्धि को ह्रास में बदलकर प्रश्न हल किया जा सकता है। दूसरे मान को बदलकर आप स्वयं हल करके देखें।

नोट: हम जानते हैं कि सर्वाधिक महत्वपूर्ण सूत्र $x+y+\frac{xy}{100}$ है। अन्य सभी रूप केवल चिह्नों को बदलकर ही प्राप्त किया जा सकता है।

i) x% वृद्धि एवं y% वृद्धि

$$=\left[x+y+\frac{xy}{100}\right]\% \text{ वृद्धि या ह्रास (चिह्न के अनुरूप)}$$

ii) x% वृद्धि एवं y% ह्रास [y = – y रखें]

$$=\left[x-y-\frac{xy}{100}\right]\% \text{ वृद्धि या ह्रास (चिह्न के अनुरूप)}$$

iii) x% ह्रास एवं y% वृद्धि [x = –x रखें]

$$=\left[-x+y-\frac{xy}{100}\right]\% \text{ वृद्धि या ह्रास (चिह्न के अनुरूप)}$$

iv) x% ह्रास एवं y% ह्रास [x = –x एवं y = –y रखें]

$$=\left[-x-y+\frac{xy}{100}\right]\% \text{ वृद्धि या ह्रास (चिह्न के अनुरूप)}$$

प्रमेय: किसी परीक्षा में सफल होने के लिए x% अंकों की जरूरत होती है। यदि कोई परीक्षार्थी y अंक प्राप्त करने के बावजूद z अंकों से असफल हो जाता हो तो अधिकतम अंक

$$M=\frac{100(y+z)}{x}$$

प्रमाण: इस प्रमेय को सिद्ध करना बड़ा आसान है। मान लिया कि अधिकतम अंक (पूर्णांक) M है। प्रश्नानुसार,

M का x% = y + z

$$\therefore\ M=\frac{y+z}{x\%}=\frac{100(y+z)}{x}$$

नोट: यदि आपने संबंधों को भली-भाँति समझ लिया है तो सूत्र को याद करने की कोई आवश्यकता नहीं है। परंतु कुछ छात्र परीक्षा-भवन में संबंधों को लेकर भ्रम में पड़ जाते हैं। इसीलिए यहाँ सूत्र दे दिया गया है।

उदा. 55: किसी विद्यार्थी को सफल होने के लिए 40% अंक चाहिए। यदि उसे 40 अंक प्राप्त होते हैं, तो वह 40 अंकों से असफल हो जाता है तो पूर्णांक क्या है?

हल: उपर्युक्त प्रमेय के अनुसार:

$$\text{पूर्णांक} = \frac{100(40+40)}{40}=200$$

उदा. 56: किसी परीक्षा में सफल होने के लिए परीक्षार्थी को 80% अंक चाहिए। यदि उसे 210 अंक प्राप्त होते हैं और वह 50 अंकों से असफल हो जाता है तो पूर्णांक बताएँ।

हल: उपर्युक्त प्रमेय से:

$$\text{पूर्णांक} = \frac{100\times(210+50)}{80} = 325 \text{ अंक}$$

प्रमेय: किसी परीक्षार्थी को परीक्षा में x% अंक प्राप्त होते हैं। इसके बावजूद वह 'a' अंकों से असफल हो जाता है। दूसरे परीक्षार्थी को y% अंक प्राप्त होते हैं जो उत्तीर्णांक से 'b' अंक अधिक है। ऐसी स्थिति में पूर्णांक $M = \frac{100(a+b)}{y-x}$

प्रमाण: मान लिया कि पूर्णांक = M

$\therefore$ पहले परीक्षार्थी द्वारा प्राप्त अंक = M का x%

एवं दूसरे परीक्षार्थी द्वारा प्राप्त अंक = M का y%

दोनों परीक्षार्थियों के लिए उत्तीर्णांक (pass marks) समान हैं।

M का x% + a = M का y% − b

या, $\frac{Mx}{100}\times a = \frac{My}{100} - b$

या, $\frac{M(y-x)}{100} = a+b$

$\therefore \quad M = \frac{100(a+b)}{y-x}$

उदा. 57: एक परीक्षार्थी परीक्षा में 25% अंक प्राप्त करता है तथा 30 अंकों से असफल हो जाता है। दूसरा परीक्षार्थी 50% अंक प्राप्त करता है जो कि उत्तीर्णांक (pass marks) से 20 अंक अधिक है। पूर्णांक क्या है?

हल: प्रमेय के अनुसार,

$$\text{पूर्णांक} = \frac{100(30+20)}{50-25} = 200$$

नोट: i) उपर्युक्त सूत्र को निम्नलिखित रूप में भी लिखा जा सकता है:

$$\text{पूर्णांक} = \frac{100(\text{प्राप्तांकों का अंतर})}{\text{प्राप्तांकों के प्रतिशत का अंतर}}$$

ii) प्राप्तांकों का अंतर = 30 + 20

चूँकि पहले परीक्षार्थी को उत्तीर्णांक से 30 अंक कम प्राप्त होते हैं; जबकि दूसरे परीक्षार्थी को उत्तीर्णांक से 20 अंक अधिक प्राप्त होते हैं।

उदा. 58: एक परीक्षार्थी को परीक्षा में 30% अंक प्राप्त होते हैं और वह 50 अंकों से असफल हो जाता है। दूसरा परीक्षार्थी, जिसे 320 अंक प्राप्त होते हैं, वह भी 30 अंकों से असफल हो जाता है। पूर्णांक बताएँ।

हल: यहाँ उपर्युक्त सूत्र का सीधा इस्तेमाल मुश्किल है (क्यों?) इसलिए हम इस तथ्य का इस्तेमाल करेंगे कि दोनों परीक्षार्थियों के लिए पूर्णांक बराबर है।

यदि पूर्णांक x हो, तो पहले परीक्षार्थी के लिए उत्तीर्णांक = x का 30% + 50, तथा
दूसरे परीक्षार्थी के लिए उत्तीर्णांक = 320 + 30

$\therefore$ x का 30% + 50 = 320 + 30

या, $\frac{3x}{10} = 300$

$\therefore \quad x = \frac{300 \times 10}{3} = 1000$

उपर्युक्त विधि को ढंग से समझ लें, क्योंकि प्रश्न के स्वरूप में परिवर्तन होने पर भी यह विधि काम करती है।

प्रमेय: किसी आयत को मापने के क्रम में एक भुजा को गलती से x% अधिक माप लिया जाता है एवं दूसरे को y% कम माप लिया जाता है। इस माप से गणना किए जाने पर क्षेत्रफल के माप में प्रतिशत त्रुटि = $x - y - \frac{xy}{100}$। यह त्रुटि वृद्धि के रूप में भी हो सकती है एवं ह्रास के रूप में भी। यदि वृद्धि होगी तो प्राप्त राशि का चिह्न धनात्मक होगा अन्यथा चिह्न ऋणात्मक होगा।

प्रमाण: मान लिया कि आयत की भुजाएँ a एवं b हैं।

$\therefore$ क्षेत्रफल = ab

माप में त्रुटि से भुजाएँ:

(a + a का x%) तथा (b – b का y%)

या, $\frac{a(100+x)}{100}$ तथा $\frac{b(100-y)}{100}$

$\therefore$ नया क्षेत्रफल = $\frac{ab(100+x)(100-y)}{100^2}$

त्रुटि = $\frac{ab(100+x)(100-y)}{(100)^2} - ab$

$= \frac{ab(100x-100y-xy)}{(100)^2}$

%त्रुटि = $\frac{ab(100x-100y-xy)}{(100)^2} \times \frac{100}{ab} = x - y - \frac{xy}{100}$

$$\therefore \%\text{ त्रुटि (error)} = \%\text{ अधिक (excess)} - \%\text{ कम (deficit)} - \frac{\%\text{ अधिक} \times \%\text{ कम}}{100}$$

उदा. 59: किसी आयत की भुजाओं को मापने के क्रम में एक भुजा यदि 5% अधिक माप लिया जाता है तथा दूसरा 4% कम माप लिया जाता है तो इस माप से क्षेत्रफल में होने वाले प्रतिशत त्रुटि की गणना करें।

हल: ***उपर्युक्त प्रमेय से:***

$$\%\text{ त्रुटि} = 5 - 4 - \frac{5 \times 4}{100}$$

$$= 1 - \frac{1}{5}$$

$$= \frac{4}{5}\%\text{ अधिक } (\because \text{ चिह्न धनात्मक है})$$

उदा. 60: यदि आयत की दोनों भुजाएँ क्रमशः 20% एवं 5% बढ़ा दी जाएँ, तो आयत के क्षेत्रफल में कितने प्रतिशत का परिवर्तन होता है?

हल: उपर्युक्त प्रमेय इस सवाल के लिए भी उतना ही उपयोगी है। सवाल में दी गई सूचनाओं में केवल एक परिवर्तन अपेक्षित है। वृद्धि को ह्रास में बदल कर इस्तेमाल करें।

5% वृद्धि = –5% ह्रास

$$\therefore \%\text{ प्रभाव} = 20 - (-5) - \frac{20 \times (-5)}{100} = 20 + 5 + 1 = 26\%$$

$\therefore$ चिह्न धनात्मक है, इसलिए क्षेत्रफल में 26% की वृद्धि हुई।

नोट: हमलोग दूसरी सूचना का भी उपयोग कर सकते हैं।

20% वृद्धि = – 20% ह्रास

अब आप स्वयं हल करने का प्रयत्न करें।

उदा. 61: यदि किसी वर्ग की भुजा 30% बढ़ा दी जाए तो उसके क्षेत्रफल में कितने प्रतिशत की वृद्धि होगी?

हल: पिछले उदाहरण में प्रयुक्त विधि का इस्तेमाल करने पर,

$$\text{क्षेत्रफल में प्रतिशत वृद्धि} = 30 - (-30) - \frac{30 \times (-30)}{100}$$

$$= 60 + 9 = 69\%$$

प्रमेय: यदि किसी त्रिभुज, आयत, वर्ग, वृत्त, समचतुर्भुज (या किसी भी द्विविमीय ज्यामितीय आकृति) की भुजाओं में x% की वृद्धि होती है तो उसके क्षेत्रफल में $\frac{x(x+200)}{100}\%$ या $\left(2x + \frac{x^2}{100}\right)\%$ की वृद्धि होती है।

प्रमाण: पहले किसी त्रिभुज का उदाहरण लें।

मान लिया कि त्रिभुज की तीनों भुजाएँ क्रमशः a, b एवं c हैं।

$\therefore$ त्रिभुज का क्षेत्रफल $A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

जहाँ $s = \dfrac{a+b+c}{2}$

जब तीनों भुजाएँ x% बढ़ा दी जाती हैं तो भुजाएँ क्रमशः

$\dfrac{a(100+x)}{100}, \dfrac{b(100+x)}{100}$ एवं $\dfrac{c(100+x)}{100}$ हो जाएँगी।

अब, $s_1 = \dfrac{(100+x)}{100}\left[\dfrac{a+b+c}{2}\right] = \dfrac{(100+x)}{100}s$

$\therefore$ नया क्षेत्रफल A_1

$$= \sqrt{s_1\left(s_1 - \frac{a(100+x)}{100}\right)\left(s_1 - \frac{b(100+x)}{100}\right)\left(s_1 - \frac{c(100+x)}{100}\right)}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{100+x}{100}\right)^4 s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$\therefore \quad A_1 = \left(\dfrac{100+x}{100}\right)^2 A$

$$\text{क्षेत्रफल में \% वृद्धि} = \frac{A_1 - A}{A} \times 100 = \frac{\left[\left(\frac{100+x}{100}\right)^2 - 1\right]A}{A} \times 100$$

$$= \left[\left(\frac{100+x}{100}\right)^2 - 1\right] \times 100 = \left[\left(1+\frac{x}{100}\right)^2 - 1\right] \times 100$$

$$= \left[1 + \frac{x^2}{(100)^2} + \frac{2x}{100} - 1\right] 100 = \frac{x(x+200)}{100} = 2x + \frac{x^2}{100}$$

इस प्रकार यह कहा जा सकता है कि यदि किसी त्रिभुज की तीनों भुजाएँ x% बढ़ा दी जाएँ तो इसके क्षेत्रफल में $\dfrac{x(x+200)}{100}\%$ या $\left(2x + \dfrac{x^2}{100}\right)\%$ की वृद्धि होती है।

***आयत के लिए* (For Rectangle)**

मान लिया कि आयत की भुजाएँ a एवं b हैं।

$\therefore$ क्षेत्रफल $A = ab$

मान लिया कि इसकी भुजाएँ x% बढ़कर

$\frac{a(100+x)}{100}$ एवं $\frac{b(100+x)}{100}$ हो जाती हैं।

$$\therefore \text{ नया क्षेत्रफल } A_1 = ab\left(\frac{100+x}{100}\right)^2 = \left(\frac{100+x}{100}\right)^2 A$$

$$\therefore \text{ क्षेत्रफल में प्रतिशत वृद्धि } = \frac{A_1 - A}{A} \times 100$$

$$= \frac{\left[\left(\frac{100+x}{100}\right)^2 - 1\right]A}{A} \times 100$$

$$= \left[\left(\frac{100+x}{100}\right)^2 - 1\right] \times 100 = \frac{x(x+200)}{100}$$

$$= 2x + \frac{x^2}{100}$$

इस प्रकार यह कहा जा सकता है कि यदि किसी आयत की भुजाओं में x% की वृद्धि होती हो तो उसका क्षेत्रफल $\frac{x(x+200)}{100}\%$ या $\left(2x + \frac{x^2}{100}\right)\%$ बढ़ जाता है। यह वृद्धि त्रिभुज के क्षेत्रफल में होने वाली वृद्धि के बराबर है।

नोट: अब वर्ग एवं समचतुर्भुज के लिए अलग से गणना करने की कोई जरूरत नहीं है। इससे भी वही परिणाम मिलेगा।

आइए वृत्त के संदर्भ में विचार करें

मान लिया कि किसी वृत्त की त्रिज्या r मीटर है।

$\therefore$ इसका क्षेत्रफल $A = \pi r^2$

त्रिज्या में x% की वृद्धि होने पर त्रिज्या $= \frac{r(100+x)}{100}$

$$\therefore \text{ नया क्षेत्रफल } A_1 = \pi\left[\frac{r(100+x)}{100}\right]^2$$

$$= \pi r^2\left[\frac{(100+x)}{100}\right]^2 = \left[\frac{100+x}{100}\right]^2 A$$

$\therefore$ क्षेत्रफल में प्रतिशत वृद्धि $= \frac{A_1 - A}{A} \times 100$

$$= \left[\left(\frac{100+x}{100}\right)^2 - 1\right]100 = \frac{x(x+200)}{100} = 2x + \frac{x^2}{100}$$

इस प्रकार, यह पता चलता है कि उपर्युक्त सूत्र वृत्त पर भी लागू होता है।

निष्कर्ष: बतौर निष्कर्ष यह कहा जा सकता है कि उपर्युक्त सूत्र सभी प्रकार की द्विविमीय आकृतियों पर लागू होता है।

एक उदाहरण लीजिए। यदि किसी आयत की भुजाएँ 10 प्रतिशत बढ़ा दी जाएँ तो क्षेत्रफल में कितने प्रतिशत की वृद्धि होगी?

हल: अभीष्ट उत्तर $= 2\times10 + \frac{(10)^2}{100} = 20 + 1 = 21\%$

नोट: 1. यदि भुजाएँ 10% घटा दी जाएँ तो क्षेत्रफल पर क्या प्रभाव पड़ेगा? (स्वयं प्रयास करें।)

2. यदि किसी त्रिविमीय वस्तु की भुजाएँ x% बढ़ा दी जाएँ तो उसके आयतन में कितनी वृद्धि होगी? (स्वयं प्रयास करें।)

प्रमेय: किसी परीक्षा में x% छात्र अंग्रेजी में असफल हो जाते हैं एवं y% गणित में असफल हो जाते हैं। यदि z% छात्र दोनों विषयों में असफल होते हों तो दोनों विषयों में उत्तीर्ण होने वाले छात्रों का प्रतिशत $= 100 - (x + y - z)$

प्रमाण: केवल अंग्रेजी में असफल होने वाले छात्रों का प्रतिशत $= (x - z)\%$

केवल गणित में असफल होने वाले छात्रों का प्रतिशत $= (y - z)\%$

दोनों विषयों में असफल होने वाले छात्रों का प्रतिशत $= z\%$ (दिया हुआ है)

$\therefore$ दोनों विषयों में उत्तीर्ण होनेवाले छात्रों का प्रतिशत $= 100 - [(x - z) + (y - z) + z]$

$= 100 - (x + y - z)$

उदा. 62: किसी परीक्षा में 40% छात्र गणित में असफल हो जाते हैं, 30% अंग्रेजी में असफल हो जाते हैं तथा 10% दोनों में असफल हो जाते हैं। दोनों विषयों में उत्तीर्ण होने वाले छात्रों का प्रतिशत बताएँ।

हल: उपर्युक्त प्रमेय के अनुसार,

अभीष्ट $\% = 100 - (40 + 30 - 10) = 40\%$

नोट: हमलोगों को इस बात की जानकारी होनी चाहिए कि निम्नलिखित समुच्चय पद्धति को पूर्ण करता है।

100% = केवल अंग्रेजी में असफल होने वाले छात्रों का प्रतिशत

+ केवल गणित में असफल होने वाले छात्रों का प्रतिशत

– दोनों विषयों में असफल होने वाले छात्रों का प्रतिशत

+ दोनों विषयों में सफल होने वाले छात्रों का प्रतिशत

उदा. 63: एक व्यक्ति अपनी आय का 75% खर्च करता है। उसकी आय में 20% की वृद्धि होती है तथा साथ ही उसके खर्च में भी 10% की वृद्धि होती है। उसके बचत में प्रतिशत वृद्धि ज्ञात करें।

हल : ***विस्तार विधि* (Detail Method) :**

माना कि उसकी मासिक आय = 100 रु.

इस प्रकार, वह 75 रु. खर्च करता है एवं 25 रु. बचाता है।

उसकी बढ़ी हुई आय = 100 + 100 का 20% = 120 रु.

उसका बढ़ा हुआ खर्च = 75 + 75 का 10% = 82.50 रु.

∴ उसकी नयी बचत = 120 – 82.50 = 37.50 रु.

$$\therefore \text{ उसकी बचत में प्रतिशत वृद्धि } = \frac{37.50-25}{25}\times 100 = 50\%$$

***द्रुत विधि* (Quicker Method) :**

$$\text{बचत में प्रतिशत वृद्धि } = \frac{20\times 100-10\times 75}{100-75} = \frac{1250}{25} = 50\%$$

उदा. 64: नमक एवं पानी के एक घोल में नमक का भार 15% है। इसका 30 कि. ग्रा. पानी वाष्पीकृत हो जाता है एवं अब घोल में 20% नमक है। नमक की मूल मात्रा ज्ञात करें।

हल: माना कि प्रारंभ में x कि. ग्रा. घोल था।

$$\text{नमक की मात्रा } = x \text{ का } 15\% = \frac{15x}{100} = \frac{3x}{20} \text{ कि. ग्रा}$$

अब, वाष्पीकरण के बाद केवल (x – 30) कि. ग्रा. मिश्रण में $\frac{3x}{20}$ कि. ग्रा. नमक है।

$$\text{या, } (x-30) \text{ का } 20\% = \frac{3x}{20};$$

$$\text{या, } \frac{x-30}{5} = \frac{3x}{20} \text{ या, } 15x = 20x - 600$$

$$\therefore \quad x = \frac{600}{5} = 120 \text{ कि. ग्रा.}$$

***द्रुत विधि* (Quicker Method) :**

$$\text{घोल की मूल मात्रा } = \text{ वाष्पीकृत पानी की मात्रा } \left(\frac{\text{नमक की अंतिम प्रतिशत मात्रा}}{\text{नमक की प्रतिशत मात्रा में अंतर}}\right)$$

$$= 30\left(\frac{20}{20-15}\right) = 120 \text{ कि. ग्रा.}$$

उदा. 65: एक पुस्तकालय में 20% किताबें हिंदी में हैं, बचे हुए का 50% अंग्रेजी में हैं तथा बचे हुए का 30% फ्रेंच में हैं। शेष 6300 किताबें क्षेत्रीय भाषाओं में हैं। पुस्तकालय में किताबों की कुल कितनी संख्या है?

हल : मान लिया कि पुस्तकालय में कुल x किताबें हैं।

तो, हिंदी में किताबों की संख्या = x का 20% = $\frac{x}{5}$

बचे हुए का 50% = $\left(x-\frac{x}{5}\right)$ का 50% = $\frac{4x}{5}$ का 50% = $\frac{2x}{5}$ अंग्रेजी मे हैं

अब, बचे हुए का 30%,

अर्थात् $\left\{x-\left(\frac{x}{5}+\frac{2x}{5}\right)\right\}$ का 30% = $\frac{2x}{5}$ का 30% = $\frac{3x}{25}$ किताबें फ्रेंच में हैं।

अब, $x-\left(\frac{x}{5}+\frac{2x}{5}+\frac{3x}{25}\right) = 6300$

या, $\frac{7x}{25} = 3600$

$\therefore\ x = \frac{6300\times 25}{7} = 22500$

***द्रुत विधि* (Quicker Method) :**

किताबों की कुल संख्या = $6300\left(\frac{100}{100-20}\right)\left(\frac{100}{100-50}\right)\left(\frac{100}{100-30}\right)$

$= \frac{6300\times 100\times 100\times 100}{80\times 50\times 70} = 22500$

उदा. 66: दूध और पानी के 40 लिटर मिश्रण में 10% पानी है। नए मिश्रण में पानी की मात्रा को 20% करने के लिए कितना पानी मिलाना पड़ेगा?

हल: पानी की मात्रा = 40% का 10% = 4 लिटर

अब, मान लिया कि x लिटर पानी मिलाया जाता है।

तो, $4+x = (40+x)$ का 20%

या, $4+x = \frac{40+x}{5}$

या, $20+5x = 40+x$

$\therefore\ x = \frac{20}{4} = 5$ लिटर

***द्रुत विधि* (Quicker Method) :**

मिलाया गया पानी की मात्रा = $\frac{40(20-10)}{(100-20)}$ = 5 लिटर

उदा. 67: एक उत्पादक एक वस्तु पर 25% मुनाफा कमाता है, एक थोक विक्रेता 20% मुनाफा कमाता है एवं खुदरा विक्रेता 28% मुनाफा कमाता है। यदि खुदरा विक्रेता इसे 48 रु. में बेचता है तो उस वस्तु का उत्पादन मूल्य ज्ञात करें।

हल: भिन्न के नियम से,

उत्पादन मूल्य = $48\left(\frac{100}{100+28}\right)\left(\frac{100}{100+20}\right)\left(\frac{100}{100+25}\right)$

$= 48\left(\frac{100}{128}\right)\left(\frac{100}{120}\right)\left(\frac{100}{125}\right)$ = 25 रु.

उदा. 68: 9 लिटर की 50% अम्लीय द्रव को 30% अम्लीय द्रव बनाने हेतु पानी की कितनी मात्रा मिलानी चाहिए?

हल : ***विस्तार विधि* (Detail Method) :**

9 लिटर में अम्ल की मात्रा = 9 का 50% = 4.5 लिटर

माना कि x लिटर पानी मिलाया जाता है।

अब, (9 + x) लिटर तनु द्रव (diluted liquid) में 4.5 लिटर अम्ल है।

प्रश्नानुसार,

(9 + x) का 30% = 4.5

या, $\frac{3}{10}(9+x)$ = 4.5 या, 27 + 3x = 45

या, 3x = 18

$\therefore$ x = $\frac{18}{3}$ = 6 लिटर

***द्रुत विधि* (Quicker Method) :**

मिलाए जाने वाले पानी की मात्रा = $\frac{9(50-30)}{30}$ = 6 लिटर

उदा. 69: किसी परीक्षा में विद्यालय 'A' से सफल विद्यार्थियों का प्रतिशत, परीक्षा में बैठने वाले कुल विद्यार्थियों का 70% है। विद्यालय 'B' से परीक्षा में बैठने वाले विद्यार्थियों की संख्या विद्यालय 'A' से परीक्षा में बैठने वाले विद्यार्थियों की संख्या से 20% अधिक है। एवं विद्यालय 'B' से कुल सफल विद्यार्थियों की संख्या, विद्यालय 'A' से कुल सफल विद्यार्थियों की संख्या से 50% अधिक है। विद्यालय 'B' से परीक्षा में सफल विद्यार्थियों का प्रतिशत परीक्षा में बैठने वाले कुल विद्यार्थियों का कितना है?

1) 30% 2) 70% 3) 87.5% 4) 78.5% 5) इनमें से कोई नहीं

हल : ***विस्तार विधि* (Detail Method) :**

माना कि विद्यालय 'A' से 100 विद्यार्थी परीक्षा में बैठते हैं

तो, प्रश्नानुसार,

विद्यालय	परीक्षा में बैठने वालों की संख्या	सफल होने वालों की संख्या
A →	100	70
B →	120	70 + 70 का 50% = 105

$\therefore$ अभीष्ट प्रतिशत $= \frac{105}{120} \times 100 = 87.5\%$

***द्रुत विधि* (Quicker Method) :**

$$\text{अभीष्ट } \% = \frac{70 \times (100+50)\%}{100 \times (100+20)\%} \times 100$$

$$= \frac{70 \times 150}{100 \times 120} \times 100$$

$$= 87.5\%$$

उदा. 70: बालू एवं लोहे के 1 कि. ग्रा. मिश्रण में 20% लोहा है। लोहे की मात्रा को 10% करने के लिए मिश्रण में कितनी मात्रा में बालू मिलाना होगा?

1) 1 कि. ग्रा. 2) 200 ग्रा. 3) 800 ग्रा. 4) 1.8 कि. ग्रा.

5) इनमें से कोई नहीं

हल: 1 कि. ग्रा. मिश्रण में लोहा = 1000 ग्रा. का 20% = 200 ग्रा.

एवं बालू = 800 ग्रा.

माना कि x ग्रा. बालू मिश्रण में मिलाया जाता है।

तो, कुल मिश्रण = (1000 + x) ग्रा.

अब, लोहे का प्रतिशत $= \frac{200}{(1000+x)} \times 100 = 10$ (दिया हुआ है)

या, $1000 + x = 2000$

$\therefore$ x = 1000 ग्रा. = 1 कि. ग्रा.

***द्रुत विधि* (Quicker Method):**

A एवं B के एक मिश्रण में, जब वस्तु B की खास मात्रा वस्तु A की प्रतिशत मात्रा को परिवर्तित करने के लिए मिलाया जाता है तो मिलाए जाने वाली वस्तु B की मात्रा

$$= \left[\frac{\text{A का पहले का प्रतिशत मान}}{\text{A का परिवर्तित प्रतिशत मान}} \times \text{मिश्रण की मात्रा}\right] - \text{मिश्रण की मात्रा}$$

∴ उपर्युक्त प्रश्न में, मिलाए जाने वाले बालू की

अभीष्ट मात्रा = $\frac{20}{10}\times 1-1=2-1=1$ कि. ग्रा.

उदा. 71: दो मित्र राम एवं श्याम के भारों का अनुपात 4 : 5 है। राम का भार 10% बढ़ जाता है तथा राम एवं श्याम का कुल भार 82.8 कि. ग्रा. हो जाता है। और इस प्रकार राम एवं श्याम के कुल भार में 15% की वृद्धि होती है। श्याम के भार में कितने प्रतिशत की वृद्धि होती है?

हल : माना कि राम एवं श्याम का भार क्रमशः 4x एवं 5x है।

अब, प्रश्नानुसार,

$\frac{4x\times 110}{100}$ + श्याम का नया भार = 82.8 ..... (i)

एवं $\frac{(4x+5x=)9x\times 115}{100}$ = 82.8 ..... (ii)

(ii) से, x = 8

(i) में, x का मान रखने पर

श्याम का नया भार = (82.8 – 35.2=) 47.6

∴ श्याम के भार में प्रतिशत वृद्धि = $\left(\frac{47.6-40}{40}\times 100\right)$ = 19%

***द्रुत विधि* (Quicker Method) :**

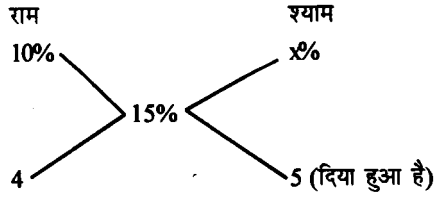
यदि श्याम के भार में x प्रतिशत की वृद्धि होती है तो एक निम्नलिखित संबंध प्राप्त होता है।

$4(100+10)+5(100+x) = (4+5)[100+15]$ ..... (*)

या, $440+5(100+x) = 1035$

या, $100+x = 119$ ∴ $x = 19$

***मिश्रण विधि* (Method of Alligation) :**



या, $\frac{x-15}{15-10}=\frac{4}{5}$

या, x – 15 = 4

∴ x = 19