

Chapter – 3

முக்கோணவியல்

Ex 3.1

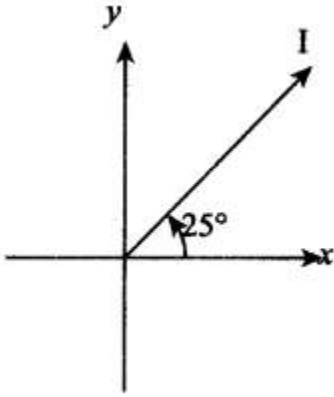
கேள்வி 1.

கொடுக்கப்பட்ட கோணங்கள் எந்தக் காற்பகுதியில் அமையும் என்பதைக் காண்க.

- (i) 25°
- (ii) 825°
- (iii) -55°
- (iv) 328°
- (v) -230°

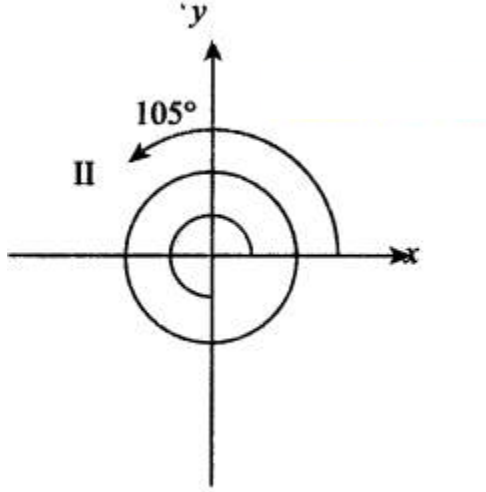
தீர்வு:

(i) 25° = முதல் காற்பகுதியில் அமையும்.

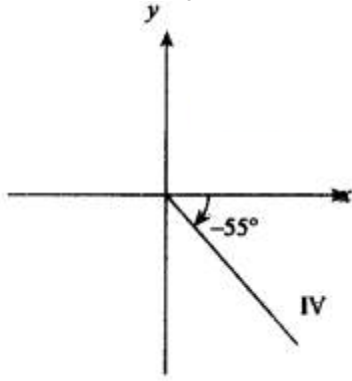


(ii) 825°

$825^\circ = 2 \times 360^\circ + 105^\circ = (2 \times 360^\circ) + (90^\circ + 15^\circ) =$ இரண்டாம் காற்பகுதியில் அமையும்.

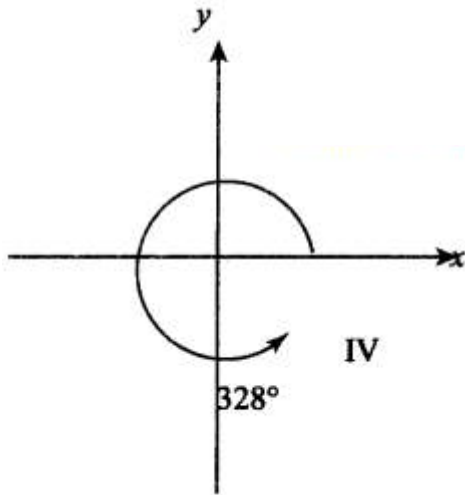


(iii) $-55^\circ =$ நான்காம் காற்பகுதியில் அமையும்.



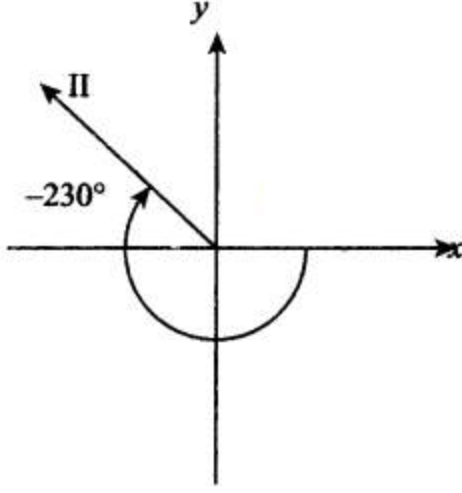
(iv) 328°

$328^\circ = 270^\circ + 58^\circ =$ நான்காம் காற்பகும் அமையும்.



(v) -230°

$-230^\circ = -180^\circ + (-50^\circ)$ = இரண் காற்பகுதியில் அமையும்.



கேள்வி 2.

$0 \leq \theta \leq 360^\circ$ -ல் கொடுக்கப்பட்ட ஒவ்வொரு

கோணத்திற்கான இணை முனையக் கோணத்தை காண்க.

(i) 395°

(ii) 525°

(iii) 1150°

(iv) -270°

(V) -450

தீர்வு:

(i) $395^\circ = 360^\circ + 35^\circ$

$\Rightarrow 395^\circ - 35^\circ = 360^\circ$

$\therefore 395^\circ$ -க்கான இணை முனையக் கோணம் $= 35^\circ$

(ii) 525°

$525^\circ = 360^\circ + 165^\circ$

$\Rightarrow 525^\circ - 165^\circ = 360^\circ$

$\therefore 525^\circ$ -க்கான இணை முனையக் கோணம் $= 165^\circ$

(iii) 1150°

$$\Rightarrow 1150^\circ = 360^\circ + 360^\circ + 360^\circ + 70^\circ$$

$\therefore 1150^\circ$ -க்கான இணை முனையக் கோணம் $= 70^\circ$

(iv) -270°

$$\Rightarrow -270^\circ = -360^\circ + 90^\circ$$

$$\Rightarrow -270^\circ - 90^\circ = -360^\circ$$

$\therefore -270^\circ$ -க்கான இணை முனையக் கோணம் $= 90^\circ$

(v) -450°

$$\Rightarrow -450^\circ = -720^\circ + 270^\circ$$

$$\Rightarrow -450^\circ - 270^\circ = -720^\circ$$

$\therefore 450^\circ$ - க்கான இணை முனையக் கோணம் $= 270^\circ$

கேள்வி 3.

$a \cos \theta - b \sin \theta = c$ எனில், $a \sin \theta + b \cos \theta = \pm \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}$ என்பதை நிறுவுக.

தீர்வு:

$a \cos \theta - b \sin \theta = c$ எனத் தரப்பட்டுள்ளது

$$-(a \cos \theta - b \sin \theta)^2 = (c)^2$$

$$\Rightarrow a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta - 2ab \cos \theta \sin \theta = C^2$$

$$\Rightarrow a^2 (1 - \sin^2 \theta) + b^2 (1 - \cos^2 \theta) - 2ab \cos \theta \sin \theta = c^2$$

$$\Rightarrow a^2 - a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta - 2ab \cos \theta \sin \theta = c^2$$

$$\Rightarrow -a^2 \sin^2 \theta - b^2 \cos^2 \theta - 2ab \cos \theta \sin \theta = c^2 - a^2 - b^2$$

$$\Rightarrow a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta + 2ab \cos \theta \sin \theta = a^2 + b^2 - c^2$$

$$\Rightarrow (a \sin \theta + b \cos \theta)^2 = a^2 + b^2 - c^2$$

$$\Rightarrow a \sin \theta + b \cos \theta = \pm \sqrt{a^2 + b^2 - c^2}$$

கேள்வி 4.

$\sin \theta + \cos \theta = m$ எனில், $\cos^6 \theta + \sin^6 \theta = \frac{4-3(m^2-1)^2}{4}$ என நிறுவுக.
(இங்கு $m^2 \leq 2$)

தீர்வு:

$\sin \theta + \cos \theta = m$ எனத் தரப்பட்டுள்ளது

$$\text{LHS} = \cos^6 \theta + \sin^6 \theta$$

$$= (\cos^2 \theta)^3 + (\sin^2 \theta)^3$$

$$\therefore (a + b)^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$= (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)$$

$$(\cos^4 \theta - \cos^2 \theta \sin^2 \theta + \sin^4 \theta)$$

$$= 1 (\cos^4 \theta - \cos^2 \theta \sin^2 \theta + \sin^4 \theta) [\because \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1]$$

$$= (\cos^2 \theta)^2 + (\sin^2 \theta)^2 - 3\cos^2 \theta \sin^2 \theta [\because a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab]$$

$$= 1 - 3 \sin^2 \theta \cos^2 \theta$$

$$\text{RHS} = \frac{4 - 3(m^2 - 1)^2}{4}$$

$$= \frac{4 - 3((\cos \theta + \sin \theta)^2 - 1)^2}{4}$$

$$\because 1 = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta$$

$$= \frac{4 - 3(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta + 2\cos \theta \sin \theta - (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta))^2}{4}$$

$$= \frac{4 - 3(2\cos \theta \sin \theta)^2}{4} = \frac{4 - 12\cos^2 \theta \sin^2 \theta}{4}$$

$$= 1 - 3\cos^2 \theta \sin^2 \theta = \text{LHS} \quad \therefore \text{LHS} = \text{RHS}$$

கேள்வி 5.

$$\frac{\cos^4 \alpha}{\cos^2 \beta} + \frac{\sin^4 \alpha}{\sin^2 \beta} = 1, \text{ எனில்,}$$

$$(i) \sin^4 \alpha + \sin^4 \beta = 2 \sin^2 \alpha \sin^2 \beta$$

$$(ii) \frac{\cos^4 \beta}{\cos^2 \alpha} + \frac{\sin^4 \beta}{\sin^2 \alpha} = 1 \text{ என நிறுவுக.}$$

தீர்வு:

$$\frac{\cos^4 \alpha}{\cos^2 \beta} + \frac{\sin^4 \alpha}{\sin^2 \beta} = 1$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \frac{\cos^4 \alpha \cdot \sin^2 \beta}{\cos^2 \beta \cdot \sin^2 \beta} + \frac{\cos^2 \beta \cdot \sin^4 \alpha}{\cos^2 \beta \sin^2 \beta} = 1 \\
&\Rightarrow \cos^4 \alpha \sin^2 \beta + \sin^4 \alpha \cos^2 \beta = \cos^2 \beta \sin^2 \beta \\
&\Rightarrow \cos^4 \alpha (1 - \cos^2 \beta) + \cos^2 \beta (1 - \cos^2 \alpha)^2 \\
&\quad = \cos^2 \beta (1 - \cos^2 \beta) \\
&\Rightarrow \cos^4 \alpha - \cancel{\cos^4 \alpha \cos^2 \beta} + \cos^4 \beta - 2 \cos^2 \alpha \cos^2 \beta \\
&\quad + \cancel{\cos^4 \alpha \cos^2 \beta} = \cos^2 \beta - \cos^4 \beta \\
&\Rightarrow \cos^4 \alpha - 2 \cos^2 \alpha \cos^2 \beta + \cos^4 \beta = 0 \\
&\Rightarrow (\cos^2 \alpha - \cos^2 \beta)^2 = 0 \\
&\Rightarrow \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta = 0 \\
&\Rightarrow \cos^2 \alpha = \cos^2 \beta \\
&\Rightarrow 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \sin^2 \beta \\
&\Rightarrow \sin^2 \alpha = \sin^2 \beta
\end{aligned}$$

$$(i) \sin^4 \alpha + \sin^4 \beta = 2 \sin^2 \alpha \sin^2 \beta$$

$$\text{LHS} = \sin^4 \alpha + \sin^4 \beta$$

$$= (\sin^2 \alpha \sin^2 \beta)^2 + 2 \sin^2 \alpha \sin^2 \beta$$

$$[\because \sin^2 \alpha = \sin^2 \beta]$$

(மேற்கண்ட சமன்பாடு (2) - இல் இருந்து)

$$\text{LHS} = 2 \sin^2 \alpha \sin^2 \beta = \text{RHS}$$

எனவே நிரூபிக்கப்பட்டது

$$(ii) \frac{\cos^4 \beta}{\cos^2 \alpha} + \frac{\sin^4 \beta}{\sin^2 \alpha} = 1$$

$$\begin{aligned}
\text{LHS} &= \frac{\cos^4 \beta}{\cos^2 \alpha} + \frac{\sin^4 \beta}{\sin^2 \alpha} \\
&= \frac{\cos^2 \beta \cdot \cos^2 \beta}{\cos^2 \alpha} + \frac{\sin^2 \beta \cdot \sin^2 \beta}{\sin^2 \alpha} \\
&= \frac{\cancel{\cos^2 \beta} \cancel{\cos^2 \alpha}}{\cancel{\cos^2 \alpha}} + \frac{\cancel{\sin^2 \beta} \cancel{\sin^2 \alpha}}{\cancel{\sin^2 \alpha}} \\
&= \cos^2 \beta + \sin^2 \beta = 1 = \text{RHS}
\end{aligned}$$

எனவே நிரூபிக்கப்பட்டது.

கேள்வி 6.

$y = \frac{2 \sin \alpha}{1 + \cos \alpha + \sin \alpha}$ எனில், $\frac{1 - \cos \alpha + \sin \alpha}{1 + \sin \alpha} = y$ என நிறுவுக.

தீர்வு:

$$\begin{aligned}
 y &= \frac{2 \sin \alpha}{1 + \cos \alpha + \sin \alpha} \\
 &= \frac{2 \sin \alpha}{(1 + \sin \alpha) + (\cos \alpha)} \times \frac{(1 + \sin \alpha) - (\cos \alpha)}{(1 + \sin \alpha) - (\cos \alpha)} \\
 &= \frac{2 \sin \alpha (1 + \sin \alpha - \cos \alpha)}{(1 + \sin \alpha)^2 - (\cos \alpha)^2} \\
 &= \frac{2 \sin \alpha (1 + \sin \alpha - \cos \alpha)}{(1 + \sin \alpha)^2 - (1 - \sin^2 \alpha)} \\
 &= \frac{2 \sin \alpha (1 + \sin \alpha - \cos \alpha)}{(1 + \sin \alpha)^2 - (1 - \sin \alpha)(1 + \sin \alpha)} \\
 &= \frac{2 \sin \alpha (1 + \sin \alpha - \cos \alpha)}{(1 + \sin \alpha)(1 + \sin \alpha - 1 + \sin \alpha)} \\
 &= \frac{2 \sin \alpha (1 + \sin \alpha - \cos \alpha)}{(1 + \sin \alpha)(2 \sin \alpha)} \\
 &= \frac{1 + \sin \alpha - \cos \alpha}{1 + \sin \alpha}
 \end{aligned}$$

எனவே நிரூபிக்கப்பட்டது.

கேள்வி 7.

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, $x = \sum_{n=0}^{\infty} \cos^{2n} \theta$; $y = \sum_{n=0}^{\infty} \sin^{2n} \theta$ மற்றும்

$z = \sum_{n=0}^{\infty} \cos^{2n} \theta \sin^{2n} \theta$ எனில், $xyz = x + y + z$ என

நிறுவுக. (குறிப்பு : $1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \frac{1}{1-x}$,

$|x| < 1$ -ஐப் பயன்படுத்தலாம்.)

தீர்வு:

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} \cos^{2n} \theta = \cos^0 \theta + \cos^2 \theta + \cos^4 \theta + \dots$$

$$= 1 + \cos^2 \theta + \cos^4 \theta + \dots$$

$$= 1 + (\cos \theta)^2 + (\cos^2 \theta)^2 + \dots = \frac{1}{1 - \cos^2 \theta}$$

$$\left(\because 1 + x + x^2 + \dots = \frac{1}{1-x} \right) \quad |x| < 1$$

$$= \frac{1}{\sin^2 \theta} \quad \dots(1)$$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \sin^{2n} \theta = \sin^0 \theta + \sin^2 \theta + \sin^4 \theta + \dots$$

$$= 1 + \sin^2 \theta + \sin^4 \theta + \dots$$

$$= 1 + (\sin \theta)^2 + (\sin^2 \theta)^2 + \dots = \frac{1}{1 - \sin^2 \theta}$$

$$= \frac{1}{\cos^2 \theta} \quad \dots(2)$$

$$z = \sum_{n=0}^{\infty} \cos^{2n} \theta \sin^{2n} \theta$$

$$= \cos^0 \theta \sin^0 \theta + \cos^2 \theta \sin^2 \theta + \cos^4 \theta \sin^4 \theta + \dots$$

$$= 1 + (\sin \theta \cos \theta)^2 + (\sin^2 \theta \cos^2 \theta)^2 + \dots$$

$$= \frac{1}{1 - \sin^2 \theta \cos^2 \theta} \quad \dots(3)$$

$$\therefore x + y + z = \frac{1}{\sin^2 \theta} + \frac{1}{\cos^2 \theta} + \frac{1}{1 - \sin^2 \theta \cos^2 \theta}$$

$$[\because (1) + (2) + (3)]$$

$$\cos^2 \theta (1 - \sin^2 \theta \cos^2 \theta) + \sin^2 \theta (1 - \sin^2 \theta \cos^2 \theta)$$

$$= \frac{\cos^2 \theta (1 - \sin^2 \theta \cos^2 \theta) + \sin^2 \theta (1 - \sin^2 \theta \cos^2 \theta) + \sin^2 \theta \cos^2 \theta}{\sin^2 \theta \cos^2 \theta (1 - \sin^2 \theta \cos^2 \theta)}$$

$$\begin{aligned}
& \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \cos^4 \theta + \sin^2 \theta \\
&= \frac{-\sin^4 \theta \cos^2 \theta + \sin^2 \theta \cos^2 \theta}{\sin^2 \theta \cos^2 \theta (1 - \sin^2 \theta \cos^2 \theta)} \\
&= \frac{1 - (\sin^2 \theta \cos^4 \theta + \sin^4 \theta \cos^2 \theta) + \sin^2 \theta \cos^2 \theta}{\sin^2 \theta \cos^2 \theta (1 - \sin^2 \theta \cos^2 \theta)} \\
& \quad (\because \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1) \\
&= \frac{1 - \sin^2 \theta \cos^2 \theta (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + \sin^2 \theta \cos^2 \theta}{\sin^2 \theta \cos^2 \theta (1 - \sin^2 \theta \cos^2 \theta)} \\
&= \frac{[1 - (\cancel{\sin^2 \theta \cos^2 \theta})(1) + (\cancel{\sin^2 \theta \cos^2 \theta})]}{\sin^2 \theta \cos^2 \theta (1 - \sin^2 \theta \cos^2 \theta)} \\
&= \frac{1}{\sin^2 \theta \cos^2 \theta (1 - \sin^2 \theta \cos^2 \theta)} \\
&= \frac{1}{\sin^2 \theta} \times \frac{1}{\cos^2 \theta} \times \frac{1}{1 - \sin^2 \theta \cos^2 \theta} = x \times y \times z
\end{aligned}$$

$\therefore x + y + z = xyz$ எனவே நிரூபிக்கப்பட்டது.

கேள்வி 8.

$\tan^2 \theta = 1 - k^2$ எனில், $\sec \theta + \tan^3 \theta \operatorname{cosec} \theta = (2 - k^2)^{3/2}$ என நிறுவுக.
மேலும் இவற்றை நிறைவு செய்யும் k இன் மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு:

$$\begin{aligned}
& \tan^2 \theta = 1 - k^2, 1\text{-ஐ இருபுறமும் கூட்டி} \\
& 1 + \tan^2 \theta = 1 - k^2 + 1 \\
& \quad (\because \sec^2 \theta = 2 - k^2) \\
& \text{இருபுறமும் } \left(\frac{3}{2}\right)^{\text{வது மடங்கு காண}} \\
& \Rightarrow (\sec^2 \theta)^{\frac{3}{2}} = (2 - k^2)^{\frac{3}{2}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad \sec^3 \theta &= (2 - k^2)^{\frac{3}{2}} \\
\Rightarrow \quad \sec^3 \theta &= (2 - k^2)^{\frac{3}{2}} \\
\Rightarrow \quad \sec \theta \cdot \sec^2 \theta &= (2 - k^2)^{\frac{3}{2}} \\
\Rightarrow \quad \sec \theta (1 + \tan^2 \theta) &= (2 - k^2)^{\frac{3}{2}} \\
&\quad (\because 1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta) \\
\Rightarrow \quad \sec \theta + \sec \theta \tan^2 \theta &= (2 - k^2)^{\frac{3}{2}} \\
\Rightarrow \quad \sec \theta + \frac{1}{\cos \theta} \cdot \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} &= (2 - k^2)^{\frac{3}{2}} \\
\Rightarrow \quad \sec \theta + \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \times \frac{1}{\sin \theta} \cdot \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} &= (2 - k^2)^{\frac{3}{2}} \\
&\quad (2 \text{ வது உறுப்பை } \sin \theta \text{ ஆல் பெருக்கி வகுக்க)} \\
\Rightarrow \quad \sec \theta + \tan \theta \cdot \operatorname{cosec} \theta \cdot \tan^2 \theta &= (2 - k^2)^{\frac{3}{2}} \\
\Rightarrow \quad \sec \theta + \operatorname{cosec} \theta \tan^3 \theta &= (2 - k^2)^{\frac{3}{2}} \\
&\quad \text{எனவே நிரூபிக்கப்பட்டது.}
\end{aligned}$$

கேள்வி 9.

$\sec \theta + \tan \theta = p$ எனில், $\sec \theta$, $\tan \theta$, பற்றும் $\sin \theta$ ஆகியவற்றின் மதிப்பை p இன் வாயிலாகக் காண்க.

தீர்வு:

$$\begin{aligned}
\sec \theta + \tan \theta &= p && \dots(1) \\
\sec^2 \theta - \tan^2 \theta &= 1 \text{ (சூத்திரம்)} \\
(\sec \theta + \tan \theta)(\sec \theta - \tan \theta) &= 1 \\
p(\sec \theta - \tan \theta) &= 1 && \dots(2) \\
\sec \theta - \tan \theta &= \frac{1}{p} && \dots(3) \\
(1) + (2) \Rightarrow (\sec \theta + \tan \theta) + (\sec \theta - \tan \theta) &= p + \frac{1}{p}
\end{aligned}$$

$$2 \sec \theta = \frac{p^2 + 1}{p}$$

$$\sec \theta = \frac{p^2 + 1}{2p} \quad \dots(3)$$

$$(1) - (2) \Rightarrow (\sec \theta + \tan \theta) - (\sec \theta - \tan \theta) = p - \frac{1}{p}$$

$$2 \tan \theta = \frac{p^2 - 1}{p}$$

$$\tan \theta = \frac{p^2 - 1}{2p} \quad \dots(4)$$

$$(4) \div (3) \Rightarrow \frac{\tan \theta}{\sec \theta} = \frac{p^2 - 1}{2p} \div \frac{p^2 + 1}{2p}$$

$$\frac{\frac{\sin \theta}{\cos \theta}}{\frac{1}{\cos \theta}} = \frac{p^2 - 1}{\cancel{2p}} \times \frac{\cancel{2p}}{p^2 + 1}$$

$$\sin \theta = \frac{p^2 - 1}{p^2 + 1} \quad \dots(5)$$

(3), (4), (5)- லிருந்து தீர்வு பெறப்பட்டது.

கேள்வி 10.

$\cot \theta (1 + \sin \theta) = 4m$ பிற்றும் $\cot \theta (1 - \sin \theta) = 4n$ எனில், $(m^2 - n^2)^2 = mn$ என நிறுவுக.

தீர்வு:

$$\cot \theta (1 + \sin \theta) = 4m$$

$$\Rightarrow \cot \theta + \cot \theta \sin \theta = 4m$$

$$\Rightarrow \cot \theta - \cot \theta \sin \theta = 4n$$

$$\Rightarrow \cot \theta + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \times \sin \theta = 4m$$

$$\Rightarrow \cot \theta - \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \times \sin \theta = 4n$$

$$\Rightarrow \cot \theta + \cos \theta = 4m \dots\dots (1)$$

$$\cot \theta - \cos \theta = 4n \dots\dots(2)$$

$$\cot \theta - \cos \theta = 4n \dots\dots(2)$$

(1), (2) ஐ வர்க்கப்படுத்தி (1)-லிருந்து (2) ஐக் கழிக்க

$$(\cot \theta + \cos \theta)^2 - (\cot \theta - \cos \theta)^2 = (4m)^2 - (4n)^2 \cot^2 \theta + 2 \cot \theta \cdot \cos \theta + \cos^2 \theta - (\cot^2 \theta - 2 \cot \theta \cos \theta + \cos^2 \theta) - 16(m^2 - n^2)$$

$$\Rightarrow \cancel{\cot^2 \theta} + 2 \cot \theta \cos \theta + \cancel{\cos^2 \theta} - \cancel{\cot^2 \theta} + 2 \cot \theta$$

$$\times \cos \theta - \cos^2 \theta = 16(m^2 - n^2)$$

$$\Rightarrow \cancel{4} \cot \theta \cos \theta = \cancel{16}^4 (m^2 - n^2)$$

$$\Rightarrow \cot \theta \cdot \cos \theta = 4(m^2 - n^2)$$

இருபுறமும் வர்க்கப்படுத்த

$$\Rightarrow \cot^2 \theta \cos^2 \theta = 16(m^2 - n^2)^2$$

$$\Rightarrow \frac{\cos^2 \theta \cdot \cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} = 16(m^2 - n^2)^2$$

$$\Rightarrow \frac{\cos^4 \theta}{\sin^2 \theta} = 16(m^2 - n^2)^2 \dots(3)$$

$$(1) \times (2) \Rightarrow$$

$$(\cot \theta + \cos \theta)(\cot \theta - \cos \theta) = 16mn$$

$$\Rightarrow \cot^2 \theta - \cos^2 \theta = 16mn$$

$$\Rightarrow \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} - \cos^2 \theta = 16mn$$

$$\Rightarrow \frac{\cos^2 \theta - \cos^2 \theta \tan^2 \theta}{\sin^2 \theta} = 16mn$$

$$\Rightarrow \frac{\cos^2 \theta (1 - \sin^2 \theta)}{\sin^2 \theta} = 16mn$$

$$\Rightarrow \frac{\cos^2 \theta \cdot \cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} = 16mn$$

$$\Rightarrow \frac{\cos^4 \theta}{\sin^2 \theta} = 16mn \dots(4)$$

$$(3), (4) \text{ லிருந்து } \cancel{16}(m^2 - n^2)^2 = \cancel{16}mn$$

$$\Rightarrow (m^2 - n^2)^2 = mn.$$

கேள்வி 11.

$\operatorname{cosec} \theta - \sin \theta = a^3$ பிற்றும் $\sec \theta - \cos \theta = b^3$ எனில், $a^2 b^2 (a^2 + b^2) = 1$ என நிறுவுக.

தீர்வு:

$$a^3 = \operatorname{cosec} \theta - \sin \theta = \frac{1}{\sin \theta} - \sin \theta ;$$

$$= \frac{1 - \sin^2 \theta}{\sin \theta} = \frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta}$$

$$a = \left(\frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta} \right)^{\frac{1}{3}}$$

$$b^3 = \sec \theta - \cos \theta = \frac{1}{\cos \theta} - \cos \theta = \frac{1 - \cos^2 \theta}{\cos \theta}$$

$$= \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta}$$

$$b = \left(\frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta} \right)^{\frac{1}{3}}$$

$$\text{LHS} = a^2 b^2 (a^2 + b^2)$$

$$= \left(\frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta} \right)^{\frac{2}{3}} \cdot \left(\frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta} \right)^{\frac{2}{3}} \left[\left[\frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta} \right]^{\frac{2}{3}} + \left[\frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta} \right]^{\frac{2}{3}} \right]$$

$$= \frac{\cos^{\frac{4}{3}} \theta \sin^{\frac{4}{3}} \theta}{\sin^{\frac{2}{3}} \theta \cos^{\frac{2}{3}} \theta} \left[\frac{\cos^{\frac{4}{3}} \theta}{\sin^{\frac{2}{3}} \theta} + \frac{\sin^{\frac{4}{3}} \theta}{\cos^{\frac{2}{3}} \theta} \right]$$

$$= \cos^{\frac{4}{3} - \frac{2}{3}} \theta \cdot \sin^{\frac{4}{3} - \frac{2}{3}} \theta \left[\frac{\cos^{\frac{4}{3}} \theta \cdot \cos^{\frac{2}{3}} \theta + \sin^{\frac{4}{3}} \theta \cdot \sin^{\frac{2}{3}} \theta}{\sin^{\frac{2}{3}} \theta \cdot \cos^{\frac{2}{3}} \theta} \right]$$

$$= \cos^{\frac{2}{3}} \theta \cdot \sin^{\frac{2}{3}} \theta \left[\frac{\cos^{\frac{6}{3}} \theta + \sin^{\frac{6}{3}} \theta}{\cancel{\sin^{\frac{2}{3}} \theta} \cdot \cancel{\cos^{\frac{2}{3}} \theta}} \right]$$

$$= \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1 = \text{RHS.}$$

$$\text{LHS} = \text{RHS} \Rightarrow a^2 b^2 (a^2 + b^2) = 1.$$

கேள்வி 12.

$a \sec \theta - c \tan \theta = b$ பிற்றும் $b \sec \theta + d \tan \theta = c$ ஆகிய சமன்பாடுகளிலிருந்து θ ஐ நீக்குக.

தீர்வு:

$$a \sec \theta - c \tan \theta = b \quad \dots(1)$$

$$b \sec \theta + d \tan \theta = c \quad \dots(2)$$

$$(1) \times b \rightarrow ab \sec \theta - bc \tan \theta = b^2 \quad \dots(3)$$

$$(-) \quad (-) \quad (-)$$

$$(2) \times a \rightarrow ab \sec \theta + ad \tan \theta = ac \quad \dots (4)$$

$$(3) - (4) \Rightarrow -\tan \theta [bc + ad] = b^2 - ac$$

$$-\tan \theta = \frac{b^2 - ac}{bc + ad}$$

$$\tan \theta = \frac{ac - b^2}{bc + ad}$$

$$(1) \times d \rightarrow ad \sec \theta - cd \tan \theta = bd \quad \dots (5)$$

$$(2) \times c \rightarrow bc \sec \theta + cd \tan \theta = c^2 \quad \dots (6)$$

$$(5) + (6) \Rightarrow (ad + bc) \sec \theta = bd + c^2$$

$$\sec \theta = \frac{bd + c^2}{ad + bc}$$

$$\sec^2 \theta - \tan^2 \theta = 1$$

$$\Rightarrow \left(\frac{bd + c^2}{ad + bc} \right)^2 - \left(\frac{ac - b^2}{bc + ad} \right)^2 = 1$$

$$\Rightarrow \frac{(bd + c^2)^2}{(ad + bc)^2} - \frac{(ac - b^2)^2}{(bc + ad)^2} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{(bd + c^2)^2 - (ac - b^2)^2}{(ad + bc)^2} = 1$$

$$\Rightarrow (bd + c^2)^2 - (ac - b^2)^2 = (ad + bc)^2$$

$$\Rightarrow (c^2 + bd)^2 = (ad + bc)^2 + (ac - b^2)^2$$

எனவே θ நீக்கப்பட்டுள்ளது.

Ex 3.2

கேள்வி 1.

பின்வரும் கோணங்களை ஆரையன் அளவுகளில் கூறுக.

- (i) 30°
- (ii) 135°
- (iii) 205°
- (iv) 150°
- (v) 330°

தீர்வு:

- (i) $30^\circ = 30 \times \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{6}$ ஆரையன்கள்
- (ii) $135^\circ = 135 \times \frac{\pi}{180} = \frac{3\pi}{4}$ ஆரையன்கள்
- (iii) $-205^\circ = -205 \times \frac{\pi}{180} = -\frac{41\pi}{36}$ ஆரையன்கள்
- (iv) $150^\circ = 150 \times \frac{\pi}{180} = \frac{5\pi}{6}$ ஆரையன்கள்
- (v) $330^\circ = 330 \times \frac{\pi}{180} = \frac{11\pi}{6}$ ஆரையன்கள்

கேள்வி 2.

பின்வரும் கோணத்தின் ஆரையன் அளவை பாகை அளவுகளில் காண்க.

- (i) $\frac{\pi}{3}$
- (ii) $\frac{\pi}{9}$
- (iii) $\frac{2\pi}{5}$
- (iv) $\frac{7\pi}{3}$
- (v) $\frac{10\pi}{9}$

தீர்வு:

- (i) $\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3} \times \frac{180}{\pi} = 60^\circ$
- (ii) $\frac{\pi}{9} = \frac{\pi}{9} \times \frac{180}{\pi} = 20^\circ$
- (iii) $\frac{2\pi}{5} = \frac{2\pi}{5} \times \frac{180}{\pi} = 72^\circ$

$$(iv) \frac{7\pi}{3} = \frac{7\pi}{3} \times \frac{180}{\pi} = 420^\circ$$

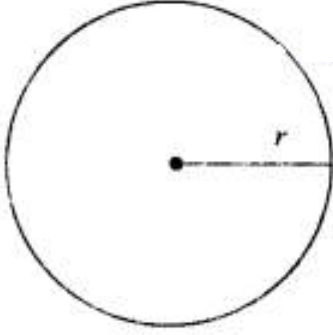
$$(v) \frac{10\pi}{9} = \frac{10\pi}{9} \times \frac{180}{\pi} = 200^\circ$$

கேள்வி 3.

ஒரு தடகள வீரர் 1 கி.மீ-ஐக் கடக்க வட்ட ஓடு பாதையை 5 முறை சுற்றி வரவேண்டும் எனில் வட்ட ஓடு பாதையின் ஆரம் என்ன?

தீர்வு:

தடகள வீரர் கடக்க வேண்டிய தூரம் = 1 கிமீ



1 கி.மீ கடக்க சுற்றிய சுற்றுகள் = 5

$$5 \times 2\pi r = 1 \text{ கிமீ} = 1000 \text{ மீ}$$

$$5 \times 2 \times \frac{22}{7} \times r = 1000 \text{ மீ}$$

$$r = 1000 \times \frac{1}{10} \times \frac{7}{22} = \frac{700}{22}$$

$$r = 31.818$$

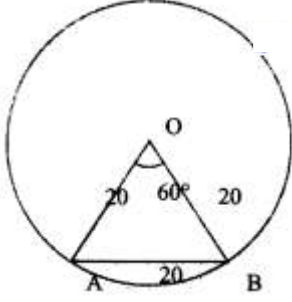
ஓடு பாதையின் ஆரம் $r = 31.82$ மீ.

கேள்வி 4.

ஒரு வட்டத்தின் விட்டம் 40 செ.மீ., ஒரு நாணின் நீளம் 20 செ.மீ. எனில், சிறிய வில்லின் நீளத்தைக் காண்க.

தீர்வு:

வட்டத்தின் விட்டம் = 40 செ.மீ.



$$AB = 20$$

$$OA = OB = AB = 20 \text{ செ.மீ.}$$

$$\therefore \Delta OAB\text{-ல் } \angle AOB = 60^\circ$$

($\because \Delta OAB$ ஒரு சமபக்க முக்கோணம்)

$$\theta = \frac{\pi}{3}$$

$$\theta = \frac{l}{r} \Rightarrow l = r\theta$$

$$= 20 \times \frac{\pi}{3} = 20 \times \frac{22}{7} \times \frac{1}{3}$$

$$= 20.95 \text{ செ.மீ. (தோராயமாக).}$$

கேள்வி 5.

100 செ.மீ. ஆரமுடைய வட்டத்தில், 22 செ.மீ. நீளமுடைய வட்டவில் மையத்தில் தாங்கும் கோணத்தைப் பாகையில் காண்க.

தீர்வு:

$$\text{ஆரம்} = 100 \text{ செ.மீ.}$$

$$\text{வில்லின் நீளம்} = 22 \text{ செ.மீ.}$$

வில். l ஆனது மையத்தில் தாங்கும் கோணம் θ என்க

$$\therefore \theta = \frac{l}{r} = \frac{22}{100}$$

$$\Rightarrow \pi \text{ ஆரையன்} = 180^\circ$$

$$\Rightarrow 1 \text{ ஆரையன்} = \frac{180^\circ}{\pi}$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{180}{\pi} \times \frac{22}{100}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad \theta &= 18 \times \frac{7}{22} \times \frac{22}{10} \\
\Rightarrow \quad \theta &= \frac{63}{5} = 12^\circ \frac{3}{5} \left[\frac{3}{5} = \frac{3}{5} \times 60' = 36' \right] \\
\Rightarrow \quad \theta &= 12^\circ 36'.
\end{aligned}$$

கேள்வி 6.

10 அடி ஆரம் கொண்ட ஒரு வட்டத்தில், $\theta = 41^\circ$ -ஐ மையக் கோணமாகக் கொண்ட வட்ட வில்லின் நீளம் காண்க.

தீர்வு:

மையக்கோணம் $\theta = 41^\circ$

ஆரம் $r = 10$

அடி வில்லின் நீளம் l என்க

$$\begin{aligned}
\theta &= \frac{l}{r} \Rightarrow l = r\theta \\
&= 10 \times 41 \times \frac{\pi}{180} \\
&= \cancel{10} \times 41 \times \frac{11}{7} \times \frac{1}{\cancel{180}_9} \\
&= \frac{41 \times 11}{63}
\end{aligned}$$

வில்லின் நீளம் $l = 7.158 = 7.16$ அடி.

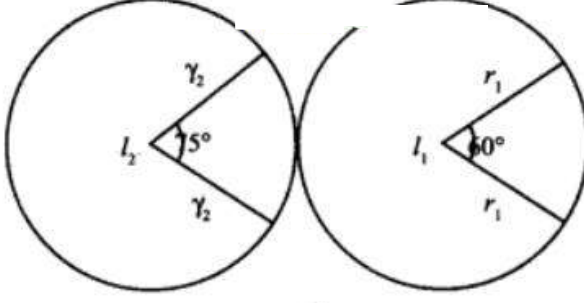
கேள்வி 7.

இரண்டு வட்டங்களில், ஒரே அளவு கொண்ட வில்லின் நீளங்கள் 60° மற்றும் 75° -ஐ மையக் கோணங்களாகத் தாங்கும்போது, அவ்விரு வட்டங்களுக்கான ஆரங்களின் விகிதம் காண்க.

தீர்வு:

இரண்டு வட்டங்களில் ஒரே அளவு கொண்ட வில்லின் நீளங்கள் தாங்கும் கோணங்கள் $60^\circ, 75^\circ$ அவற்றின் ஆரங்கள் r_1, r_2 என்க.

$$\theta = 60^\circ = 60 \times \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{3} \text{ ஆரையன்}$$



$$\Rightarrow \theta = \frac{l}{r} \Rightarrow l = \theta_1 r_1 = 60^\circ \times r_1$$

$$l = \frac{\pi}{3} r_1 \quad \dots(1)$$

$$\theta_2 = 75^\circ$$

$$\Rightarrow = \frac{15}{36} \times \frac{\pi}{180} = \frac{15}{36} \pi \text{ ஆரையன்}$$

$$\theta_2 = \frac{l}{r_2} \Rightarrow l = \theta_2 r_2 = 75^\circ r_2 = \frac{15}{36} \pi r_2$$

$$l = \frac{5}{12} \pi r_2 \quad \dots(2)$$

$$(1), (2) \text{ லிருந்து } \frac{\pi}{3} r_1 = \frac{5}{12} \pi r_2$$

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{5}{4} \Rightarrow r_1 : r_2 = 5:4.$$

கேள்வி 8.

ஒரு வட்ட கோணப் பகுதியின் சுற்றளவும் அதே ஆரமுடைய அரைவட்டத்தின் வில்லின் நீளமும் சமம் எனில், அவ்வட்டக் கோணப் பகுதியின் மையக் கோணத்தைப் பாகை, கலை மற்றும் விகலையில் காண்க.

தீர்வு:

வட்டத்தின் ஆரம் = r என்க

வட்டகோணப்பகுதியின் சுற்றளவு = $l + 2r$

$$\begin{aligned}
l &= r\theta, \\
&= r\theta + 2r \\
\pi r &= r(\theta + 2) \\
\Rightarrow 2 + \theta &= \pi \\
\theta = (\pi - 2) \text{ ஆரையன்} &= (\pi - 2) \times \frac{180}{\pi} \\
&= 180 - \frac{360}{\pi} = 180 - 360 \times \frac{7}{22} \\
&= 180 - 114^\circ 32' 44'' \\
&= 65^\circ 28' 16'' \\
\frac{360}{\pi} &= 360 \times \frac{7}{22} = 114^\circ \frac{12}{22} \\
&= 114^\circ \left(\frac{12}{22} \times 60 \right) \\
&= 114^\circ 32' \left(\frac{16}{22} \times 60'' \right) \\
&= 114^\circ 32' 44'' \\
180^\circ - \frac{360}{\pi} &= 180^\circ - 114^\circ 32' 44'' \\
&= 65^\circ 27' 16''
\end{aligned}$$

கேள்வி 9.

ஒரு விமானத்தை இயக்கும் முன்தள்ளி ஒரு ! நிமிடத்திற்கு 1000 முறை சுழல்கிறது. முன் தள்ளியின் முனைப்புள்ளி சுழல்கின்றபோது ஒரு விநாடிக்கு எத்துனை பாகைகள் கிடைக்கும் என்பதைக் காண்க.

தீர்வு:

ஒரு முழு சுற்று = 360°

1 நிமிடத்தில் நகரும் கோணம் = $360^\circ \times 1000$

60° விநாடிகளில் நகரும் கோணம் = $360^\circ \times 1000$

$$\therefore 1 \text{ விநாடியில் நகரும் கோணம்} = \frac{360^\circ \times 1000}{60}$$

$$= 6000^\circ$$

கேள்வி 10.

66 கி.மீ/மணி நேர வேகத்தில் 1500 மீ. ஆரம் கொண்ட ஒரு வட்டப் பாதையில் ஒரு தொடர்வண்டி இயக்கப்படுகிறது எனில், 20 நிமிடத்தில் அது கடக்கும் கோணத்தைக் காண்க.

தீர்வு:

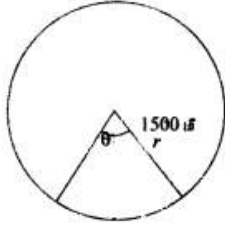
1 மணி நேரத்தில் தொடர்வண்டி கடக்கும் தூரம் = 66 கி.மீ.

$\Rightarrow (60 \times 60)$ விநாடிகளில் கடக்கும் தூரம் = 66 கி.மீ.

1 கி.மீ. = 1000 மீ.

$$\Rightarrow 1 \text{ விநாடியில் கடக்கும் தூரம்} = \frac{66 \times 1000}{60 \times 60}$$

$$= 11 \times 10 = \frac{110 \text{ மீ}}{6}$$



$$20 \text{ விநாடிகளில் கடக்கும் தூரம்} = 20 \times \frac{110}{6} = \frac{1100}{3}$$

$$l = \frac{1100}{3} \text{ மீ}$$

20 விநாடிகளில் கடக்கும் கோணம் = θ

$$\theta = \frac{l}{r} = \frac{1100}{3} \times \frac{1}{1500}$$

$$\theta = \frac{11}{45} \text{ ஆரையன்}$$

$$\therefore \theta = \frac{11}{45} \times \frac{180^\circ}{\pi}$$

$$= \frac{11}{45} \times 180 \times \frac{7}{22} = 14^\circ.$$

கேள்வி 11.

8 செ.மீ. ஆரம் மற்றும் 6 மி.மீ. தடிமன் கொண்ட ஒரு வட்ட வடிவ உலோகத் தட்டினை உருக்கி, 16 செ.மீ. ஆரம் மற்றும் 4 மி.மீ. தடிமன் உடைய ஒரு வட்டக் கோணப் பகுதியை உருவாக்கினால் அவ்வட்டக் கோணப் பகுதியின் கோண அளவை காண்க.

தீர்வு:

வட்ட வடிவ தகட்டின் ஆரம் = 8 செ.மீ. ;

தடிமன் = 6 மி.மீ.

= 6/10 செ.மீ.

உருளையின் கன அளவு = $\pi r^2 h$

வட்ட கோணப் பகுதியின் கன அளவு = $\frac{\theta}{360} \pi r^2 h$

$$\pi r^2 h = \frac{\theta}{360} \times \pi l^2 h$$

[∴ இரு கன அளவுகளும் சமம் என தரப்பட்டுள்ளது.]

$$8 \times 8 \times \frac{6}{10} = \frac{\theta}{360} \times 16 \times 16 \times \frac{4}{10}$$



$$\Rightarrow \theta = \frac{8 \times 8 \times \frac{6}{10} \times 360}{16 \times 16 \times \frac{4}{10}}$$

$$\Rightarrow \theta = 3 \times 45$$

$$\Rightarrow \theta = 135^\circ$$

$$\Rightarrow \theta = 135 \times \frac{\pi}{180} = \frac{3\pi}{4}$$

Ex 3.3

கேள்வி 1.

மதிப்புகளைக் காண்க.

(i) $\sin (480^\circ)$

(ii) $\sin (-1110^\circ)$

(iii) $\cos (300^\circ)$

(iv) $\tan (1050^\circ)$

(v) $\cot (660^\circ)$

(vi) $\tan \left(\frac{19\pi}{3} \right)$

(vii) $\sin \left(-\frac{11\pi}{3} \right)$.

தீர்வு:

(i) $\sin (480^\circ)$

$$= \sin(360^\circ + 120^\circ) = \sin (120^\circ)$$

$$= \sin(90^\circ + 30^\circ) = \cos 30^\circ = \sqrt{3}/2$$

(ii) $\sin (-1110^\circ) = -\sin (1110^\circ)$

(ஏனென்றால் $\sin \theta$ என்பது ஒற்றைச்சார்பு)

$$= -\sin (1080 + 30^\circ)$$

$$= -\sin (3 \times 360 + 30^\circ) = -\sin 30^\circ$$

$$= -1/2$$

(iii) $\cos (300^\circ) = \cos (360 - 60^\circ) = \cos 60^\circ = 1/2$

(iv) $\tan (1050^\circ) = \tan (1080 - 30^\circ)$

$$= \tan (3 \times 360 - 30^\circ) = -\tan 30^\circ$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

(v) $\cot (660^\circ) = \cot (2 \times 360^\circ - 60^\circ) = -\cot 60^\circ$

$$= -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$(vi) \tan \left(\frac{19\pi}{3} \right) = \tan \frac{19}{3} \times 180^\circ$$

$$= \tan (19 \times 60^\circ) = \tan (1140^\circ)$$

$$= \tan (3 \times 360 + 60^\circ)$$

$$= \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

$$(vii) \sin \left(-\frac{11\pi}{3} \right) = \sin (-11 \times 60^\circ) = \sin (-660^\circ)$$

$$= -\sin(2 \times 360^\circ - 60^\circ)$$

$$= -(-\sin 60^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

கேள்வி 2.

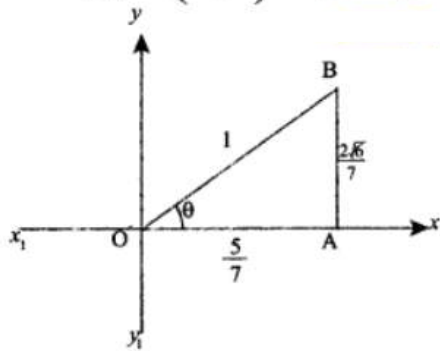
திட்டநிலையில் உள்ள 9-ன் முனையப் பக்கம் $\left(\frac{5}{7}, \frac{2\sqrt{6}}{7} \right)$ என்ற புள்ளி செல்கிறது எனில் θ -ன் ஆறு முக்கோணவியல் சார்பின் மதிப்புகளைக் காண்க.

தீர்வு:

$B\left(\frac{5}{7}, \frac{2\sqrt{6}}{7} \right)$ என்ற புள்ளி 8-ன் முனையப் பக்கம் என்பதால்

$$OB^2 = OA^2 + AB^2$$

$$= \left(\frac{5}{7} \right)^2 + \left(\frac{2\sqrt{6}}{7} \right)^2 = \frac{25}{49} + \frac{4 \times 6}{49}$$



$$\begin{aligned}
&= \frac{25+24}{49} = \frac{49}{49} = 1 \quad \therefore \Rightarrow OB = 1 \\
\sin \theta &= \frac{\text{எதிர்பக்கம்}}{\text{கர்ணம்}} = \frac{2\sqrt{6}}{7} \\
\cos \theta &= \frac{\text{அடுத்துள்ள பக்கம்}}{\text{கர்ணம்}} = \frac{OA}{OB} = \frac{5}{7} \\
\tan \theta &= \frac{\text{எதிர்பக்கம்}}{\text{அடுத்துள்ள பக்கம்}} = \frac{2\sqrt{6}}{5} = \frac{2}{\frac{5}{\sqrt{6}}} \\
\operatorname{cosec} \theta &= \frac{1}{\sin \theta} = \frac{7}{2\sqrt{6}} \\
\sec \theta &= \frac{1}{\cos \theta} = \frac{7}{5} \\
\tan \theta &= \frac{y}{x} = \frac{2\sqrt{6}}{5} \Rightarrow \cot \theta = \frac{1}{\tan \theta} = \frac{5}{2\sqrt{6}}
\end{aligned}$$

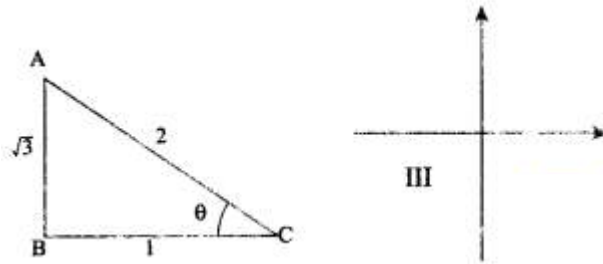
கேள்வி 3.

பின்வரும் சார்பின் மதிப்பிற்கு மற்ற து முக்கோணவியல் சார்புகளைக் காண்க.

- (i) $\cos \theta = -1/2$, θ மூன்றாம் காற்பகுதியில் உள்து.
- (ii) $\cos \theta = 2/3$, θ முதல் காற்பகுதியில் உள்ளது
- (iii) $\sin \theta = -2/3$, θ நான்காம் காற்பகுதியில் உள்ளது
- (iv) $\tan \theta = -2$, θ இரண்டாம் காற்பகுதியில் உள்து.
- (v) $\sec \theta = 13/5$, θ நான்காம் காற்பகுதியில் உள்து.

தீர்வு:

- (i) $\cos \theta = -1/2$, θ மூன்றாம் காற்பகுதியில் உள்து.



$$\Delta ABC = 2$$

$$AB^2 = AC^2 - BC^2 = 4 - 1 = 3$$

$$AB = \sqrt{3}$$

θ - III-ம் கால் பகுதியில் அமைவதால் $\tan \theta$, $\csc \theta$ மிகையாகும்.

$$\sin \theta = \sqrt{3}/2$$

$$\tan \theta = \sqrt{3}$$

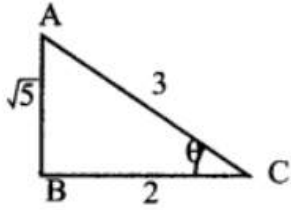
$$\operatorname{cosec} \theta = \frac{1}{\sin \theta} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta} = -2$$

$$\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

(ii) $\cos \theta = \frac{2}{3}$, θ முதல் கால் பகுதியில் அமையும்

$$AB = \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{9 - 4} = \sqrt{5}$$



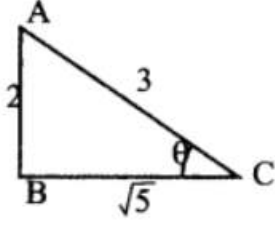
θ முதல் கால் பகுதியில் அமைவதால் அனைத்து முக்கோணவியல் விகிதங்களும் மிகையாகும்.

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{5}}{3}, \tan \theta = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\operatorname{cosec} \theta = \frac{3}{\sqrt{5}}, \cot \theta = \frac{2}{\sqrt{5}}; \sec \theta = \frac{3}{2}$$

(iii) $\sin \theta = \frac{-2}{3}$, θ , IV-ம் கால் பகுதியில் அமையும்.

$$BC = \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{9 - 4} = \sqrt{5}$$



θ , IV-ம் கால் பகுதியில் அமைவதால் $\cos \theta$, $\sec \theta$ | மிகையாகும்.

$$\therefore \cos \theta = \frac{\sqrt{5}}{3}, \tan \theta = \frac{\frac{-2}{\cancel{3}}}{\frac{\sqrt{5}}{\cancel{3}}} = \frac{-2}{\sqrt{5}}$$

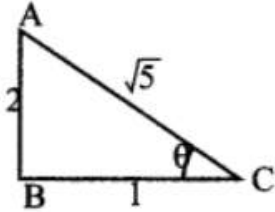
$$\sec \theta = \frac{3}{\sqrt{5}}, \cot \theta = \frac{-\sqrt{5}}{2}, \operatorname{cosec} \theta = \frac{-3}{2}$$

(iv) $\tan \theta = -2$, θ , இரண்டாம் கால் பகுதியில் அமையும்.

$$AC = \sqrt{2^2 + 1^2}$$

$$= \sqrt{4 + 1}$$

$$= \sqrt{5}$$



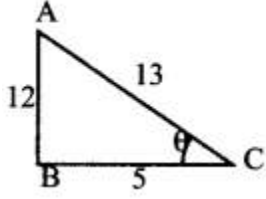
θ , II-ம் கால் பகுதியில் அமைவதால் $\sin \theta$, $\operatorname{cosec} \theta$ இவை மிகையாகும்.

$$\sin \theta = \frac{2}{\sqrt{5}}, \cos \theta = \frac{-1}{\sqrt{5}}, \operatorname{cosec} \theta = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\sec \theta = -\sqrt{5}, \cot \theta = -\frac{1}{2}$$

(v) $\sec \theta = 13/5$, θ ,

IV-ம் கால் பகுதியில் அமையும்.



$$\frac{1}{\cos \theta} = \frac{13}{5}$$
$$\Rightarrow \cos \theta = \frac{5}{13}$$

$$AB = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12$$

θ -ம் நான்காம் கால் பகுதியில் அமைவதால் $\cos \theta$, $\sec \theta$ இவை மிகையாகும்.

$$\sin \theta = \frac{-12}{13}$$

$$\operatorname{cosec} \theta = \frac{-13}{12}$$

$$\tan \theta = \frac{-12}{5}$$

$$\cot \theta = \frac{-5}{12}$$

கேள்வி 4.

நிரூபிக்க :
$$\frac{\cot (180^\circ + \theta) \sin (90^\circ - \theta) \cos (-\theta)}{\sin (270^\circ + \theta) \tan (-\theta) \operatorname{cosec} (360^\circ + \theta)}$$
$$= \cos^2 \theta \cot \theta$$

தீர்வு:

$$\text{L.H.S} = \frac{\cot (180^\circ + \theta) \sin (90^\circ - \theta) \cos (-\theta)}{\sin (270^\circ + \theta) \tan (-\theta) \operatorname{cosec} (360^\circ + \theta)}$$

$$\cot (180^\circ + \theta) = \cot \theta \quad \sin (270^\circ + \theta) = -\cos \theta$$

$$\sin \theta (90^\circ - \theta) = \cos \theta \quad \tan (-\theta) = -\tan \theta$$

$$\cos \theta (-\theta) = \cos \theta \quad \operatorname{cosec} (360^\circ + \theta) = \operatorname{cosec} \theta$$

$$\begin{aligned} \text{L.H.S} &= \frac{\cot \theta \cdot \cos \theta \cdot \cos \theta}{(-\cos \theta)(-\tan \theta)(\operatorname{cosec} \theta)} = \frac{\frac{\cos \theta}{\sin \theta} \cdot \cos \theta \cdot \cos \theta}{\cancel{\cos \theta} \cdot \frac{\sin \theta}{\cancel{\cos \theta}} \cdot \frac{1}{\cancel{\sin \theta}}} \\ &= \frac{\cos^3 \theta}{\sin \theta} = \cos^2 \theta \cdot \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \cos^2 \theta \cdot \cot \theta. \end{aligned}$$

கேள்வி 5.

$\sin^2 \theta = 3/4$, என்ற சமன்பாட்டை நிறைவு செய்யும் 0° இக்கும் 360° இக்கும் இடைப்பட்ட அனைத்துக் கோணங்களைக் காண்க.

தீர்வு:

$$\sin^2 \theta = \frac{3}{4} \Rightarrow \pm \sqrt{\frac{3}{4}}$$

$$\Rightarrow \sin \theta = \sqrt{\frac{3}{4}}, \sin \theta = \frac{-\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \sin \theta = \sin 60^\circ \text{ அல்லது}$$

$$\sin \theta = -\sin 60^\circ$$

$$\Rightarrow \theta = 60^\circ$$

$$\theta = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

கேள்வி 6.

$$\sin^2 \frac{\pi}{18} + \sin^2 \frac{\pi}{9} + \sin^2 \frac{7\pi}{18} + \sin^2 \frac{4\pi}{9} = 2 \text{ எனக்காண்பி.}$$

தீர்வு:

$$\begin{aligned}
\text{LHS} &= \sin^2 \frac{\pi}{18} + \sin^2 \frac{\pi}{9} + \sin^2 \frac{7\pi}{18} + \sin^2 \frac{4\pi}{9} \\
&= \sin^2 \left[\frac{\pi}{18} + \frac{\pi}{9} + \frac{7\pi}{18} + \frac{4\pi}{9} \right] \\
&= \sin^2 \left[\frac{\pi}{18} \times \frac{180}{\pi} \right] + \sin^2 \left[\frac{\pi}{9} \times \frac{180}{\pi} \right] \\
&\quad + \sin^2 \left[\frac{7\pi}{18} \times \frac{180}{\pi} \right] + \sin^2 \left[\frac{4\pi}{9} \times \frac{180}{\pi} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sin^2 10^\circ + \sin^2 20^\circ + \sin^2 70^\circ + \sin^2 80^\circ \\
&= [\sin (90^\circ - 80^\circ)]^2 + [\sin (90^\circ - 70^\circ)]^2 + \sin^2 70^\circ + \sin^2 80^\circ \\
&= \cos^2 80^\circ + \cos^2 70^\circ + \sin^2 70^\circ + \sin^2 80^\circ \\
&= 1 + 1 = 2 = \text{R.H.S}
\end{aligned}$$

Ex 3.4

கேள்வி 1.

$0 < x < \pi/2$, $0 < y < \pi/2$, $\sin x = 15/17$, மற்றும் $\cos y = 12/13$,

(i) $\sin (x + y)$

(ii) $\cos (x - y)$

(iii) $\tan (x + y)$

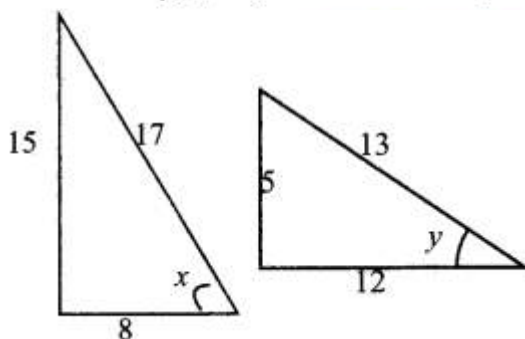
ஆகியவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க.

தீர்வு:

$$0 < x < \frac{\pi}{2}, 0 < y < \frac{\pi}{2}$$

(x, y) | கால் பகுதியில் அமைவதால் இவை அனைத்து முக்கோணவியல் விகிதங்களும் மிகையாகும்

$$\begin{aligned}\sqrt{17^2 - 15^2} &= \sqrt{289 - 225} = \sqrt{64} = 8 \\ \sqrt{13^2 - 12^2} &= \sqrt{169 - 144} \\ &= \sqrt{25} = 5\end{aligned}$$



$$\sin x = \frac{15}{17}$$

$$\sin y = \frac{5}{13}$$

$$\cos x = \frac{8}{17}$$

$$\cos y = \frac{12}{13}$$

$$\tan x = \frac{15}{8}$$

$$\tan y = \frac{5}{12}$$

$$\operatorname{cosec} x = \frac{17}{15}$$

$$\cot y = \frac{12}{5}$$

$$\sec x = \frac{17}{8}$$

$$\operatorname{cosec} y = \frac{13}{5}$$

$$\cot x = \frac{8}{15}$$

$$\sec y = \frac{13}{12}$$

$$\begin{aligned}\text{(i) } \sin(x + y) &= \sin x \cos y + \cos x \sin y \\ &= \frac{15}{17} \times \frac{12}{13} + \frac{8}{17} \times \frac{5}{13} = \frac{180}{221} + \frac{40}{221} = \frac{220}{221}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{(ii) } \cos(x - y) &= \cos x \cos y + \sin x \sin y \\ &= \frac{8}{17} \times \frac{12}{13} + \frac{15}{17} \times \frac{5}{13} = \frac{96}{221} + \frac{75}{221} = \frac{171}{221}\end{aligned}$$

(iii) $\tan (x + y)$

$$= \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y} = \frac{\frac{15}{8} + \frac{5}{12}}{1 - \frac{15}{8} \times \frac{5}{12}} = \frac{\frac{180+40}{96}}{\frac{96-75}{96}} = \frac{220}{21}$$

கேள்வி 2.

$0 < A < \frac{\pi}{2}$, $0 < B < \frac{\pi}{2}$, $\sin A = \frac{3}{5}$ மற்றும்

$\cos B = \frac{9}{41}$ எனில் (i) $\sin (A + B)$ (ii) $\cos (A - B)$ ஆகியவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க.

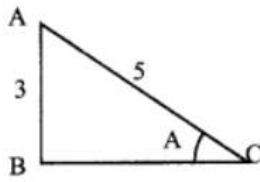
தீர்வு:

$0 < A < \frac{\pi}{2}$, $0 < B < \frac{\pi}{2}$

A, B, முதல் கால் பகுதியில் அமைவன.

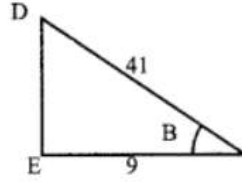
$\therefore$ அனைத்து முக்கோண விகிதங்களும் மிகையாகும்.

$$BC = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{25 - 9} \quad DE = \sqrt{41^2 - 9^2} = 40 \\ = \sqrt{16} = 4$$



$$\sin A = \frac{3}{5}$$

$$\cos A = \frac{4}{5}$$



$$\sin B = \frac{40}{41}$$

$$\cos B = \frac{9}{41}$$

$$(i) \sin (A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$$

$$= \frac{3}{5} \times \frac{9}{41} + \frac{4}{5} \times \frac{40}{41} \\ = \frac{27}{205} + \frac{160}{205} = \frac{187}{205}$$

$$(ii) \cos (A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$$

$$= \frac{4}{5} \times \frac{9}{41} + \frac{3}{5} \times \frac{40}{41} = \frac{36}{205} + \frac{120}{205} = \frac{156}{205}$$

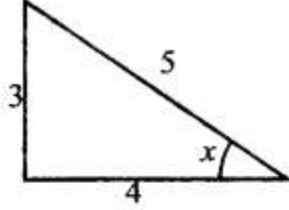
கேள்வி 3.

$\cos x = -4/5$, $\pi < x < 3\pi/2$ மற்றும் $\sin y = -24/25$, $\pi < y < 3\pi/2$ எனில் $\cos(x - y)$ இன் மதிப்பைக் காண்க.

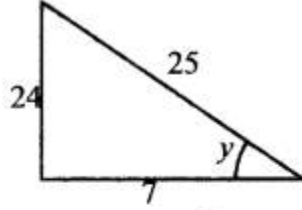
தீர்வு:

$\pi < x < 3\pi/2$, x , III-ம் கால் பகுதியில் அமைவதால் $\cot x$, $\tan x$ மிகையாகும்.

$\pi < y < 3\pi/2$, y -ம் III-ம் கால் பகுதியில் அமைவதால் $\cot y$, $\tan y$ மட்டுமே மிகையாகும்.



$$\sin x = \frac{-3}{5}$$
$$\cos x = \frac{-4}{5}$$



$$\sin y = \frac{-24}{25}$$
$$\cos y = \frac{-7}{25}$$

$$\begin{aligned}\cos(x - y) &= \cos x \cos y + \sin x \sin y \\ &= \left(\frac{-4}{5}\right) \times \left(\frac{-7}{25}\right) + \left(\frac{-3}{5}\right) \times \left(\frac{-24}{25}\right) \\ &= \frac{28}{125} + \frac{72}{125} = \frac{100}{125} = \frac{4}{5}\end{aligned}$$

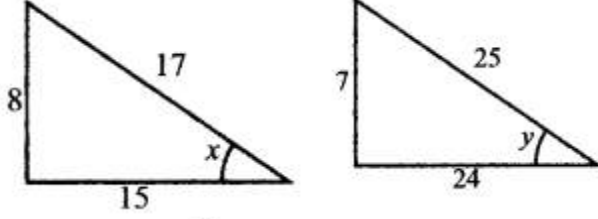
கேள்வி 4.

$\sin x = 8/17$, $0 < x < \pi/2$ மற்றும் $\cos y = -24/25$, $\pi < y < 3\pi/2$ எனில் $\sin(x - y)$ இன் மதிப்பைக் காண்க

தீர்வு:

$0 < x < \pi/2$, x முதல் கால் பகுதியில் அமைவதால் அனைத்து முக்கோணவியல் விகிதங்களும் மிகையாகும்.

$\pi < y < 3\pi/2$, y ஆனது IIIவது கால் பகுதியில் அமைவதால் $\tan y$, $\cot y$ மட்டுமே மிகையாகும்.



$$\sin x = \frac{8}{17}$$

$$\cos x = \frac{15}{17}$$

$$\sin y = \frac{-7}{25}$$

$$\cos y = \frac{-24}{25}$$

$$\therefore \sin (x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$

$$= \left(\frac{8}{17}\right)\left(\frac{-24}{25}\right) - \left(\frac{15}{17}\right)\left(\frac{-7}{25}\right) = \frac{-192}{425} + \frac{105}{425} = \frac{-87}{425}$$

கேள்வி 5.

(i) $\cos 105^\circ$

(ii) $\sin 105^\circ$

(iii) $\tan 7\pi/12$ ஆகியவற்றின் மதிப்புகளைக் காண்க.

தீர்வு:

(i) $\cos 105^\circ = \cos (60^\circ + 45^\circ)$

$$= \cos 60^\circ \cdot \cos 45^\circ - \sin 60^\circ \sin 45^\circ$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$

(ii) $\sin 150^\circ = \sin (60^\circ + 45^\circ)$.

$$= \sin 60^\circ \cdot \cos 45^\circ + \cos 60^\circ \sin 45^\circ$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

(iii)

$$\begin{aligned}\tan\left(\frac{7\pi}{12}\right) &= \tan\left(\frac{7 \times 180}{12}\right) \\ &= \tan(105^\circ) = \frac{\sin 105^\circ}{\cos 105^\circ} \\ &= \frac{\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}}{\frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}+1 \times 1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3} \times 1+\sqrt{3}} \\ &= \frac{(\sqrt{3}+1)^2}{1^2 - \sqrt{3}^2} = \frac{3+2\sqrt{3}+1}{1-3} = \frac{4+2\sqrt{3}}{-2} \\ &= \frac{\cancel{2}(2+\sqrt{3})}{-\cancel{2}} \\ \tan \frac{7\pi}{12} &= -(2+\sqrt{3})\end{aligned}$$

கேள்வி 6.

நிறுவுக

$$(i) \cos(30^\circ + x) = \frac{\sqrt{3} \cos x - \sin x}{2}$$

$$(ii) \cos(\pi + \theta) = -\cos \theta$$

$$(iii) \sin(\pi + \theta) = -\sin \theta$$

தீர்வு:

$$(i) \cos(30^\circ + x) = \frac{\sqrt{3} \cos x - \sin x}{2} .$$

$$\cos(30^\circ + x) = \cos 30^\circ \cdot \cos x - \sin 30^\circ \cdot \sin x$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x - \frac{1}{2} \sin x$$

$$\sin x = \frac{\sqrt{3} \cos x - \sin x}{2}$$

∴ எனவே நிரூபிக்கப்பட்டது

$$(ii) \cos(\pi + \theta) = -\cos \theta$$

$$\text{L.H.S} = \cos(\pi + \theta) = -\cos \theta = \text{RHS}$$

எனவே நிரூபிக்கப்பட்டது

$$(iii) \sin(\pi + \theta) = -\sin \theta$$

$$\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$$

$$\sin(\pi + \theta) = \sin \pi \cos \theta + \cos \pi \sin \theta$$

$$= 0 \cdot \cos \theta + (-1) \sin \theta$$

$$\therefore \sin(\pi + \theta) = -\sin \theta$$

எனவே நிரூபிக்கப்பட்டது.

கேள்வி 7.

$\sin 15^\circ$ மற்றும் $\cos 15^\circ$ ஆகியவற்றை மூலங்களாகக் கொண்ட இருபடிச் சமன்பாட்டைக் காண்க.

தீர்வு:

$$\text{மூலங்களின் கூடுதல்} = \sin 15^\circ + \cos 15^\circ$$

$$= \sin(45^\circ - 30^\circ) + \cos(45^\circ - 30^\circ)$$

$$= \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ + \cos 45^\circ - \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{3} \times \sqrt{2}}{2\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{6}}{2 \times 2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$\text{மூலங்களின் பெருக்கற்பலன்} = \sin 15^\circ \cos 15^\circ$$

$$= \frac{2 \sin 15^\circ \cos 15^\circ}{2} = \frac{\sin 30^\circ}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} (\because \sin 2A = 2 \sin A \cos A)$$

$\therefore$ தேவையான சமன்பாடு

$$\Rightarrow x^2 - (\text{மூலங்களின் பெருக்கற்பலன்})$$

$$x + (\text{மூலங்களின் பெருக்கற்பலன்}) = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)x + \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow x^2 - \frac{\sqrt{6}}{2}x + \frac{1}{4} = 0$$

$$\Rightarrow 4x^2 - 2\sqrt{6}x + 1 = 0.$$

கேள்வி 8.

$\cos (A + B + C)$ -ஐ விபிவா க்கு. இங்கு $A + B + C = \pi/2$ எனில், $\cos A \cos B \cos C = \sin A \sin B \cos C + \sin B \sin C \cos A + \sin C \sin A \cos B$ என நிறுவுக.

தீர்வு:

$$A + B + C = \pi/2$$

$$\Rightarrow \cos(A + B + C) = \cos \pi/2$$

$$\Rightarrow \cos (A + B + C) = 0$$

$$\cos (A + B + C) = \cos (A + B) \cos C - \sin (A + B) \sin C$$

$$= \cos C (\cos A \cos B - \sin A \sin B) - \sin C (\sin A \cos B + \cos A \sin B)$$

$$= \cos A \cos B \cos C - \sin A \sin B \cos C - \sin A \cos B \sin C - \cos A \sin B \sin C$$

$$0 = \cos A \cos B \cos C - \sin A \sin B \cos C - \sin A \cos B \sin C - \cos A \sin B \sin C$$

$$\therefore \cos A \cos B \cos C = \sin A \sin B \cos C + \sin A \cos B \sin C + \cos A \sin B \sin C$$

எனவே நிரூபிக்கப்பட்டது.

கேள்வி 9.

நிறுவுக.

$$(i) \sin (45^\circ + \theta) - \sin (45^\circ - \theta) = \sqrt{2} \sin \theta$$

$$(ii) \sin (30^\circ + \theta) + \cos (60^\circ + \theta) = \cos \theta$$

தீர்வு:

$$(i) \text{LHS} = (\sin 45^\circ + \theta) - \sin (45^\circ - \theta)$$

$$= \sin 45^\circ \cos \theta + \cos 45^\circ \sin \theta - [\sin 45^\circ \cos \theta - \cos 45^\circ \sin \theta]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \theta + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta - \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \cos \theta - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cancel{\cos \theta} + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta - \frac{1}{\sqrt{2}} \cancel{\cos \theta} + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta$$

$$= 2 \frac{\sin \theta}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \sin \theta = \text{RHS}$$

$$\begin{aligned}
\text{(ii) LHS} &= \sin(30^\circ + \theta) + \cos(60^\circ + \theta) \\
&= \sin 30^\circ \cdot \cos \theta + \cos 30^\circ \cdot \sin \theta + \cos 60^\circ \cdot \cos \theta - \sin 60^\circ \cdot \sin \theta \\
&= \frac{1}{2} \cos \theta + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \theta + \frac{1}{2} \cos \theta - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \theta \\
&= \frac{1}{2} \cos \theta + \frac{1}{2} \cos \theta = \frac{2 \cos \theta}{2} \\
&= \cos \theta = \text{R.H.S.}
\end{aligned}$$

கேள்வி 10.

$a \cos(x + y) = b \cos(x - y)$ எனில் $(a + b) \tan x = (a - b) \cot y$ எனக் காண்பி.

தீர்வு:

$$\begin{aligned}
a \cos(x + y) &= b \cos(x - y) \\
\Rightarrow a [\cos x \cos y - \sin x \sin y] &= b [\cos x \cos y + \sin x \sin y] \\
\Rightarrow a \cos x \cos y - a \sin x \sin y &= b \cos x \cos y + b \sin x \sin y \\
\Rightarrow (a - b) [\cos x \cos y] &= (a + b) (\sin x \sin y)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow (a - b) \frac{\cos y}{\sin y} = (a + b) \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\Rightarrow (a - b) \cot y = (a + b) \tan x$$

எனவே நிரூபிக்கப்பட்டது.

கேள்வி 11.

நிறுவுக. $\sin 105^\circ + \cos 105^\circ = \cos 45^\circ$

தீர்வு:

$$\begin{aligned}
\text{LHS} &= \sin 105^\circ + \cos 105^\circ \\
&= \sin(60^\circ + 45^\circ) + \cos(60^\circ + 45^\circ) \\
&= \sin 60^\circ \cos 45^\circ + \cos 60^\circ \sin 45^\circ + \cos 60^\circ \cos 45^\circ - \sin 60^\circ \sin 45^\circ
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \\
&= \frac{\cancel{\sqrt{3}}}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{\cancel{\sqrt{3}}}{2\sqrt{2}} \\
&= \frac{\cancel{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \cos 45^\circ = \text{R.H.S.}
\end{aligned}$$

கேள்வி 12.

நிறுவுக. $\sin 75^\circ - \sin 15^\circ = \cos 105^\circ + \cos 15^\circ$

தீர்வு:

$$\begin{aligned}
\text{L.H.S} &= \sin 75^\circ - \sin 15^\circ \\
&= \sin (90^\circ - 15^\circ) - \sin 15^\circ \\
&= \cos 15^\circ - \sin 15^\circ
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{R.H.S} &= \cos 105^\circ + \cos 15^\circ \\
&= \cos (90^\circ + 15^\circ) + \cos 15^\circ \\
&= -\sin 15^\circ + \cos 15^\circ \\
&= \cos 15^\circ - \sin 15^\circ \\
\therefore \text{R.H.S} &= \text{L.H.S.}
\end{aligned}$$

கேள்வி 13.

நிறுவுக. $\tan 75^\circ + \cot 75^\circ = 4$

தீர்வு:

$$\begin{aligned}
\tan 75^\circ &= \tan(45^\circ + 30^\circ) = \frac{\tan 45^\circ + \tan 30^\circ}{1 - \tan 45^\circ \cdot \tan 30^\circ} \\
\tan 75^\circ &= \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 - 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3}}}{\frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\cot 75^\circ &= \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} \\
\therefore \text{L.H.S} &= \tan 75^\circ + \cot 75^\circ = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} + \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} \\
&= \frac{(\sqrt{3}-1)^2 + (\sqrt{3}+1)^2}{\sqrt{3}^2 - 1^2} \\
&= \frac{3+1+2\sqrt{3}+3+1-2\sqrt{3}}{3-1} \\
&= \frac{8}{2} = 4 = \text{R.H.S}
\end{aligned}$$

எனவே நிரூபிக்கப்பட்டது.

கேள்வி 14.

நிறுவுக. $\cos (A + B) \cos C - \cos (B + C) \cos A = \sin B \sin (C - A)$

தீர்வு:

$$\begin{aligned}
\text{L.H.S} &= \cos (A + B) \cos C - \cos (B + C) \cos A \\
&= (\cos A \cos B - \sin A \sin B) \cos C - [\cos B \cos C - \sin B \sin C] \\
&= \cancel{\cos A \cos B \cos C} - \sin A \sin B \cos C \\
&\quad - \cancel{\cos A \cos B \cos C} + \sin B \sin C \cos A. \\
&= \cos A \sin B \sin C - \sin A \sin B \cos C \\
&= \sin B [\cos A \sin C - \sin A \cos C] \\
&= \sin B [\sin (C - A)] = \text{R.H.S.}
\end{aligned}$$

கேள்வி 15.

நிறுவுக. $\sin (n + 1)\theta \sin (n - 1)\theta + \cos (n + 1)\theta \cos (n - 1)\theta = \cos 2\theta, n \in \mathbb{Z}.$

தீர்வு:

$$\begin{aligned}
\text{L.H.S} &= \sin (n + 1)\theta \sin (n - 1)\theta + \cos (n + 1)\theta \cos (n - 1)\theta, n \in \mathbb{Z} \\
&= \cos ((n + 1)\theta - (n - 1)\theta) \\
&[\because \cos (A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B] \\
&= \cos 2\theta
\end{aligned}$$

$$= \cos [\cancel{\mu\theta} + \theta - \cancel{\mu\theta} + \theta]$$

$$= \cos 2\theta = \text{R.H.S}$$

எனவே நிரூபிக்கப்பட்டது.

கேள்வி 16.

$x \cos \theta = y \cos (\theta + 2\pi/3) = z \cos(\theta + 4\pi/3)$ எனில், $xy + yz + zx$ இன் மதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு:

$$x \cos \theta = y \cos \left[\theta + \frac{2\pi}{3} \right] = z \cos \left[\theta + \frac{4\pi}{3} \right]$$

$$= \lambda \text{ என்க}$$

$$\Rightarrow \frac{\lambda}{x} = \cos \theta, \frac{\lambda}{y} = \cos \left(\theta + \frac{2\pi}{3} \right)$$

$$\frac{\lambda}{z} = \cos \left(\theta + \frac{4\pi}{3} \right)$$

$$\therefore \frac{\lambda}{x} + \frac{\lambda}{y} + \frac{\lambda}{z} = \cos \theta + \cos \left(\theta + \frac{2\pi}{3} \right) + \cos \left(\theta + \frac{4\pi}{3} \right)$$

$$= \cos \theta + \cos (120^\circ + \theta) + \cos (240^\circ + \theta)$$

$$= \cos \theta + \cos 120^\circ \cos \theta - \sin 120^\circ \sin \theta + \cos 240^\circ \cos \theta - \sin 240^\circ \sin \theta$$

$$= \cos \theta - \cos 60^\circ \cos \theta - \sin 60^\circ \sin \theta - \sin 30^\circ \cos \theta + \cos 30^\circ \sin \theta$$

$$(\because \cos (A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B)$$

$$\cos 120^\circ = \cos (180^\circ - 60^\circ) = -\cos 60^\circ = -1/2$$

$$= \sin 240^\circ = \sin (270^\circ - 30^\circ) = -\sin 30^\circ$$

$$= -\cos 60^\circ = -1/2.$$

$$= \cos \theta - \frac{1}{2} \cos \theta - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \theta - \frac{1}{2} \cos \theta + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \theta$$

$$= \cancel{\cos \theta} - \cancel{\cos \theta} = 0$$

$$\therefore \lambda \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) = 0 \Rightarrow \lambda \left(\frac{yz + xz + xy}{xyz} \right) = 0$$

$$\Rightarrow xy + yz + zx = 0.$$

கேள்வி 17.

நிறுவுக.

$$(i) \sin(A + B) \sin(A - B) = \sin^2 A - \sin^2 B.$$

$$(ii) \cos(A + B) \cos(A - B) = \cos^2 A - \sin^2 B \\ = \cos^2 B - \sin^2 A$$

$$(iii) \sin^2(A + B) - \sin^2(A - B) = \sin 2A \sin 2B$$

$$(iv) \cos 8\theta \cos 2\theta = \cos^2 5\theta \sin^2 3\theta$$

தீர்வு:

$$(i) \text{L.H.S} = \sin(A + B) \sin(A - B) \\ = [\sin A \cos B + \cos A \sin B] \cdot [\sin A \cos B - \cos A \sin B] \\ = \sin^2 A \cos^2 B - \cos^2 A \sin^2 B \quad [\because (a + b)(a - b) = a^2 - b^2] \\ = \sin^2 A [1 - \sin^2 B] - (1 - \sin^2 A) \sin^2 B \\ = \sin^2 A - \sin^2 A \sin^2 B - [\sin^2 B - \sin^2 A \sin^2 B] \\ = \sin^2 A - \cancel{\sin^2 A \sin^2 B} - \sin^2 B + \cancel{\sin^2 A \sin^2 B} \\ = \sin^2 A - \sin^2 B = \text{R.H.S} \text{ எனவே நிரூபிக்கப்பட்டது.}$$

$$(ii) \text{L.H.S} = \cos(A + B) \cdot \cos(A - B) \\ = (\cos A \cos B - \sin A \sin B) (\cos A \cos B + \sin A \sin B) \\ = \cos^2 A \cos^2 B - \sin^2 A \sin^2 B \dots (1) \\ = \cos^2 A (1 - \sin^2 B) - (1 - \cos^2 A) \sin^2 B \\ = \cos^2 A - \cancel{\cos^2 A \sin^2 B} - \sin^2 B + \cancel{\sin^2 B \cos^2 A} \\ = \cos^2 A - \sin^2 B \dots (2)$$

(1) லிருந்து

$$\text{LHS} = \cos^2 A \cos^2 B - \sin^2 A \sin^2 B \\ = (1 - \sin^2 A) \cos^2 B - \sin^2 A (1 - \cos^2 B) \\ = \cos^2 B - \cancel{\sin^2 A \cos^2 B} - \sin^2 A + \cancel{\sin^2 A \cos^2 B} \\ = \cos^2 B - \sin^2 A$$

(2), (3) லிருந்து ..(3)

$$\cos(A + B) \cos(A - B) = \cos^2 A - \sin^2 B \\ = \cos^2 B - \sin^2 A \text{ எனவே நிரூபிக்கப்பட்டது}$$

$$(iii) \sin^2(A + B) - \sin^2(A - B) = \sin 2A \cdot \sin 2B$$

$$\text{L.H.S} = \sin^2(A + B) - \sin^2(A - B)$$

$$\begin{aligned}
&= \sin(A+B+A-B) \cdot \sin(A+B-A+B) \\
&= \sin(2A) \cdot \sin(2B) \quad (\because (i) \text{ ஐ பபண்படுத்தி}) \\
&= \text{RHS எனவே நிரூபிக்கப்பட்டது.}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(iv) \cos 8\theta \cos 2\theta = \cos^2 5\theta \cdot \sin^2 3\theta \\
&\text{R.H.S} = \cos^2 5\theta \cdot \sin^2 3\theta \\
&= \cos(5\theta + 3\theta) \cos(5\theta - 3\theta) \quad (\because (ii) \text{ லிருந்து}) \\
&= \cos 8\theta \cdot \cos 2\theta = \text{L.H.S} \cos^2 B - \sin^2 A \\
&= \cos(A+B) \cdot \cos(A-B) \\
&\text{எனவே நிரூபிக்கப்பட்டது.}
\end{aligned}$$

கேள்வி 18.

$$\cos^2 A + \cos^2 B - 2\cos A \cos B \cos(A+B) = \sin^2(A+B) \text{ எனக் காண்பி.}$$

தீர்வு:

$$\begin{aligned}
&\text{LHS} = \cos^2 A + (1 - \sin^2 B) - 2\cos A \cos B \cdot \cos(A+B) \\
&= \cos^2 A - \sin^2 B + 1 - 2\cos A \cos B \cdot \cos(A+B) \\
&= \cos(A+B) \cdot \cos(A-B) + 1 - 2\cos A \cos B \cdot \cos(A+B) \\
&(\because \cos^2 A - \sin^2 B = \cos(A+B) \cos(A-B)) \\
&= \cos(A+B) (\cos(A-B) - 2\cos A \cos B) + 1 \\
&= -\cos(A+B) [\cos A \cos B - \sin A \sin B] + 1 \\
&= -\cos(A+B) \cos(A+B) + 1 \\
&= -\cos^2(A+B) + 1 = 1 - \cos^2(A+B) \\
&= \sin^2(A+B) = \text{R.H.S} \text{ எனவே நிரூபிக்கப்பட்டது.}
\end{aligned}$$

கேள்வி 19.

$$\cos(\alpha - \beta) + \cos(\beta - \gamma) + \cos(\gamma - \alpha) = -3/2 \text{ எனில் } \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = \sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = 0 \text{ எனக் காண்பி.}$$

தீர்வு:

$$\begin{aligned}
&\cos(\alpha - \beta) + \cos(\beta - \gamma) + \cos(\gamma - \alpha) = -3/2 \\
&\Rightarrow \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta + \cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma \\
&\quad + \cos \gamma \cos \alpha + \sin \gamma \sin \alpha = -3/2 \\
&\Rightarrow 2 [\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta + \cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma + \cos \gamma \cos \alpha + \sin \gamma \sin \alpha] = -3
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow 2 \cos \alpha \cos \beta + 2 \cos \beta \cos \gamma + 2 \cos \gamma \cos \alpha + 2 \sin \alpha \sin \beta + 2 \sin \beta \sin \gamma + 2 \sin \alpha \sin \gamma + 3 = 0$$

$$\Rightarrow (2 \cos \alpha \cos \beta + 2 \cos \beta \cos \gamma + 2 \cos \gamma \cos \alpha) + (2 \sin \alpha \sin \beta + 2 \sin \beta \sin \gamma + 2 \sin \alpha \sin \gamma) + (\cos^2 \alpha + \sin^2 \beta) + (\cos^2 \gamma + \sin^2 \gamma) = 0$$

$$\Rightarrow \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma + 2 \cos \alpha \cos \beta + 2 \cos \beta \cos \gamma + 2 \cos \gamma \cos \alpha + \sin^2 \alpha \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma + 2 \sin \alpha \sin \beta + 2 \sin \beta \sin \gamma + 2 \sin \gamma \sin \alpha = 0$$

$$\Rightarrow (\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma)^2 + (\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = 0$$

$$\Rightarrow \sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = 0$$

எனவே நிரூபிக்கப்பட்டது.

கேள்வி 20.

$$(i) \tan (45^\circ + A) = \frac{1 + \tan A}{1 - \tan A}$$

$$(ii) \tan (45^\circ - A) = \frac{1 - \tan A}{1 + \tan A}$$

எனக் காண்பி.

தீர்வு:

$$(i) \text{L.H.S} = \tan (45^\circ + A)$$

$$= \frac{\tan 45^\circ + \tan A}{1 - \tan 45^\circ \cdot \tan A} = \frac{1 + \tan A}{1 - \tan A}$$

$$(\because \tan 45^\circ = 1)$$

எனவே நிரூபிக்கப்பட்டது

$$(ii) \text{L.H.S} = \tan (45^\circ - A)$$

$$= \frac{\tan 45^\circ - \tan A}{1 + \tan 45^\circ \cdot \tan A} = \frac{1 - \tan A}{1 + \tan A}$$

எனவே நிரூபிக்கப்பட்டது.

கேள்வி 21.

$$\text{நிறுவுக. } \cot (A + B) = \frac{\cot A \cot B - 1}{\cot A + \cot B}$$

தீர்வு:

$$\text{L.H.S} = \cot (A + B)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\tan(A+B)} = \frac{1}{\frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}} \\
&= \frac{1 - \tan A \tan B}{\tan A + \tan B} \\
&= \frac{1 - \frac{1}{\cot A} \cdot \frac{1}{\cot B}}{\frac{1}{\cot A} + \frac{1}{\cot B}} = \frac{\frac{\cot A \cot B - 1}{\cot A \cot B}}{\frac{\cot B + \cot A}{\cot A \cot B}} \\
&= \frac{\cot A \cot B - 1}{\cot A \cot B} \times \frac{\cot A \cot B}{\cot B + \cot A} \\
&= \frac{\cot A \cot B - 1}{\cot A + \cot B} = \text{RHS}
\end{aligned}$$

நிரூபிக்கப்பட்டது.

கேள்வி 22.

$\tan x = n/n+1$ மற்றும் $\tan y = 1/2n+1$ எனில், $\tan(x + y)$ ஐக் காண்க.

தீர்வு:

$$\begin{aligned}
\tan x &= \frac{n}{n+1}, \tan y = \frac{1}{2n+1} \\
\tan(x+y) &= \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \cdot \tan y} = \frac{\frac{n}{n+1} + \frac{1}{2n+1}}{1 - \left(\frac{n}{n+1}\right) \times \left(\frac{1}{2n+1}\right)} \\
&= \frac{\frac{2n^2 + n + n + 1}{(n+1)(2n+1)}}{\frac{(n+1)(2n+1) - n}{(n+1)(2n+1)}} \\
&= \frac{2n^2 + 2n + 1}{(n+1)(2n+1)} \times \frac{(n+1)(2n+1)}{2n^2 + 2n + \cancel{n+1} - \cancel{n}} \\
&= \frac{\cancel{2n^2 + 2n + 1}}{\cancel{2n^2 + 2n + 1}} = 1
\end{aligned}$$

$$\therefore \tan (x + y) = 1.$$

கேள்வி 23.

நிறுவுக. $\tan (\pi/4 + \theta) \tan (3\pi/4 + \theta) = -1$

தீர்வு:

$$\begin{aligned} \text{LHS} &= \tan (\pi/4 + \theta) \cdot \tan (3\pi/4 + \theta) \\ &= \tan(45^\circ + \theta) \cdot \tan(135^\circ + \theta) \\ &= \tan(45^\circ + \theta) \cdot \tan(180^\circ - 45^\circ + \theta) \\ &= \tan(45^\circ + \theta) \cdot \tan(180^\circ - (45 - \theta)) \\ &= \tan(45^\circ + \theta) \cdot (-\tan(45^\circ - \theta)) \\ &= -\tan(45^\circ + \theta) \tan(45^\circ - \theta) \\ &= -\left[\frac{\tan 45 + \tan \theta}{1 - \tan 45 \cdot \tan \theta} \right] \left[\frac{\tan 45 - \tan \theta}{1 + \tan 45 \cdot \tan \theta} \right] \\ &= -\left[\frac{(1 + \tan \theta)}{(1 - \tan \theta)} \right] \left[\frac{(1 - \tan \theta)}{(1 + \tan \theta)} \right] = -1 = \text{RHS} \end{aligned}$$

கேள்வி 24.

$\cot \alpha = 12$, $\alpha \in (\pi, 3\pi/2)$ மற்றும் $\sec \beta = -5/3$, $\beta \in (\pi/2, \pi)$ எனில் $\tan (\alpha + \beta)$ இன் மதிப்பைக் காண்க.

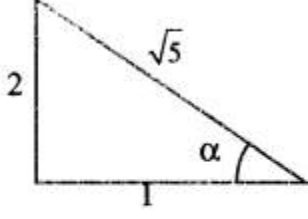
தீர்வு:

$$\alpha \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2} \right), \alpha, \text{ III-ம் கால் பகுதியில் அமையும்}$$

என்பதால் $\tan \alpha$, $\cot \alpha$ மிகையாகும்.

$$\beta \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi \right), \beta, \text{ II-ம் கால் பகுதியில் அமையும்.}$$

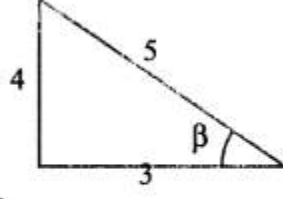
அதனால் $\sin \beta$, $\operatorname{cosec} \beta$ மிகையாகும்.



$$\cot \alpha = \frac{1}{2}$$

$$\sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$$

$$\therefore \tan \alpha = 2$$



$$\sec \beta = \frac{5}{3}$$

$$\sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{25 - 9} = 4$$

$$\tan \beta = \frac{4}{3}$$

$$\begin{aligned} \therefore \tan(\alpha + \beta) &= \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta} = \frac{2 + \frac{4}{3}}{1 - 2 \times \frac{4}{3}} \\ &= \frac{\frac{6 + 4}{3}}{\frac{3 - 8}{3}} = \frac{10}{-5} = -2 \end{aligned}$$

கேள்வி 25.

$\theta + \phi = 0$ மற்றும் $\tan \theta = k \tan \phi$ எனில் $\sin(\theta - \phi) = \frac{k-1}{k+1} \sin \alpha$ என நிறுவுக.

தீர்வு:

$$\begin{aligned} \theta + \phi &= \alpha \\ \tan \theta &= k \tan \phi \\ \Rightarrow \frac{\tan \theta}{\tan \phi} &= k = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \cdot \frac{\cos \phi}{\sin \phi} = \frac{k}{1} \\ \Rightarrow \frac{\sin \theta \cos \phi - \cos \theta \sin \phi}{\sin \theta \cos \phi + \cos \theta \sin \phi} &= \frac{k-1}{k+1} \end{aligned}$$

[$\therefore$ கூறுகள் மற்றும் பங்கீடுகள் மூலமாக]

$$\Rightarrow \frac{\sin(\theta - \phi)}{\sin(\theta + \phi)} = \frac{k-1}{k+1}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin(\theta - \phi)}{\sin \alpha} = \frac{k-1}{k+1}$$

$$\Rightarrow \sin(\theta - \phi) = \frac{k-1}{k+1} \sin \alpha$$

எனவே நிரூபிக்கப்பட்டது.

Ex 3.5

கேள்வி 1.

A முதல் காற்பகுதியில் இருக்கும் போது $\cos 2A$ -ன் மதிப்பைக் காண்க.

(i) $\cos A = \frac{15}{17}$

(ii) $\sin A = \frac{4}{5}$

(iii) $\tan A = \frac{16}{63}$

தீர்வு:

(i) $\cos A = \frac{15}{17}$, A, கால் பகுதியில் அமையும் அனைத்து முக்கோணவியல் விகிதங்களும் எனில் மிகை

$$\begin{aligned} \cos 2A &= 2 \cos^2 A - 1 = 2 \left(\frac{15}{17} \right)^2 - 1 \\ &= 2 \times \frac{225}{289} - 1 = \frac{450 - 289}{289} = \frac{161}{289} \end{aligned}$$

(ii) $\sin A = \frac{4}{5}$

$$\begin{aligned} \cos 2A &= 1 - 2 \sin^2 A = 1 - 2 \left(\frac{4}{5} \right)^2 \\ &= 1 - 2 \times \frac{16}{25} = 1 - \frac{32}{25} = \frac{25 - 32}{25} = \frac{-7}{25} \end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned}\tan A &= \frac{16}{63}, \cos 2A = \frac{1 - \tan^2 A}{1 + \tan^2 A} = \frac{1 - \left(\frac{16}{63}\right)^2}{1 + \left(\frac{16}{63}\right)^2} \\ &= \frac{1 - \frac{256}{3969}}{1 + \frac{256}{3969}} = \frac{\frac{3969 - 256}{3969}}{\frac{3969 + 256}{3969}} = \frac{3713}{4225}\end{aligned}$$

கேள்வி 2.

θ ஒரு குறுங்கோணம் எனில்,

(i) $\sin \theta = \frac{1}{25}$ எனும் போது $\sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} \right)$

(ii) $\sin \theta = \frac{8}{9}$, எனில் $\cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \right)$ ன் மதிப்புகளைக்

தீர்வு:

(i)

$$\begin{aligned}\sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} \right) &\text{எனில் } \sin \theta = \frac{1}{25} \\ \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} \right) &= \sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\theta}{2} - \cos \frac{\pi}{4} \sin \frac{\theta}{2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \frac{\theta}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \frac{\theta}{2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\cos \frac{\theta}{2} - \sin \frac{\theta}{2} \right) \\ \therefore \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2} \right) &= \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\theta}{2} - \sin \frac{\theta}{2} \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} \left(\cos^2 \frac{\theta}{2} + \sin^2 \frac{\theta}{2} - 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \right)\end{aligned}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right) \text{ எனில் } \sin\theta = \frac{1}{25}$$

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right) &= \sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\theta}{2}-\cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\theta}{2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{\theta}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{\theta}{2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right) &= \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{2}\left(\cos^2\frac{\theta}{2}+\sin^2\frac{\theta}{2}-2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}(1-\sin\theta) \\ &= \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{25}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{24}{25}\right)=\frac{12}{25}\end{aligned}$$

$$\therefore \sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right) = \sqrt{\frac{12}{25}} = \frac{2\sqrt{3}}{5}$$

(ii)

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right) &= \cos\frac{\pi}{4}\cos\frac{\theta}{2}-\sin\frac{\pi}{4}\sin\frac{\theta}{2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{\theta}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{\theta}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \cos^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right) &= \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2}-\sin\frac{\theta}{2}\right)^2 \\ &= \frac{1}{2}\left(\cos^2\frac{\theta}{2}+\sin^2\frac{\theta}{2}-2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2}(1-\sin\theta)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{8}{9}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{9}\right)\end{aligned}$$

$$\therefore \cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1}{3\sqrt{2}}.$$

கேள்வி 3.

$\cos \theta = \frac{1}{2} \left[a + \frac{1}{a} \right]$ எனில் $\cos 3\theta = \frac{1}{2} \left[a^3 + \frac{1}{a^3} \right]$ எனக் காண்பி.

தீர்வு:

$$\cos \theta = \frac{1}{2} \left[a + \frac{1}{a} \right] \text{ கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.}$$

$$\Rightarrow \cos 3\theta = \frac{1}{2} \left[a^3 + \frac{1}{a^3} \right]$$

$$\begin{aligned} \text{L.H.S} &= \cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta \\ &= 4 \left[\left(\frac{1}{2} \left(a + \frac{1}{a} \right) \right)^3 \right] - \left[3 \cdot \frac{1}{2} \left(a + \frac{1}{a} \right) \right] \\ &= 4 \left[\frac{1}{8} \left(a^3 + 3a^2 \cdot \frac{1}{a} + 3a \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3} \right) \right] - \left[\frac{3}{2} \left(a + \frac{1}{a} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left(a^3 + 3a + \frac{3}{a} + \frac{1}{a^3} \right) - \frac{3}{2} \left(a + \frac{1}{a} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(a^3 + \frac{1}{a^3} \right) + \frac{1}{2} \left(3a + \frac{3}{a} \right) - \frac{3}{2} \left(a + \frac{1}{a} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(a^3 + \frac{1}{a^3} \right) + \frac{3}{2} \left(a + \frac{1}{a} \right) - \frac{3}{2} \left(a + \frac{1}{a} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(a^3 + \frac{1}{a^3} \right) = \text{RHS. எனவே நிரூபிக்கப்பட்டது.} \end{aligned}$$

கேள்வி 4.

$\cos 5\theta = 16 \cos^5\theta - 20 \cos^3\theta + 5 \cos \theta$ என நிறுவுக.

தீர்வு:

$$\begin{aligned} \cos 5\theta &= \cos(3\theta + 2\theta) \\ &= \cos 3\theta \cdot \cos 2\theta - \sin 3\theta \cdot \sin 2\theta \\ &= (4 \cos^3\theta - 3 \cos \theta)(2 \cos^2\theta - 1) - \\ &\quad [3 \sin \theta - 4 \sin^3\theta] 2 \sin \theta \cos \theta \\ &= 8 \cos^5\theta - 4 \cos^3\theta - 6 \cos^3\theta + 3 \cos \theta - 6 \sin^2\theta \cos \theta - 8 \sin^4\theta \cos \theta \\ &= 8 \cos^5\theta - 10 \cos^3\theta + 3 \cos \theta - 6 \cos \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (1 - \cos^2\theta) + 8(1 - \cos^2\theta)^2 \cos \theta \\
&= 8 \cos^5\theta - 10 \cos^3\theta + 3 \cos \theta - 6 \cos \theta + 6 \cos^3\theta + 8 \cos \theta (1 + \cos^4\theta - 2 \cos^2\theta) \\
&= 8 \cos^5\theta - 10 \cos^3\theta + 3 \cos \theta - 6 \cos \theta + 6 \cos^3\theta + 8 \cos \theta + 8 \cos^5\theta - 16 \cos^3\theta \\
&= 16 \cos^5\theta - 20 \cos^3\theta + 5 \cos \theta \\
&= \text{RHS. எனவே நிரூபிக்கப்பட்டது.}
\end{aligned}$$

கேள்வி 5.

$$\sin 4\alpha = 4 \tan \alpha \frac{1 - \tan^2 \alpha}{(1 + \tan^2 \alpha)^2} \text{ என நிறுவுக.}$$

தீர்வு:

$$\begin{aligned}
\text{LHS} &= \sin 4\alpha = \sin 2(2\alpha) = 2 \sin 2\alpha \cos 2\alpha \\
&= 2 \left(\frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} \right) \left(\frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} \right) \\
&= \frac{4 \tan \alpha (1 - \tan^2 \alpha)}{(1 + \tan^2 \alpha)^2} = \text{RHS.}
\end{aligned}$$

எனவே நிரூபிக்கப்பட்டது.

கேள்வி 6.

$A + B = 45^\circ$ எனில், $(1 + \tan A)(1 + \tan B) = 2$ என நிறுவுக.

தீர்வு:

$$\begin{aligned}
A + B &= 45^\circ \Rightarrow B = 45^\circ - A^\circ \\
\text{LHS} &= (1 + \tan A)(1 + \tan B) \\
&= (1 + \tan A)(1 + \tan (45 - A)) \\
&= (1 + \tan A)(1 + \tan 45 - \tan A)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (1 + \tan A) \left(1 + \frac{\tan 45 - \tan A}{1 + \tan 45 \cdot \tan A} \right) \\
&\quad \left(\because \tan(A - B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \cdot \tan B} \right) \\
&= (1 + \tan A) \left(1 + \frac{1 - \tan A}{1 + \tan A} \right) \\
&= \cancel{(1 + \tan A)} \left[\frac{1 + \cancel{\tan A} + 1 - \cancel{\tan A}}{\cancel{(1 + \tan A)}} \right]
\end{aligned}$$

= 2 = RHS. எனவே நிரூபிக்கப்பட்டது.

கேள்வி 7.

$(1 + \tan 1^\circ)(1 + \tan 2^\circ)(1 + \tan 3^\circ) \dots (1 + \tan 44^\circ)$ என்பது 4 இன் மடங்கு என நிறுவுக.

தீர்வு:

$$\text{LHS} = (1 + \tan 1^\circ)(1 + \tan 44^\circ)(1 + \tan 2^\circ)(1 + \tan 43^\circ)(1 + \tan 3^\circ)(1 + \tan 42^\circ)$$

$$= \underbrace{(2)(2) \dots (2)(2)(2)(2)}_{22 \text{ தடவைகள்}}$$

$$(\because 1^\circ + 44^\circ = 45^\circ, (1 + \tan 1^\circ)(1 + \tan 44^\circ) = 2)$$

$$= 2^{22} = (2^2)^{11} = 4^{11}$$

$\therefore$ இது 4 இன் மடங்கு ஆகும். எனவே நிரூபிக்கப்பட்டது

கேள்வி 8.

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right) - \tan\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) = 2 \tan 2\theta \text{ என நிறுவுக}$$

தீர்வு:

$$\text{LHS} = \tan\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right) - \tan\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right)$$

$$\begin{aligned}
\text{LHS} &= \tan\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right) - \tan\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) \\
&= \frac{\tan \frac{\pi}{4} + \tan \theta}{1 - \tan \frac{\pi}{4} \cdot \tan \theta} - \frac{\tan \frac{\pi}{4} - \tan \theta}{1 + \tan \frac{\pi}{4} \cdot \tan \theta} \\
&= \frac{1 + \tan \theta}{1 - \tan \theta} - \frac{1 - \tan \theta}{1 + \tan \theta} \\
&= \frac{(1 + \tan \theta)^2 - (1 - \tan \theta)^2}{(1 - \tan \theta)(1 + \tan \theta)} \\
&= \frac{1 + \tan^2 \theta + 2 \tan \theta - (1 + \tan^2 \theta - 2 \tan \theta)}{1 - \tan^2 \theta} \\
&= \frac{\cancel{1} + \cancel{\tan^2 \theta} + 2 \tan \theta - \cancel{1} - \cancel{\tan^2 \theta} + 2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} \\
&= \frac{4 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} = \frac{2 \times 2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} = 2 \tan 2\theta \\
&\quad \left(\because \tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} \right)
\end{aligned}$$

= RHS எனவே நிரூபிக்கப்பட்டது.

கேள்வி 9.

$\cot\left(7\frac{1}{2}\right) = \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4} + \sqrt{6}$ எனக் காண்பி
தர்வு:

$$\text{LHS} = \cot\left(7\frac{1}{2}\right) = \frac{\cos 7\frac{1}{2}}{\sin 7\frac{1}{2}} = \frac{\cos 7\frac{1}{2} \times 2 \sin 7\frac{1}{2}}{\sin 7\frac{1}{2} \times 2 \sin 7\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{2 \sin 7\frac{1}{2} \cdot \cos 7\frac{1}{2}}{2 \sin^2 7\frac{1}{2}} = \frac{\sin 15^\circ}{1 - \cos 15^\circ}$$

$$\left[\begin{array}{l} \because 2 \sin A \cos A = \sin 2A \\ 2 \sin^2 A = 1 - \cos 2A \end{array} \right]$$

$$= \frac{\sin(45^\circ - 30^\circ)}{1 - \cos(45^\circ - 30^\circ)}$$

$$= \frac{\sin 45^\circ \cdot \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ}{1 - (\cos 45^\circ \cdot \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \cdot \sin 30^\circ)}$$

$$= \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2}}{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} \right)}$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}}{1 - \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}} = \frac{\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}}{\frac{2\sqrt{2}-\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}}$$

$$= \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}-\sqrt{3}-1} \times \frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}+\sqrt{3}+1}$$

$$= \frac{(\sqrt{3}-1)(2\sqrt{2}+\sqrt{3}+1)}{(2\sqrt{2})^2 - (\sqrt{3}+1)^2}$$

$$= \frac{2\sqrt{6}+3+\sqrt{3}-2\sqrt{2}-\sqrt{3}-1}{8-(1+3+2\sqrt{3})}$$

$$= \frac{2\sqrt{6}+2-2\sqrt{2}}{4-2\sqrt{3}} = \frac{\cancel{2}(\sqrt{6}+1-\sqrt{2})}{\cancel{2}(2-\sqrt{3})}$$

$$= \frac{\sqrt{6}+1-\sqrt{2}}{2-\sqrt{3}} \times \frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2\sqrt{6} + 2 - 2\sqrt{2} + \sqrt{18} + \sqrt{3} - \sqrt{6}}{4 - 3} \\
&= 2\sqrt{6} + 2 - 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{6} \\
&= \sqrt{6} + \sqrt{3} + \sqrt{2} + 2 \\
&= \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4} + \sqrt{6} = \text{RHS}
\end{aligned}$$

எனவே நிரூபிக்கப்பட்டது.

கேள்வி 10.

$(1 + \sec 2\theta) (1 + \sec 4\theta) \dots (1 + \sec 2^n\theta) = \tan 2^n\theta \cot \theta$ என நிறுவுக.

தர்வு:

$$\begin{aligned}
\text{LHS} &= (1 + \sec 2\theta) (1 + \sec 4\theta) \dots (1 + \sec 2^n\theta) \\
&= \left(1 + \frac{1}{\cos 2\theta}\right) \left(1 + \frac{1}{\cos 4\theta}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{\cos 2^n\theta}\right) \\
&= \frac{(\cos 2\theta + 1)(\cos 4\theta + 1) \dots (\cos 2^n\theta + 1)}{\cos 2\theta \cdot \cos 4\theta \cos 8\theta \dots \cos 2^n\theta} \\
&= \frac{(2\cos^2\theta) \cdot (2\cos^2 2\theta) \dots (2\cos^2 2^{n-1}\theta)}{\cos 2\theta \cdot \cos 2^2 \dots \cos 2^n\theta} \\
&= \frac{2^n \cos \theta}{\cos 2^n\theta} (\cos \theta \cdot \cos 2\theta \cdot \cos 2^2\theta \dots \cos 2^{n-1}\theta) \\
&= \frac{2^n \cos \theta}{\cos 2^n\theta} \times \frac{\sin 2^n\theta}{2^n \sin \theta} \\
&\left[\because \cos A \cos 2A \cos 2^2 A \dots \cos 2^{n-1} A = \frac{\sin 2^n A}{2^n \sin A} \right]
\end{aligned}$$

$= \tan 2^n\theta \cdot \cot \theta = \text{RHS}$ எனவே நிரூபிக்கப்பட்டது.

கேள்வி 11.

$$32(\sqrt{3}) \sin \frac{\pi}{48} \cos \frac{\pi}{48} \cdot \cos \frac{\pi}{24} \cdot \cos \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{6} = 3 \text{ என}$$

நிறுவுக.

தர்வு:

$$\begin{aligned}\text{LHS} &= 32(\sqrt{3}) \sin \frac{\pi}{48} \cos \frac{\pi}{48} \cdot \cos \frac{\pi}{24} \cdot \cos \frac{\pi}{12} \cos \frac{\pi}{6} \\&= \frac{32\sqrt{3}}{2} \left(2 \sin \frac{\pi}{48} \cos \frac{\pi}{48} \right) \cdot \cos \frac{\pi}{24} \cdot \cos \frac{\pi}{12} \cdot \cos \frac{\pi}{6} \\&= 16\sqrt{3} \left(\sin 2 \frac{\pi}{48} \right) \cos \frac{\pi}{24} \cdot \cos \frac{\pi}{12} \cdot \cos \frac{\pi}{6} \\&\quad (\because \sin 2A = 2 \sin A \cos A) \\&= \frac{16\sqrt{3} \left(2 \sin \frac{\pi}{24} \cdot \cos \frac{\pi}{24} \right) \cdot \cos \frac{\pi}{12} \cdot \cos \frac{\pi}{6}}{2} \\&= 8\sqrt{3} \left(\sin 2 \frac{\pi}{24} \right) \cos \frac{\pi}{12} \cdot \cos \frac{\pi}{6} \\&= 8\sqrt{3} \left(\frac{2 \sin \frac{\pi}{12} \cdot \cos \frac{\pi}{12}}{2} \right) \cos \frac{\pi}{6} \\&= \cancel{8}^4 \sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sin 2 \frac{\pi}{12}}{\cancel{2}} \\&= \frac{\cancel{4}^2 \times 3}{\cancel{2}} \sin \frac{\pi}{6} = 6 \times \frac{1}{2} = 3 \\&= \text{RHS எனவே நிறுபிக்கப்பட்டது.}\end{aligned}$$

Ex 3.6

கேள்வி 1.

பின்வருவனவற்றைக் கூட்டல் அல்லது கழித்தலாக கூறுக.

- (i) $\sin 35^\circ \cos 28^\circ$
- (ii) $\sin 4x \cos 2x$
- (iii) $2 \sin 10\theta \cos 2\theta$
- (iv) $\cos 5\theta \cos 2\theta$

(v) $\sin 5\theta \sin 4\theta$

தீர்வு:

(i) $\sin 35^\circ \cos 28^\circ = \frac{1}{2} (2 \sin 35^\circ \cdot \cos 28^\circ)$

$(\because 2 \sin A \cos B = \frac{1}{2} [\sin(A + B) + \sin(A - B)])$

$= \frac{1}{2} (\sin (35 + 28) + \sin (35 - 28))$

$= \frac{1}{2} (\sin 63^\circ + \sin 7^\circ)$

(ii) $\sin 4x \cos 2x = \frac{1}{2} [\sin(4x + 2x) + \sin(4x - 2x)]$

$= \frac{1}{2} (\sin 6x + \sin 2x)$

(iii) $2\sin 10\theta \cos 2\theta = \frac{1}{2} [\sin (10\theta + 2\theta) + \sin(10\theta - 2\theta)]$

$= \frac{1}{2} (\sin 12\theta + \sin 8\theta)$

(iv) $\cos 5\theta \cos 2\theta = \frac{1}{2} [\cos (5\theta + 2\theta) + \cos(5\theta - 2\theta)]$

$= \frac{1}{2} (\cos 7\theta + \cos 3\theta)$

$(\because \cos A \cos B = \frac{1}{2} [\cos(A + B) + \cos(A - B)])$

(v) $\sin 5\theta \sin 4\theta = \frac{1}{2} [\cos(5\theta - 4\theta) - \cos(5\theta + 4\theta)]$

$= \frac{1}{2} [\cos\theta - \cos 9\theta]$

$(\because \sin A \sin B = \frac{1}{2} [\cos(A - B) - \cos(A + B)])$

கேள்வி 2.

பின்வருவனவற்றைப் பெருக்கலாக கூறுக.

(i) $\sin 75^\circ - \sin 35^\circ$

(ii) $\cos 65^\circ + \cos 15^\circ$

(iii) $\sin 50^\circ + \sin 40^\circ$

(iv) $\cos 35^\circ - \cos 75^\circ$

தீர்வு:

$$\begin{aligned} \text{(i) } \sin 75^\circ - \sin 35^\circ &= 2 \cos\left(\frac{75+35}{2}\right) \sin\left(\frac{75-35}{2}\right) \\ &= 2 \cos 55^\circ \sin 20^\circ \\ [\because \sin C - \sin D &= 2 \cos \frac{C+D}{2} \cdot \sin \frac{C-D}{2}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(ii) } \cos 65^\circ + \cos 15^\circ &= 2 \cos\left(\frac{65+15}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{65-15}{2}\right) \\ &= 2 \cos 40^\circ \cos 25^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(ii) } \sin 50^\circ + \sin 40^\circ &= 2 \sin\left(\frac{50+40}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{50-40}{2}\right) \\ &= 2 \sin 45^\circ \cos 5^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(iv) } \cos 35^\circ - \cos 75^\circ &= 2 \sin\left(\frac{35+75}{2}\right) \sin\left(\frac{75-35}{2}\right) \\ &= 2 \sin 55^\circ \sin 20^\circ \end{aligned}$$

கேள்வி 3.

$\sin 12^\circ \cdot \sin 48^\circ \sin 54^\circ = 1/8$ எனக் காண்பி .

தீர்வு:

$$\begin{aligned} \text{L.H.S} &= \sin 12^\circ \cdot \sin 48^\circ \sin 54^\circ \\ &= 1/2[\cos(12 - 48^\circ) - \cos(12 + 48^\circ)] \sin 54^\circ \\ (\sin A - \sin B &= 1/2[\cos(A - B) - \cos(A + B)]) = 1/2[\cos(-36^\circ) - \cos 60^\circ] \sin 54^\circ \\ (\cos(-\theta) &= +\cos \theta) \\ &= 1/2[\cos 36^\circ - 1/2] \sin 54^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \left[\frac{\sqrt{5}+1}{4} - \frac{1}{2} \right] \left[\frac{\sqrt{5}+1}{4} \right] \\
&\quad \left[\begin{array}{l} \because \cos 36^\circ = \frac{\sqrt{5}+1}{4} \\ \sin 54^\circ = \cos 36^\circ \end{array} \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{\sqrt{5}+1-2}{4} \right] \left[\frac{\sqrt{5}+1}{4} \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4} \right) \right] \left[\frac{\sqrt{5}+1}{4} \right] \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{5-1}{16} \right) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8} = \text{R.H.S.}
\end{aligned}$$

கேள்வி 4.

$$\begin{aligned}
&\cos \frac{\pi}{15} \cos \frac{2\pi}{15} \cdot \cos \frac{3\pi}{15} \cos \frac{4\pi}{15} \cos \frac{5\pi}{15} \cdot \cos \frac{6\pi}{15} \cdot \cos \frac{7\pi}{15} \\
&= \frac{1}{128} \text{ எனக் காண்பி.}
\end{aligned}$$

தீர்வு:

$$\begin{aligned}
\text{L.H.S} &= \cos \frac{\pi}{15} \cos \frac{2\pi}{15} \cdot \cos \frac{3\pi}{15} \cos \frac{4\pi}{15} \cos \frac{5\pi}{15} \cdot \cos \frac{6\pi}{15} \cdot \cos \frac{7\pi}{15} \\
&= \left(\cos \frac{\pi}{15} \cdot \cos \frac{2\pi}{15} \cdot \cos \frac{4\pi}{15} \cos \frac{7\pi}{15} \right) \\
&\quad \left(\cos \frac{3\pi}{15} \cos \frac{6\pi}{15} \right) \cdot \cos \frac{5\pi}{15} \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \cos \frac{\pi}{15} \cdot \cos \frac{2\pi}{15} \cdot \cos \frac{4\pi}{15} \cdot \cos \frac{7\pi}{15} \right\} \left\{ \cos \frac{3\pi}{15} \cos \frac{6\pi}{15} \right\} \\
&\quad \left(\because \cos \frac{5\pi}{15} = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \right) \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \cos \frac{\pi}{15} \cdot \cos \frac{2\pi}{15} \cdot \cos \frac{4\pi}{15} \cdot \cos \frac{7\pi}{15} \right\} \left\{ \cos \frac{3\pi}{15} \cos \frac{6\pi}{15} \right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \left\{ \cos \frac{\pi}{15} \cos \frac{2\pi}{15} \cos \frac{4\pi}{15} \cos \frac{8\pi}{15} \right\} \left\{ \cos \frac{3\pi}{15} \cos \frac{6\pi}{15} \right\} \\
&\quad \left\{ \because \cos \frac{7\pi}{15} = \cos \left(\pi - \frac{8\pi}{15} \right) = -\cos \frac{8\pi}{15} \right\} \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\sin 2^4 \frac{\pi}{15}}{2^4 \sin \frac{\pi}{15}} \right\} \times \left\{ \frac{\sin 2^2 \times \frac{3\pi}{15}}{2^2 \sin \frac{3\pi}{15}} \right\} \\
&\quad \left[\because \cos A \cdot \cos 2A \dots \cos 2^{n-1} A = \frac{\sin 2^n A}{2^n \sin A} \right] \\
&= \frac{-1}{2} \left\{ \frac{\sin \frac{16\pi}{15}}{16 \sin \frac{\pi}{15}} \right\} \left\{ \frac{\sin \frac{12\pi}{15}}{4 \sin \frac{3\pi}{15}} \right\} \\
&= \frac{-1}{2} \left\{ \frac{\sin \left(\pi + \frac{\pi}{15} \right)}{16 \sin \frac{\pi}{15}} \right\} \left\{ \frac{\sin \left(\pi - \frac{3\pi}{15} \right)}{4 \sin \frac{3\pi}{15}} \right\} \\
&= \frac{-1}{2} \left\{ \frac{\sin \left(\pi + \frac{\pi}{15} \right)}{16 \sin \frac{\pi}{15}} \right\} \left\{ \frac{\sin \left(\pi - \frac{3\pi}{15} \right)}{4 \sin \frac{3\pi}{15}} \right\} \\
&= \frac{-1}{2} \left\{ \frac{-\sin \frac{\pi}{15}}{16 \sin \frac{\pi}{15}} \right\} \left\{ \frac{\sin \frac{3\pi}{15}}{4 \sin \frac{3\pi}{15}} \right\} \\
&= \frac{-1}{2} \times \frac{-1}{16} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{128} = \text{R.H.S.}
\end{aligned}$$

கேள்வி 5.

$$\frac{\sin 8x \cos x - \sin 6x \cos 3x}{\cos 2x \cos x - \sin 3x \sin 4x} = \tan 2x \text{ எனக் காண்பி.}$$

தீர்வு:

$$\begin{aligned}
 \text{L.H.S} &= \frac{\sin 8x \cos x - \sin 6x \cos 3x}{\cos 2x \cdot \cos x - \sin 3x \cdot \sin 4x} \\
 &= \frac{\frac{1}{2}(\sin 9x + \sin 7x) - \frac{1}{2}(\sin 9x + \sin 3x)}{\frac{1}{2}(\cos 3x + \cos x) - \frac{1}{2}(\cos x - \cos 7x)} \\
 &= \frac{\frac{1}{2}(\cancel{\sin 9x} + \sin 7x - \cancel{\sin 9x} - \sin 3x)}{\frac{1}{2}(\cos 3x + \cancel{\cos x} - \cancel{\cos x} + \cos 7x)} \\
 &= \frac{\sin 7x - \sin 3x}{\cos 3x + \cos 7x} \\
 &= \frac{2 \cos \left(\frac{7x+3x}{2} \right) \sin \left(\frac{7x-3x}{2} \right)}{2 \cos \left(\frac{7x+3x}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{7x-3x}{2} \right)} = \frac{2 \cos 5x \cdot \sin 2x}{2 \cos 5x \cdot \cos 2x} \\
 &= \left[\because \sin C - \sin D = 2 \cos \left(\frac{C+D}{2} \right) \cdot \sin \left(\frac{C-D}{2} \right) \right] \\
 &= \left[\cos C + \cos D = 2 \cos \left(\frac{C+D}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{C-D}{2} \right) \right] \\
 &= \tan 2x = \text{R.H.S} \text{ எனவே நிரூபிக்கப்பட்டது.}
 \end{aligned}$$

கேள்வி 6.

$$\frac{(\cos \theta - \cos 3\theta)(\sin 8\theta + \sin 2\theta)}{(\sin 5\theta - \sin \theta)(\cos 4\theta - \cos 6\theta)} = 1 \text{ எனக் காண்பி.}$$

தீர்வு:

$$\text{LHS} = \frac{(\cos \theta - \cos 3\theta)(\sin 8\theta + \sin 2\theta)}{(\sin 5\theta - \sin \theta)(\cos 4\theta - \cos 6\theta)}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2 \sin\left(\frac{\theta+3\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{3\theta-\theta}{2}\right) \cdot 2 \sin\left(\frac{8\theta+2\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{8\theta-2\theta}{2}\right)}{2 \cos\left(\frac{5\theta+\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{5\theta-\theta}{2}\right) \cdot 2 \sin\left(\frac{4\theta+6\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{6\theta-4\theta}{2}\right)} \\
&= \frac{\sin 2\theta \cdot \sin \theta \cdot \sin 5\theta \cdot \cos 3\theta}{\cos 3\theta \cdot \sin 2\theta \cdot \sin 5\theta \cdot \sin \theta} = 1 = \text{R.H.S}
\end{aligned}$$

எனவே நிரூபிக்கப்பட்டது.

கேள்வி 7.

நிறுவுக. $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = \sin 2x (1 + 2 \cos x) -$

தீர்வு:

$$\begin{aligned}
\text{L.H.S} &= \sin x + \sin 2x + \sin 3x \\
&= (\sin x + \sin 3x) + \sin 2x \\
&= 2 \sin\left(\frac{x+3x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x-3x}{2}\right) + \sin 2x \\
&= 2 \sin 2x \cdot \cos(-x) + \sin 2x \\
&= 2 \sin 2x \cos x + \sin 2x \quad (\because \cos(-x) = \cos x) \\
&= \sin 2x (2 \cos x + 1) \\
&= \sin 2x (1 + 2 \cos x) = \text{RHS}
\end{aligned}$$

எனவே நிரூபிக்கப்பட்டது.

கேள்வி 8.

நிறுவுக. $\frac{\sin 4x + \sin 2x}{\cos 4x + \cos 2x} = \tan 3x$

தீர்வு:

$$\text{LHS} = \frac{\sin 4x + \sin 2x}{\cos 4x + \cos 2x}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2 \sin\left(\frac{4x+2x}{2}\right) \cos\left(\frac{4x-2x}{2}\right)}{2 \cos\left(\frac{4x+2x}{2}\right) \cos\left(\frac{4x-2x}{2}\right)} \\
&= \frac{\sin 3x \cdot \cancel{\cos x}}{\cos 3x \cdot \cancel{\cos x}} = \tan 3x = \text{RHS}
\end{aligned}$$

எனவே நிரூபிக்கப்பட்டது.

கேள்வி 9.

நிறுவுக. $1 + \cos 2x + \cos 4x + \cos 6x = 4 \cos x \cos 2x \cos 3x$.

தீர்வு:

$$\begin{aligned}
\text{LHS} &= 1 + \cos 2x + \cos 4x + \cos 6x \quad (1 + \cos 2x = 2 \cos^2 x) \\
&= 2 \cos^2 x + \cos 4x + \cos 6x \\
&= 2 \cos^2 x + 2 \cos\left(\frac{4x+6x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{4x-6x}{2}\right) \\
&[\because \cos A + \cos B = 2 \cos\left(\frac{A+B}{2}\right) \cos\left(\frac{A-B}{2}\right)] \\
&= 2 \cos^2 x + 2 \cos 5x \cdot \cos(-x) \\
&= 2 \cos^2 x + 2 \cos 5x \cdot \cos x \\
&= 2 \cos x (\cos x + \cos 5x) \\
&= 2 \cos x \left(2 \cos \frac{x+5x}{2} \cos \frac{x-5x}{2}\right) \\
&= 2 \cos x \cdot 2 \cos 3x \cdot \cos(-2x) \quad (\cos(-\theta) = \cos \theta) \\
&= 4 \cos x \cos 3x \cdot \cos(2x) \\
&= 4 \cos x \cos 3x \cdot \cos 2x = \text{RHS}
\end{aligned}$$

கேள்வி 10.

நிறுவுக. $\sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{7\theta}{2} + \sin \frac{3\theta}{2} \sin \frac{11\theta}{2} = \sin 2\theta \sin 5\theta$.

தீர்வு:

$$\begin{aligned}
\text{LHS} &= \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{7\theta}{2} + \sin \frac{3\theta}{2} \sin \frac{11\theta}{2} \\
&= \frac{1}{2} \left[\cos\left(\frac{\theta}{2} - \frac{7\theta}{2}\right) - \cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{7\theta}{2}\right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \left[\cos \left(\frac{3\theta}{2} - \frac{11\theta}{2} \right) - \cos \left(\frac{3\theta}{2} + \frac{11\theta}{2} \right) \right] \\
& = \frac{1}{2} [\cos(-3\theta) - \cos 4\theta + \cos(-4\theta) - \cos 7\theta] \\
& = \frac{1}{2} [\cos 3\theta - \cancel{\cos 4\theta} + \cancel{\cos 4\theta} - \cos 7\theta] \\
& = \frac{1}{2} [\cos 3\theta - \cos 7\theta] \\
& = \frac{1}{2} \left[2 \sin \left(\frac{3\theta + 7\theta}{2} \right) \cdot \sin \left(\frac{7\theta - 3\theta}{2} \right) \right]
\end{aligned}$$

$$= \sin 5\theta \cdot \sin 2\theta = \text{RHS}$$

எனவே நிரூபிக்கப்பட்டது.

கேள்வி 11.

நிறுவுக. $\cos(30^\circ - A) \cos(30^\circ + A) + \cos(45^\circ - A) \cos(45^\circ + A) = \cos 2A + 1/4$.

தீர்வு:

$$\text{LHS} = \cos(30 - A) \cdot \cos(30 + A) + \cos(45 - A) \cdot \cos(45 + A)$$

$$= \cos^2 30 - \sin^2 A + \cos^2 45 - \sin^2 A$$

$$(\because \cos(A + B) \cdot \cos(A - B) = \cos^2 A - \sin^2 B)$$

$$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 - 2 \sin^2 A + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2$$

$$= \frac{3}{4} + \frac{1}{2} - 2 \sin^2 A = \frac{3}{4} - [1 - \cos 2A] + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{3}{4} - 1 + \cos 2A + \frac{1}{2} \quad [2 \sin^2 A = 1 - \cos 2A]$$

$$= \frac{3 - 4 + 2}{4} + \cos 2A = \frac{1}{4} + \cos 2A = \text{R.H.S}$$

கேள்வி 12.

$$\text{நிறுவுக. } \frac{\sin x + \sin 3x + \sin 5x + \sin 7x}{\cos x + \cos 3x + \cos 5x + \cos 7x} = \tan 4x$$

தீர்வு:

$$\begin{aligned}
 \text{LHS} &= \frac{\sin x + \sin 3x + \sin 5x + \sin 7x}{\cos x + \cos 3x + \cos 5x + \cos 7x} \\
 &= \frac{2 \sin \left(\frac{x+3x}{2} \right) \cos \left(\frac{x-3x}{2} \right) + 2 \sin \left(\frac{7x+5x}{2} \right) \cos \left(\frac{7x-5x}{2} \right)}{2 \cos \left(\frac{3x+x}{2} \right) \cos \left(\frac{3x-x}{2} \right) + 2 \cos \left(\frac{7x+5x}{2} \right) \cos \left(\frac{7x-5x}{2} \right)} \\
 &= \frac{\sin 2x \cos x + \sin 6x \cdot \cos x}{\cos 2x \cdot \cos x + \cos 6x \cdot \cos x} \\
 &= \frac{\cancel{\cos x} (\sin 2x + \sin 6x)}{\cancel{\cos x} (\cos 2x + \cos 6x)} = \frac{\sin 2x + \sin 6x}{\cos 2x + \cos 6x} \\
 &= \frac{\cancel{2} \sin \left(\frac{6x+2x}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{6x-2x}{2} \right)}{\cancel{2} \cos \left(\frac{6x+2x}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{6x-2x}{2} \right)} \\
 &= \frac{\sin 4x \cdot \cancel{\cos 2x}}{\cos 4x \cdot \cancel{\cos 2x}} = \tan 4x = \text{RHS}
 \end{aligned}$$

எனவே நிரூபிக்கப்பட்டது.

கேள்வி 13.

நிறுவுக, $\frac{\sin(4A-2B) + \sin(4B-2A)}{\cos(4A-2B) + \cos(4B-2A)} = \tan(A+B)$

தீர்வு:

$$\begin{aligned}
 \text{LHS} &= \frac{\sin(4A-2B) + \sin(4B-2A)}{\cos(4A-2B) + \cos(4B-2A)} \\
 &= \frac{\cancel{2} \sin \frac{(4A-2B+4B-2A)}{2} \cdot \cos \frac{(4A-2B-4B+2A)}{2}}{\cancel{2} \cos \frac{(4A-2B+4B-2A)}{2} \cdot \cos \frac{(4A-2B-4B+2A)}{2}} \\
 &= \frac{\sin \frac{2A+2B}{2} \cdot \cos \left(\frac{\cancel{6A-6B}}{2} \right)}{\cos \left(\frac{2A+2B}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{\cancel{6A-6B}}{2} \right)}
 \end{aligned}$$

$$= \frac{\sin(A+B)}{\cos(A+B)} = \tan(A+B) = \text{RHS}$$

எனவே நிரூபிக்கப்பட்டது.

கேள்வி 14.

$$\cot(A + 15^\circ) - \tan(A - 15^\circ) = \frac{4 \cos 2A}{1 + 2 \sin 2A} \text{ எனக் காண்பி.}$$

தீர்வு:

$$\begin{aligned} \text{LHS} &= \cot(A + 15^\circ) - \tan(A - 15^\circ) \\ &= \frac{\cos(A + 15^\circ)}{\sin(A + 15^\circ)} - \frac{\sin(A - 15^\circ)}{\cos(A - 15^\circ)} \\ &= \frac{\cos(A + 15^\circ) \cdot \cos(A - 15^\circ) - \sin(A - 15^\circ) \cdot \sin(A + 15^\circ)}{\sin(A + 15^\circ) \cdot \cos(A - 15^\circ)} \\ &= \frac{\cos^2 A - \sin^2 15^\circ - [\sin^2 A - \sin^2 15^\circ]}{\sin(A + 15^\circ) \cdot \cos(A - 15^\circ)} \\ &= \frac{1}{2} [\sin(A + 15^\circ + A - 15^\circ) + \sin(A + 15^\circ - A + 15^\circ)] \\ &= \frac{2(\cos^2 A - \cancel{\sin^2 15^\circ} - \sin^2 A + \cancel{\sin^2 15^\circ})}{\sin 2A + \sin 30^\circ} \\ &= \frac{2(\cos^2 A - \sin^2 A)}{\sin 2A + \frac{1}{2}} = \frac{2 \cos 2A \times 2}{2 \sin 2A + 1} \\ &= \frac{4 \cos 2A}{1 + 2 \sin 2A} = \text{RHS} \end{aligned}$$

$$(\because \cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 B)$$

எனவே நிரூபிக்கப்பட்டது.

Ex 3.7

கேள்வி 1.

$A + B + C = 180^\circ$, எனில் பின்வருவனவனற நிறுவுக.

(i) $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \sin A \sin B \sin C$

(ii) $\cos A + \cos B - \cos C = -1 + 4 \cos A \cos B \cos C$

(iii) $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2 + 2 \cos A \cos B \cos C$

(iv) $\sin^2 A + \sin^2 B - \sin^2 C = 2 \sin A \sin B \cos C$

(v) $\tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{B}{2} \tan \frac{C}{2} + \tan \frac{C}{2} \tan \frac{A}{2} = 1$

(vi) $\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$

(vii) $\sin(B + C - A) + \sin(C + A - B) + \sin(A + B - C) = 4 \sin A \sin B \sin C.$

தீர்வு:

$$\begin{aligned} \text{L.H.S} &= \sin 2A + \sin 2B + \sin 2C \\ &= 2 \sin \left(\frac{2A+2B}{2} \right) \cos \left(\frac{2A-2B}{2} \right) + 2 \sin C \cos C \\ (\because \sin 2C &= 2 \sin C \cos C) \\ &= 2 \sin(A+B) \cos(A-B) + 2 \sin C \cos C \\ (\sin C + \sin D &= 2 \sin \left(\frac{C+D}{2} \right) \cos \left(\frac{C-D}{2} \right)) \\ &= 2 \sin(180 - C) \cos(A+B) + 2 \sin C \cos C \\ (\because A + B + C &= 180^\circ) \\ &= 2 \sin C \cos(A-B) + 2 \sin C \cos C \\ &= 2 \sin C [\cos(A-B) + \cos C] \\ &= 2 \sin C (\cos(A-B) - \cos(A+B)) \\ &= 2 \sin C 2 \sin A \sin B \\ &= 4 \sin A \sin B \sin C = \text{RHS} \end{aligned}$$

எனவே நிரூபிக்கப்பட்டது.

$$(ii) \text{ LHS} = \cos A + \cos B - \cos C$$

$$\text{LHS} = \cos A + \cos B - \cos C$$

$$= 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right) - \left(1 - 2\sin^2\frac{C}{2}\right)$$

$$A + B + C = 180^\circ \Rightarrow A + B$$

$$= 180 - C \Rightarrow \frac{A+B}{2} = 90 - \frac{C}{2}$$

$$\cos\left(\frac{A+B}{2}\right) = \cos\left(90 - \frac{C}{2}\right) = \sin\frac{C}{2}$$

$$\text{LHS} = 2\sin\frac{C}{2}\cos\left(\frac{A-B}{2}\right) - 1 + 2\sin\frac{C}{2}$$

$$= 2\sin\frac{C}{2}\left[\cos\left(\frac{A-B}{2}\right) + \sin\frac{C}{2}\right] - 1$$

$$= -1 + 2\sin\frac{C}{2}\left[\cos\left(\frac{A-B}{2}\right) + \cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\right]$$

$$= -1 + 2\sin\frac{C}{2}\left[2\cos\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{B}{2}\right]$$

$$= -1 + 4\cos\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2}$$

$$\left(\begin{array}{l} \because \cos C = 1 - 2\sin^2\frac{C}{2} \\ \frac{C}{2} = 90 - \left(\frac{A+B}{2}\right) \end{array}\right)$$

$$= \text{RHS. எனவே நிரூபிக்கப்பட்டது.}$$

$$(iii) \text{ LHS} = \sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} [2\sin^2 A + 2\sin^2 B + 2\sin^2 C] \\
 &= \frac{1}{2} [(1 - \cos 2A) + (1 - \cos 2B) + (1 - \cos 2C)] \\
 &= \frac{1}{2} (3 - (\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C)) \\
 &= \frac{1}{2} \left[3 - \left[2\cos \left(\frac{2A+2B}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{2A-2B}{2} \right) + \cos 2C \right] \right] \\
 &= \frac{3}{2} - [\cos(A+B)\cos(A-B)] - \frac{1}{2} \cos 2C \\
 &= \frac{3}{2} - [\cos(180-C)\cos(A-B)] - \frac{1}{2} (2\cos^2 C - 1) \\
 &= \frac{3}{2} + (\cos C \cos(A-B)) - \cos^2 C + \frac{1}{2} \\
 &\quad (\because \cos(180-C) = -\cos C) \\
 &= \frac{3}{2} + \frac{1}{2} + \cos C [\cos(A-B) - \cos C] \\
 &= 2 + \cos C [\cos(A-B) + \cos(A+B)] \\
 &= 2 + \cos C [2\cos A \cos B] \\
 &= 2 + 2\cos A \cos B \cos C \\
 &= \text{RHS. எனவே நிரூபிக்கப்பட்டது.}
 \end{aligned}$$

$$(iv) \text{ LHS} = \sin^2 A + \sin^2 B - \sin^2 C$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2} [2\sin^2 A + 2\sin^2 B - 2\sin^2 C] \\
 &= \frac{1}{2} [(1 - \cos 2A) + (1 - \cos 2B) - (1 - \cos 2C)] \\
 &= \frac{1}{2} [1 - (\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C)] \\
 &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} [\cos 2A + \cos 2B + (2\cos^2 C - 1)] \\
 &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left[2\cos \left(\frac{2A+2B}{2} \right) \cos \left(\frac{2A-2B}{2} \right) + 2\cos^2 C - 1 \right] \\
 &= -(-\cos C \cos(A-B) - \cos^2 C)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\because \cos(A + B) = \cos(180 - C) = -\cos C) \\
& = \cos C \cdot \cos(A - B) + \cos^2 C \\
& = \cos C(\cos(A - B) + \cos C) \\
& = \cos C(\cos(A - B) - \cos(A + B)) \\
& = \cos C(2 \sin A \sin B) \\
& = \text{RHS. எனவே நிரூபிக்கப்பட்டது.}
\end{aligned}$$

$$(v) A + B + C = 180$$

$$A + B = 180 - C$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad \frac{A}{2} + \frac{B}{2} &= 90 - \frac{C}{2} \\
\tan\left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2}\right) &= \tan\left(90 - \frac{C}{2}\right) = \cot \frac{C}{2} \\
\Rightarrow \quad \frac{\tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2}}{1 - \tan \frac{A}{2} \cdot \tan \frac{B}{2}} &= \frac{1}{\tan \frac{C}{2}} \\
\Rightarrow \tan \frac{A}{2} \cdot \tan \frac{C}{2} + \tan \frac{B}{2} \cdot \tan \frac{C}{2} &= 1 - \tan \frac{A}{2} \cdot \tan \frac{B}{2} \\
\Rightarrow \tan \frac{A}{2} \cdot \tan \frac{C}{2} + \tan \frac{B}{2} \cdot \tan \frac{C}{2} + \tan \frac{A}{2} \cdot \tan \frac{B}{2} &= 1
\end{aligned}$$

எனவே நிரூபிக்கப்பட்டது.

(vi)

$$\begin{aligned}
\text{L.H.S} &= \sin A + \sin B + \sin C \\
&= 2 \sin\left(\frac{A+B}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{A-B}{2}\right) + 2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2} \\
&\left(\because \sin A = 2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}\right) \left(\because \frac{A+B}{2} = 90 - \frac{C}{2}\right) \\
&= 2 \sin\left(90 - \frac{C}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{A-B}{2}\right) + 2 \sin \frac{C}{2} \cdot \cos \frac{C}{2} \\
&= 2 \cos \frac{C}{2} \left[\cos \frac{(A-B)}{2} + \sin \frac{C}{2} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2\cos\frac{C}{2}\left[\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)+\sin\left(90-\left(\frac{A+B}{2}\right)\right)\right] \\
&= 2\cos\frac{C}{2}\left[\cos\frac{(A-B)}{2}+\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\right] \\
&= 2\cos\frac{C}{2}\left(2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\right) \\
&= 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} = \text{RHS.}
\end{aligned}$$

எனவே நிரூபிக்கப்பட்டது.

$$\begin{aligned}
\text{(vii) LHS} &= \sin(B+C-A) + \sin(C+A-B) + \sin(A+B-C) \\
&= \sin(180-A-A) + \sin(180-B-B) + \sin(180-C-C) \\
&= \sin(180-2A) + \sin(180-2B) + \sin(180-2C) \\
&= \sin 2A + \sin 2B + \sin 2C \\
&= 2\sin C \cos\left(\frac{2A-2B}{2}\right) + 2\sin C \cos C \\
&= 2\sin(A+B)\cos(A-B) + 2\sin C \cos C \\
&= 2\sin C [\cos(A-B) + \cos C (A+B=C=180^\circ)] \\
&= 2\sin C [\cos(A-B) + \cos(180^\circ-(A+B))] \\
&= 2\sin C (\cos(A-B) - \cos(A+B)) \\
&= 2\sin C 2\sin A \sin B = 4\sin A \sin B \sin C \\
&= \text{RHS. எனவே நிரூபிக்கப்பட்டது.}
\end{aligned}$$

கேள்வி 2.

$A + B + C = 2s$ எனில், $\sin(s-A)\sin(s-B) + \sin s \sin(s-C) = \sin A \sin B$ என நிறுவுக.

தீர்வு:

$A + B + C = 2s$ கொடுக்கப்பட்டுள்ளது

$$\text{L.H.S} = \sin(s-A)\sin(s-B) + \sin s \sin(s-C)$$

$$= \frac{1}{2}[\cos(s-A-s+B) - \cos(s-A+s-B)] + \frac{1}{2}[\cos(s-s+C) - \cos(s+s-C)]$$

$$(\because \sin A \sin B = \frac{1}{2}(\cos(A-B) - \cos(A+B)))$$

$$\begin{aligned}
&= 1/2(\cos(A - B) - \cos(2s - A - B) + \cos C - \cos(2s - C)) \\
&= 1/2(\cos(A - B) - \cos C + \cos C - \cos(A+B)) (\because 2s = A + B + C) \\
&= \frac{1}{2}[\cos(A - B) - \cancel{\cos C} + \cancel{\cos C} - \cos(A+B)]
\end{aligned}$$

$$= \sin A \cdot \sin B = \text{RHS.}$$

எனவே நிரூபிக்கப்பட்டது.

கேள்வி 3.

$x + y + z = xyz$ எனில், $\frac{2x}{1-x^2} + \frac{2y}{1-y^2} + \frac{2z}{1-z^2} = \frac{2x}{1-x^2} \cdot \frac{2y}{1-y^2} \cdot \frac{2z}{1-z^2}$ என நிறுவுக.

தீர்வு:

$$x = \tan A, y = \tan B, z = \tan C$$

$$x + y + z = xyz = 0$$

$$\Rightarrow \tan A + \tan B + \tan C - \tan A \tan B \tan C = 0$$

$$\tan(A + B + C) = \frac{\tan(A + B) + \tan C}{1 - \tan(A + B) \cdot \tan C} = 0$$

$$\Rightarrow \tan(A + B) + \tan C = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \cdot \tan B} + \tan C = 0$$

$$\Rightarrow \tan A + \tan B + \tan C - \tan A \tan B \tan C = 0$$

$$\Rightarrow \tan A + \tan B + \tan C - \tan A \tan B \tan C = 0$$

$$\Rightarrow \tan A + \tan B + \tan C = \tan A \cdot \tan B \cdot \tan C = 0 \dots (1)$$

$$\Rightarrow \tan A + \tan B + \tan C - \tan A \cdot \tan B \cdot \tan C = 0$$

$$\Rightarrow \tan(A + B + C) = 0$$

$$\Rightarrow \tan 2(A + B + C) = 0$$

$$\Rightarrow \tan(2A + 2B + 2C) = 0$$

$$\Rightarrow \tan 2A + \tan 2B + \tan 2C = \tan 2A \tan 2B \tan 2C \quad (1) \text{ -ன் படி}$$

$$x = \tan A, \tan 2A = \frac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A} = \frac{2x}{1 - x^2}$$

$$\tan 2B = \frac{2 \tan B}{1 - \tan^2 B} = \frac{2y}{1 - y^2}$$

$$\tan 2C = \frac{2 \tan C}{1 - \tan^2 C} = \frac{2z}{1 - z^2}$$

இந்த மதிப்புகளை (1) -ல் பிரதியிட

$$\begin{aligned} \tan 2A + \tan 2B + \tan 2C &= \frac{2x}{1 - x^2} + \frac{2y}{1 - y^2} + \frac{2z}{1 - z^2} \\ &= \frac{2x}{1 - x^2} \cdot \frac{2y}{1 - y^2} \cdot \frac{2z}{1 - z^2} \end{aligned}$$

எனவே நிரூபிக்கப்பட்டது.

கேள்வி 4.

$A + B + C = \pi/2$ எனில், பின்வருவனவற்றை நிறுவுக.

(i) $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4 \cos A \cos B \cos C$

(ii) $\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = 1 + 4 \sin A \sin B \sin C$

தீர்வு:

$$A + B + C = \pi/2$$

(i) L.H.S = $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C$

$$= 2 \sin \left(\frac{2A+2B}{2} \right) \cos \left(\frac{2A-2B}{2} \right) + 2 \sin C \cos C$$

$$= 2 \sin (A+B) \cos (A-B) + 2 \sin C \cos C$$

$$= 2 \sin \left(\frac{\pi}{2} - C \right) \cdot \cos (A-B) + 2 \sin C \cos C$$

$$= 2 \cos C \cos (A-B) + 2 \sin C \cos C$$

$$= 2 \cos C \left[\cos (A-B) + \sin \left(\frac{\pi}{2} - (A+B) \right) \right]$$

$$= 2 \cos C (\cos (A-B) + \cos (A+B))$$

$$= 2 \cos C \cdot 2 \cos A \cdot \cos B$$

$$= 4 \cos A \cos B \cos C = \text{R.H.S.}$$

எனவே நிரூபிக்கப்பட்டது.

$$\text{(ii) L.H.S} = \cos 2A + \cos 2B + \cos 2C$$

$$= 2 \cos \left(\frac{2A+2B}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{2A-2B}{2} \right) + 1 - 2 \sin^2 C$$

$$= 2 \cos (A+B) \cdot \cos (A-B) + 1 - 2 \sin^2 C$$

$$= 2 \cos \left(\frac{\pi}{2} - C \right) \cdot \cos (A-B) - 2 \sin^2 C + 1$$

$$= 1 + 2 \sin C \cdot \cos (A-B) - 2 \sin^2 C$$

$$= 1 + 2 \sin C \left[\cos (A-B) - \sin \left(\frac{\pi}{2} - (A+B) \right) \right]$$

$$= 1 + 2 \sin C [\cos (A-B) - \cos (A+B)]$$

$$= 1 + 2 \sin C [2 \sin A \cdot \sin B]$$

$$= 1 + 4 \sin A \sin B \sin C = \text{R.H.S.}$$

எனவே நிரூபிக்கப்பட்டது.

கேள்வி 5.

ΔABC ஒரு செங்கோண முக்கோணம் மற்றும் $\angle A = \pi/2$ எனில், பின்வருவனவற்றை நிறுவுக.

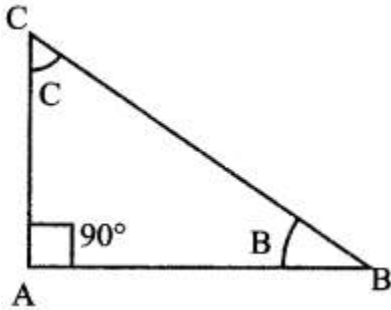
$$(i) \cos^2 B + \cos^2 C = 1$$

$$(ii) \sin^2 B + \sin^2 C = 1$$

$$(iii) \cos B - \cos C = -1 + 2\sqrt{2} \cos B/2 \sin C/2$$

தீர்வு:

(i)



$$\angle A = \frac{\pi}{2}, B + C = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{L.H.S} = \cos^2 B + \cos^2 C$$

$$= \cos^2 B + \left[\cos\left(\frac{\pi}{2} - B\right) \right]^2$$

$$= \cos^2 B + \sin^2 B = 1 = \text{RHS.}$$

எனவே நிரூபிக்கப்பட்டது.

$$(ii) \text{ L.H.S} = \sin^2 B + \sin^2 C$$

$$= \sin^2 B + \left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - B\right) \right]^2$$

$$\sin^2 B + \cos^2 B$$

$$= \sin^2 B + \cos^2 B = 1 = \text{RHS.}$$

எனவே நிரூபிக்கப்பட்டது.

Ex 3.8

கேள்வி 1.

பின்வருவனவற்றுக்கு முதன்மை தீர்வு மற்றும் பொதுத் தீர்வுகளைக் காண்க.

$$(i) \sin \theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$(ii) \cot \theta = \sqrt{3}$$

$$(iii) \tan \theta = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

தீர்வு:

$$(i) \sin \theta = -\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.}$$

$$\sin \theta = -\frac{1}{\sqrt{2}} < 0$$

எனவே IV-ம் கால் பகுதியால் அமைகிறது.

$$\sin \theta = -\sin \frac{\pi}{4} = \sin\left(\frac{-\pi}{4}\right)$$

$$\theta = \frac{\pi}{4} \text{ என்பது முதன்மைத் தீர்வு ஆகும்.}$$

பொதுத்தீர்வு:

$$\theta = n\pi + (-1)^n \left(\frac{-\pi}{4} \right), n \in \mathbb{Z}$$

$$(ii) \cot \theta = \sqrt{3} \Rightarrow \tan \theta = \frac{-1}{\sqrt{3}} < 0$$

முதன்மைத் தீர்வு 1-ம் கால் பகுதியில் அமையும்.

$$\therefore \tan \theta = \frac{1}{\sqrt{3}} = \tan \left(\frac{\pi}{6} \right)$$

$$\theta = \frac{\pi}{6} \text{ என்பது முதன்மைத் தீர்வு ஆகும்.}$$

பொதுத்தீர்வு:

$$\theta = n\pi + \frac{\pi}{6}, n \in \mathbb{Z}$$

$$(iii) \tan \theta = \frac{-1}{\sqrt{3}} < 0, \theta$$

-IV-ம் கால் பகுதியில் அமையும்.

$$\tan \theta = \frac{-1}{\sqrt{3}} = -\tan \frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow \tan \theta = \tan \left(\frac{-\pi}{6} \right)$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{-\pi}{6} \text{ என்பது முதன்மைத் தீர்வு,}$$

பொதுத்தீர்வு:

$$\theta = n\pi + \left(\frac{-\pi}{6} \right), n \in \mathbb{Z}$$

கேள்வி 2.

$0^\circ < \theta < 360^\circ$ என்ற இடைவெளியில் கீழ்க்கண்ட சமன்பாடுகளுக்கு சரியான தீர்வுகளைக் காண்க.

(i) $\sin^4 x = \sin^2 x$

(ii) $2 \cos^4 x + 1 = -3 \cos x$

(iii) $2 \sin^2 x + 1 = 3 \sin x$

(iv) $\cos 2x = 1 - 3 \sin x$

தீர்வு:

(i) $\sin^4 x = \sin^2 x$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \sin^4 x - \sin^2 x = 0 \\
&\Rightarrow \sin^2 x (\sin^2 x - 1) = 0 \\
&\Rightarrow \sin^2 x = 0 \text{ அல்லது } \sin^2 x - 1 = 0 \\
&\Rightarrow \sin x = 0 \text{ அல்லது } \sin^2 x = 1 \\
&\Rightarrow \sin x = 0, \pm 1 \Rightarrow x = 0, \pi \dots (1) \\
&\Rightarrow \sin x = \sin 90^\circ
\end{aligned}$$

$$(iii) \cos B - \cos C = -1 + 2\sqrt{2}\cos\frac{B}{2} \sin\frac{C}{2}$$

$$L.H.S = \cos B - \cos C$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - C\right) - \cos C = \sin C - \cos C$$

$$= \sin C - \left[1 - 2\sin^2\frac{C}{2}\right] \quad \left[\because \cos 2C = 1 - 2\sin^2 C\right]$$

$$= 2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2} - 1 + 2\sin^2\frac{C}{2}$$

$$= -1 + 2\sin\frac{C}{2}\left[\cos\frac{C}{2} + \sin\frac{C}{2}\right] \quad \left[\begin{array}{l} B+C=90 \\ C=90-B \\ \frac{C}{2}=45-\frac{B}{2} \end{array}\right]$$

$$= -1 + 2\sin\frac{C}{2}\left[\cos 45\cos\frac{B}{2} + \sin 45\sin\frac{B}{2}\right]$$

$$+ \sin 45\cos\frac{B}{2} - \cos 45\sin\frac{B}{2}]$$

$$= -1 + 2\sin\frac{C}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{B}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{B}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{B}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{B}{2}\right]$$

$$\begin{aligned}
&= -1 + 2 \sin \frac{C}{2} \left[\frac{2}{\sqrt{2}} \cos \frac{B}{2} \right] = -1 + \frac{4}{\sqrt{2}} \sin \frac{C}{2} \cos \frac{B}{2} \\
&= -1 + \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} \cos \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} \\
&= -1 + 2\sqrt{2} \cos \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \\
&= \text{R.H.S. எனவே நிரூபிக்கப்பட்டது.}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow x = 90^\circ = \frac{\pi}{2} \dots(2)$$

$$\Rightarrow \sin x = -1$$

$$\Rightarrow \sin x = -\sin \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \sin x = \sin \left(\pi + \frac{\pi}{2} \right) \text{ (sin மதிப்பு III-ம் கால் பகுதி குறையாகும்)}$$

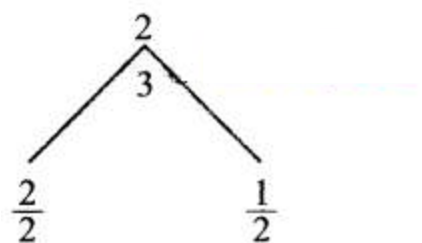
$$\Rightarrow \sin x = \sin \frac{3\pi}{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{3\pi}{2} \dots\dots(3)$$

$$(1), (2), (3) \text{ லிருந்து } x = 0, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \pi$$

$$(ii) 2 \cos^2 x + 1 = -3 \cos x$$

$$\Rightarrow 2 \cos^2 x + 3 \cos x + 1 = 0$$



$$\Rightarrow (\cos x + 1)(2 \cos x + 1) = 0$$

$$\Rightarrow (\cos x + 1) = 0 \text{ அல்லது}$$

$$(2 \cos x + 1) = 0$$

$$\text{வகை (i) } \cos x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \cos x = -1$$

$$\Rightarrow \cos x = -\cos 0^\circ$$

$$\Rightarrow \cos x = \cos(\pi - 0)$$

$$\Rightarrow x = \pi \text{ அல்லது } \cos x = \cos(\pi - 0)$$

$$\Rightarrow x = \pi, \pi \dots\dots (1)$$

($\therefore \cos x$ II, III-ம் கால் பகுதியில் குறையாகும்)

வகை (ii) $2\cos x + 1 = 0$

$$\Rightarrow 2 \cos x = -1$$

$$\Rightarrow \cos x = \frac{-1}{2} = -\cos \frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \cos x = \left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) \text{ அல்லது } \cos x = \cos \left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)$$

($\therefore \cos x$, II, III-ம் கால் பகுதியில் குறை மதிப்புடையது)

$$\Rightarrow \cos x = \cos \frac{4\pi}{3} \text{ அல்லது } \cos x = \cos \frac{2\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \theta x = \frac{4\pi}{3} \text{ அல்லது } \frac{2\pi}{3} \dots (2)$$

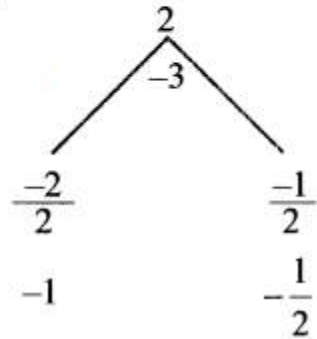
(1), (2) லிருந்து $x = \pi, \frac{4\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$ ஆகும்.

(iii) $2\sin^2 x + 1 = 3 \sin x$

$$2\sin^2 x - 3 \sin x + 1 = 0$$

$$(\sin x - 1)(2\sin x - 1) = 0$$

$$\begin{array}{l|l} \sin x - 1 = 0 & 2 \sin x - 1 = 0 \\ \sin x = 1 & 2 \sin x = 1 \\ & \sin x = \frac{1}{2} \end{array}$$



வகை (i) $\sin x = 1$

$\Rightarrow \sin x = 90$

$x = \frac{\pi}{2} \dots\dots (1)$

வகை (ii) $\sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin \frac{\pi}{6}$

$x = \frac{\pi}{6} \dots\dots (2)$

(1), (2) $\Rightarrow x = \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}$

(iv) $\cos 2x = 1 - 3 \sin x$

$\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x$

$\Rightarrow \cos 2x = 1 - 3 \sin x \Rightarrow 1 - 2 \sin^2 x$

$\Rightarrow -2 \sin^2 x = -3 \sin x$

$\Rightarrow 2 \sin^2 x = 3 \sin x$

$\Rightarrow \sin x (2 \sin x - 3) = 0$

$\Rightarrow \sin x = 0$ அல்லது

$2 \sin x - 3 = 0$

$2 \sin x = 3$

$\sin x = 3/2$

வகை (i) $\sin x = 0$

$x = 0, \pi$

வகை (ii) $\sin x = 3/2$ -ஆக இருக்க முடியாது.

$\therefore \sin x$ -ன் மதிப்புகள் 1ஐ விட பெரியதாக இருக்க முடியாது.

$\therefore x$ -ன் மதிப்புகள் $0, \pi$

கேள்வி 3.

பின்வரும் சமன்பாடுகளைத் தீர்க்கவும்

(i) $\sin 5x - \sin x = \cos 3x$

தீர்வு:

$\sin 5x - \sin x = \cos 3x$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow 2 \cos\left(\frac{5x+x}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{5x-x}{2}\right) = \cos 3x \\
&(\because \sin C - \sin D = 2 \cos \frac{C+D}{2} \sin \frac{C-D}{2}) \\
&\Rightarrow 2 \cos 3x \sin 2x = \cos 3x \\
&\Rightarrow 2 \cos 3x \sin 2x - \cos 3x = 0 \\
&\Rightarrow \cos 3x (2 \sin 2x - 1) = 0 \\
&\Rightarrow \cos 3x = 0, \text{ அல்லது} \\
&2 \sin 2x - 1 = 0 \\
&2 \sin 2x = 1; \sin 2x = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

வகை (i) $\cos 3x = 0$
 $3x = (2n + 1)\pi/2, n \in \mathbb{Z}$
 $(\because \cos \theta = 0 \Rightarrow \theta = (2n + 1)\pi/2, n \in \mathbb{Z})$
 $\Rightarrow x = (2n + 1)\pi/6, n \in \mathbb{Z}$

வகை (ii)

$$\begin{aligned}
&\sin 2x = \frac{1}{2} \\
\Rightarrow \sin 2x &= \sin \frac{\pi}{6} \\
2x &= \frac{\pi}{6} \\
\Rightarrow n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{6}, n \in \mathbb{Z} \\
&(\because \sin \theta = \sin \alpha \Rightarrow \theta = n\pi + (-1)^n \alpha, n \in \mathbb{Z}) \\
\Rightarrow x &= \frac{n\pi}{2} + (-1)^n \frac{\pi}{12}, n \in \mathbb{Z} \\
\therefore x &= (2n+1)\frac{\pi}{6} \text{ அல்லது}
\end{aligned}$$

$$\frac{n\pi}{2} + (-1)^n \frac{\pi}{12}, n \in \mathbb{Z}$$

(ii) $2 \cos^2 \theta + 3 \sin \theta - 3 = 0$

தீர்வு:

$$2 \cos^2 \theta + 3 \sin \theta - 3 = 0$$

$$\begin{array}{cc} & 2 \\ & -3 \\ \swarrow & \searrow \\ \frac{-2}{2} & \frac{-1}{2} \\ -1 & -\frac{1}{2} \end{array}$$

$$2(1 - \sin^2 \theta) + 3 \sin \theta - 3 = 0$$

$$\Rightarrow 2 - 2 \sin^2 \theta + 3 \sin \theta - 3 = 0$$

$$\Rightarrow -2 \sin^2 \theta + 3 \sin \theta - 1 = 0$$

$$\Rightarrow 2 \sin^2 \theta - 3 \sin \theta + 1 = 0$$

$$\Rightarrow (\sin \theta - 1)(2 \sin \theta - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \sin \theta = 1 \text{ அல்லது } \sin \theta = 1/2$$

$$\text{வகை (i)} \quad \sin \theta = 1 = \sin \frac{\pi}{2}$$

$$(\therefore \sin \theta = \sin \alpha \Rightarrow \theta = n\pi + (-1)^n \alpha, n \in \mathbb{Z})$$

$$\Rightarrow \theta = n\pi + (-1)^n \cdot \frac{\pi}{2}, \\ n \in \mathbb{Z}$$

$$\text{வகை (ii)} \quad \sin \theta = \frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6}$$

$$\theta = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{6}, \\ n \in \mathbb{Z}$$

$$\theta\text{-ன் தீர்வு} \Rightarrow \theta = n\pi + (-1)^n \left(\frac{\pi}{2} \right)$$

அல்லது

$$\theta = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{6}, \\ n \in \mathbb{Z}$$

$$(iii) \cos \theta + \cos 3\theta = 2 \cos 2\theta$$

தீர்வு:

$$\cos \theta + \cos 3\theta = 2\cos 2\theta$$

$$\Rightarrow 2\cos\left(\frac{\theta+3\theta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\theta-3\theta}{2}\right) - 2\cos 2\theta = 0$$

$$(\because \cos C + \cos D = 2\cos\left(\frac{C+D}{2}\right) \cdot \left(\frac{C-D}{2}\right))$$

$$\Rightarrow 2\cos 2\theta \cdot \cos \theta - 2\cos 2\theta = 0$$

$$\Rightarrow (\cos 2\theta)(\cos \theta - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \cos 2\theta = 0 \text{ அல்லது } \cos \theta = 1$$

$$\text{வகை (i) } \cos 2\theta = 0$$

$$2\theta = (2n + 1)\pi/2, n \in \mathbb{Z}$$

$$(\because \cos \theta = 0 \Rightarrow \theta = (2n + 1)\pi/2, n \in \mathbb{Z})$$

$$\text{வகை (ii) } \cos \theta = 1$$

$$\cos \theta = \cos 0^\circ$$

$$\theta = 2n\pi \pm 0, n \in \mathbb{Z}$$

$$\theta = 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$$

$$0\text{-ன் தீர்வுகள் } \theta = (2n + 1)\pi/4, 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$$

$$(iv) \sin \theta + \sin 3\theta + \sin 5\theta = 0$$

தீர்வு:

$$\sin \theta + \sin 3\theta + \sin 5\theta = 0$$

$$2\sin\left(\frac{\theta+5\theta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{5\theta-\theta}{2}\right) + \sin 3\theta = 0$$

$$\left[\because \sin C + \sin D = 2\sin\left(\frac{C+D}{2}\right) \cos\left(\frac{C-D}{2}\right) \right]$$

$$\Rightarrow 2 \sin 3\theta \cos 2\theta + \sin 3\theta = 0$$

$$\Rightarrow \sin 3\theta (2 \cos 2\theta + 1) = 0$$

$$\Rightarrow \sin 3\theta = 0 \text{ அல்லது } \cos 2\theta = \frac{-1}{2}$$

$$\text{வகை (i) } \sin 3\theta = 0$$

$$3\theta = n\pi, n \in \mathbb{Z}$$

$$\theta = \frac{n\pi}{3}, n \in \mathbb{Z}$$

$$\text{வகை (ii)}$$

$$\begin{aligned} \cos 2\theta &= \frac{-1}{2} = -\cos \frac{\pi}{3} \\ &= \cos \left(\pi - \frac{\pi}{3} \right) \end{aligned}$$

[$\because \cos \theta$, Π -ம் கால் பகுதியில் குறையாகும்]

$$\begin{aligned} \Rightarrow \cos 2\theta &= \cos \left(\frac{2\pi}{3} \right) \\ 2\theta &= 2n\pi \pm \frac{2\pi}{3}, n \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$\theta = n\pi \pm \frac{\pi}{3}, n \in \mathbb{Z}$$

$$\therefore \text{தீர்வு: } \frac{n\pi}{3}, n\pi \pm \frac{\pi}{3}, n \in \mathbb{Z}$$

$$(v) \sin 2\theta - \cos 2\theta - \sin \theta + \cos \theta = 0$$

தீர்வு:

$$\sin 2\theta - \cos 2\theta - \sin \theta + \cos \theta = 0$$

$$\Rightarrow \sin 2\theta - \sin \theta + \cos \theta - \cos 2\theta = 0$$

$$\Rightarrow 2 \cos\left(\frac{2\theta + \theta}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{2\theta - \theta}{2}\right) \\ + 2 \sin\left(\frac{\theta + 2\theta}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{2\theta - \theta}{2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow 2 \cos \frac{3\theta}{2} \cdot \sin \frac{\theta}{2} + 2 \sin\left(\frac{3\theta}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow 2 \sin \frac{\theta}{2} \left[\cos \frac{3\theta}{2} + \sin \frac{3\theta}{2} \right] = 0$$

$$\text{வகை (i) } \sin \frac{\theta}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \sin \frac{\theta}{2} = \sin n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \frac{\theta}{2} = n\pi$$

$$\Rightarrow \theta = 2n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\text{வகை (ii) } \cos \frac{3\theta}{2} + \sin \frac{3\theta}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \sin \frac{3\theta}{2} = -\cos\left(\frac{3\theta}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\sin \frac{3\theta}{2}}{\cos \frac{3\theta}{2}} = -1$$

$$\Rightarrow \tan \frac{3\theta}{2} = -1$$

$$\Rightarrow \tan \frac{3\theta}{2} = \tan\left(\frac{-\pi}{4}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{3\theta}{2} = n\pi - \frac{\pi}{4}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{2n\pi}{3} - \frac{\pi}{6}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\therefore \theta\text{-ன் தீர்வு } 2n\pi \text{ அல்லது } \frac{2n\pi}{3} - \frac{\pi}{6}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$(vi) \sin \theta + \cos \theta = \sqrt{2}$$

தீர்வு:

$$\sin \theta + \cos \theta = \sqrt{2}$$

$$\sqrt{2} \text{ ஆல் முழுவதும் வகுக்க } \frac{\sin \theta}{\sqrt{2}} + \frac{\cos \theta}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$

$$\sin \frac{\pi}{4} \sin \theta + \cos \frac{\pi}{4} \cos \theta = 1$$

$$(\because \cos A \cos B + \sin A \sin B = \cos(A - B))$$

$$\Rightarrow \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = 1 = \cos \theta$$

$$\Rightarrow \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = \cos \theta$$

$$\Rightarrow \left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = 2n\pi \pm 0, n \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \theta = 2n\pi + \frac{\pi}{4}, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow \theta = \frac{8n\pi + \pi}{4}, n \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \theta = (8n+1)\frac{\pi}{4}, n \in \mathbb{Z}$$

$$(vii) \sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta = 1$$

தீர்வு:

$$\sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta = 1$$

$$a = 1, b = \sqrt{3}, \sqrt{1 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{1 + 3} \\ = \sqrt{4} = 2$$

முழுவதையும் $\sqrt{1 + \sqrt{3}^2}$ ஆல் வகுக்க

$$\frac{1}{2} \sin \theta + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \theta = \frac{1}{2}$$

$$\sin \frac{\pi}{6} \sin \theta + \cos \frac{\pi}{6} \cos \theta = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}, n \in \mathbb{Z}$$

$$[\because \cos A \cos B + \sin A \cdot \sin B = \cos(A - B)]$$

$$\Rightarrow \theta = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}, n \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow 2n\pi + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} \text{ அல்லது } 2n\pi - \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}, n \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \theta = 2n\pi + \pi \text{ அல்லது } 2n\pi - \frac{\pi}{6}, n \in \mathbb{Z}$$

(viii) $\cot \theta + \operatorname{cosec} \theta = \sqrt{3}$

தீர்வு:

$$\cot \theta + \operatorname{cosec} \theta = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \frac{\cos \theta}{\sin \theta} + \frac{1}{\sin \theta} = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \frac{\cos \theta + 1}{\sin \theta} = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \cos \theta + 1 = \sqrt{3} \sin \theta$$

$$\Rightarrow \sqrt{3} \sin \theta - \cos \theta = 1,$$

இங்கு $a = \sqrt{3}, b = -1$

$$\Rightarrow \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3 + (-1)^2} = 2$$

$\Rightarrow$ முழுவதையும் 2-ஆல் வகுக்க

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \theta - \frac{1}{2} \cos \theta = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \sin \frac{\pi}{3} \sin \theta - \cos \frac{\pi}{3} \cos \theta = \frac{1}{2}$$

$$(\because \cos A \cos B - \sin A \sin B = \cos (A+B))$$

$$\Rightarrow -\cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

$$\Rightarrow \theta + \frac{\pi}{3} = 2n\pi \pm \frac{2\pi}{3}, n \in \mathbb{Z}$$

$$(\because \cos \theta = \cos 2 \Rightarrow \theta = 2n \pm \alpha, n \in \mathbb{Z})$$

$$\Rightarrow \theta = 2n\pi + \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{3}, n \in \mathbb{Z}$$

$$\text{அல்லது} \Rightarrow \theta = 2n\pi - \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{3}, n \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \theta = 2n\pi + \frac{\pi}{3}, 2n\pi - \pi, n \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \theta = 2n\pi + \frac{\pi}{3}, (2n-1)\pi, n \in \mathbb{Z}$$

$$\therefore \theta\text{-ன் தீர்வு} = \left(2n\pi + \frac{\pi}{3}\right), (2n+1)\pi, n \in \mathbb{Z}$$

$$(ix) \tan \theta + \tan\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) + \tan\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$$

தீர்வு:

$$\tan \theta + \tan\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) + \tan\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \tan \theta + \frac{\tan \theta + \tan \frac{\pi}{3}}{1 - \tan \theta \cdot \tan \frac{\pi}{3}} + \frac{\tan \theta + \tan \frac{2\pi}{3}}{1 - \tan \theta \cdot \tan \frac{2\pi}{3}} = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \tan \theta + \frac{\tan \theta + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3} \tan \theta} + \frac{\tan \theta - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3} \tan \theta} = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \tan \theta + \frac{(1+\sqrt{3} \tan \theta)(\tan \theta + \sqrt{3}) + (1-\sqrt{3} \tan \theta)(\tan \theta)}{1-3 \tan^2 \theta} = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \tan \theta + \frac{\cancel{\tan \theta} + \sqrt{3} + \sqrt{3} \cancel{\tan^2 \theta} + 3 \tan \theta + \cancel{\tan \theta} - \sqrt{3} \cancel{\tan^2 \theta} - \sqrt{3} + 3 \tan \theta}{1-3 \tan^2 \theta} = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \tan \theta + \frac{8 \tan \theta}{1-3 \tan^2 \theta} = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \tan \theta + \frac{8 \tan \theta}{1-3 \tan^2 \theta} = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \frac{\tan \theta - 3 \tan^3 \theta + 8 \tan \theta}{1-3 \tan^2 \theta} = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \frac{3(3 \tan \theta - \tan^3 \theta)}{1-3 \tan^2 \theta} = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow 3(\tan 3\theta) = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \tan 3\theta = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \tan 3\theta = \tan \frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow 3\theta = +\frac{\pi}{6}, n \in \mathbb{Z}$$

$$(\therefore \tan \theta = \tan \alpha \Rightarrow \theta = n\pi + \alpha)$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{n\pi}{3} + \frac{\pi}{18}, n \in \mathbb{Z}$$

$$\theta\text{-ன் தீர்வு} = \frac{n\pi}{3} + \frac{\pi}{18}, n \in \mathbb{Z}$$

$$(x) \cos 2\theta = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$$

தீர்வு:

$$\cos 2\theta = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$$

$$\cos 2\theta = \frac{\sqrt{5}+1}{4} = \cos 36^\circ$$

$$\left(\because \cos 36^\circ = \frac{\sqrt{5}+1}{4} \right)$$

$$\begin{aligned}
 36^\circ &= \cancel{36} \times \frac{\pi}{\cancel{180}} = \frac{\pi}{5} \\
 \Rightarrow \cos 2\theta &= \cos \frac{\pi}{5} \\
 \Rightarrow 2\theta &= 2n\pi \pm \frac{\pi}{5}, n \in \mathbb{Z} \\
 \Rightarrow \theta &= n\pi \pm \frac{\pi}{10}, n \in \mathbb{Z}
 \end{aligned}$$

(xi) $2 \cos^2 x - 7 \cos x + 3 = 0$

தீர்வு:

$$2 \cos^2 x - 7 \cos x + 3 = 0$$

$$\Rightarrow (\cos x - 3)(2 \cos x - 1) = 0$$

$$\Rightarrow (\cos x - 3) = 0$$

$$\Rightarrow \cos x = 3$$

$$\Rightarrow \text{அல்லது } (2 \cos x - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \cos x = 1/2$$

$\cos x = 3$ -ஆக இருக்க முடியாது

$$\begin{array}{cc}
 & 6 \\
 & \swarrow \quad \searrow \\
 & -7 \\
 \frac{-6}{2} & \quad \quad \quad \frac{-1}{2} \\
 -3 & \quad \quad \quad -\frac{1}{2}
 \end{array}$$

$$\therefore \cos x = 1/2$$

$$\Rightarrow \cos x = \cos \pi/3$$

$$\Rightarrow x = 2n\pi \pm \pi/3, n \in \mathbb{Z}$$

$$\therefore x\text{-ன் தீர்வு} = 2n\pi \pm \pi/3, n \in \mathbb{Z}$$

Ex 3.9

கேள்வி 1.

$\triangle ABC$ இல் $\frac{\sin A}{\sin C} = \frac{\sin(A-B)}{\sin(B-C)}$ எனில், a^2, b^2, c^2 ஆகியவை ஒரு கூட்டுத் தொடர் வரிசையில் அமையும் என நிறுவுக.

தீர்வு:

$$\begin{aligned} \text{sin சூத்திரம் } \frac{\sin A}{a} &= \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} = k \\ &= \sin A = ak, \sin B = bk, \sin C = ck \quad \dots(1) \\ &= \frac{\sin A}{\sin C} = \frac{\sin(A-B)}{\sin(B-C)} \end{aligned}$$

என கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.

$$\begin{aligned} (\because \sin A &= \sin(B+C) \sin C = \sin(A+B) \\ \Rightarrow \frac{\sin(B+C)}{\sin(A+B)} &= \frac{\sin(A-B)}{\sin(B-C)} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sin(B+C) \cdot \sin(B-C) = \sin(A+B) \sin(A-B)$$

$$\Rightarrow \sin^2 B - \sin^2 C = \sin^2 A - \sin^2 B$$

$$\Rightarrow k^2 b^2 - k^2 c^2 = k^2 a^2 - k^2 b^2$$

$$\Rightarrow b^2 - c^2 = a^2 - b^2$$

$$\Rightarrow 2b^2 = a^2 + c^2$$

$$\Rightarrow a^2, b^2, c^2 \text{ ஒரு கூட்டுத் தொடர்.}$$

கேள்வி 2.

$\triangle ABC$ இன் கோணங்கள் ஒரு கூட்டுத் தொடர் வரிசையில் அமையும் மற்றும் $b : c = \sqrt{3} : \sqrt{2}$ எனில், $\angle A$ ஐக் காண்க.

தீர்வு:

$\angle A, \angle B, \angle C$ என்பது ஒரு கூட்டுத் தொடர் வரிசையில் அமையும்.

$$\therefore 2\angle B = \angle A + \angle C$$

$$\Rightarrow 3\angle B = \angle A + \angle B + \angle C$$

இருபுறமும் $\angle B$ ஐக் கூட்ட

$$\Rightarrow 3\angle B = 180^\circ$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad \angle B &= \frac{180^\circ}{3} = 60^\circ \\
\frac{b}{c} &= \frac{\sin B}{\sin C} \\
\Rightarrow \quad \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} &= \frac{\sin 60^\circ}{\sin C} \\
\Rightarrow \quad \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} &= \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sin C} \\
\Rightarrow \quad \sin C &= \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}} \times \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \angle C = 45^\circ$$

$$\angle A = 180 - (\angle B + \angle C)$$

$$= 180 - (60 + 45) = 75^\circ$$

$$\angle A = 75^\circ, \angle B = 60^\circ, \angle C = 45^\circ$$

கேள்வி 3.

$\triangle ABC$ இல் $\cos C = \frac{\sin A}{2 \sin B}$ எனில், ஒரு இருசமபக்க முக்கோணம் எனக் காண்பி.

தீர்வு:

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} = k \text{ என்க.}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad \sin A &= ka, \sin B = kb, \sin C = kc \\
\cos C &= \frac{\sin A}{2 \sin B}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad 2 \cos C \sin B = \sin A$$

$$\Rightarrow \quad 2 \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \right) kb = ka$$

$$\Rightarrow \quad \frac{a^2 + b^2 - c^2}{a} = a$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 - c^2 = a^2$$

$$\Rightarrow b^2 - c^2 = 0$$

$$\Rightarrow b^2 = c^2$$

$$\Rightarrow b = c$$

$\therefore \triangle ABC$ ஓர் இருசமபக்க முக்கோணம்.

கேள்வி 4.

ΔABC இல் $\frac{\sin B}{\sin C} = \frac{c-a \cos B}{b-a \cos C}$ என நிறுவுக.

தீர்வு:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = k \text{ என்க.}$$

$$a = k \sin A, b = k \sin B, c = k \sin C$$

$$\begin{aligned} \text{RHS} &= \frac{C - a \cos B}{b - a \cos C} = \frac{(a \cos B + b \cos A) - a \cos B}{(a \cos C + a \cos A) - a \cos C} \\ &= \frac{\cancel{b \cos A}}{\cancel{c \cos A}} = \frac{b}{c} = \frac{\cancel{k} \sin B}{\cancel{k} \sin C} = \frac{\sin B}{\sin C} = \text{L.H.S.} \end{aligned}$$

கேள்வி 5.

ΔABC இல் $a \cos A + b \cos B + c \cos C = 2a \sin B \sin C$ என நிறுவுக.

தீர்வு:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = k \text{ என்க.}$$

$$a = k \sin A, b = k \sin B, c = k \sin C \dots (1)$$

$$\text{L.H.S} = a \cos A + b \cos B + c \cos C$$

$$(1) \text{ லிருந்து } \Rightarrow k \sin A \cos A + k \sin B \cos B + k \sin C \cos C$$

$$= k/2 [2 \sin A \cos A + 2 \sin B \cos B + 2 \sin C \cos C]$$

$$= k/2 [\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C]$$

$$= \frac{k}{2} [\cancel{2} \sin A \sin B \sin C]$$

$$= 2 (k \sin A) \sin B \sin C$$

$$= 2 a \sin B \sin C \Rightarrow \text{R.H.S.}$$

எனவே நிரூபிக்கப்பட்டது.

கேள்வி 6.

ΔABC இல் $\angle A = 60^\circ$ $b + c = 2a \cos\left(\frac{B-C}{2}\right)$ என நிறுவுக.

தீர்வு:

$$A + B + C = 180^\circ.$$

$$\Rightarrow B + C = 180 - A = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

$$\Rightarrow \frac{B+C}{2} = 60^\circ \dots(1)$$

எனவே $\sin$ சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = k.$$

$$\Rightarrow a = k \sin A, b = k \sin B, c = k \sin C \dots(2)$$

$$\begin{aligned} \text{R.H.S} &= 2a \cos\left(\frac{B-C}{2}\right) \\ &= 2 \cdot k \sin A \cos\left(\frac{B-C}{2}\right) \\ &= 2 k \sin 60^\circ \cos\left(\frac{B-C}{2}\right) \\ &= 2 k \sin\left(\frac{B+C}{2}\right) \cos\left(\frac{B-C}{2}\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \angle A &= 60^\circ \\ &= 2 k \sin\left(\frac{B+C}{2}\right) \cos\left(\frac{B-C}{2}\right) \\ &= k \left[\sin\left(\frac{B+C+B-C}{2}\right) + \right. \\ &\quad \left. \sin\left(\frac{B+C-B-C}{2}\right) \right] \end{aligned}$$

$$= k [\sin B + \sin C]$$

$$[\because 2 \sin A \cos B = \sin(A+B) + \sin(A-B)]$$

$$= k \sin B + k \sin C$$

$$= b + c. [(2) - \text{ல் இருந்து}]$$

$$= \text{L.H.S. எனவே நிரூபிக்கப்பட்டது.}$$

கேள்வி 7.

$\triangle ABC$ இல் பின்வன வற்றை நிறுவுக.

(i) $a \sin \left(\frac{A}{2} + B \right) = (b + c) \sin \frac{A}{2}$

தீர்வு:

$$\frac{b+c}{a} = \frac{k \sin B + k \sin C}{k \sin A}$$

(சைன் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி)

$$\Rightarrow \frac{\sin B + \sin C}{\sin A} = \frac{2 \sin \left(\frac{B+C}{2} \right) \cos \left(\frac{B-C}{2} \right)}{2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}}$$

$$= \frac{\sin \left(90 - \frac{A}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{B-C}{2} \right)}{\sin \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{A}{2}}$$

$$\left(\because A+B+C=180^\circ \Rightarrow \frac{B+C}{2} = 90 - \frac{A}{2} \right)$$

$$= \frac{\cos \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{B-C}{2}}{\sin \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{A}{2}} = \frac{\cos \left(\frac{B-C}{2} \right)}{\sin \frac{A}{2}}$$

$$= \frac{\cos (B - (180 - A - B))}{2} \quad (\because C = 180 - A - B)$$
$$= \frac{\cos \frac{A}{2}}{\sin \frac{A}{2}}$$

$$= \frac{\cos \left(-90 + \frac{A}{2} + B \right)}{\sin \frac{A}{2}} = \frac{\cos \left[- \left(90 - \frac{A}{2} + B \right) \right]}{\sin \frac{A}{2}}$$

$$= \frac{\cos \left(90 - \left(\frac{A}{2} + B \right) \right)}{\sin \frac{A}{2}} \Rightarrow \frac{b+c}{a} = \frac{\sin \left(\frac{A}{2} + B \right)}{\sin \frac{A}{2}}$$

$$\Rightarrow (b+c)\sin\frac{A}{2} = a\sin\left(\frac{A}{2} + B\right)$$

எனவே நிரூபிக்கப்பட்டது.

$$(ii) a (\cos B + \cos C) = 2 (b + c) \sin^2 A/2$$

தீர்வு:

$$L.H.S = a (\cos B + \cos C)$$

$$= a \left[\frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ac} + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{c^2 + a^2 - b^2}{c} + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{b} \right]$$

(கொசைன் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி)

$$= \frac{1}{2bc} (bc^2 + a^2b - b^3 + a^2c + b^2c - c^3)$$

$$= \frac{1}{2bc} [-(b^3 + c^3) + (a^2b + a^2c) + bc^2 + b^2c]$$

$$= \frac{1}{2bc} [-(b+c)(b^2 - bc + c^2) + a^2(b+c) + bc(b+c)]$$

$$= \frac{b+c}{2bc} [-b^2 + bc - c^2 + a^2 + bc]$$

$$= \frac{b+c}{2bc} (a^2 - b^2 - c^2 + 2bc)$$

$$= \frac{(b+c)}{2bc} [(a+b-c)(a-b+c)]$$

$$= \left(\frac{b+c}{2bc} \right) [(2s-2c)(2s-2b)]$$

$$= \frac{(b+c)(\cancel{2})}{\cancel{2}bc} [(s-c)(s-b)] \quad [2s = a+b+c]$$

$$= 2 (b + c) \left[\frac{(s-b)(s-c)}{bc} \right]$$

$$= 2 (b + c) \sin^2 \frac{A}{2} = \text{R.H.S.}$$

எனவே நிரூபிக்கப்பட்டது.

$$(iii) \frac{a^2 - c^2}{b^2} = \frac{\sin(A-C)}{\sin(A+C)}$$

தீர்வு:

$$\frac{a^2 - c^2}{b^2} = \frac{\sin(A-C)}{\sin(A+C)}$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = k \text{ என்க.}$$

$$\Rightarrow a = k \sin A, b = k \sin B, c = k \sin C$$

$$\begin{aligned} \text{L.H.S} = \frac{a^2 - c^2}{b^2} &= \frac{k^2 \sin^2 A - k^2 \sin^2 C}{k^2 \sin^2 B} \\ &= \frac{\sin^2 A - \sin^2 C}{\sin^2 B} \\ &= \frac{\sin(A+C)\sin(A-C)}{\sin^2(180 - (A+C))} \\ &= \frac{\sin(A+C)\sin(A-C)}{\sin^2(A+C)} \\ &= \frac{\sin(A-C)}{\sin(A+C)} = \text{R.H.S.} \end{aligned}$$

$$(\because \sin(180 - (A+C)) = \sin(A+C))$$

$$(iv) \frac{a \sin(B-C)}{b^2 - c^2} = \frac{b \sin(C-A)}{c^2 - a^2} = \frac{c \sin(A-B)}{a^2 - b^2}$$

தீர்வு:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = k \text{ என்க.}$$

$$a = k \sin A, b = k \sin B, c = k \sin C \quad \dots(1)$$

$$\begin{aligned}
\frac{a \sin(B-C)}{b^2 - c^2} &= \frac{k \sin A \sin(B-C)}{k^2 \sin^2 B - k^2 \sin^2 C} \\
&= \frac{k \sin(B+C) \sin(B-C)}{k^2 (\sin^2 B - \sin^2 C)} \\
&= \frac{k (\sin^2 B - \sin^2 C)}{k^2 (\sin^2 B - \sin^2 C)} = \frac{1}{k} \quad \dots(2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{b \sin(C-A)}{c^2 - a^2} &= \frac{k \sin B \sin(C-A)}{k^2 \sin^2 C - k^2 \sin^2 A} \\
&= \frac{\sin(C+A) \sin(C-A)}{k \sin(C+A) \cdot \sin(C-A)} = \frac{1}{k} \\
&\quad \dots(3)
\end{aligned}$$

$$\frac{C \sin(A-B)}{a^2 - b^2} = \frac{1}{k} \quad \dots(4)$$

(2), (3), (4) விருந்து

$$\frac{a \sin(B-C)}{b^2 - c^2} = \frac{b \sin(C-A)}{c^2 - a^2} = \frac{c \sin(A-B)}{a^2 - b^2}$$

$$(v) \frac{a+b}{a-b} = \tan\left(\frac{A+B}{2}\right) \cot\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

தீர்வு:

$$\frac{a+b}{a-b} = \tan\left(\frac{A+B}{2}\right) \cot\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = k \text{ என்க.}$$

$$\Rightarrow a = k \sin A, b = k \sin B, c = k \sin C$$

$$\text{L.H.S} = \frac{a+b}{a-b} = \frac{k \sin A + k \sin B}{k \sin A - k \sin B}$$

$$= \frac{k(\sin A + \sin B)}{k(\sin A - \sin B)}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2 \sin\left(\frac{A+B}{2}\right) \cos\left(\frac{A-B}{2}\right)}{2 \cos\left(\frac{A+B}{2}\right) \sin\left(\frac{A-B}{2}\right)} \\
&= \tan\left(\frac{A+B}{2}\right) \cot\left(\frac{A-B}{2}\right) \\
&= \text{RHS எனவே நிரூபிக்கப்பட்டது.}
\end{aligned}$$

கேள்வி 8.

$\triangle ABC$ இல் $(a^2 - b^2 + c^2) \tan B = (a^2 + b^2 - c^2) \tan C$ என நிறுவுக.

தர்வு:

$$\begin{aligned}
\frac{a^2 - b^2 + c^2}{a^2 + b^2 - c^2} &= \frac{\tan C}{\tan B} = \tan C \cot B \text{ என நிரூபிப்போம்} \\
\text{L.H.S} &= \frac{a^2 - b^2 + c^2}{a^2 + b^2 - c^2} = \frac{k^2 \sin^2 A - k^2 \sin^2 B + k^2 \sin^2 C}{k^2 \sin^2 A + k^2 \sin^2 B - k^2 \sin^2 C} \\
\left(\because \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = k \Rightarrow a = k \sin A = k \sin B, c = k \sin C \right) \\
&= \frac{\sin^2 A - \sin^2 B + \sin^2 C}{\sin^2 A - \sin^2 C + \sin^2 B} \\
&= \frac{\sin C \cdot \sin(A - B) + \sin^2 C}{\sin B \cdot \sin(A - C) + \sin^2 B} \\
&\quad \left(\begin{array}{l} \because A + B = 180 - C \\ A + C = 180 - B \end{array} \right) \\
&= \frac{\sin C [\sin(A - B) + \sin C]}{\sin B [\sin(A - C) + \sin B]} \\
&= \frac{\sin C [\sin(A - B) + \sin(A + B)]}{\sin B [\sin(A - C) + \sin(A + C)]}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sin C \cdot \cancel{2\sin A} \cdot \cos B}{\sin B \cdot \cancel{2\sin A} \cos C} \\
&[\sin(A - B) + \sin(A + B) = 2\sin A \cdot \cos B] \\
&= \frac{\sin C \cdot \cos B}{\cos C \cdot \sin B} = \tan C \cot B = \text{R.H.S.}
\end{aligned}$$

எனவே நிரூபிக்கப்பட்டது.

கேள்வி 9.

ஒரு கிராமத்தில் ஒரு பொறியாளர் 120 மீ சுற்றளவுள்ள முக்கோண வடிவ பூங்காவை வடிவமைக்க முனைகிறார். பூங்காவின் பரப்பு அதிகபட்சமாக இருக்கும்படி அமைக்கப்படும்போது அதன் பக்க அளவுகளைக் காண்க.

தீர்வு:

நிலையான சுற்றளவு கொண்ட சமபக்க முக்கோணத்தின் பரப்பு மீப்பெரு மதிப்பாகும்.

சமபக்க Δ -ன் பக்கம் = a என்க

சுற்றளவு = 120 மீ.

$\Rightarrow a + a + a = 120$ மீ.

$3a = 120$ மீ.

$a = 40$ மீ.

பூங்காவின் பக்கம் = 40 மீ.

கேள்வி 10.

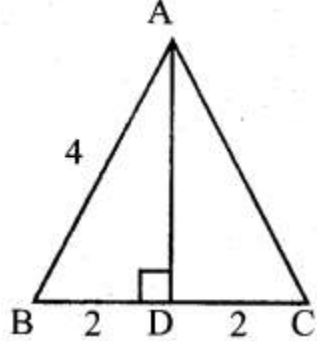
12 மீ நீளமுள்ள ஒரு கயிறு கொடுக்கப்பட்டு அதைக் கொண்டு அதிகபட்சப் பரப்புடைய முக்கோணம் அமைக்கப்பட்டால் அதன் பக்க அளவுகளைக் காண்க.

தீர்வு:

கயிற்றின் நீளம் = 12 மீ.

முக்கோணத்தின் சுற்றளவு = 12 மீ.

நிலையான சுற்றளவு கொண்ட சமபக்க Δ -ன் பரப்பு மீப்பெரு மதிப்பாகும். சமபக்க Δ -ன் பக்கம் = a என்க.



$$a + a + a = 12$$

$$3a = 12$$

$$a = 4 \text{ மீ.}$$

$$\begin{aligned} \text{சமபக்க } \Delta\text{-ன் உயரம் } AD &= \sqrt{AB^2 - BD^2} \\ &= \sqrt{4^2 - 2^2} = \sqrt{16 - 4} \\ &= \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\Delta ABC = \frac{1}{2} \times BC \times AD$$

$$\text{மீப்பெரு } \Delta\text{-ன் பரப்பு } BC = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times 4 = 4\sqrt{3} \text{ ச.மீ.}$$

கேள்வி 11.

(i) சைன் விதி

(ii) கொசைன் விதி ஆகியவைகளைப் பயன்படுத்தி வீழல் சூத்திரத்தை வருவி.

தீர்வு:

$$(i) \text{ சைன் விதி } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = k$$

$$a = k \sin A, b = k \sin B, c = k \sin C.$$

$$a = b \cos C + c \cos B, b = c \cos A + a \cos C$$

$$c = a \cos B + b \cos A$$

$$a = b \cos C + c \cos B \text{ ஐ நிரூபிக்க}$$

$$\text{R.H.S} = b \cos C + c \cos B$$

$$= k \sin B \cos C + k \sin C \cos B$$

$$= k (\sin B \cos C + \sin C \cos B)$$

$$= k \sin (B + C)$$

$= k \sin (180 - A) (\because A + B + C = 180^\circ)$
 $= \sin A = a = \text{L.H.S}$
 $b = c \cos A + a \cos C,$
 $c = a \cos B + b \cos A$ என நிரூபிக்கலாம்.

(ii) கொசைன் விதி:

R.H.S = $b \cos C + c \cos B.$

$$\begin{aligned}
 &= \cancel{b} \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2\cancel{ab}} \right) + \cancel{c} \left(\frac{c^2 + a^2 - b^2}{2\cancel{ca}} \right) \\
 &= \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a} + \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2a} \\
 &= \frac{a^2 + \cancel{b^2} - \cancel{c^2} + \cancel{c^2} + a^2 - \cancel{b^2}}{2a} \\
 &= \frac{2a^2}{2a} = a = \text{L.H.S}
 \end{aligned}$$

எனவே நிரூபிக்கப்பட்டது.

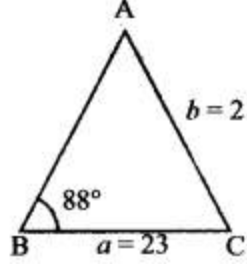
Ex 3.10

கேள்வி 1.

$\angle B = 88^\circ$, $a = 23$, $c = 2$ என்ற அளவுகளைக் கொண்ட
 முக்கோணங்கள் ஒன்றா அல்லது இரண்டா? அல்லது
 முக்கோணம் வரைய இயலாதா? ! முக்கோணம் உண்டு எனில்,
 அதன் தீர்வைக் காண்க.

தீர்வு:

$$\begin{aligned}
 &\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \\
 \Rightarrow &\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin 88^\circ}{2} \\
 \Rightarrow &\sin A = \frac{23 \cdot (\sin 88^\circ)}{2}
 \end{aligned}$$



$$\Rightarrow \sin A = 23 \times 0.999$$

$\sin A = 22.99$ இது பொருந்தாது

$\therefore$ முக்கோணத்திற்கு தீர்வு இல்லை.

கேள்வி 2.

ΔABC இல் $a = 4$, $b = 6$ மற்றும் $C = 8$ எனில் $4 \cos B + 3 \cos C = 2$ எனக் காண்பி.

தீர்வு:

$$\text{L.H.S} = 4 \cos B + 3 \cos C.$$

$$\begin{aligned} &= 4 \left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \right) + 3 \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \right) \\ &= 4 \left(\frac{16 + 64 - 36}{2(4)(8)} \right) + 3 \left(\frac{16 + 36 - 64}{2(4)(6)} \right) \\ &= 4 \left(\frac{80 - 36}{64} \right) + 3 \left(\frac{52 - 64}{48} \right) \\ &= 4 \left(\frac{11}{16} \right) + 3 \left(\frac{-12}{48} \right) = \frac{11}{4} - \frac{3}{4} = \frac{8}{4} = 2 \end{aligned}$$

= RHS எனவே நிரூபிக்கப்பட்டது.

கேள்வி 3.

ΔABC இல் $a = \sqrt{3} - 1$, $b = \sqrt{3} + 1$ மற்றும் $C = 60^\circ$ எனில், மூன்றாவது பக்கம் மற்றும் இரு கோணங்களைக் காண்க.

தீர்வு:

நேப்பியரின் சூத்திரத்தின் படி

$$\tan\left(\frac{A-B}{2}\right) = \frac{a-b}{a+b}$$

$$\cot\frac{C}{2} = \frac{(\sqrt{3}+1)-(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)+(\sqrt{3}-1)} \cot\frac{60^\circ}{2}$$

$$= \frac{2}{2\sqrt{3}} \cot 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} \times \sqrt{3} = 1$$

$$\therefore \frac{A-B}{2} = 45^\circ; A-B = 90^\circ \quad \dots(1)$$

$$A+B = 180^\circ - C = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ \quad \dots(2)$$

(1) + (2) விருந்து

$$\Rightarrow \begin{array}{rcl} A-B & = & 90 \\ A+B & = & 120 \\ \hline 2A & = & 210 \Rightarrow \angle A = 150^\circ \\ \angle A & = & 150^\circ \text{ என (2) ல் பிரதியிட} \\ B & = & 120 - 105 = 15^\circ \end{array}$$

சைன் விதிப்படி

$$\frac{C}{\sin C} = \frac{a}{\sin A} \Rightarrow C = \frac{a \sin C}{\sin A}$$

$$C = \frac{(\sqrt{3}+1) \sin 60^\circ}{\sin 105^\circ}$$

$$= \frac{(\sqrt{3}+1) \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2\sqrt{2}$$

$$\therefore \angle A = 150^\circ, \angle B = 15^\circ, C = \sqrt{6}$$

கேள்வி 4.

$\triangle ABC$ இல் முக்கோணத்தின் பரப்பளவு $\Delta = \frac{b^2+c^2-a^2}{4 \cot A}$ என நிறுவுக.

தீர்வு:

$$\begin{aligned}\text{R.H.S} &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4 \cot A} \\&= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4 \frac{\cos A}{\sin A}} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4 \cos A} \times \sin A \\&= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4 \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \right)} \sin A \\&= \frac{\sin A}{4} \times 2bc = \frac{1}{2} bc \sin A \\&= \Delta ABC \text{ -ன் பரப்பு} \\ \therefore \Delta &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4 \cot A}\end{aligned}$$

கேள்வி 5.

ΔABC இல் $a = 12$ செ.மீ. $b = 8$ செ.மீ மற்றும் $c = 30^\circ$ எனில் முக்கோணத்தின் பரப்பு 24 ச.செ.மீ. எனக் காண்பி.

தீர்வு:

$$\begin{aligned}\Delta ABC \text{ -ன் பரப்பு} &= \frac{3}{2} ab \sin c \\&= \frac{1}{2} \times 12 \times 8 \sin 30^\circ \\ \Delta &= 6 \times \cancel{8} \times \frac{1}{2} = 24 \text{ ச.செ.மீ.}\end{aligned}$$

எனவே நிரூபிக்கப்பட்டது.

கேள்வி 6.

ΔABC இல் $a = 18$ செ.மீ. $b = 24$ செ.மீ மற்றும் $c = 30$ செ.மீ. எனில் ΔABC இன் பரப்பு 216 ச.செ.மீ எனக் காண்பி.

தீர்வு:

$$a = 8, b = 24, c = 30$$

ஹிரான்ஸ் சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்தி

$$\begin{aligned}
\Delta ABC \text{ -ன் பரப்பு } \Delta &= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \\
s &= \frac{a+b+c}{2} \\
s &= \frac{18+24+30}{2} = \frac{72}{2} = 36 \\
\therefore \Delta &= \sqrt{36(36-18)(36-24)(36-30)} \\
&= \sqrt{36 \times 18 \times 12 \times 6} \\
&= \sqrt{36 \times 9 \times 2 \times 4 \times 3 \times 3 \times 2} \\
&= \sqrt{36 \times 9 \times 4 \times 4 \times 9} \\
&= 6 \times 3 \times 2 \times 2 \times 3 = 216 \text{ ச.செ.மீ.}
\end{aligned}$$

கேள்வி 7.

பூமிக்கு அடியில் ஒரே நேர்க்கோட்டில் அமைந்துள்ள இரண்டு வெவ்வேறு குழிகளில் A மற்றும் B என்ற இராணுவ வீரர்கள் பதுங்கி, மலை உச்சியில் ஒரு ஊடுருபவரை கவனித்தனர். A மற்றும் B லிருந்து ! ஊடுருபவரின் கோணங்கள் கிழக்கு திசையில் முறையே 30° மற்றும் 45° மற்றும் Aக்கு நக்கு இடைப்பட்ட தொலைவு 5 கி.மீ. எனில் B-யிலிருந்து ஊடுருபவரின் தொலைவினைக் காண்க.

தீர்வு:

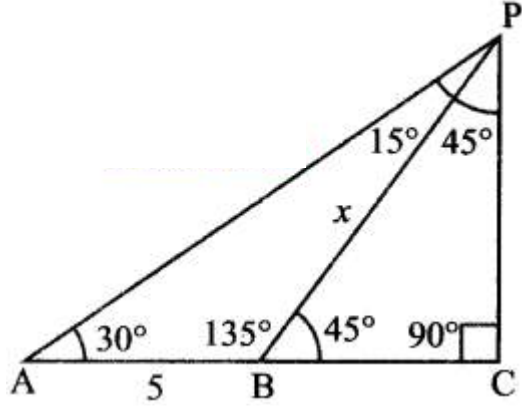
P என்பவர் ஊடுருபவர், மற்றும் A, B என்பவர்கள் இராணுவ வீரர்கள் என்க.

X என்பது Pக்கும் B க்கும் இடைப்பட்ட தூரம்

ΔABP -யில்

$$\angle PAB = 30^\circ, \angle PBC = 45^\circ$$

$$\angle APB = 15^\circ$$



$\triangle ABP$ -ல் சைன் விதிப்படி

$$\Rightarrow \frac{5}{\sin 15^\circ} = \frac{x}{\sin 30^\circ}$$

$$\Rightarrow x = \frac{5}{\sin 15^\circ} \times \sin 30^\circ = 5 \times \frac{1}{2 \sin 15^\circ} \dots (1)$$

$$= \sin 15^\circ = \sin (45 - 30)$$

$$= \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$$

(1) ல் $\sin 15^\circ$ ன் மதிப்பை பிரதியிட

$$x = \frac{5}{\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}} = \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1} \text{ கி.மீ.}$$

கேள்வி 8.

ஓர் ஆராய்ச்சியாளர் ஓர் குளத்தின் அகலத்தைக் கிழக்கிலிருந்து மேற்காகச் சரியாக அளவிட முடியாதபோது அதைக் கண்டறிய விழைகிறார். P என்ற புள்ளியிலிருந்து குளத்தின் கிழக்குப் பகுதியின் முனை 8 கி.மீ. தொலைவிலும் அதே சமயத்தில் மேற்கு பகுதியின் முனை 6 கி.மீ. தொலைவிலும் உள்ளது மற்றும் P-யையும் கிழக்குப் பகுதியின் முனையை இணைக்கும் கோட்டிற்கும், Pயையும் மேற்கு பகுதியின் முனையையும் இணைக்கும் கோட்டிற்கும் இடைப்பட்டக் கோணம் 60° எனில் குளத்தின் அகலத்தைக் காண்க.

தீர்வு:

கிழக்குப்பகுதியில் உள்ள புள்ளி A, மேற்குப்பகுதியில் உள்ள

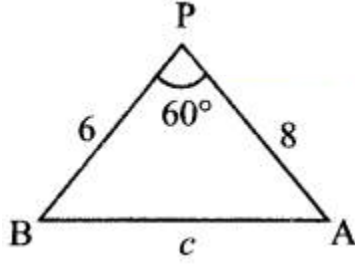
புள்ளி B என்க.

$$PA = 8, PB = 6$$

$$a = 6, b = 8, \angle C = 60^\circ$$

கொசைன் விதிப்படி

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$
$$= 36 + 64 - 2(6)(8) \cos 60^\circ$$



$$= 100 - 12 \times 8 \times \frac{1}{2} = 100 - 48 = 52$$

$$c = \sqrt{52} = \sqrt{4 \times 13} = 2\sqrt{13}$$

$$\therefore c = 2\sqrt{13} \text{ கி.மீ.}$$

$$\therefore \text{குளத்தின் அகலம்} = 2\sqrt{13} \text{ கி.மீ.}$$

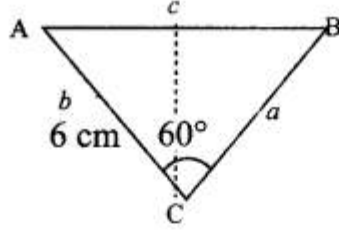
கேள்வி 9.

கடல் மட்டத்திலிருந்து ஒரே உயரத்தில் வங்காள விரிகுடாவிற்கு மேல் A மற்றும் B என்ற இரண்டு கடற்படை ஹெலிகாப்டர்கள் தொலைந்த படகைத் தேடுகின்றன. 10 கி.மீ. இடைவெளியில் அவைகள் பறக்கும்போது அதன் பைலட்டுகள் ஒரே நேரத்தில் அந்தப் படகைப் பார்க்கிறார்கள். A இலிருந்து படகு 6 கி.மீ. தூரத்தில் உள்ளது. மேலும், கோட்டுத்துண்டு AB படகில் தாங்கும் கோணம் 60° எனில், Bஇற்கும் படகிற்கும் உள்ள தொலைவைக் காண்க.

தீர்வு:

A, B பைலட்களின் இருப்பிடம். C படகின் இருப்பிடம்

கொசைன் விதிப்படி $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$



$$\Rightarrow 10^2 = a^2 + 6^2 - 2a(6) \cos 60^\circ$$

$$\Rightarrow 100 = a^2 + 36 - \cancel{12} \times \frac{1}{\cancel{2}} a$$

$$\Rightarrow 100 = a^2 + 36 - 6a$$

$$\Rightarrow a^2 - 6a - 64 = 0$$

$$\Rightarrow a = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(1)(-64)}}{2 \times 1}$$

$$= \frac{6 \pm \sqrt{36 + 256}}{2}$$

$$a = \frac{6 \pm \sqrt{292}}{2}$$

$$a = 3 \pm \sqrt{73}$$

$$a = (3 + \sqrt{73}) \text{ கி.மீ}$$

($\because 3 - \sqrt{73}$ குறை எண்)

$$\left(\because x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \right)$$

$$a = 1, b = -6, c = -64$$

$$\sqrt{292} = \sqrt{2 \times 146}$$

$$= \sqrt{2 \times 2 \times 73} = 2\sqrt{73}$$

கேள்வி 10.

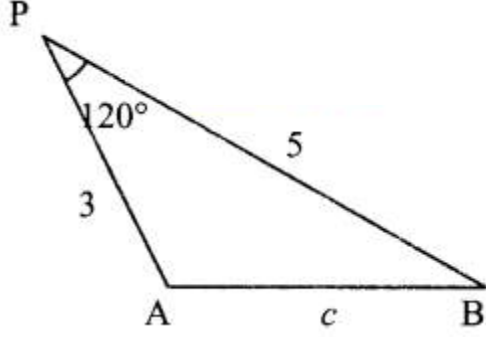
ஒரு மலை வழியாக ஒரு நேர்க்குகை அமைக்கையில், மலைக்கு எதிரே உள்ள P என்ற புள்ளியிலிருந்து மலையின் இரு முனைகள் A மற்றும் B னை நிலமளப்பவர் காண்கிறார். AP = 3 கி.மீ, BP = 5 கி.மீ, $\angle APB = 120^\circ$ எனில் மலைக்குகையின் நீளத்தினைக் காண்க.

தீர்வு:

AB = c என்பது மலைக்குகையின் நீளம் என்க.

$$a = 5, b = 3, \angle C = 120^\circ$$

கொசைன் விதிப்படி



$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos C \\ &= 25 + 9 - 2(5) \cos 120^\circ \\ &= 34 - 30 \cos (180 - 60^\circ) \\ &= 34 - 30 (-\cos 60^\circ) \\ &= 34 - 30 \left(-\frac{1}{2}\right) = 34 + 15 \end{aligned}$$

$$c^2 = 49,$$

$$c = \pm 7 \text{ கி.மீ.}$$

$c = -7$ -ஆக இருக்க முடியாது

$$c = 7 \text{ கி.மீ.}$$

$\therefore$ மலைக்குகையின் நீளம் = 7 கி.மீ.

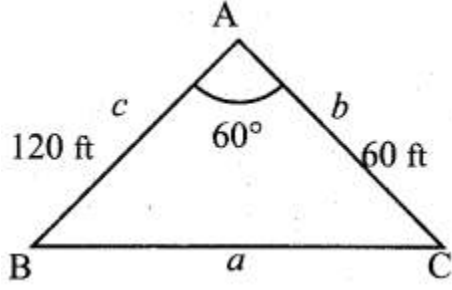
கேள்வி 11.

120 அடி மற்றும் 60 அடி, பக்கங்களின் நீளங்கள் அவற்றிற்கிடைப்பட்ட கோணம் 60° உடைய ஒரு முக்கோண வடிவ நிலத்தை ஒரு முக்கோண வடிவ நிலத்தை ஒரு விவசாயி வாங்க விரும்புகிறார். ஒரு சதுர அடி நிலத்தின் விலை ₹500 எனில், அந்த நிலத்தை வாங்கத் தேவையான மொத்தத் தொகை எவ்வளவு? மேலும் நிலத்தின் சுற்றளவைக் காண்க.

தீர்வு:

$$b = 60 \text{ அடி, } c = 120 \text{ அடி, } \angle A = 60^\circ$$

கொசைன் விதிப்படி



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$= 120^2 + 60^2 - 2 \times 120 \times 60 \times \cos 60^\circ$$

$$= 14400 + 3600 - 7200$$

$$a^2 = 10,800$$

$$a = \sqrt{100 \times 4 \times 9 \times 3}$$

$$a = \sqrt{400 \times 27} = 20\sqrt{27}$$

$$\Delta \text{ கன் சுற்றளவு} = 120 + 60 + 20\sqrt{27}$$

$$= 180 + 20\sqrt{27} \text{ அடி}$$

$$\text{முக்கோண வயலின் பரப்பு } (\Delta ABC) = \frac{1}{2} bc \sin A$$

$$= \frac{1}{2} \times \overset{30}{\cancel{60}} \times 120 \times \sin 60^\circ$$

$$= 30 \times \overset{60}{\cancel{120}} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= 30 \times 60 \times \sqrt{3}$$

$$= 1800\sqrt{3}$$

$$= 3117.6$$

$$1 \text{ ச.அடி நிலத்தின் விலை} = ₹ 500 \text{ எனில்}$$

$$3117.6 \text{ ச.அடி நிலத்தின் விலை} = 500 \times 3117.6$$

$$= ₹ 1,55,800.$$

கேள்வி 12.

ஒரு போர் ஜெட் விமானம் கிடைமட்டமாகப் பறந்து

பூமியிலுள்ள ஒரு சிறு இலக்கைத் தாக்க வேண்டும்.

அவ்விலக்கை விமானி 30° இறக்கக் கோணத்தில் பார்க்கிறார்.

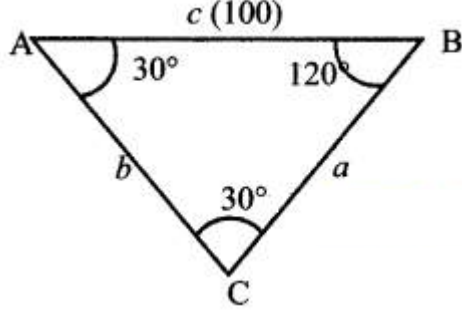
100 கி.மீ. பறந்த பின்பு மீண்டும் அதே இலக்கை 60° இறக்க

கோணத்தில் பார்க்கும் அந்த நேரத்தில் ஜெட் விமானத்திற்கும்

இலக்கிற்கும் உள்ள தொலைவு எவ்வளவு?

தீர்வு:

C என்பது இலக்கின் புள்ளி. A, B என்பன விமானியின் இருப்பிடம் என்க.



$$\angle BAC = 30^\circ, \angle ABC = 120^\circ$$

$$\therefore \angle C = 180 - (30 + 120)$$

$$= 180^\circ - 150 = 30^\circ$$

$$AB = 100 \text{ கி.மீ.}$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{\sin 30^\circ} = \frac{100}{\sin 30^\circ}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{\frac{1}{2}} = \frac{100}{\frac{1}{2}} \Rightarrow 2a = \frac{100}{\sin 105^\circ}$$

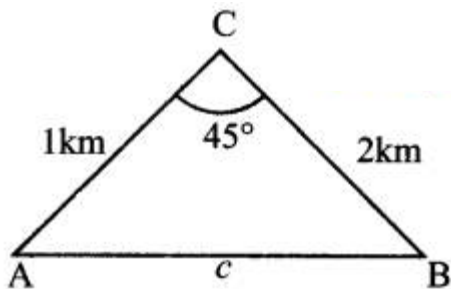
$$\Rightarrow a = 100$$

கேள்வி 13.

ஒரு விமானம் ஒரு மைல் கல்லிலிருந்து 1 கி.மீ. தூரத்தில் பறக்கிறது. அதே நேரத்தில் மற்றொரு மைல் கல்லுடன் உள்ள தூரம் 2 கி.மீ. இரண்டு மைல் கல்களும் விமானத்துடன் தாங்கும் கோணம் 45° எனில் இரண்டு மைல் கல்களுக்கு இடைப்பட்ட தூரம் என்ன?

தீர்வு:

A, B என்பன தரையில் உள்ள இரு இடங்கள் C என்பது விமானத்தின் இருப்பிடம் என்க.



கொசைன் விதிப்படி

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

$$c^2 = 2^2 + 1^2 - 2(2)(1) \cos 45^\circ$$

$$= 4 + 1 - 4 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

$$= 5 - 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

$$= 5 - 2 \times \sqrt{2}$$

$$c^2 = 5 - 2\sqrt{2}$$

$$c = \sqrt{5 - 2\sqrt{2}} \text{ கி.மீ.}$$

கேள்வி 14.

ஒருவன் காலை நடைப்பயிற்சியின் போது A என்ற புள்ளியில் தொடங்கி B மற்றும் C ஆகிய புள்ளிகளுக்குச் சென்று இறுதியில் மீண்டும் Aவை வந்தடைகிறார். முக்கோணம் ABC இல் $\angle A = 60^\circ$ மற்றும் $\angle B = 45^\circ$, $AC = 4$ கி.மீ. எனில், அவர் நடந்த மொத்தத் தொலைவைக் காண்க.

தீர்வு:

$$AC = 4 \text{ கி.மீ. } \angle A = 60^\circ$$

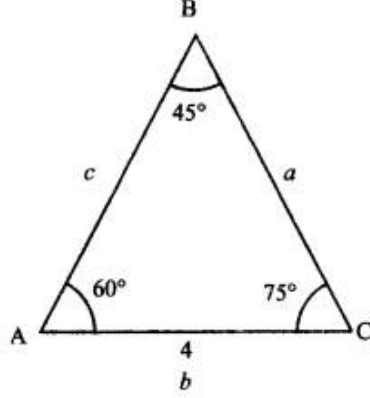
$$\angle B = 45^\circ, \angle C = 180^\circ - (A + B)$$

$$= 180 - 105 = 75^\circ$$

சைன் விதியைப் பயன்படுத்தி

$$\Rightarrow \frac{\frac{a}{\sin A}}{\frac{a}{\sin 60^\circ}} = \frac{\frac{b}{\sin B}}{\frac{4}{\sin 45^\circ}}$$

$$\frac{\frac{a}{\sqrt{3}}}{\frac{2}{2}} = \frac{\frac{4}{1}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} \Rightarrow \frac{2a}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{2}$$



சைன் விதியைப் பயன்படுத்தி $a = \frac{4\sqrt{6}}{2} = 2\sqrt{6}$ கி.மீ.

$$\Rightarrow \frac{\frac{c}{\sin C}}{\frac{c}{\sin 75}} = \frac{\frac{a}{\sin A}}{\frac{2\sqrt{6}}{\sin 60}}$$

$$[\because \sin 75 = \sin (45 + 30) = \sin 45 \cos 30 + \cos 45 \sin 30]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$

$$\frac{\frac{c}{\sqrt{3}+1}}{\frac{2}{2\sqrt{2}}} = \frac{\frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{3}}}{\frac{2}{2}} \Rightarrow c \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1} = \frac{4\sqrt{6}}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow C = \frac{\cancel{4} \sqrt{6} (\sqrt{3}+1)}{\cancel{2} \sqrt{6}} = 2(\sqrt{3}+1)$$

$$\begin{aligned}
\therefore \text{கடந்த தூரம்} &= a + b + c \\
&= 2\sqrt{6} + 4 + 2(\sqrt{3} + 1) \\
&= 2\sqrt{6} + 4 + 2\sqrt{3} + 2 \\
&= (6 + 2\sqrt{3} + 2\sqrt{6}) \text{ கி.மீ.}
\end{aligned}$$

கேள்வி 15.

இரண்டு வாகனங்கள் ஒரு புள்ளி Pலிருந்து ஒரே நேரத்தில் தொடங்கி இரு வெவ்வேறு சாலைகளில் பயணிக்கிறது. ஒரு வாகனம் 60 கி.மீ/மணி, ! மற்றொரு வாகனம் 80 கி.மீ/மணி என்ற சராசரி வேகத்தில் பயணிக்கிறது. அரை மணி நேரத்திற்குப் பிறகு அவ்வாகனங்கள் A மற்றும் Bஐ அடைகின்றன. கோடு AB ஆனது Pஇல் தாங்கும் கோணம் 60° எனில், ABஐக் காண்க.

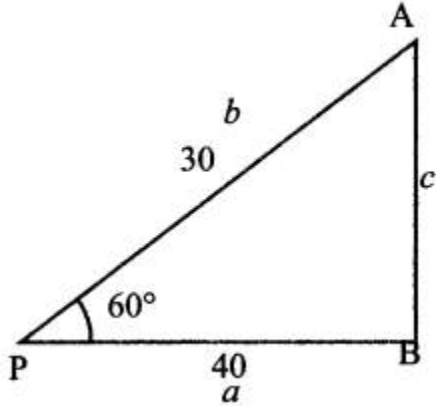
தீர்வு:

வேகம் 1 = 60 கி.மீ./மணி

நேரம்' = $1/2$ மணி

$\therefore$ தூரம் = வேகம் $\times$ நேரம்

$$= 60 \times \frac{1}{2} = 30 \text{ கி.மீ.}$$



= 80 கி.மீ./மணி

நேரம் = $1/2$ மணி

$\therefore$ தூரம் = வேகம் , நேரம்

$$= 80 \times 1/2 = 40 \text{ கி.மீ.}$$

$$\angle APB = 60^\circ$$

கொசைன் விதியைப் பயன்படுத்தி

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos c$$

$$c^2 = 40^2 + 30^2 - 2(40)(30)\cos 60^\circ$$

$$c^2 = 1600 + 900 - 2(40)(30) \times \frac{1}{2}$$

$$= 2500 - (40)(30) = 1300$$

$$c = \sqrt{1300} = \sqrt{13 \times 100}$$

$$= 10\sqrt{13} \text{ கி.மீ.}$$

கேள்வி 16.

ஒரு செயற்கைக்கோள் ஒரு விண்வெளியில் உள்ளதாகக் கொள்வோம். பூமியிலுள்ள நிலையம் மற்றும் பூமியின் மையம் ஆகியவை ஒரே தளத்தில் அமைகின்றன. பூமியின் அதன் ஆரம் என்றும் அதன் மையத்திலிருந்து செயற்கைக்கோள் R தொலைவில் உள்ளது என்று கொள்வோம்.

செயற்கைக்கோளுக்குச் செயற்கை கோளின் நிலையத்திற்கும் உள்ள தொலைவு d என்க. செயற்கைக்கோள் நிலையத்திலிருந்து செயற்கைக்கோள் 30° ஏற்றக் கோணத்தில் உள்ளது. செயற்கைக்கோள் மற்றும் பூமியிலுள்ள நிலையம் ஆகியவற்றை இணைக்கும் கோட்டுத்துண்டு பூமியின் மையத்தில் தாங்கும் கோணம் α எனில், $d =$

$$R \sqrt{1 + \left(\frac{r}{R}\right)^2 - 2\frac{r}{R} \cos \alpha} \text{ என நிறுவுக.}$$

தீர்வு:

S செயற்கைக்கோள், E பூமி, C பூமியின் மையம் என்க.

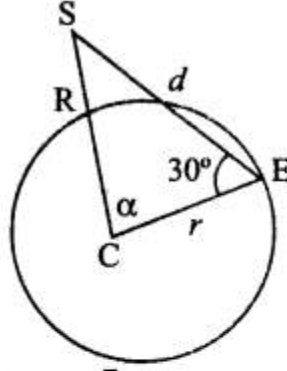
$$CE = r, CS = R \text{ மற்றும் } SE = d, \angle SCE = \alpha$$

கொசைன் விதியைப் பயன்படுத்தி

$$d^2 = r^2 + R^2 - 2rR \cos \alpha$$

$d^2 R^2$ ஆல் வகுக்க

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{R^2} &= \frac{r^2}{R^2} + \frac{R^2}{R^2} - \frac{2rR \cos \alpha}{R^2} \\ &= 1 + \frac{r^2}{R^2} - \frac{2r}{R} \cos \alpha\end{aligned}$$



$$d^2 = R^2 \left[1 + \frac{r^2}{R^2} - \frac{2r}{R} \cos \alpha \right]$$

இருபுறமும் வர்க்க மூலம் காண

$$d = R \sqrt{1 + \frac{r^2}{R^2} - \frac{2r}{R} \cos \alpha}$$

$$\Rightarrow d = R \sqrt{1 + \left(\frac{r}{R}\right)^2 - 2\left(\frac{r}{R}\right) \cos \alpha}$$

எனவே நிரூபிக்கப்பட்டது

Ex 3.11

கேள்வி 1.

- (i) $\sin^{-1} \frac{1}{\sqrt{2}}$
- (ii) $\cos^{-1} \frac{\sqrt{3}}{2}$
- (iii) $\operatorname{cosec}^{-1} (-1)$
- (iv) $\sec^{-1} (-\sqrt{2})$
- (v) $\tan^{-1} (\sqrt{3})$

ஆகியவற்றின் முதன்மை பதிப்பைக் காண்க.

தீர்வு:

(i)

$$\sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = y \text{ என்க, } -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin y = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin y = \sin \frac{\pi}{4} \Rightarrow y = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{முதன்மை மதிப்பு} = \sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{4}$$

(ii)

$$\cos^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2} = y \text{ என்க, } -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos y = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos y = \cos \frac{\pi}{6} \Rightarrow y = \frac{\pi}{6}$$

$$\text{முதன்மை மதிப்பு} = \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$$

$$(iii) \operatorname{cosec}^{-1}(-1) = y \text{ என்க, } \frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{3\pi}{2} = \operatorname{cosec} y$$

$$[\because \operatorname{cosec}(\theta) = -\operatorname{cosec} \theta]$$

$$\operatorname{cosec} y = -\operatorname{cosec} \frac{\pi}{2}$$

$$\operatorname{cosec} y = \operatorname{cosec}\left(-\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow y =$$

$$\text{முதன்மை மதிப்பு } \operatorname{cosec}^{-1}(-1) = \frac{-\pi}{2}$$

$$(iv) \sec^{-1}(-\sqrt{2}) = y \text{ என்க, } (0 \leq y \leq \pi)$$

$$\sec y = -\sqrt{2}$$

$$\sec y = -\sec \frac{\pi}{4}$$

$$= \sec\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$[II \text{ கால் பகுதியில் குறையெண்}]$$

$$y = \frac{3\pi}{4}$$

$$\text{முதன்மை மதிப்பு } \sec^{-1}(-\sqrt{2}) = \frac{3\pi}{4}$$

(v) $\tan^{-1}(\sqrt{3}) = y$ என்க

$$\tan^{-1}(\sqrt{3}) = \left(-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\tan y = \sqrt{3}$$

$$\tan y = \tan\left(\frac{\pi}{3}\right) \therefore y = \frac{\pi}{3}$$

$$\text{முதன்மை மதிப்பு } \tan^{-1}(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$$

கேள்வி 2.

x மீட்டர் அகலமுடைய பாதையின் ஒரு புறத்திலிருந்து பாதையின் மறுபக்கம் அமைக்கப்பட்ட 1 மீட்டர் விட்டமுடைய வட்ட வடிவப் போக்குவரத்து சமிக் கையின் பச்சை விளக்கா ஒருவர் பார்க்கிறார். பச்சை விளக்கின் அடிப் பகுதியிலிருந்து பார்ப்பவரின் கண்ணின் கிடைமட்டக் கோடு வரையில் உள்ள உயரம் 5 மீட்டர் ஆகும். பச்சை விளக்கின் விட்டம் பார்ப்பவரின் கண்களில் தாங்கும் கோணம் α எனில் $\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{a+b}{x}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{b}{x}\right)$ என நிறுவுக.

தீர்வு:

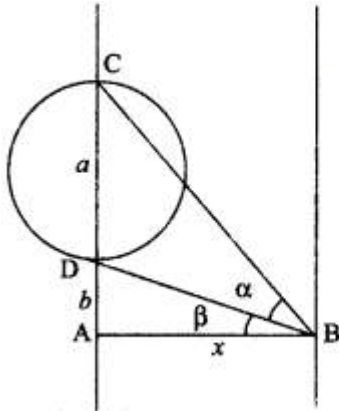
பச்சை விளக்கின் விட்டம் $DC = a$ என்க

$$\angle CBD = \alpha$$

$$DA = b$$

$$AB = x$$

சாலையின் விட்டம் என்க



$$\angle DBA = \beta \text{ என்க}$$

$\triangle ABD$ -ல்

$$\tan \beta = \frac{\text{எதிர்பக்கம்}}{\text{அடுத்துள்ள பக்கம்}} = \frac{DA}{AB} = \frac{b}{x}$$

$$\beta = \tan^{-1} \left(\frac{b}{x} \right) \quad \dots(1)$$

$\triangle ABC$ -ல்

$$\tan (\alpha + \beta) = \frac{AC}{AB} = \frac{a+b}{x}$$

$$\alpha + \beta = \tan^{-1} \left(\frac{a+b}{x} \right)$$

$$\Rightarrow \alpha = \tan^{-1} \left(\frac{a+b}{x} \right) - \beta$$

(1) -ஐ பயன்படுத்தி

$$\alpha = \tan^{-1} \left(\frac{a+b}{x} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{b}{x} \right)$$

எனவே நிரூபிக்கப்பட்டது.

Ex 3.12

சரியான அல்லது மிகவும் ஏற்புடைய விடையினைத் தேர்ந்தெடுக்கவும்.

கேள்வி 1.

$$\frac{1}{\cos 80^\circ} - \frac{\sqrt{3}}{\sin 80^\circ} =$$

(1) $\sqrt{2}$

(2) $\sqrt{3}$

(3) 2

(4) 4

குறிப்பு:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\cos 80} - \frac{\sqrt{3}}{\sin 80} &= \frac{\sin 80 - \sqrt{3} \cos 80}{\sin 80 \cos 80} \\&= \frac{\frac{1}{2} \sin 80 - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 80}{\frac{1}{2} \sin 80 \cos 80} \\&= \frac{\sin 80 \cos 60 - \cos 80 \sin 60}{\frac{1}{2} \sin 80 \cos 80} \\&= \frac{\sin 20}{\frac{1}{2} \sin 80 \cos 80} \\&= \frac{\sin 160}{\frac{1}{2} \sin 80 \cos 80} \\&\Rightarrow \frac{2 \cancel{\sin 80} \cancel{\cos 80}}{\frac{1}{2} \cancel{\sin 80} \cancel{\cos 80}} = 4\end{aligned}$$

விடை:

(4) 4

கேள்வி 2.

$\cos 28^\circ + \sin 28^\circ = k^3$ எனில், $\cos 17^\circ$ இன் மதிப்பு

- (1) $\frac{k^3}{\sqrt{2}}$
- (2) $-\frac{k^3}{\sqrt{2}}$
- (3) $\pm \frac{k^3}{\sqrt{2}}$
- (4) $-\frac{k^3}{\sqrt{3}}$

குறிப்பு:

$$\cos 28^\circ + \sin 28^\circ = k^3$$

$$\cos 28^\circ + \sin (90^\circ - 62^\circ) = k^3$$

$$\cos 28^\circ + \cos 62^\circ = k^3$$

$$2 \cos 45^\circ \cos 17^\circ = k^3$$

$$2 \frac{1}{\sqrt{2}} \cos 17^\circ = k^3$$

$$\cos 17^\circ = \frac{k^3}{\sqrt{2}}$$

விடை:

$$(1) \frac{k^3}{\sqrt{2}}$$

கேள்வி 3.

$4 \sin^2 x + 3 \cos^2 x + \sin x/2 + \cos x/2$ இன் மீப்பெரு மதிப்பு

$$(1) 4 + \sqrt{2}$$

$$(2) 3 + \sqrt{2}$$

$$(3) 9$$

$$(4) 4$$

குறிப்பு:

$$\begin{aligned} & 4 \sin^2 x + 3 \cos^2 x + \sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \\ &= 3 (\sin^2 x + \cos^2 x) + \sin^2 x + \sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \\ &= 3 + \sin^2 x + \sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \end{aligned}$$

$\sin x$ -ன் அதிகபட்ச மதிப்பு = 1

$\sin x$ -ன் அதிகபட்ச மதிப்பு = 1

$x = 45^\circ$ ல் $\sin$ ன் அதிகபட்ச மதிப்பு கிடைக்கிறது. அதிகபட்ச மதிப்பு

$$3 + 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = 4 + \frac{2}{\sqrt{2}} = 4 + \sqrt{2}$$

விடை:

$$(1) 4 + \sqrt{2}$$

கேள்வி 4.

$$\left(1 + \cos \frac{\pi}{8}\right) \left(1 + \cos \frac{3\pi}{8}\right) \left(1 + \cos \frac{5\pi}{8}\right) \left(1 + \cos \frac{7\pi}{8}\right) =$$

(1) $\frac{1}{8}$

(2) $\frac{1}{2}$

(3) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

(4) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

கூலப்பு:

$$\begin{aligned} & \left(2 \cos^2 \frac{\pi}{16}\right) \left(2 \cos^2 \frac{3\pi}{16}\right) \left(2 \cos^2 \frac{5\pi}{16}\right) \left(2 \cos^2 \frac{7\pi}{16}\right) \\ &= 2^4 \left(\cos \frac{\pi}{16} \cos \frac{3\pi}{16} \cos \frac{5\pi}{16} \cos \frac{7\pi}{16}\right)^2 \\ &= \left(\cos \frac{8\pi}{16} + \cos \frac{6\pi}{16}\right)^2 \left(\cos \frac{8\pi}{16} + \cos \frac{2\pi}{16}\right)^2 \\ &= \left(\cos \frac{6\pi}{16}\right)^2 \left(\cos \frac{2\pi}{16}\right)^2 = \left\{\frac{1}{2} \left[\cos \frac{8\pi}{16} + \cos \frac{4\pi}{16}\right]\right\}^2 \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

விடை:

(1) $1/8$

கேள்வி 5.

$\pi < 2\theta < \frac{3\pi}{2}$ எனில், $\sqrt{2 + \sqrt{2 + 2 \cos 4\theta}}$ இன் மதிப்பு

(1) $-2 \cos \theta$

(2) $-2 \sin \theta$

(3) $2 \cos \theta$

(4) $2 \sin \theta$

குறிப்பு:

$$\begin{aligned} \sqrt{2 + 2 \cos 4\theta} &= \sqrt{2 + 2(\cos^2 2\theta - 1)} \\ &= \sqrt{4 \cos^2 2\theta} = 2 \cos 2\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sqrt{2 + \sqrt{2 + 2 \cos 4\theta}} &= \sqrt{2 + 2 \cos 2\theta} \\
&= \sqrt{2 + 2(2 \cos^2 \theta - 1)} \\
&= \sqrt{4 \cos^2 \theta} \\
&= 2 \cos \theta, -2 \cos \theta, \pi < 2\theta < \frac{3}{2} \\
&= -2 \cos \theta
\end{aligned}$$

$[\because \frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{4}]$ ல் II கால்பகுதியில் அமைந்துள்ளது]

விடை:

(1) $-2 \cos \theta$

கேள்வி 6.

$\tan 40^\circ = \lambda$ எனில், $\frac{\tan 140^\circ - \tan 130^\circ}{1 + \tan 140^\circ \tan 130^\circ} =$

(1) $\frac{1 - \lambda^2}{\lambda}$

(2) $\frac{1 + \lambda^2}{\lambda}$

(3) $\frac{1 + \lambda^2}{2\lambda}$

(4) $\frac{1 - \lambda^2}{2\lambda}$

குறிப்பு:

$$\begin{aligned}
\frac{\tan 140^\circ - \tan 130^\circ}{1 + \tan 140^\circ \tan 130^\circ} &= \tan (140^\circ - 130^\circ) \\
&= \tan 10^\circ \quad \dots (1)
\end{aligned}$$

$$\tan 40^\circ = \lambda ; \tan 80^\circ = \frac{2 \tan 40^\circ}{1 - \tan^2 40^\circ} = \frac{2\lambda}{1 - \lambda^2}$$

$$\tan (90^\circ - 10^\circ) = \frac{2\lambda}{1 - \lambda^2}$$

$$\cot 10^\circ = \frac{2\lambda}{1 - \lambda^2}$$

$$\Rightarrow \tan 10^\circ = \frac{1-\lambda^2}{2\lambda}$$

$$(1) \text{ விருந்து } \frac{\tan 140^\circ - \tan 130^\circ}{1 + \tan 140^\circ \tan 130^\circ} = \frac{1-\lambda^2}{2\lambda}$$

விடை:

$$(4) \frac{1-\lambda^2}{2\lambda}$$

கேள்வி 7.

$$\cos 1^\circ + \cos 2^\circ + \cos 3^\circ + \dots + \cos 179^\circ =$$

$$(1) 0$$

$$(2) 1$$

$$(3) -1$$

$$(4) 89$$

குறிப்பு:

$$(\cos 1^\circ + \cos 179^\circ) + (\cos 2^\circ + \cos 178^\circ) + \dots = 2 \cos 90^\circ \cos 89^\circ + 2 \cos 90^\circ \cos 80^\circ + \dots = 0 + 0 + \dots = 0$$

விடை:

$$(1) 0$$

கேள்வி 8.

$$f_k(x) = \frac{1}{k} [\sin^k x + \cos^k x] \text{ என்க. இங்கு } X \in R \text{ மற்றும் } k \geq 1 \text{ எனில், } f_4(x) - f_6(x) =$$

$$(1) \frac{1}{4}$$

$$(2) \frac{1}{12}$$

$$(3) \frac{1}{6}$$

$$(4) \frac{1}{3}$$

குறிப்பு:

$$f_4(x) - f_6(x) = \frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned}
& [\sin^4 x + \cos^4 x] - \frac{1}{6} (\sin^6 x + \cos^6 x) \\
&= \frac{1}{4} [(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cos^2 x] - \frac{1}{6} [(\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - 3 (\sin^2 x \cos^2 x) + (\sin^2 x + \cos^2 x)] \\
&= \frac{1}{4} [1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x] - \frac{1}{6} [1 - 3 \sin^2 x \cos^2 x] \\
&= \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \sin^2 x \cos^2 x - \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \sin^2 x \cos^2 x \\
&= \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{3-2}{12} = \frac{1}{12}
\end{aligned}$$

விடை:

$$(2) \frac{1}{12}$$

கேள்வி 9.

பின்வருவனவற்றில் எது சரியானதல்ல?

$$(1) \sin \theta = -\frac{3}{4}$$

$$(2) \cos \theta = -1$$

$$(3) \tan \theta = 25$$

$$(4) \sec \theta = \frac{1}{4}$$

குறிப்பு:

$$|\cos x| < 1$$

$$\therefore \sec \theta = \frac{1}{4}$$

$$= \cos \theta = 4 \text{ சாத்தியமில்லை}$$

விடை:

$$(4) \sec \theta = \frac{1}{4}$$

கேள்வி 10.

$\cos 2\theta \cos 2\Phi + \sin^2 (\theta - \Phi) - \sin (\theta + \Phi)$ இன் மதிப்பு

$$(1) \sin 2 (\theta + \Phi)$$

$$(2) \cos 2 (\theta + \Phi)$$

$$(3) \sin 2 (\theta - \Phi)$$

$$(4) \cos 2 (\theta - \Phi)$$

குறிப்பு:

$$= \cos 2\theta \cos 2\Phi + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos (2\theta - 2\Phi) - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos (2\theta + 2\Phi)$$

$$= \cos 2\theta \cos 2\Phi + \frac{1}{2} (\cos (2\theta + 2\Phi) - \cos (2\theta - 2\Phi))$$

$$= \cos 2\theta \cos 2\Phi - \sin 2\theta \cos 2\Phi$$

$$= \cos (2\theta - 2\Phi) = \cos 2(\theta + \Phi)$$

விடை:

$$(2) \cos 2 (\theta + \Phi)$$

கேள்வி 11.

$$\frac{\sin(A-B)}{\cos A \cos B} + \frac{\sin(B-C)}{\cos B \cos C} + \frac{\sin(C-A)}{\cos C \cos A} =$$

$$(1) \sin A + \sin B + \sin c$$

$$(2) 1$$

$$(3) 0$$

$$(4) \cos A + \cos B + \cos C$$

குறிப்பு:

$$\frac{\sin(A-B)}{\cos A \cos B} = \frac{\sin A \cos B - \cos A \sin B}{\cos A \cos B}$$

$$= \tan A - \tan B$$

$$\text{LHS} = \tan A - \tan B + \tan B - \tan C + \tan C - \tan A = 0$$

விடை:

$$(3) 0$$

கேள்வி 12.

$\cos p\theta + \cos q\theta = 0$, $p \neq q$, n ஏதேனும் ஒரு முழு எண் n எனில் 8-வின் மதிப்பு

$$(1) \frac{\pi(3n+1)}{p-q}$$

$$(2) \frac{\pi(2n+1)}{p \pm q}$$

$$(3) \frac{\pi(n \pm 1)}{p \pm q}$$

$$(4) \frac{\pi(n+2)}{p+q}$$

குறிப்பு:

$$\cos p\theta + \cos q\theta = 0$$

$$2 \cos \left(\frac{p+q}{2} \right) \theta \cdot \cos \left(\frac{p-q}{2} \right) \theta = 0$$

$$\Rightarrow 2 \cos \left(\frac{p+q}{2} \right) \theta = 0 \text{ (or)}$$

$$\cos \left(\frac{p-q}{2} \right) \theta = 0$$

$$\text{முதன்மை கோணம் } \frac{\pi}{2} \therefore \left(\frac{p+q}{2} \right) \theta = \theta$$

$$= 2n\pi \pm \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow (p+q)\theta = 4n\pi \pm \pi$$

$$\theta = \frac{\pi(4n \pm 1)}{p+q}$$

$$\text{அதேபோல } \theta = \frac{\pi(4n \pm 1)}{p-q}$$

விடை:

$$(2) \frac{\pi(2n+1)}{p \pm q}$$

கேள்வி 13.

$x^2 + ax + b = 0$ இன் மூலங்கள் $\tan \alpha$ மற்றும் $\tan \beta$ எனில்,

$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin \alpha \sin \beta}$ இன் மதிப்பு

(1) $\frac{b}{a}$

(2) $\frac{a}{b}$

(3) $-\frac{a}{b}$

(4) $-\frac{b}{a}$

குறிப்பு:

$$x^2 + ax + b = 0$$

α மற்றும் β என்பன மூலங்கள் என்க

$$\tan \alpha + \tan \beta = -a; \tan \alpha \tan \beta = b$$

$$\frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha \sin \beta} = \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\sin \alpha \sin \beta}$$

$$= \cot \beta + \cot \alpha$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\tan \alpha} + \frac{1}{\tan \beta} = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{\tan \alpha \tan \beta} = -\frac{a}{b}$$

விடை:

(3) $-\frac{a}{b}$

கேள்வி 14.

ΔABC இல் $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2$ எனில், அந்த முக்கோணமானது

- (1) சமபக்க முக்கோணம்
- (2) இரு சமபக்க முக்கோணம்
- (3) செங்கோண முக்கோணம்
- (4) அசமபக்க முக்கோணம்

குறிப்பு:

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2$$

அது ஒரு செங்கோண முக்கோணம், $\hat{C} = 90^\circ$ எனில்

$$\sin^2 C = 1$$

$$\text{மற்றும் ஆகையால் } \sin^2 A + \sin^2 B = 1$$

$$\text{மேலும் } A + B = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \sin A = \sin (90^\circ - B) = \cos B$$

$$\cos^2 A + \sin^2 B + 1 = 2 \text{ என்பது சரி}$$

விடை:

(3) செங்கோண முக்கோணம்)

கேள்வி 15.

$f(\theta) = |\sin \theta| + |\cos \theta|$, $\theta \in \mathbb{R}$ எனில், $f(\theta)$ அமையும் இடைவெளி

(1) $[0, 2]$

(2) $[1, \sqrt{2}]$

(3) $[1, 2]$

(4) $[0, 1]$

குறிப்பு:

$$f(\theta) = |\sin \theta| + |\cos \theta|$$

$\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}$ மற்றும் $0 + 1$ இடையே அமைந்துள்ளது

$= \sqrt{2}$ மற்றும் 1

விடை:

(2) $[1, \sqrt{2}]$

கேள்வி 16.

$$\frac{\cos 6x + 6 \cos 4x + 15 \cos 2x + 10}{\cos 5x + 5 \cos 3x + 10 \cos x} =$$

(1) $\cos 2x$

(2) $\cos x$

(3) $\cos 3x$

(4) $2 \cos x$

குறிப்பு:

$$\text{பகுதி} = \cos 6x + 6 \cos 4x + 15 \cos 2x + 10$$

$$= (\cos 6x + \cos 4x) + 5(\cos 4x + \cos 2x) + 10 (\cos 2x + 1)$$

$$= 2 \cos 5x \cos x + 5(2 \cos 3x \cdot \cos x) + 10 (2 \cos^2 x)$$

$$= 2 \cos x [\cos 5x + 5 \cos 3x + 10 \cos x]$$

$$\therefore \frac{Nr}{Dr} = \frac{2 \cos x (\cos 5x + 5 \cos 3x + 10 \cos x)}{(\cos 5x + 5 \cos 3x + 10 \cos x)}$$

$$= 2 \cos x$$

விடை:

$$(4) 2 \cos x$$

கேள்வி 17.

மாறாத சுற்றளவு 12 மீ கொண்ட முக்கோணத்தின் அதிகபட்ச பரப்பளவானது.

- (1) 4 மீ பக்கத்தினைக் கொண்ட சமபக்க முக்கோணமாக அமையும்.
- (2) 2 மீ, 5 மீ மற்றும் 5 மீ பக்கங்களைக் கொண்ட இரு சமபக்க முக்கோணமாக அமையும்.
- (3) 3 மீ, 4 மீ மற்றும் 5 மீ பக்கங்களைக் கொண்ட ஒரு முக்கோணமாக அமையும்.
- (4) முக்கோணம் அமையாது

குறிப்பு:

$$3a = 12 \Rightarrow a = 4$$

4மீ பக்கத்தினை கொண்ட சமபக்க முக்கோணமாக அமையும் போது அதிகபட்ச பரப்பளவு கிடைக்கிறது.

விடை:

- (1) 4 மீ பக்கத்தினைக் கொண்ட சமபக்க முக்கோணமாக அமையும்.

கேள்வி 18.

ஒரு சக்கரமானது 2 ஆரையன்கள் அளவில் / விகலைகள் சுழல்கிறது. எனில், 10 முழு சுற்று சுற்றுவதற்கு எத்தனை விகலைகள் எடுத்துக் கொள்ளும்?

- (1) 10π விகலைகள்
- (2) 20π விகலைகள்
- (3) 5π விகலைகள்
- (4) 15π விகலைகள்

குறிப்பு:

ஒரு விகலையில் சுழல்வது = 2 ஆரையன்கள்

2π ஆரையன்களுக்கு அது 1 விகலை எடுத்துக் கொள்கிறது.

1 சுற்றுக்கு எடுத்துக் கொள்வது $\frac{2\pi}{2} = \pi$ விகலைகள்

$\therefore$ 10 சுற்றுக்கு எடுத்துக் கொள்வது 10π விகலைகள்
விடை:

(1) 10π விகலைகள்

கேள்வி 19.

$\sin \alpha + \cos \alpha = b$ எனில், $\sin 2\alpha$ இன் மதிப்பு

(1) $b \leq \sqrt{2}$ எனில், $b^2 - 1$

(2) $b > \sqrt{2}$ எனில், $b^2 - 1$

(3) $b \geq 1$, எனில் $\Rightarrow b^2 - 1$

(4) $b \geq \sqrt{2}$ எனில், $b^2 - 1$

குறிப்பு:

$\sin \alpha + \cos \alpha = b$

$\Rightarrow (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = b^2$

$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha = b^2$

$\sin 2\alpha = b^2 - 1$

$-1 < \sin \alpha \leq 1$ என்ப தால் $-1 \leq b^2 - 1 \leq 1$; $b^2 \leq 2$ $b \leq \sqrt{2}$ எனில் இது சாத்தியமாகும்.

விடை:

(1) $b \leq \sqrt{2}$ எனில், $b^2 - 1$

கேள்வி 20.

ΔABC இல்

(i) $\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} > 0$

(ii) $\sin A \sin B \sin C > 0$

(1) (i) மற்றும் (ii) ஆகிய இரண்டும் உண்மை

(2) (i) மட்டுமே உண்மை

(3) (ii) மட்டுமே உண்மை

(4) (i) மற்றும் (ii) ஆகிய இரண்டும் உண்மையில்லை
குறிப்பு:

ΔABC -ல் $\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} > 0$ மேலும் $\sin A \sin B \sin C > 0$. இரண்டும் சரி. I மற்றும் II காற்பகுதியில்.
விடை:

(1) (i) மற்றும் (ii) ஆகிய இரண்டும் உண்மை