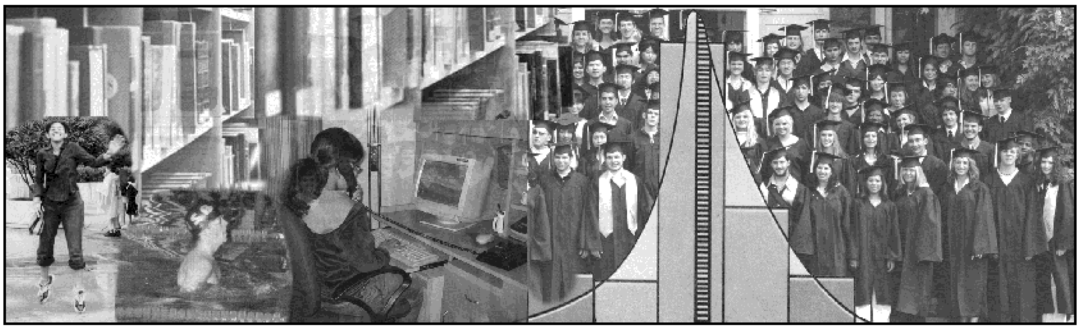
അധ്യായം 3

ദത്തങ്ങളുടെ ക്രമീകരണം
(Organisation of Data)



പഠനനേട്ടങ്ങൾ

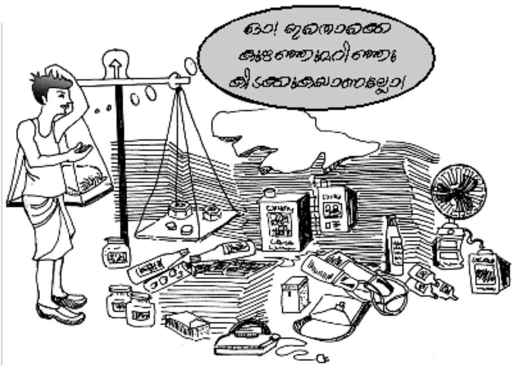
- ദത്തങ്ങളെ തുടർന്നുള്ള സാംഖ്യക വിശകലനത്തിനായി വർഗീകരിക്കുക.
- ഗുണപരവും പരിണാത്മകവുമായ വർഗീകരണം തിരിച്ചറിയുക.
- ആവൃത്തിവിതരണപട്ടിക തയ്യാറാക്കുന്നു.
- ക്ലാസുകൾ രൂപീകരിക്കുന്ന വിദ്യ അറിയുന്നു.
- ടാലി അടയാളപ്പെടുത്തുന്ന രീതിയുമായി പരിചയപ്പെടുന്നു.
- ഏകചരആവൃത്തിവിതരണവും ദ്വിചര ആവൃത്തിവിതരണവും തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസം തിരിച്ചറിയുന്നു.

1. ആമുഖം

ദത്തങ്ങൾ ശേഖരിക്കുന്നതെങ്ങനെയെന്ന് നിങ്ങൾ മുൻഅധ്യായത്തിൽ പഠിച്ചിട്ടുണ്ടല്ലോ? സെൻസസും സാമ്പ്ളിങ്ങും തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസവും നിങ്ങൾക്കറിയാം. ഈ അധ്യായത്തിൽ ശേഖരിക്കപ്പെട്ട ദത്തങ്ങൾ തരംതിരിക്കുന്നതെങ്ങനെയാണെന്ന് നിങ്ങൾ പഠിക്കും. അസംസ്കൃത ദത്തങ്ങൾ തരംതിരിക്കുന്നത് അവ വീണ്ടും എളുപ്പത്തിൽ സാംഖ്യകാപഗ്രഥത്തിന് സജ്ജമാക്കാൻ വേണ്ടിയാണ്.

പഴയ പാത്രങ്ങൾ, പൊട്ടിയ ഗാർഹികോപകരണങ്ങൾ, ഒഴിഞ്ഞ ചില്ലുകുപ്പികൾ, പ്ലാസ്റ്റിക് മുതലായവ വാങ്ങുന്ന ആക്രിക്കച്ചവടക്കാരനെ (കബാഡിവാല) നിങ്ങൾ നിരീക്ഷിച്ചിട്ടുണ്ടോ? അദ്ദേഹം നിങ്ങളിൽനിന്നും ഈ ഇനങ്ങൾ വാങ്ങുകയും ഇത് പുനഃചംക്രമണത്തിന് സജ്ജമാക്കുന്നവർക്ക് വിൽക്കുകയും ചെയ്യുന്നു. തരം തിരിക്കാതെയും ക്രമപ്പെടുത്താതെയും അദ്ദേഹത്തിന്റെ കടയിൽ തന്നെ സൂക്ഷിച്ചാൽ ഈ പാഴ്‌വസ്തുക്കളുടെ കൂമ്പാരം കൈകാര്യം ബുദ്ധിമുട്ടുണ്ടായിരിക്കും. ഇത് ഒഴിവാക്കാനായി അദ്ദേഹം ഇവയെ അനുയോജ്യമായ ഗ്രൂപ്പുകളിലാക്കുന്നു അഥവാ, തരം തിരിക്കുന്നു.

പഴയ പത്രങ്ങളെല്ലാം ഒരുമിച്ച് കയറു കൊണ്ട് കെട്ടി വയ്ക്കുന്നു. ഒഴിഞ്ഞ കുപ്പികൾ എല്ലാം ഒരുചാക്കിൽ സൂക്ഷിയ്ക്കുന്നു. പഴയ സാധനങ്ങൾ എല്ലാം ഒരു മൂലയിൽ കൂട്ടി ഇരുമ്പ്, ചെമ്പ്, അലുമിനിയം, ഓട് എന്നിങ്ങനെ മാറ്റിവെക്കുന്നു. ഈ മാർഗത്തിലൂടെ അദ്ദേഹം തന്റെ പഴയ സാധനങ്ങൾ എല്ലാം ക്രമപ്പെടുത്തുന്നു. പഴയ സാധനങ്ങളെല്ലാം യഥാസമയം ക്രമപ്പെടുത്തിക്കഴിഞ്ഞാൽ, വാങ്ങാൻ വരുന്നയാളുടെ ആവശ്യത്തിനനുസരിച്ച് സാധനങ്ങൾ കണ്ടെത്തുക എന്നത് വളരെ എളുപ്പമാണ്.



അതുപോലെ, നിങ്ങളുടെ സ്കൂൾ പുസ്തകങ്ങൾ എല്ലാം ക്രമത്തിൽ വെച്ചാൽ അത് കൈകാര്യം ചെയ്യാൻ എളുപ്പമാണ്. ഓരോ വിഷയങ്ങൾക്കനുസരിച്ച് പല കൂട്ടങ്ങളായി അതിനെ തരം തിരിക്കാവുന്നതാണ്. അങ്ങനെയാണെങ്കിൽ, ചരിത്രത്തിലെ ഒരു പ്രത്യേക പുസ്തകം എടുക്കണമെങ്കിൽ 'ചരിത്രം' എന്ന ഗ്രൂപ്പിൽ അന്വേഷിച്ചാൽ മതിയാവും. അല്ലെങ്കിൽ നിങ്ങളുടെ പുസ്തകശേഖരം മുഴുവനും നിങ്ങൾ ഉദ്ദേശിച്ച പുസ്തകം കിട്ടാൻ വേണ്ടി തിരയേണ്ടിവരും.

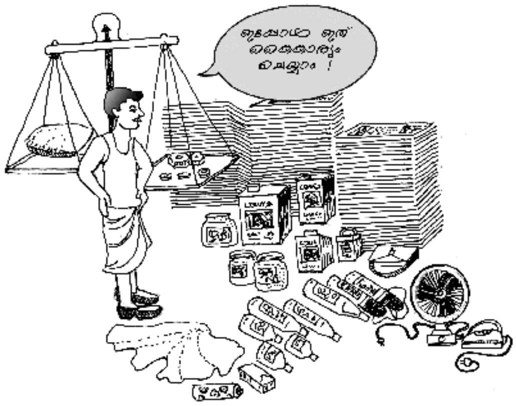
സാധനസാമഗ്രികളുടെ വർഗീകരണം നമ്മുടെ വിലയേറിയ സമയവും പരിശ്രമവും കുറയ്ക്കുമെങ്കിലും ഇത് ഏകപക്ഷീയമായി (Arbitrary) ചെയ്യേണ്ട ഒന്നല്ല. ആക്രിക്കച്ചവടക്കാരൻ തന്റെ സാധനങ്ങൾ എല്ലാം ഗ്രൂപ്പാക്കി മാറ്റുന്നത് ഒരേപോലെയുള്ള ഇനങ്ങളുടെ അടിസ്ഥാനത്തിലാണ്. ഉദാഹരണത്തിന്, ഗ്ലാസ് എന്ന ഗ്രൂപ്പുകളായി അദ്ദേഹം എല്ലാ ഒഴിഞ്ഞ കുപ്പികളും, പൊട്ടിയ കണ്ണാടികൾ, ജനൽചില്ലുകൾ മുതലായവയും മാറ്റിവെക്കും. അതുപോലെ നിങ്ങളുടെ ഒരു ചരിത്രപുസ്തകത്തെ ചരിത്രം എന്ന ഗ്രൂപ്പിലേക്ക് മാറ്റിവെക്കുമ്പോൾ വേറൊരു വിഷയത്തെ നിങ്ങൾ ആ ഗ്രൂപ്പിൽ ഉൾക്കൊള്ളിക്കില്ല. മറിച്ചാണെങ്കിൽ, വർഗീകരണത്തിന്റെ എല്ലാ ഉദ്ദേശ്യവും നഷ്ടമാവും. അതിനാൽ, വർഗീകരണം എന്നത് ഒരേ പോലെയുള്ള വസ്തുക്കളെ ഒരേ ഗ്രൂപ്പിലേക്കോ ക്ലാസിലേക്കോ അടുക്കിവെയ്ക്കുകയോ ക്രമപ്പെടുത്തുകയോ ആണ്.

പ്രവർത്തനം

- കത്തുകൾ തരം തിരിക്കുന്നതെങ്ങനെയെന്ന് കണ്ടെത്താനായി നിങ്ങളുടെ അടുത്തുള്ള പോസ്റ്റ് ഓഫീസ് സന്ദർശിക്കുക. ഒരു കത്തിലെ പിൻകോഡ് സൂചിപ്പിക്കുന്നതെന്തെന്ന് നിങ്ങൾക്കറിയാമോ? പോസ്റ്റ്മാനോട് ചോദിച്ചു നോക്കൂ.

2. അസംസ്കൃത ദത്തങ്ങൾ (Raw Data)

ആക്രിക്കച്ചവടക്കാരന്റെ സാധനങ്ങൾ പോലെ വർഗീകരിക്കപ്പെടാത്ത അഥവാ തികച്ചും ക്രമരഹിതങ്ങളാണ് അസംസ്കൃത ദത്തങ്ങൾ. അത് വളരെ വലുതും കൈകാര്യം ചെയ്യുമ്പോൾ മടുപ്പ് അനുഭവപ്പെടുന്നതുമാണ്. ഇത്തരം ദത്തങ്ങളിൽ നിന്നും



നിഗമനത്തിലെത്തിച്ചേരുക എന്നത് ശ്രമകരമാണ്. കാരണം, അവ സാംഖ്യകാപഗ്രഥന രീതിക്ക് എളുപ്പം വഴങ്ങുന്നവയല്ല. അതിനാൽ, വ്യവസ്ഥാപിതമായ സാംഖ്യകാപഗ്രഥനത്തിന് മുമ്പ് ഇത്തരം ദത്തങ്ങളുടെ ശരിയായ ക്രമപ്പെടുത്തലും അവതരണവും ആവശ്യമാണ്. അതുകൊണ്ട് ദത്തങ്ങളുടെ ശേഖരണം കഴിഞ്ഞാൽ അടുത്തപടി എന്നത് അവയെ ക്രമീകരിക്കുകയും വർഗീകരിക്കപ്പെട്ട രൂപത്തിൽ അവതരിപ്പിക്കുകയും ചെയ്യുക എന്നതാണ്. ഗണിതശാസ്ത്രത്തിൽ വിദ്യാർത്ഥികളുടെ നിലവാരം അറിയുന്നതിന് വേണ്ടി നിങ്ങളുടെ സ്കൂളിലെ 100 കുട്ടികൾക്ക് ലഭിച്ച മാർക്കുകളുടെ വിവരം ശേഖരിച്ചുവെന്നിരിക്കട്ടെ. അത് ഒരു പട്ടികയിൽ അവതരിപ്പിച്ചാൽ പട്ടിക 3.1-ൽ കാണുന്നതുപോലെയിരിക്കും.

പട്ടിക 3.1

100 വിദ്യാർഥികൾക്ക് ഗണിതശാസ്ത്ര പരീക്ഷയിൽ ലഭിച്ച മാർക്ക്

47	45	10	60	51	56	66	100	49	40
60	59	56	55	62	48	59	55	51	41
42	69	64	66	50	59	57	65	62	50
64	30	37	75	17	56	20	14	55	90
62	51	55	14	25	34	90	49	56	54
70	47	49	82	40	82	60	85	65	66
49	44	64	69	70	48	12	28	55	65
49	40	25	41	71	80	0	56	14	22
66	53	46	70	43	61	59	12	30	35
45	44	57	76	82	39	32	14	90	25

അല്ലെങ്കിൽ നിങ്ങളുടെ അയൽപ്പക്കത്തുള്ള 50 വീടുകളുടെ ശരാശരി ഭക്ഷണച്ചെലവ് അറിയുന്നതിനായി അവരുടെ ഭക്ഷണത്തിനുള്ള പ്രതിമാസച്ചെലവിന്റെ ദത്തങ്ങൾ ശേഖരിച്ചു നോക്കൂ. ഇങ്ങനെ ശേഖരിക്കപ്പെട്ട ദത്തങ്ങൾ പട്ടിക 3.2-ൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നു. പട്ടിക 3.1 ലും 3.2 ലും കൊടുത്തിരിക്കുന്നത് അസംസ്കൃത ദത്തങ്ങൾ അഥവാ വർഗീകരിക്കപ്പെടാത്ത ദത്തങ്ങൾ ആണ്. രണ്ടു പട്ടികകളിലും ദത്തങ്ങൾ ഒരു തരത്തിലും ക്രമപ്പെടുത്തിയിട്ടില്ല. പട്ടിക 3.1-നെ അടിസ്ഥാനപ്പെടുത്തി വിദ്യാർഥികൾക്ക് കണക്കിൽ ലഭിച്ച ഏറ്റവും ഉയർന്ന മാർക്ക് കണ്ടെത്താൻ ആവശ്യപ്പെട്ടാൽ, ആദ്യം 100 കുട്ടികളുടെ മാർക്ക് ആരോഹണ ക്രമത്തിലോ അവരോഹണക്രമത്തിലോ തയാറാക്കേണ്ടതാണ്. ഇത് ബുദ്ധിമുട്ടേറിയ ജോലിയാണ്. 100 ന് പകരം 1000 കുട്ടികളുടെ മാർക്കാണ് കൈകാര്യം ചെയ്യേണ്ടതെങ്കിൽ ഇത് കൂടുതൽ പ്രയാസകരമാണ്. അതുപോലെ, പട്ടിക 3.2-ൽ നിന്നും 50 കുടുംബങ്ങളുടെ ശരാശരി മാസ ഭക്ഷണച്ചെലവ് കണ്ടെത്തലും ശ്രമകരമാണ്. 5000 കുടുംബങ്ങളുടെ കാര്യത്തിലാണെങ്കിൽ ഇത് പല മടങ്ങാവും. പഴയ സാധനങ്ങൾ ക്രമരഹിതവും കൂമ്പാരവുമാകുമ്പോൾ ഒരു പ്രത്യേക വസ്തു കണ്ടെത്താൻ ബുദ്ധിമുട്ടുന്ന ആക്രിക്കച്ചവടക്കാരനെപ്പോലെ കൂടുതൽ അസംസ്കൃതദത്തങ്ങളിൽ നിന്നും ഒരു നിശ്ചിത വിവരം കണ്ടെത്താൻ ബുദ്ധിമുട്ടാ

യിരിക്കും. ഒറ്റവാക്കിൽ പറഞ്ഞാൽ വർഗീകരിക്കപ്പെടാത്ത ഒരു വലിയ ദത്തശേഖരത്തിൽ നിന്നും ഒരു പ്രത്യേകവിവരം കണ്ടെത്തൽ ബുദ്ധിമുട്ടേറിയ ജോലിയാണ്.

പട്ടിക 3.2

50 കുടുംബങ്ങളുടെ പ്രതിമാസ ഭക്ഷണചെലവ് (രൂപയിൽ)

1904	1559	3473	1735	2760
2041	1612	1753	1855	4439
5090	1085	1823	2346	1523
1211	1360	1110	2152	1183
1218	1315	1105	2628	2712
4248	1812	1264	1183	1171
1007	1180	1953	1137	2048
2025	1583	1324	2621	3676
1397	1832	1962	2177	2575
1293	1365	1146	3222	1396

വർഗീകരണം ദത്തങ്ങളെ സമഗ്രവും മനസിലാക്കുവാൻ എളുപ്പമുള്ളതുമാക്കുന്നു. ഒരേ സ്വഭാവമുള്ള വസ്തുക്കളെ ഒരേ ശ്രേണിയിൽപ്പെടുത്തിയാൽ കണ്ടെത്തുന്നതിനും, താരതമ്യം ചെയ്യുന്നതിനും നിഗമനങ്ങളിൽ എത്തിച്ചേരുന്നതിനും എളുപ്പമാണ്. ഇന്ത്യാഗവൺമെന്റ് ഓരോ പത്തുവർഷം കൂടുമ്പോഴും കാനേഷുമാരി (Census) എടുക്കുന്നുണ്ടെന്ന് നിങ്ങൾ രണ്ടാം അധ്യായത്തിൽ കണ്ടുവല്ലോ. ഇതിൽ നിന്നും ലഭിക്കുന്ന അസംസ്കൃതദത്തങ്ങൾ വളരെക്കൂടുതലും പലസ്ഥലങ്ങളിലായി ചിതറിക്കിടക്കുന്നവയുമായതുകൊണ്ട് ഇതിൽ നിന്നും അർഥവത്തായ നിഗമനങ്ങളിൽ എത്തിച്ചേരുക തികച്ചും അസാധ്യമാണ്. എന്നാൽ, കാനേഷുമാരി ദത്തങ്ങൾ (Census data) വിദ്യാഭ്യാസം, വൈവാഹികാവസ്ഥ, ലിംഗം, തൊഴിൽ മുതലായവയുടെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ വർഗീകരിച്ചാൽ ഇന്ത്യൻ ജനസംഖ്യയുടെ ഘടനയും സ്വഭാവവും വളരെ എളുപ്പത്തിൽ മനസിലാക്കാൻ സാധിക്കും.

ചരങ്ങളിൻമേലുള്ള നിരീക്ഷണങ്ങളാണ് അസംസ്കൃത ദത്തങ്ങൾ. അസംസ്കൃത ദത്തങ്ങളുടെ ഓരോ യൂണിറ്റും ഓരോ നിരീക്ഷണങ്ങളാണ്. പട്ടിക 3.1-ൽ ലഭ്യമാക്കിയിട്ടുള്ളത് 100 കുട്ടികൾക്ക് ഗണിതത്തിൽ ലഭിച്ച മാർക്കുകളാണ്. ഈ മാർക്കുകൾ നോക്കി നമുക്ക് എന്താണ് പറയാൻ കഴിയുക? കണക്ക് അധ്യാപികക്ക് ഇവ പരിശോധിച്ചാൽ കുട്ടികളുടെ പ്രകടനത്തെ വിലയിരുത്താൻ കഴിയുമോ? എന്റെ കുട്ടികൾ എത്ര നന്നായി ചെയ്തിട്ടുണ്ട് വിജയിച്ചിട്ടുണ്ട് എന്നൊക്കെ മനസ്സിലാക്കണമെങ്കിൽ ഈ അസംസ്കൃത ദത്തങ്ങളെ നമ്മുടെ ഉദ്ദേശലക്ഷ്യങ്ങൾക്കനുസരിച്ച് വർഗ്ഗീകരിക്കേണ്ടതുണ്ട്. ഇക്കാര്യത്തിൽ ടീച്ചർക്ക് ആഴത്തിൽ കാര്യങ്ങൾ മനസ്സിലാകണമെങ്കിൽ അസംസ്കൃത ദത്തത്തെ ആവൃത്തി വിതരണത്തിലേക്ക് മാറ്റേണ്ടതുണ്ട്. ഇത് അടുത്ത ഭാഗത്ത് പ്രതിപാദിക്കുന്നതാണ്.

പ്രവർത്തനം

- നിങ്ങളുടെ കുടുംബത്തിന്റെ ഒരു വർഷത്തെ ഓരോ ആഴ്ചയിലെയും മൊത്തച്ചെലവുകളുടെ ദത്തങ്ങൾ ശേഖരിച്ച് അവയെ ഒരു പട്ടികയിൽ ക്രമപ്പെടുത്തുക. ഇതിൽ എത്ര നിരീക്ഷണങ്ങൾ ഉണ്ടെന്ന് കണക്കാക്കുക. ഈ ദത്തങ്ങളെ മാസത്തിന് അനുസരിച്ച് ക്രമീകരിച്ച് നിരീക്ഷണങ്ങളുടെ എണ്ണം കണക്കാക്കി നോക്കൂ.

3. ദത്തങ്ങളുടെ വർഗീകരണം (Calssification of Data)

വർഗീകരണത്തിന്റെ ഗ്രൂപ്പുകളോ ക്ലാസുകളോ വ്യത്യസ്തരീതിയിൽ കണക്കാക്കാവുന്നതാണ്. നിങ്ങളുടെ പുസ്തകങ്ങളെ ചരിത്രം, ഭൂമിശാസ്ത്രം, ഗണിതം, ശാസ്ത്രം തുടങ്ങിയവയായി വർഗീകരിക്കുന്ന

തിന് പുറമേ അവയെ ഗ്രന്ഥകർത്താവിന്റെ പേരിന്റെ അക്ഷരമാലാക്രമത്തിലും വർഗീകരിക്കാം. അല്ലെങ്കിൽ അവ പ്രസിദ്ധീകരിക്കുന്ന വർഷത്തിന്റെ അടിസ്ഥാനത്തിലും വർഗീകരിക്കപ്പെടാവുന്നതാണ്. എങ്ങനെ വർഗീകരിക്കണമെന്നത് ആവശ്യത്തിന്റെ അടിസ്ഥാനത്തിലാണ് തീരുമാനിക്കുന്നത്.

അസംസ്കൃതദത്തങ്ങൾ ഉദ്ദേശ്യങ്ങൾക്കനുസരിച്ച് വ്യത്യസ്ത മാർഗങ്ങളിൽ വർഗ്ഗീകരിക്കപ്പെടുന്നു. കാലാനുസൃതമായും അവയെ വർഗ്ഗീകരിക്കാം. ഇത്തരം വർഗീകരണം **കാലാനുസൃത വർഗീകരണം (Chronological Classification)** എന്ന് അറിയപ്പെടുന്നു. ഇത്തരം വർഗീകരണത്തിൽ ദത്തങ്ങളെ വർഷങ്ങൾ, ത്രൈമാസങ്ങൾ, മാസങ്ങൾ, ആഴ്ചകൾ മുതലായ കാലയളവുകളിൽ ആരോഹണ, അവരോഹണക്രമത്തിൽ രേഖപ്പെടുത്തുന്നു. ഇന്ത്യയുടെ ജനസംഖ്യ, വർഷങ്ങളുടെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ വർഗീകരിച്ചിരിക്കുന്നത് താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു. 'ജനസംഖ്യ' എന്ന ചരം വ്യത്യസ്ത വർഷങ്ങളിലെ മൂല്യങ്ങളുടെ ശ്രേണിയെ (Series) കാണിക്കുന്നതിനാൽ കാലശ്രേണി (Time Series) യാണ്.

ഉദാഹരണം 1

ഇന്ത്യൻ ജനസംഖ്യ(കോടിയിൽ)

വർഷം	ജനസംഖ്യ (കോടിയിൽ)
1951	35.7
1961	43.8
1971	54.6
1981	68.4
1991	81.8
2001	102.7
2011	121.0

സ്ഥലീയവർഗ്ഗീകരണ (Spatial Classification) ത്തിൽ ദത്തങ്ങൾ, ഭൂമിശാസ്ത്രസ്ഥലങ്ങളായ രാജ്യങ്ങൾ, സംസ്ഥാനങ്ങൾ, നഗരങ്ങൾ, ജില്ലകൾ മുതലായവയുടെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ വർഗീകരിക്കപ്പെടുന്നു. വ്യത്യസ്ത രാജ്യങ്ങളിലെ ഗോതമ്പിന്റെ വിളവ് ഉദാഹരണം 2-ൽ കൊടുത്തിരിക്കുന്നു.

ഉദാഹരണം 2

വ്യത്യസ്ത രാജ്യങ്ങളിലെ ഗോതമ്പിന്റെ വിളവ്

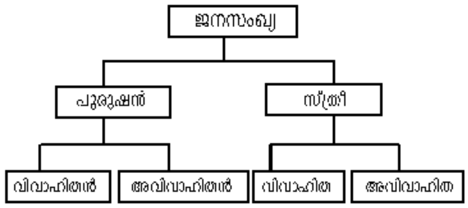
രാജ്യം	ഗോതമ്പിന്റെ വിളവ് (കിലോഗ്രാം/ഏക്കറിന്)
കാനഡ	3594
ചൈന	5055
ഫ്രാൻസ്	7254
ജർമനി	7998
ഇന്ത്യ	3154
പാകിസ്ഥാൻ	2787

പ്രവർത്തനങ്ങൾ

- ഉദാഹരണം 1-ലെ കാലശ്രേണിയിൽ ഏത് വർഷമാണ് ഇന്ത്യയുടെ ജനസംഖ്യ ഏറ്റവും കുറഞ്ഞത് എന്നും ഏത് വർഷമാണ് ഏറ്റവും കൂടിയതെന്നും കണ്ടെത്തുക
- ഉദാഹരണം 2-ൽ നിന്നും ഇന്ത്യയുടെ ഗോതമ്പ് വിളവിനേക്കാൾ അല്പം കൂടി ഗോതമ്പ് വിളവുള്ള രാജ്യം കണ്ടെത്തുക. ശതമാനമാണെങ്കിൽ ഇത് എത്രയെന്ന് കണക്കാക്കുക.
- ഉദാഹരണം 2-ലെ രാജ്യങ്ങളെ വിളയുടെ ആരോഹണക്രമത്തിലും അവരോഹണക്രമത്തിലും എഴുതുക.

പരിമാണാത്മകമായി പ്രകടിപ്പിക്കാൻ സാധ്യമല്ലാത്ത ചില സവിശേഷതകൾ ഉണ്ട്. അവയെ വിശേഷണങ്ങൾ അഥവാ ഗുണപരത എന്ന് വിളിക്കുന്നു. ഉദാഹരണത്തിന് ദേശീയത, സാക്ഷരത, മതം, ലിംഗം, വൈവാഹികാവസ്ഥ തുടങ്ങിയവയെ അളക്കാൻ സാധിക്കുകയില്ല. എന്നിരുന്നാലും ഇത്തരം വിശേഷണങ്ങളെ അവയുടെ ഗുണപരമായ സവിശേഷതയുടെ സാന്നിധ്യത്തിന്റെയോ, അസാന്നിധ്യത്തിന്റെയോ അടിസ്ഥാനത്തിൽ വർഗീകരിക്കാൻ സാധിക്കും. വിശേഷണത്തിലുള്ള ഇത്തരം വർഗീകരണത്തെ **ഗുണാത്മകത വർഗീകരണം (Qualita-tive Classification)** എന്ന് വിളിക്കുന്നു. താഴെക്കൊടുത്തുരിക്കുന്ന ഉദാഹരണത്തിൽ ഒരു രാജ്യത്തെ, ജനസംഖ്യ, ലിംഗം എന്നീ ചരങ്ങളുടെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ ഗ്രൂപ്പുകളാക്കിയിരിക്കുന്നു. ഒരു നിരീക്ഷണം സ്ത്രീയോ, പുരുഷനോ ആവാം. ഈ രണ്ട് സവിശേഷതകൾ അവയുടെ വൈവാഹിക അവസ്ഥയുടെ (ഗുണപരമായ സവിശേഷത) അടിസ്ഥാനത്തിൽ താഴെക്കൊടുത്തിരിക്കുന്നതുപോലെ വീണ്ടും വർഗ്ഗീകരിക്കാം.

ഉദാഹരണം 3



ഒന്നാം ഘട്ടത്തിൽ വർഗീകരണം നടക്കുന്നത് പുരുഷൻ അല്ലെങ്കിൽ പുരുഷനല്ല (സ്ത്രീ) എന്ന ഒരു വിശേഷണത്തിന്റെ സാന്നിധ്യത്തിന്റെയോ അസാന്നിധ്യത്തിന്റെയോ അടിസ്ഥാനത്തിൽ ആണ്. രണ്ടാം ഘട്ടത്തിൽ വർഗീകരണം നടക്കുന്നത് വിവാഹിതരാണോ അവിവാഹിതരാണോ എന്ന മറ്റൊരു വിശേഷണത്തിന്റെ സാന്നിധ്യത്തിന്റെയോ അസാന്നിധ്യത്തിന്റെയോ അടിസ്ഥാനത്തിലാണ്.

എന്നാൽ ഉയരം, ഭാരം, പ്രായം, വരുമാനം, വിദ്യാർഥികളുടെ മാർക്ക് മുതലായ സവിശേഷതകൾ പരിമാണാത്മകമാണ്. ശേഖരിക്കപ്പെട്ട ഇത്തരം ദത്തങ്ങൾ, ശ്രേണികളായി വർഗീകരിക്കപ്പെടുമ്പോൾ അവ **പരിമാണാത്മക വർഗീകരണമാണ് (Quantitative Classification).**

പ്രവർത്തനം

- നമുക്ക് ചുറ്റുമുള്ള വസ്തുക്കളെ ജീവനുള്ളവ എന്നും ജീവനില്ലാത്തവ എന്നും തിരിക്കാം, ഇത് പരിമാണാത്മക വർഗീകരണമാണോ?

ഉദാഹരണം 4

ഗണിതശാസ്ത്രത്തിൽ 100 വിദ്യാർഥികൾ നേടിയ മാർക്കിന്റെ ആവൃത്തിവിതരണം

മാർക്ക്	ആവൃത്തി
0–10	1
10–20	8
20–30	6
30–40	7
40–50	21
50–60	23
60–70	19
70–80	6
80–90	5
90–100	4
ആകെ	100

ഉദാഹരണം 4 കാണിക്കുന്നത് പട്ടിക 3.1-ൽ കൊടുത്തിരിക്കുന്നത് 100 വിദ്യാർഥികളുടെ ഗണിതശാസ്ത്രത്തിൽ ലഭിച്ച മാർക്കിന്റെ ആവൃത്തി വിതണമാണ്.

പ്രവർത്തനം

- ഉദാഹരണം 4-ലെ ആവൃത്തികളുടെ മൂല്യം മൊത്തം ആവൃത്തിയുടെ ശതമാനമായി/അനുപാതമായി അവതരിപ്പിക്കുക. ഇങ്ങനെ അവതരിപ്പിക്കപ്പെടുന്ന ആവൃത്തിയെ ആപേക്ഷിക ആവൃത്തി എന്ന് പറയുന്നു.
- ഉദാഹരണം 4-ൽ ദത്തങ്ങളുടെ പരമാവധി കേന്ദ്രീകരണം ഏത് ക്ലാസിലാണ്. ഇത് മൊത്തം നിരീക്ഷണങ്ങളുടെ ശതമാനമായി അവതരിപ്പിക്കുക. ഏത് ക്ലാസിലാണ്? ദത്തങ്ങളുടെ ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ കേന്ദ്രീകരണം ഉള്ളത്?

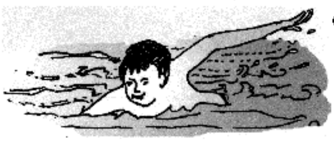
4. ചരങ്ങൾ : അസന്തതവും സന്തതവും (Variables : Discrete and Continu ous)

നിങ്ങൾ കഴിഞ്ഞ അധ്യായത്തിൽ പഠിച്ച ചരത്തിന്റെ ലളിത നിർവചനത്തിൽ ചരങ്ങൾ എങ്ങനെ മാറുന്നു എന്ന് പ്രതിപാദിക്കുന്നില്ല. വ്യത്യസ്ത ചരങ്ങൾ മാറുന്നത് വ്യത്യസ്ത രീതിയിലാണ്. മാറ്റത്തിന്റെ അടിസ്ഥാനത്തിൽ അവ രണ്ട് വിശാലഗ്രൂപ്പുകളായി വർഗീകരിക്കപ്പെട്ടിരിക്കുന്നു.

(i) സന്തതചരങ്ങൾ (Continuous variables)

(ii) അസന്തതചരങ്ങൾ (Discrete variables)

ഏതൊരു സാംഖിക മൂല്യവും സ്വീകരിക്കുന്നവയാണ് സന്തത ചരങ്ങൾ. ഇത് 1, 2, 3, 4 തുടങ്ങിയ പൂർണസംഖ്യാരൂപത്തിലോ $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{3}{4}$ തുടങ്ങിയ ഭിന്നസംഖ്യാരൂപത്തിലോ, $\sqrt{2}=1.44, \sqrt{3}=1.752....\sqrt{7}=2.645$ എന്നീ രൂപത്തിലോ ആകാം. ഉദാഹരണത്തിന്, ഒരു വിദ്യാർഥിയുടെ ഉയരം 90 സെന്റിമീറ്ററിൽ നിന്നും 150 സെന്റിമീറ്റർ എത്തുമ്പോൾ



അവൾ/അവൻ വളരുന്നതനുസരിച്ച് ഇതിന് രണ്ടിനുമിടയിലുള്ള ഏതൊരു മൂല്യത്തിലൂടെയും കടന്നുപോകാം. ഉയരം പൂർണ സംഖ്യകളായ (Whole Number) 90 സെ.മീ, 100 സെ.മീ എന്നിങ്ങനെയോ 90.85 സെ.മീ, 102.34 സെ.മീ, 149.99 സെ.മീ,എന്നിങ്ങനെ അപൂർണ സംഖ്യാരൂപത്തിലോ ആവാം. അതായത് 'ഉയരം' എന്ന ചരത്തെ അതിന് സങ്കല്പിക്കാൻ കഴിയുന്ന എല്ലാ മൂല്യങ്ങളിലും പ്രകടിപ്പിക്കാനും ആ മൂല്യങ്ങളെ അനന്തമായ തരത്തിൽ വിഭജിക്കാനും കഴിയും. ഭാരം,

സമയം, ദൂരം മുതലായവ സന്തതചരത്തിന് മറ്റ് ഉദാഹരണങ്ങളാണ്.

സന്തതചരങ്ങളിൽ നിന്നും വിഭിന്നമായി, അസന്തതചരങ്ങൾ നിശ്ചിതമൂല്യങ്ങൾ ഉള്ള വയാണ്. ഇതിന്റെ മൂല്യങ്ങൾ മാറുന്നത് നിയതമായ ചാട്ടങ്ങളിലൂടെയാണ്. ഇത് ഒരു മൂല്യത്തിൽ നിന്നും മറ്റൊരു മൂല്യത്തിലേക്ക് ചാടുന്നു. പക്ഷേ, ഒരിക്കലും ഈ രണ്ടു മൂല്യങ്ങൾക്കിടയിലുള്ള ഒരു മൂല്യത്തിൽ എത്തുന്നില്ല. ഉദാഹരണത്തിന്, 'ഒരു ക്ലാസിലെ കുട്ടികളുടെ എണ്ണം'. ഇത് വ്യത്യസ്ത ക്ലാസുകളിൽ പൂർണസംഖ്യാരൂപത്തിൽ ആയിരിക്കും. അതിനൊരിക്കലും 0.5 പോലൊരു ഭിന്നസംഖ്യാരൂപത്തിലാകാൻ കഴിയില്ല. കാരണം, അര വിദ്യാർത്ഥി എന്നത് സാധ്യമല്ല. അതിനാൽ ഇതിന് 25 നും 26 നും ഇടയിൽ 25.5 എന്നൊരു മൂല്യം സ്വീകരിക്കാൻ കഴിയില്ല. അതായത്, ഇതിന്റെ മൂല്യം 25 നും 26 നും ഇടയിൽ മാറാം. എന്നാൽ ഭിന്നസംഖ്യാരൂപത്തിലാവാൻ കഴിയില്ല. പക്ഷേ, ഒരു അസന്തത ചരം എന്നത് ഒരു രീതിയിലുള്ള ഭിന്നസംഖ്യാരൂപത്തിലും ഉണ്ടാവില്ല എന്ന് ധരിക്കരുത്. X എന്ന ചരത്തിന് $\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}$ ..... തുടങ്ങിയ മൂല്യങ്ങൾ സ്വീകരിക്കാൻ കഴിയുമെങ്കിൽ ഇതൊരു അസന്തതചരമായി പരിഗണിക്കാമോ? ഇതൊരു അസതന്തചരം തന്നെയാണ്. കാരണം X-ന്, ഇതിന് ഇടയിലുള്ള മൂല്യങ്ങൾ സ്വീകരിക്കാൻ കഴിയില്ല. ഇത് $\frac{1}{8}$ ൽ നിന്നും $\frac{1}{16}$ ലേക്കോ $\frac{1}{16}$ ൽ നിന്നും $\frac{1}{32}$ ലേക്കോ മാറുന്നു അഥവാ ചാടുന്നു. പക്ഷേ $\frac{1}{8}$ നും $\frac{1}{16}$ നും ഇടയിലോ $\frac{1}{16}$ നും $\frac{1}{32}$ നും ഇടയിലോ മറ്റൊരു മൂല്യം സ്വീകരിക്കാൻ കഴിയില്ല.

ഉദാഹരണം 4 നോക്കുക. പട്ടിക 3.1 ൽ കൊടുത്തിട്ടുള്ള 100 വിദ്യാർത്ഥികൾക്ക് ഗണിതശാസ്ത്രത്തിൽ ലഭിച്ച മാർക്കിനെ വ്യത്യസ്ത ക്ലാസുകളായും ഗ്രൂപ്പുകളായും മാറ്റിയത് ശ്രദ്ധിക്കുക. പട്ടികയിൽ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന അസംസ്കൃതദത്തങ്ങളിൽ നിന്നും ഇതെങ്ങനെ ലഭിച്ചുവെന്ന് നമുക്ക് അത്ഭുതം തോന്നാം. പക്ഷേ ഈ ചോദ്യം അഭിസംബോധന ചെയ്യുന്നതിനുമുമ്പ് ആവൃത്തി വിതരണം (Frequency distribution) എന്താണെന്ന് അറിയേണ്ടതുണ്ട്.

പ്രവർത്തനം

- താഴെക്കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ചരങ്ങളെ സന്തതം എന്നും അസന്തതം എന്നും വേർതിരിക്കുക.

  വിസ്തീർണം, വ്യാപ്തം, ഊഷ്മാവ്, ഒരു പകിടയിൽ (Dice) രേഖപ്പെടുത്തിയ സംഖ്യകൾ, വിള ഉല്പാദനം, ജനസംഖ്യ, മഴ, റോഡിലുള്ള കാറുകളുടെ എണ്ണം, പ്രായം

5. എന്താണ് ആവൃത്തിവിതരണം? (What is Frequency Distri bution)

പരമാണാരമക ചരത്തിന്റെ അസംസ്കൃതദത്തങ്ങളെ സമഗ്രമായി വർഗീകരിക്കാനുള്ള ഒരു മാർഗമാണ് ആവൃത്തിവിതരണം. ഇതു കാണിക്കുന്നത് ഒരു ചരത്തിന്റെ വ്യത്യസ്ത മൂല്യങ്ങൾ (ഇവിടെ ഗണിതശാസ്ത്രത്തിൽ വിദ്യാർഥികൾ നേടിയ

വ്യത്യസ്ത മാർക്ക്) വ്യത്യസ്ത ക്ലാസുകളിലും ക്ലാസ് ആവൃത്തി (Frequency) കളിലുമായി എങ്ങനെ വിന്യസിച്ചിരിക്കുന്നു എന്നാണ്. ഇവിടെ 0–10, 10–20, ... 90–100 എന്നിങ്ങനെ പത്ത് ക്ലാസുകൾ ഉണ്ട്. ഒരു പ്രത്യേക ക്ലാസിലെ മൂല്യങ്ങളുടെ എണ്ണമാണ് ക്ലാസ് ആവൃത്തി (Class Frequency) എന്ന പദം കൊണ്ട് അർഥമാക്കുന്നത്. ഉദാഹരണത്തിന് 30–40 എന്ന ക്ലാസിൽ 7 മൂല്യങ്ങളാണ് ഉള്ളത് (പട്ടിക 3.1 നോക്കുക). അവ 30, 37, 34, 30, 35, 39, 32 എന്നിവയാണ്. 30–40 എന്ന ക്ലാസിന്റെ ആവൃത്തി അതുകൊണ്ട് 7 ആണ്. പക്ഷേ അസംസ്കൃതദത്തങ്ങളിൽ രണ്ടു പ്രാവശ്യം ആവർത്തിക്കപ്പെടുന്ന 40 എന്തുകൊണ്ടാണ് 30–40 ക്ലാസിൽ വരാത്തതെന്ന് നിങ്ങൾ അത്ഭുതപ്പെടാം. അത് 30–40 ക്ലാസിൽ ഉൾപ്പെടുത്തിയിരുന്നെങ്കിൽ ക്ലാസ് ആവൃത്തി 7 ന് പകരം 9 ആകുമായിരുന്നു. ഈ പ്രശ്നത്തിന് ഉത്തരം കാണണമെങ്കിൽ ഈ അധ്യായം ശ്രദ്ധയോടെ പഠിക്കേണ്ടതുണ്ട്. അതുകൊണ്ട് തുടർവായനയിൽ നിങ്ങൾ തന്നെ ഇതിന് ഉത്തരം കണ്ടെത്തും.

ഒരു ആവൃത്തിവിതരണപ്പട്ടികയിലെ ഓരോ ക്ലാസും ക്ലാസ്പരിധിയാൽ (Class Limit) ബന്ധിതമാണ്. ക്ലാസ് പരിധികൾ എന്നത് ഒരു ക്ലാസിന്റെ രണ്ട് അറ്റങ്ങളാണ്. ക്ലാസ്സിന്റെ ഏറ്റവും കുറഞ്ഞ മൂല്യത്തെ താഴ്ന്ന ക്ലാസ് പരിധി (Lower Class Limit) എന്നും ഏറ്റവും കൂടിയ മൂല്യത്തെ ഉയർന്ന ക്ലാസ്പരിധി (Upper Class Limit) എന്നും പറയുന്നു. ഉദാഹരണത്തിന് 60–70 എന്ന ക്ലാസിന്റെ പരിധികൾ 60 ഉം 70 ഉം ആണ്. ഇതിന്റെ താഴ്ന്ന പരിധി 60 ഉം ഉയർന്ന പരിധി 70 ഉം ആണ്. ക്ലാസ് ഇടവേള (Class Interval) എന്നത് ഉയർന്ന ക്ലാസ്പരിധിയും താഴ്ന്ന ക്ലാസ് പരിധിയും തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസമാണ്. 60–70 എന്ന ക്ലാസിൽ ക്ലാസ് ഇടവേള 10 ആണ് (ഉയർന്ന ക്ലാസ്പരിധി - താഴ്ന്ന ക്ലാസ്പരിധി).

ക്ലാസ്മധ്യബിന്ദു അഥവാ ക്ലാസ്മാർക്ക് എന്നത് ഒരു ക്ലാസിന്റെ മധ്യമൂല്യമാണ്. ഇത് ഒരു ക്ലാസിന്റെ താഴ്ന്ന ക്ലാസ്പരിധിയുടെയും ഉയർന്ന ക്ലാസ്പരിധിയുടെയും മധ്യമാണ്. താഴെപ്പറയുന്ന രീതിയിൽ ഇത് കണ്ടെത്താവുന്നതാണ്.

ക്ലാസ്മധ്യബിന്ദു (Class Mid Value) അഥവാ ക്ലാസ്മാർക്ക് = (ഉയർന്ന ക്ലാസ്പരിധി + താഴ്ന്നക്ലാസ് പരിധി)/2

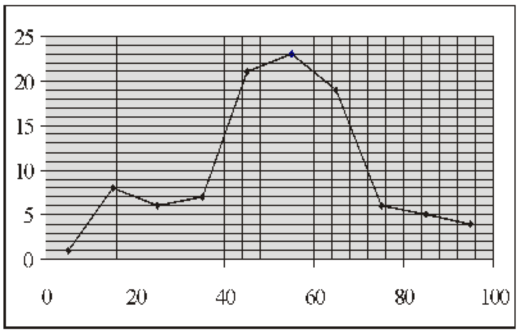
ക്ലാസ്മാർക്ക് അഥവാ ഓരോ ക്ലാസിന്റെയും മധ്യമൂല്യം ഒരു ക്ലാസിനെ പ്രതിനിധീകരിക്കാൻ ഉപയോഗിക്കുന്നു. അസംസ്കൃത ദത്തങ്ങൾ ക്ലാസുകളാക്കി മാറ്റി കഴിഞ്ഞാൽ പിന്നീടുള്ള കണക്കുകൂട്ടലുകൾക്ക് വ്യക്തിഗതനിരീക്ഷണങ്ങൾ (Observation) ഉപയോഗിക്കാറില്ല. പകരം ക്ലാസ്മാർക്ക് ഉപയോഗിക്കുന്നു.

ആവൃത്തിവിതരണം ഗ്രാഫിലൂടെ അവതരിപ്പിക്കുന്നതിനെ ആവൃത്തിവക്രം (Frequency Curve) എന്ന് പറയുന്നു. മുകളിൽ കൊടുത്ത ഉദാഹരണത്തിൽ കാണിച്ച ആവൃത്തി പട്ടികയെ ഗ്രാഫ് രൂപത്തിൽ ആക്കിയത് ശ്രദ്ധിക്കുക (ചിത്രം 3.1). ആവൃത്തിവക്രം ലഭിക്കുന്നതിന് X അക്ഷത്തിൽ ക്ലാസ് മാർക്കും Y അക്ഷത്തിൽ ആവൃത്തിയും അടയാളപ്പെടുത്തുന്നു.

പട്ടിക 3.3

താഴ്ന്ന ക്ലാസ് പരിധിയും ഉയർന്ന ക്ലാസ് പരിധിയും ക്ലാസ് മാർക്കും

ക്ലാസ്	ആവൃത്തി	താഴ്ന്ന ക്ലാസ്പരിധി	ഉയർന്ന ക്ലാസ്പരിധി	ക്ലാസ് മാർക്ക്
0-10	1	0	10	5
10-20	8	10	20	15
20-30	6	20	30	25
30-40	7	30	40	35
40-50	21	40	50	45
50-60	23	50	60	55
60-70	19	60	70	65
70-80	6	70	80	75
80-90	5	80	90	85
90-100	4	90	100	95



ചിത്രം 3.1 ദത്തങ്ങളുടെ ആവൃത്തിവിതരണത്തിന്റെ ഡയഗ്രരൂപത്തിലുള്ള അവതരണം.

ഒരു ആവൃത്തിവിതരണം തയ്യാറാക്കുന്നതെങ്ങനെ? (How to Prepare a Frequency Distribution)

അസംസ്കൃതദത്തങ്ങളിൽനിന്നും ആവൃത്തി വിതരണം തയാറാക്കുമ്പോൾ താഴെപ്പറയുന്ന 5 ചോദ്യങ്ങൾ അഭിസംബോധന ചെയ്യപ്പെടേണ്ടതുണ്ട്.

1. തുല്യമോ അല്ലാത്തതോ ആയ ക്ലാസ് ഇടവേളകളാണോ നമുക്ക് വേണ്ടത്?
2. എത്ര ക്ലാസുകൾ ഉണ്ടായിരിക്കണം?
3. ഓരോ ക്ലാസിന്റെയും വലുപ്പം എത്രയായിരിക്കണം?
4. ക്ലാസ്പരിധികൾ നിശ്ചയിക്കേണ്ടത് എങ്ങനെയാണ്?
5. ഓരോ ക്ലാസിന്റെയും ആവൃത്തി കണക്കാക്കേണ്ടത് എങ്ങനെയാണ്?

തുല്യമോ അല്ലാത്തതോ ആയ ക്ലാസ് ഇടവേളകൾ ആണോ നമുക്ക് വേണ്ടത്?

രണ്ട് സാഹചര്യങ്ങളിലാണ് തുല്യമല്ലാത്ത ക്ലാസ് പരിധികൾ ഉപയോഗിക്കാറുള്ളത്. ഒന്നാമതായി, നമുക്ക് കൈകാര്യം ചെയ്യാൻ കിട്ടുന്നത് വരുമാന (Income) ത്തെപ്പോലെ റേഞ്ച് (Range) വളരെ കൂടിയ ചരങ്ങൾ ആവുമ്പോൾ, (ഉദാഹരണം, ദിവസ വരുമാനം) ദിവസ വരുമാനം പൂജ്യത്തിൽ (രൂപയിൽ) തുടങ്ങി അനേകം ശതകോടികളിലേക്ക് വ്യാപിക്കാൻ സാധ്യതയുണ്ട്. ഇത്തരം സാഹചര്യത്തിൽ തുല്യമായ ക്ലാസ് അന്തരം അനുയോജ്യമല്ല. കാരണം, ഒന്നാമതായി ക്ലാസ് അന്തരം ശരാശരി വലുപ്പത്തിലും തുല്യവുമായാൽ വളരെ കൂടുതൽ ക്ലാസ്സുകൾ ഉണ്ടാവാൻ സാധ്യതയുണ്ട്. ക്ലാസ് അന്തരം വളരെ വലുതായാൽ, ഉയർന്ന വരുമാനക്കാരുടെ, അല്ലെങ്കിൽ താഴ്ന്ന വരുമാനക്കാരുടെ വരുമാനം സംബന്ധിച്ച ശരിയായ വിവരങ്ങൾ ലഭ്യമാവുകയില്ല.

രണ്ടാമതായി, ഒരുപാട് നിരീക്ഷണങ്ങൾ റേഞ്ചിന്റെ താഴ്ന്ന പരിധിയിൽ കേന്ദ്രീകരിക്കപ്പെട്ടാൽ, തുല്യ ക്ലാസ് ഇടവേള പലപ്പോഴും മൂല്യങ്ങളുടെ വിവരനഷ്ടത്തിലേക്ക് നയിക്കുന്നു. മറ്റ് സന്ദർഭങ്ങളിലെല്ലാം, ആവൃത്തി വിതരണത്തിന് തുല്യ ക്ലാസ് പരിധികൾ ഉപയോഗിക്കാവുന്നതാണ്.

എത്ര ക്ലാസുകൾ വരെയാകാം? (How Many Classes Should We Have?)

സാധാരണയായി ക്ലാസ്സുകളുടെ എണ്ണം 6 മുതൽ 15 വരെയാണ്. തുല്യ ക്ലാസ് പരിധിയാണ് പരിഗണിക്കുന്നതെങ്കിൽ, ക്ലാസുകളുടെ എണ്ണം കണ്ടെത്തുന്നതിന് റേഞ്ചിനെ (ചരങ്ങളുടെ ഏറ്റവും വലിയ മൂല്യവും ഏറ്റവും ചെറിയ മൂല്യവും തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസമാണ് റേഞ്ച്) ക്ലാസ് ഇടവേള കൊണ്ട് ഹരിച്ചാൽ മതിയാകും.

പ്രവർത്തനം

- താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്നവയുടെ റേഞ്ച് കണക്കാക്കുക. ഉദാഹരണം 1-ൽ കൊടുത്ത ഇന്ത്യയിലെ ജനസംഖ്യ. ഉദാഹരണം 2 ൽ കൊടുത്ത ഗോതമ്പിന്റെ വിളവ്

ഓരോ ക്ലാസിന്റെയും വലുപ്പം എന്തായിരിക്കണം? (What Should be the Size of Each Class?)

ഈ ചോദ്യത്തിനുള്ള ഉത്തരം ഇതിന്റെ മുൻപത്തെ ചോദ്യമായ 'എത്ര ക്ലാസ് വരെയാവാം' എന്നതിനെ ആശ്രയിച്ചിരിക്കുന്നു. ചരങ്ങളുടെ റേഞ്ച് കണ്ടെത്തിക്കഴിഞ്ഞാൽ ക്ലാസ് ഇടവേള തീരുമാനിക്കുന്നതിലൂടെ ക്ലാസിന്റെ എണ്ണം നിർണയിക്കാൻ കഴിയും. അതുപോലെതന്നെ ക്ലാസിന്റെ എണ്ണം നിർണയിച്ചു കഴിഞ്ഞാൽ ക്ലാസ് ഇടവേള തീരുമാനിക്കാൻ സാധിക്കും. അതിനാൽ മേൽപറഞ്ഞ രണ്ടു തീരുമാനങ്ങളും പരസ്പരം ബന്ധപ്പെട്ടതാണ്. ഏതെങ്കിലും ഒന്നു തീരുമാനിക്കാതെ അടുത്തത് തീരുമാനിക്കാൻ കഴിയില്ല.

ഉദാഹരണം 4-ൽ ക്ലാസുകളുടെ എണ്ണം 10 ആണ്. റേഞ്ചിന്റെ മൂല്യം 100 എന്ന് നൽകിയിരിക്കുന്നതിനാൽ ക്ലാസ് ഇടവേള 10 ആയിരിക്കും. നിലവിൽ നമ്മൾ തെരഞ്ഞെടുത്തത് ഒരേ വ്യാപ്തിയുള്ള ക്ലാസ് ഇടവേളകളാണ്. എന്നാൽ തുല്യമല്ലാത്ത ക്ലാസ് ഇടവേളകളും നമുക്ക് തെരഞ്ഞെടുക്കാമായിരുന്നു. അത്തരം സന്ദർഭങ്ങളിൽ ക്ലാസുകൾ തുല്യവീതിയുള്ളവയായിരിക്കില്ല.

ക്ലാസ് പരിധി നിർണ്ണയിക്കേണ്ടതെങ്ങനെ? (How Should We Determine the Class Limits?)

ക്ലാസ് പരിധി വ്യക്തമായി നിർവചിക്കപ്പെട്ടിരിക്കണം. തുറന്ന ക്ലാസ് പരിധികൾ ഉപയോഗിക്കുന്നത് പരമാവധി ഒഴിവാക്കാൻ ശ്രദ്ധിക്കേണ്ടതാണ്. ഉദാഹരണം '70 ന് മുകളിൽ', '10ൽ താഴെ' തുടങ്ങിയവ.

ഉയർന്ന ക്ലാസ് പരിധിയും താഴ്ന്ന ക്ലാസ് പരിധിയും നിർണയിക്കുന്നത് കൂടുതൽ നിരീക്ഷണങ്ങളും ഓരോ ക്ലാസിന്റേയും മധ്യബിന്ദുവിനോട് കേന്ദ്രീകരിക്കുന്ന രീതിയിലാവണം. ക്ലാസ് ഇടവേള 2 തരത്തിലുണ്ട്.

(i) ഉൾച്ചേർക്കൽ രീതിയിലുള്ള ക്ലാസ് ഇടവേളകൾ (Inclusive Class Intervals)

ഈ രീതിയിൽ ഉയർന്ന ക്ലാസ് പരിധിക്കും താഴ്ന്ന ക്ലാസ് പരിധിക്കും തുല്യമായി വരുന്ന നിരീക്ഷണങ്ങളെ അതേ ക്ലാസ്സിന്റെ ആവൃത്തിയായി ഉൾപ്പെടുത്തും.

(ii) ഒഴിവാക്കൽ രീതിയിലുള്ള ക്ലാസ് ഇടവേളകൾ (Exclusive Class Interval)

ഈ രീതിയിൽ ഉയർന്ന ക്ലാസ് പരിധിക്ക് തുല്യമായി വരുന്നതോ താഴ്ന്ന ക്ലാസ് പരിധിക്ക് തുല്യമായി വരുന്നതോ (ഏതെങ്കിലും ഒന്ന്) ആയ നിരീക്ഷണങ്ങളെ ആ ക്ലാസിന്റെ ആവൃത്തിയിൽ നിന്ന് ഒഴിവാക്കുന്നു.

അസന്തതചരങ്ങളുടെ കാര്യത്തിൽ ക്ലാസ് ഇടവേളകൾ കണക്കാക്കാൻ രണ്ടു രീതികളും (ഉൾച്ചേർക്കൽ രീതിയും, ഒഴിവാക്കൽ രീതിയും) ഉപയോഗിക്കാവുന്നതാണ്.

സന്തതചരങ്ങളുടെ കാര്യത്തിൽ ഉൾചേർക്കൽ രീതിയാണ് സാധാരണ ഉപയോഗിക്കുക.

ഉദാഹരണം

നമുക്ക് നൽകിയിട്ടുള്ള ദത്തങ്ങൾ കുട്ടികളുടെ മാർക്കുകളാണെന്ന് കരുതുക (പൂർണസംഖ്യാ രൂപത്തിലുള്ളവ). കുട്ടികളുടെ മാർക്കുകൾ 0 മുതൽ 100 വരെയുള്ളവയാണെന്നിരിക്കട്ടെ.

ദശാംശ രൂപത്തിലുള്ള മാർക്കുകൾ അനുവദിക്കാത്തതിനാൽ ഇത് അസന്തത ചരങ്ങളാണ്. ഇവിടെ നമ്മൾ തുല്യ ക്ലാസ് പരിധിയായിട്ടുള്ള ക്ലാസ്സുകൾ ആണ് ഉപയോഗിക്കുന്നത്. 10 ആണ് ക്ലാസ്സ് ഇടവേളയായി തീരുമാനിക്കുന്നത്. അങ്ങനെയെങ്കിൽ ക്ലാസ് ഇടവേള താഴെ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന പ്രകാരം എടുക്കാവുന്നതാണ്.

ഉൾച്ചേർക്കൽ രീതിയിലുള്ള ക്ലാസ് ഇടവേള

0 - 10
11 - 20
21 - 30
....
91 - 100

ഒഴിവാക്കൽ രീതിയിലുള്ള ക്ലാസ് ഇടവേള

0 - 10
10 - 20
20 -30
....
90 - 100

ഒഴിവാക്കൽ രീതിയിലുള്ള ക്ലാസ് ഇടവേളയാണ് സ്വീകരിക്കുന്നത് എങ്കിൽ, ക്ലാസ് ഇടവേള തുല്യമായി വരുന്ന നിരീക്ഷണങ്ങൾ എവിടെ ഉൾക്കൊള്ളിക്കണമെന്നത് കൃത്യമായി തീരുമാനിച്ചിരിക്കണം. ഉദാഹരണത്തിന്, മാർക്കുകളായി വരുന്ന 10, 30 തുടങ്ങിയ നിരീക്ഷണങ്ങളെ യഥാക്രമം '0-10', '20-30' എന്നീ ക്ലാസുകളിലാണ് ചേർക്കാൻ തീരുമാനിക്കുന്നതെങ്കിൽ ഇതിനെ പറയുന്നത് താഴ്ന്ന പരിധി ഒഴിവാക്കുന്ന (lower limit excluded) രീതി എന്നാണ്.

മറിച്ച്, ഈ നിരീക്ഷണങ്ങൾ 10 – 20, 30 – 40 എന്നീ ക്ലാസുകളിൽ ആണ് യഥാക്രമം ഉൾപ്പെടുത്തുന്നതെങ്കിൽ അതിനെ ഉയർന്ന പരിധി ഒഴിവാക്കുന്ന രീതി എന്നാണ് പറയുന്നത്.

സന്തതചരങ്ങളുടെ ഉദാഹരണം
(Example of Continuous Variable))

നമുക്ക് നൽകിയിട്ടുള്ള ചരങ്ങൾ ഉയരം (സെ.മീ.) അല്ലെങ്കിൽ ഭാരം (കിലോഗ്രാം) ആണെന്നിരിക്കട്ടെ. ഇത്തരം ദത്തങ്ങൾ സന്തതചരങ്ങളാണ്. ചുവടെ കൊടുത്തിട്ടുള്ള രീതിയിൽ ക്ലാസ് ഇടവേള നിർവചിക്കാവുന്നതാണ്.

30 കി.ഗ്രാം - 39.999 കി.ഗ്രാം

40 കി.ഗ്രാം - 49.999 കി.ഗ്രാം

50 കി.ഗ്രാം - 59.999 കി.ഗ്രാം എന്നിങ്ങനെ

ഈ ക്ലാസ് പരിധികളെ ചുവടെ കൊടുത്തിട്ടുള്ള രീതിയിൽ മനസ്സിലാക്കാവുന്നതാണ്.

30 കി.ഗ്രാമോ അതിൽ കൂടുതലോ എന്നാൽ 40 കി.ഗ്രാമിൽ താഴെ.

40 കി.ഗ്രാമോ അതിൽ കൂടുതലോ എന്നാൽ 50 കി.ഗ്രാമിൽ താഴെ.

50 കി.ഗ്രാമോ അതിൽ കൂടുതലോ എന്നാൽ 60 കി.ഗ്രാമിൽ താഴെ.

പട്ടിക 3.4
ഒരു കമ്പനിയിലെ 550 തൊഴിലാളികളുടെ വരുമാനത്തിന്റെ ആവൃത്തിവിതരണം

വരുമാനം (രൂപയിൽ)	തൊഴിലാളികളുടെ എണ്ണം
800-899	50
900-999	100
1000-1099	200
1100-1199	150
1200-1299	40
1300-1399	10
ആകെ	550

ക്ലാസ് ഇടവേളകളിലെ ക്രമീകരണം (Adjustment in Class Intervel)

പട്ടിക 3.4-ലെ ഉൾച്ചേർക്കൽ രീതി സസൂക്ഷ്മം വീക്ഷിച്ചാൽ വരുമാനം എന്നത് ഒരു സന്തതചരമാണെങ്കിലും ദത്തങ്ങളെ ക്ലാസുകളാക്കി മാറ്റിയപ്പോൾ തുടർച്ച നിലനിൽക്കുന്നതായി കാണുന്നില്ല എന്ന് മനസിലാക്കാം. ഒരു ക്ലാസിന്റെ ഉയർന്ന പരിധിയും തൊട്ടടുത്ത ക്ലാസിന്റെ താഴ്ന്ന പരിധിയും തമ്മിൽ ഒരു വിടവ് അനുഭവപ്പെടുന്നു. ഉദാഹരണത്തിന്, ഒന്നാമത്തെ ക്ലാസിന്റെ ഉയർന്ന പരിധിയായ 899 നും രണ്ടാമത്തെ ക്ലാസിന്റെ താഴ്ന്ന പരിധിയായ 900 ത്തിനും ഇടയിൽ 1-ന്റെ വിടവ് അനുഭവപ്പെടുന്നു. പിന്നെ എങ്ങനെയാണ് ദത്തങ്ങളെ വർഗീകരിക്കുമ്പോൾ തുടർച്ച നിലനിർത്തുക? ഇത് നിലനിർത്തുന്നത് ക്ലാസ് ഇടവേളകളിൽ ഒരു ക്രമീകരണം നടത്തിയാണ്. പ്രസ്തുത ക്രമീകരണം താഴെ പറയുന്ന രീതിയിലാണ്.

1. രണ്ടാമത്തെ ക്ലാസിന്റെ താഴ്ന്ന പരിധിയും ഒന്നാമത്തെ ക്ലാസിന്റെ ഉയർന്ന പരിധിയും തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസം കാണുക. ഉദാഹരണത്തിന് പട്ടിക 3.4 -ൽ രണ്ടാമത്തെ ക്ലാസിന്റെ താഴ്ന്ന പരിധി 900 ഉം ഒന്നാമത്തെ ക്ലാസിന്റെ ഉയർന്ന പരിധി 899 ഉം ആണ്. ഇവ തമ്മിലുള്ള വ്യത്യാസം 1 ആണ് അതായത് (900 – 899 =1)
2. ഇപ്രകാരം കിട്ടിയ വ്യത്യാസത്തെ രണ്ടു കൊണ്ട് ഹരിക്കുക.
അതായത് $\frac{1}{2}=0.5$
3. ഇങ്ങനെ ഘട്ടം 2 ൽ കിട്ടിയ മൂല്യം എല്ലാ ക്ലാസുകളുടെയും താഴ്ന്നപരിധിയിൽ നിന്നും കുറക്കുക. (താഴ്ന്ന ക്ലാസ്പരിധി – 0.5)
4. ഘട്ടം 2 ൽ കിട്ടിയ മൂല്യം എല്ലാ ക്ലാസുകളുടെയും ഉയർന്ന പരിധിയോട് കൂട്ടുക (ഉയർന്ന ക്ലാസ്പരിധി + 0.5)

ഇപ്രകാരം, ക്രമീകരണത്തിലൂടെ തുടർച്ച ഉപ്പുവരുത്തിയ ആവൃത്തിവിതരണത്തിലെ ദത്തങ്ങൾ പട്ടിക 3.5-ൽ കൊടുത്തിരിക്കുന്നതു പോലെ മാറ്റി എഴുതാവുന്നതാണ്.

ക്രമീകരിച്ച ക്ലാസ്മാർക്ക് = (ക്രമീകരിച്ച ഉയർന്ന ക്ലാസ്പരിധി + ക്രമീകരിച്ച താഴ്ന്ന ക്ലാസ്പരിധി)/2

പട്ടിക 3.5
ഒരു കമ്പനിയിലെ 550 തൊഴിലാളികളുടെ വരുമാനത്തിന്റെ ആവൃത്തിവിതരണം

വരുമാനം (രൂപയിൽ)	തൊഴിലാളികളുടെ എണ്ണം
799.5-899.5	50
899.5-999.5	100
999.5-1099.5	200
1099.5-1199.5	150
1199.5-1299.5	40
1299.5-1399.5	10
ആകെ	550

ഓരോ ക്ലാസിന്റെയും ആവൃത്തി ലഭിക്കുന്നതെങ്ങനെ? (How Should We get the Frequency for Each Class?)

ഒരു നിരീക്ഷണത്തിന്റെ ആവൃത്തി (frequency) എന്നത്, ലളിതമായി പറഞ്ഞാൽ എത്ര പ്രാവശ്യം ആ നിരീക്ഷണം അസംസ്കൃതദത്തങ്ങളിൽ വരുന്നു എന്നതാണ്. പട്ടിക 3.1–ൽ 40 എന്ന മൂല്യം 3 പ്രാവശ്യം ആവർത്തിക്കുന്നു. 0, 10 എന്നിവ ഒരിക്കൽ മാത്രം വരുന്നു. അതുപോലെ 49 എന്നത് 5 പ്രാവശ്യം ആവർത്തിക്കുന്നു. അതുകൊണ്ട് 40– ന്റെ ആവൃത്തി 3 ഉം, 0, 10 എന്നിവയുടെ ആവൃത്തി 1 ഉം, 49 ന്റെ ആവൃത്തി 5 ഉം ആണ്. എന്നാൽ ഉദാഹരണം 4–ൽ കാണിച്ചതുപോലെ ദത്തങ്ങളെ ക്ലാസുകളുടെ ഗ്രൂപ്പുകളാക്കി മാറ്റുമ്പോൾ ഓരോ ക്ലാസിന്റെയും ആവൃത്തി എന്നത് ആ ക്ലാസിൽ ഉൾപ്പെടുന്ന നിരീക്ഷണങ്ങളുടെ എണ്ണമാണ്.ഒരു ക്ലാസിന്റെ ആവൃത്തി എണ്ണുന്നത്, ആ ക്ലാസിന് നേരെ ടാലി അടയാളങ്ങൾ രേഖപ്പെടുത്തികൊണ്ടാണ്.

ടാലി അടയാളം ഉപയോഗിച്ച് ക്ലാസ് ആവൃത്തി കാണുന്ന വിധം (Finding Class Frequency by Tally Marking)

ഓരോ വിദ്യാർഥിയുടെയും മാർക്ക് ഉൾപ്പെട്ട ക്ലാസിന് നേരെ ടാലി അടയാളം (/) ഇടുന്നു. ഉദാഹരണത്തിന്, ഒരു വിദ്യാർഥിക്ക് ലഭിച്ച മാർക്ക് 57 ആണെങ്കിൽ ടാലി അടയാളം (/) ഇടുന്നത് 50–60 എന്ന ക്ലാസിന് നേരെയാണ്. 71 എന്ന മാർക്കാണ് ലഭിച്ചതെങ്കിൽ ടാലി ഇടുന്നത് 70–80 എന്ന ക്ലാസിന് നേരെയാണ്. അതുപോലെ ഒരാൾക്ക് ലഭിച്ച മാർക്ക് 40 ആണെങ്കിൽ 40–50 എന്ന ക്ലാസിന് നേരെയാണ് ടാലി അടയാളപ്പെടുത്തുന്നത്. 100 വിദ്യാർഥികൾക്ക് ഗണിതശാസ്ത്രത്തിന് ലഭിച്ച മാർക്കിന്റെ (പട്ടിക 3.1) ടാലി അടയാളപ്പെടുത്തിയത് പട്ടിക 3.6 കാണിക്കുന്നു.

പട്ടിക 3.6

100 വിദ്യാർത്ഥികൾക്ക് ഗണിതത്തിന് ലഭിച്ച മാർക്കിന്റെ ടാലി അടയാളപ്പെടുത്തൽ

ക്ലാസ്	നിരീക്ഷണങ്ങൾ	ടാലി മാർക്ക്	ആവൃത്തി	ക്ലാസ്മാർക്ക്
0–10	0	/	1	5
10 20	10, 14, 17, 12, 14, 12, 14, 14	//// ////	8	15
20 30	25, 25, 20, 22, 25, 28	~~////~~ /	6	25
30–40	30. 37. 34. 39, 32. 30. 35.	~~////~~ //	7	35
40–50	47. 42. 49, 49, 45, 45, 47. 44. 40. 44. 49, 46, 41, 40, 43, 48, 48, 49, 49, 40, 41	~~////~~ //// //// ~~////~~ ⟍ ⟍ ⟍	21	45
50–60	59. 51. 53, 56, 55, 57, 55. 51. 50. 56. 59. 56. 59, 57, 59, 55, 56. 51. 55. 56. 55, 50, 54	//// //// //// ~~////~~ ~~////~~ ⟍ ⟍	23	55
60 70	60, 64, 62, 66, 69, 64, 64, 60, 66, 69, 62. 61, 66, 60. 65, 62. 65, 66, 65	//// //// //// ~~////~~ ⟍ ⟍	19	65
70–80	70. 75, 70, 76, 70, 71	/////	6	75
80 90	82, 82, 82, 80, 85	~~////~~	5	85
90 100	90, 100, 90, 90	~~////~~	4	95
	ആകെ		100	

നാല് ടാലിമാർക്കുകൾ //// എന്ന രീതിയിൽ ഒരുമിച്ച് ഇടുകയും അഞ്ചാമത്തെ ടാലി മാർക്ക് അവയെ മുകളിലെ ഇടതുമൂലയിൽ നിന്ന് താഴേക്ക് ഛേദിക്കുന്ന രീതിയിൽ ~~////~~ ഇടുകയുമാണെങ്കിൽ ടാലി എണ്ണുന്നത് എളുപ്പമായിരിക്കും. തുടർന്ന് ടാലികൾ 5-ന്റെ ഗ്രൂപ്പുകളായി എണ്ണുന്നു. ഒരു ക്ലാസിൽ 16 ടാലി രേഖപ്പെടുത്താനുണ്ടെങ്കിൽ സൗകര്യത്തിനായി നമുക്ക് അവയെ ~~////~~ ~~////~~ ~~////~~ / എന്ന് രേഖപ്പെടുത്താം. ഒരു ക്ലാസിന്റെ ആവൃത്തി അതിന് നേരെ അടയാളപ്പെടുത്തിയ ടാലികളുടെ എണ്ണത്തിന് തുല്യമായിരിക്കും.

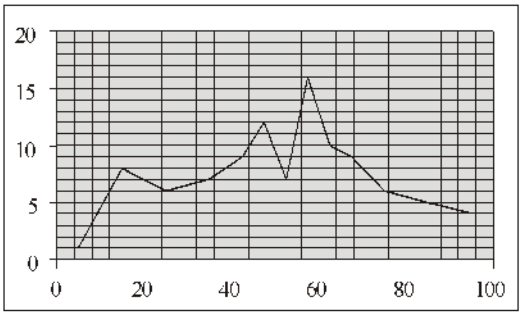
വിവരനഷ്ടം (Loss of Information)

ആവൃത്തിവിതരണമായി ദത്തങ്ങളെ വർഗീകരിക്കുമ്പോൾ അതിൽ തന്നെ പോരായ്മ ഉണ്ട്. ഇത് ദത്തങ്ങളെ സംക്ഷിപ്തവും മനസ്സിലാക്കാൻ കഴിയുന്നതുമാക്കി ചുരുക്കുമെങ്കിലും അസംസ്കൃതദത്തങ്ങളുടെ വിശദാംശങ്ങൾ കാണിക്കുന്നില്ല. ആയതിനാൽ, ദത്തങ്ങൾ ചുരുക്കി വർഗീകരിക്കുമ്പോൾ ഒരുപാട് നേട്ടമുണ്ടെങ്കിലും വിവരങ്ങൾ നഷ്ടപ്പെടുന്നുണ്ട്. ഒരിക്കൽ ദത്തങ്ങൾ ക്ലാസുകളാക്കി കഴിഞ്ഞാൽ തുടർന്നുള്ള സാംഖ്യക കണക്കുകൂട്ടലുകളിൽ വ്യക്തിഗത നിരീക്ഷണങ്ങൾക്ക് യാതൊരു പ്രസക്തിയുമില്ല. ഉദാഹരണം 4-ൽ 20-30 എന്ന ക്ലാസിൽ 25, 25, 20, 22, 25, 28 എന്നിങ്ങനെ 6 നിരീക്ഷണങ്ങൾ ഉണ്ട്. എന്നാൽ ദത്തങ്ങളെ ആവൃത്തിപട്ടികയാക്കി വർഗ്ഗീകരിക്കുമ്പോൾ അതിൽ ഒരു പോരായ്മ അന്തർലീനമായുണ്ട്. 20-30 എന്ന ക്ലാസാക്കി കഴിയുമ്പോൾ ആവൃത്തി നൽകുന്നത് അവയുടെ യഥാർഥമൂല്യമല്ല മറിച്ച് ആ ക്ലാസിൽ എത്ര രേഖപ്പെടുത്തലുകൾ ഉണ്ട് എന്ന് മാത്രമാണ് (അതായത് ആവൃത്തി=6). ഈ ക്ലാസിലെ എല്ലാ മൂല്യങ്ങളും ക്ലാസ്മാർക്കിന് /മധ്യബിന്ദുവിന് തുല്യമാണെന്ന് (25) സങ്കല്പിക്കപ്പെടുന്നു. തുടർന്നുള്ള സാംഖ്യക കണക്കുകൂട്ടലുകളെല്ലാം തന്നെ ക്ലാസ് മാർക്കിന്റെ മധ്യബിന്ദുവിന്റെ മൂല്യത്തെ മാത്രം അടിസ്ഥാനപ്പെടുത്തിയതാണ് അല്ലാതെ ആ ക്ലാസിലെ നിരീക്ഷണങ്ങളുടെ മൂല്യത്തെ അടിസ്ഥാനപ്പെടുത്തിയുള്ളതല്ല. എല്ലാ ക്ലാസിനും ഇത് പ്രസക്തമാണ്. ആയതിനാൽ നിരീക്ഷണങ്ങളുടെ ശരിയായ മൂല്യത്തിനുപകരം സാംഖ്യക രീതിയിൽ ക്ലാസ് മാർക്ക് ഉപയോഗിക്കുന്നത് കാര്യമായ വിവരനഷ്ടത്തിന് കാരണമാവുന്നു. എന്നിരുന്നാലും, ഈ രീതിയിൽ ദത്തങ്ങളെ കൂടുതൽ മികച്ച രീതിയിൽ ഉപയോഗിക്കാൻ കഴിയുന്നുവെന്നത് ശ്രദ്ധേയമാണ്.

തുല്യമല്ലാത്ത ക്ലാസുകളുടെ ആവൃത്തി വിതരണം (Frequency Distribution With Unequal Classes)

ഓരേ ഇടവേളകളുള്ള ക്ലാസുകളുടെ ആവൃത്തിവിതരണം നമുക്ക് പരിചിതമായല്ലോ. അസംസ്കൃതദത്തങ്ങളിൽ നിന്നും അവ എങ്ങനെ നിർമിക്കാമെന്ന് ഇപ്പോൾ നിങ്ങൾക്കറിയാം. പക്ഷേ, ചില സന്ദർഭങ്ങളിൽ ഒരേ ഇടവേളകളല്ലാത്ത ക്ലാസുകളുടെ ആവൃത്തി വിതരണമായിരിക്കും കൂടുതൽ അനുയോജ്യം. ഉദാഹരണം 4-ലെ പട്ടിക ശ്രദ്ധിക്കുക. പട്ടിക 3.6-ലെ ആവൃത്തിവിതരണം പരിശോധിക്കുകയാണെങ്കിൽ ഭൂരിപക്ഷം നിരീക്ഷണങ്ങളും 40-50, 50-60, 60-70 എന്നീ ക്ലാസുകളിൽ കേന്ദ്രീകരിക്കപ്പെട്ടിരി

ക്കുന്നതായി കാണാൻ കഴിയും. അവയുടെ ആവൃത്തി യഥാക്രമം 21, 23, 19 എന്നിങ്ങനെയാണ്. അതായത് 100 കുട്ടികളിൽ 63 കുട്ടികളും മൂന്ന് ക്ലാസുകളിൽ കേന്ദ്രീകരിക്കപ്പെട്ടിരിക്കുന്നു (21 + 23+19). നിരീക്ഷണങ്ങളുടെ സാന്ദ്രത ഇവിടെ കൂടുതലാണ് എന്നർഥം. ബാക്കി വരുന്ന 37 ശതമാനം ദത്തങ്ങളും 0–10, 10–20, 20–30, 30–40, 70–80, 80–90, 90–100 എന്നിങ്ങനെയുള്ള ക്ലാസുകളിലാണ്. ഈ ക്ലാസുകളിൽ ദത്തങ്ങളുടെ സാന്ദ്രത കുറവാണ്. അതുമാത്രമല്ല, ഈ ക്ലാസുകളിലെ നിരീക്ഷണങ്ങൾ മറ്റു ക്ലാസുകളുമായി താരതമ്യം ചെയ്യുമ്പോൾ, അവയുടെ ക്ലാസ് മാർക്കുകളിൽ നിന്നും കൂടുതൽ അകന്നു കിടക്കുന്നതായി കാണുന്നു. എന്നാൽ നിരീക്ഷണങ്ങൾ മധ്യബിന്ദുവിനോട്/ ക്ലാസ് മാർക്കിനോട് കൂടുതൽ അടുത്തു കേന്ദ്രീകരിക്കുന്നതരത്തിൽ, ക്ലാസുകളെ നിർമ്മിക്കണമെങ്കിൽ തുല്യമല്ലാത്ത ക്ലാസ് ഇടവേളകളാവും അനുയോജ്യം.



ചിത്രം 3.2 ആവൃത്തി വക്രം

പട്ടിക 3.7

അസന്തത ക്ലാസുകളുടെ ആവൃത്തി വിതരണം

ക്ലാസ്	നിരീക്ഷണങ്ങൾ	ആവൃത്തി	ക്ലാസ് മാർക്ക്
0–10	0	1	5
10–20	10. 14. 17, 12, 14, 12, 14. 14	8	15
20 30	25, 25, 20, 22, 25, 28	6	25
30 40	30, 37, 34, 39, 32, 30, 35,	7	35
40 45	42, 44, 40, 44, 41, 40, 43, 40, 41	9	42.5
45 50	47, 49, 49, 45, 45, 47, 49, 46, 48, 48, 49, 49	12	47.5
50–55	51. 53, 51. 50, 51. 50, 54	7	52.5
55–60	59. 56. 55, 57, 55. 56, 59. 56. 59, 57. 59, 55, 56. 55, 56, 55	16	57.5
60–65	60. 64. 62, 64, 64, 60, 62. 61. 60. 62.	10	62.5
65 70	66, 69, 66, 69, 66, 65, 65, 66, 65	9	67.5
70 80	70, 75, 70, 76, 70, 71	6	75
80 90	82, 82, 82, 80, 85	5	85
90 100	90, 100, 90, 90	4	95
	ആകെ	100	

പട്ടിക 3.7 ൽ പട്ടിക 3.6-ലെ അതേ ആവൃത്തിവിതരണം തുല്യമല്ലാത്ത ക്ലാസുകളിൽ നൽകിയിരിക്കുന്നതാണ്. 40–50, 50–60, 60–70 എന്നീ ക്ലാസുകൾ വീണ്ടും രണ്ടായി വിഭജിച്ചിരിക്കുന്നു. 40–50 എന്ന ക്ലാസ് 40–45, 45–50 എന്നിങ്ങനെ വിഭജിച്ചിരിക്കുന്നു. 50–60 എന്ന ക്ലാസ് 50–55, 55–60 എന്നിങ്ങനെ രണ്ടായി വിഭജിച്ചിരിക്കുന്നു. 60–70 എന്ന ക്ലാസ് 60–65, 65–70 എന്നും 0–10, 10–20, 20–30, 30–40, 70–80, 80– 90, 90–100 എന്നീ ക്ലാസുകളിൽ ക്ലാസ് ഇടവേളയായി 10 നിലനിർത്തിയിരിക്കുന്നു. ഈ ക്ലാസുകളിലെ പുതിയ ക്ലാസ്മാർക്കുകളുടെ മൂല്യമാണ് പട്ടികയിലെ അവസാന കോളം കാണിക്കുന്നത്. ഇവയെ പട്ടിക 3.6-ലെ പഴയ ക്ലാസ് മാർക്കുകളുടെ മൂല്യവുമായി താരതമ്യം ചെയ്തു നോക്കു. ഈ ക്ലാസിലെ നിരീക്ഷണങ്ങൾ അവയുടെ പഴയ ക്ലാസ്സ് മാർക്കുകളുടെ മൂല്യങ്ങളെക്കാൾ കൂടുതൽ വ്യതിചലിക്കുന്നതായി കാണാൻ കഴിയും. അതായത്, പുതിയ ക്ലാസ്മൂല്യങ്ങൾ പഴയ ക്ലാസ് മൂല്യങ്ങളെക്കാൾ ദത്തങ്ങളെ കൂടുതൽ പ്രതിനിധീകരിക്കുന്ന രീതിയിലായിരിക്കും.

പട്ടിക 3.7-ലെ ആവൃത്തിവിതരണത്തിന്റെ ആവൃത്തിവക്രമാണ് ചിത്രം 3.2-ൽ കൊടുത്തിരിക്കുന്നത്.

പ്രവർത്തനം

- ചിത്രം 3.2, 3.1 -മായി താരമ്യം ചെയ്യുമ്പോൾ നിങ്ങൾ നിരീക്ഷിക്കുന്നതെന്ത്? ഇവ രണ്ടും തമ്മിൽ എന്തെങ്കിലും വ്യത്യാസമുണ്ടോ? ഈ വ്യത്യാസം വിശദീകരിക്കാമോ?

ആവൃത്തി നിര (Frequency Array)

ഇതുവരെ നമ്മൾ ചർച്ച ചെയ്തത് 100 വിദ്യാർഥികൾക്ക് ലഭിച്ച ഗണിതശാസ്ത്രത്തിന്റെ മാർക്ക് എന്ന ഉദാഹരണത്തിലൂടെ ഒരു സന്തതചരത്തിന്റെ വർഗീകരണമാണ്. അസന്തതചരത്തിന്റെ ദത്തങ്ങളുടെ വർഗീകരണത്തിന് ആവൃത്തിനിര എന്നു പറയുന്നു. അസന്തതചരങ്ങളുടെ മൂല്യം പൂർണസംഖ്യകൾക്ക് ഇടയിലുള്ള ഭിന്നസംഖ്യ ആവാറില്ല. അതിനാൽത്തന്നെ ഇതിലെ ആവൃത്തികൾ പൂർണസംഖ്യകൾക്ക് നേരെ ആയിരിക്കും. പട്ടിക 3.8 ആവൃത്തിനിരയെ കാണിക്കുന്നു.

പട്ടിക 3.8
കുടുംബങ്ങളിലെ അംഗങ്ങളുടെ ആവൃത്തിനിര

അംഗങ്ങളുടെ എണ്ണം	കുടുംബങ്ങളുടെ എണ്ണം
1	5
2	15
3	25
4	35
5	10
6	5
7	3
8	2
ആകെ	100

കുടംബത്തിലെ അംഗങ്ങളുടെ എണ്ണം എന്നത് ഒരു സന്തതചരമാണ്. ആയതിനാൽ, പട്ടികയിൽ കാണിച്ചിരിക്കുന്നതുപോലെ ആവൃത്തിയുടെ മൂല്യം പൂർണസംഖ്യ ആയിരിക്കും.

6. ദ്വിചര ആവൃത്തി വിതരണം (Bivariate Frequency Distribution)

താഴെ തന്നിരിക്കുന്ന ഇംഗ്ലീഷ് വാചകം ശ്രദ്ധയോടെ വായിച്ച് ഓരോ വാക്കിലും ഉള്ള അക്ഷരങ്ങളുടെ എണ്ണം രേഖപ്പെടുത്തുക. വാക്കിലെ അക്ഷരങ്ങളുടെ എണ്ണം ഒരു ചരമായി എടുത്ത് ഈ ദത്തങ്ങൾക്ക് ഒരു ആവൃത്തി നിര തയാറാക്കുക.

"The quick brown fox jumps over the lazy dog."

സാധാരണയായി നമ്മൾ ഒരു സമസ്തത്തിൽ നിന്ന് സാമ്പിൾ എടുക്കുമ്പോൾ കൂടുതൽ തരത്തിലുള്ള വിവരങ്ങൾ ശേഖരിക്കാറുണ്ട്. ഉദാഹരണത്തിന്, കമ്പനികളുടെ കൂട്ടത്തിൽ നിന്ന് ഒരു പട്ടണത്തിലുള്ള 20 കമ്പനികൾ സാമ്പിളായി എടുക്കുന്നു എന്ന് കരുതുക. ആ കമ്പനികളുടെ വിവരശേഖരണത്തിന്റെ ഭാഗമായി വില്പനയും പരസ്യത്തിനുള്ള ചെലവും (Sales & Expenditure on advertisement) സംബന്ധിച്ച ശീർഷകത്തിൽ വിവരങ്ങൾ ശേഖരിക്കുന്നു എന്ന് കരുതുക. ഇവിടെ രണ്ട് ചരങ്ങളുള്ള ആവൃത്തി ആണ്. അതുകൊണ്ട് ഇത്തരം ദത്തങ്ങളെ അളക്കാൻ രണ്ടു ചരമുള്ള ആവൃത്തി വിതരണം ഉപയോഗിക്കുന്നു. രണ്ട് ചരങ്ങളുടെ ആവൃത്തി വിതരണം ദ്വിചര ആവൃത്തിവിതരണം എന്നറിയപ്പെടുന്നു.

പട്ടിക 3.9-ൽ 20 കമ്പനികളുടെ വിൽപന ചെലവ് (ലക്ഷം രൂപയിൽ), പരസ്യചെലവ് (ആയിരം രൂപയിൽ) എന്നീ രണ്ടു ചരങ്ങളുടെ ആവൃത്തി വിതരണം കാണിച്ചിരിക്കുന്നു. വിൽപന മൂല്യം വ്യത്യസ്ത കോളങ്ങളിലും (വരികളിലും) പരസ്യച്ചെലവിന്റെ മൂല്യങ്ങൾ വ്യത്യസ്ത നിരകളിലും ക്ലാസുകളാക്കിയിരിക്കുന്നു. ഓരോ സെല്ലും അതിന് നേരെയുള്ള വരിയുടെയും നിരയുടെയും ആവൃത്തിയെ കാണിക്കുന്നു. ഉദാഹരണത്തിന്, വില്പന മൂല്യം 135-145 ലക്ഷം രൂപക്കും പരസ്യച്ചെലവ് 64-66 ആയിരത്തിനും ഇടയിലുള്ള 3 ഉല്പാദകയൂണിറ്റ് ആണ് ഉള്ളത്. ദ്വിചരവിതരണത്തിന്റെ ഉപയോഗങ്ങൾ നമുക്ക് സഹബന്ധം എന്ന 8-ാം അധ്യായത്തിൽ ചർച്ച ചെയ്യാം.

പട്ടിക 3.9

20 കമ്പനികളുടെ (Firms) വിൽപനയുടെയും (ലക്ഷം രൂപയിൽ) പരസ്യച്ചെലവിന്റെയും (ആയിരം രൂപയിൽ) ദ്വിചര ആവൃത്തിവിതരണം

	115–125	125–135	135–145	145–155	155–165	165–175	Total
62–64	2	1					3
64–66	1		3				4
66–68	1	1	2	1			5
68 70		2		2			4
70 72		1	1		1	1	4
ആകെ	4	5	6	3	1	1	20

7. ഉപസംഹാരം

പ്രാഥമിക, ദ്വിതീയ ഉറവിടങ്ങളിൽ നിന്നും ശേഖരിക്കപ്പെട്ട ദത്തങ്ങൾ വർഗീകരിക്കപ്പെടാത്തവയാണ്. ഒരിക്കൽ ദത്തങ്ങൾ ശേഖരിച്ചു കഴിഞ്ഞാൽ അടുത്തപടി അവയെ തുടർന്നുള്ള സാംഖ്യക അപഗ്രഥത്തിനായി വർഗീകരിക്കുക എന്നുള്ളതാണ്. വർഗീകരണം ദത്തങ്ങൾക്ക് ഒരു ക്രമം നൽകുന്നു.

ആവൃത്തിവിതരണത്തിലൂടെ ദത്തങ്ങളെ വർഗീകരിക്കുന്നതെങ്ങനെയെന്ന് സമഗ്രമായി മനസിലാക്കാൻ ഈ അധ്യായം സഹായിക്കുന്നു. വർഗീകരണത്തിന്റെ മാർഗങ്ങൾ മനസിലാക്കിയാൽ സന്തത അസന്തതചരങ്ങൾക്ക് ആവൃത്തിവിതരണം നിർമിക്കൽ വളരെ എളുപ്പമാണ്.

സംഗ്രഹം

- അസംസ്കൃതദത്തങ്ങളെ ക്രമീകരിക്കാൻ വർഗീകരണത്തിന് കഴിയും.
- ചരത്തിന്റെ വ്യത്യസ്ത മൂല്യങ്ങൾ വ്യത്യസ്ത ക്ലാസുകളിൽ അതിന്റെ ക്ലാസ് ആവൃത്തികളോടു കൂടി വിതരണം ചെയ്യപ്പെട്ടിരിക്കുന്നതാണ് ആവൃത്തിവിതരണം.
- ഒഴിവാക്കൽ രീതിയിൽ ഉയർന്ന ക്ലാസ്പരിധി ഒഴിവാക്കുകയും താഴ്ന്ന ക്ലാസ് പരിധി ഉൾപ്പെടുത്തുകയും ചെയ്തു.
- ഉൾച്ചേർക്കൽ രീതി അനുസരിച്ച് ഉയർന്ന ക്ലാസ് പരിധിയും താഴ്ന്ന ക്ലാസ് പരിധിയും അതാത് ക്ലാസ്സുകളിൽ ഉൾപ്പെടുത്തപ്പെട്ടിരിക്കുന്നു.
- ആവൃത്തിവിതരണത്തിൽ തുടർന്നുള്ള സാംഖ്യകവിശകലനങ്ങൾക്ക് അടിസ്ഥാനം നിരീക്ഷണങ്ങളല്ല മറിച്ച് ക്ലാസ്മാർക്കിന്റെ മൂല്യമാണ്.
- ക്ലാസുകൾ രൂപീകരിക്കുന്നത് പരമാവധി സാധ്യമായ തരത്തിൽ നിരീക്ഷണങ്ങൾ കേന്ദ്രീകരിക്കപ്പെടുന്ന മൂല്യവുമായി ചേർന്നുപോവുന്ന രീതിയിൽ ആയിരിക്കണം.

അഭ്യാസങ്ങൾ

(1) താഴെക്കൊടുത്തിരിക്കുന്നവയിൽ ശരിയായത് ഏത്?

(i) ക്ലാസ് മധ്യബിന്ദു എന്നത് ഏതിന് സമമാണ്?

(a) ഉയർന്ന ക്ലാസ്പരിധിയുടെയും താഴ്ന്ന ക്ലാസ്പരിധിയുടെയും ശരാശരി.

(b) ഉയർന്ന ക്ലാസ്പരിധിയുടെയും താഴ്ന്ന ക്ലാസ്പരിധിയുടെയും ഗുണനഫലം.

(c) ഉയർന്ന ക്ലാസ്പരിധിയും താഴ്ന്ന ക്ലാസ്പരിധിയും തമ്മിലുള്ള അനുപാതം.

(d) ഇവയൊന്നുമല്ല.

(ii) രണ്ട് ചരങ്ങളുടെ ആവൃത്തിവിതരണം അറിയപ്പെടുന്നത്

(a) ഏകചര വിതരണം.

(b) ദ്വിചരവിതരണം.

(c) ബഹുചര വിതരണം.

(d) ഇവയൊന്നുമല്ല.

(iii) വർഗീകരിക്കപ്പെട്ട ദത്തങ്ങളിൽ സാംഖ്യകകണക്കൂട്ടലുകൾ അടിസ്ഥാനമാക്കുന്നത്?

(a) നിരീക്ഷണങ്ങളുടെ യഥാർഥ മൂല്യം

(b) ഉയർന്ന ക്ലാസ് പരിധികൾ.

(c) താഴ്ന്ന ക്ലാസ് പരിധികൾ.

(d) ക്ലാസ്മധ്യബിന്ദുക്കൾ.

(iv) റേഞ്ച് എന്നത്

(a) വലിയ നിരീക്ഷണത്തിൽ നിന്നും ചെറിയ നിരീക്ഷണത്തിലേക്കുള്ള വ്യത്യാസം.

(b) ചെറിയ നിരീക്ഷണത്തിൽ നിന്നും വലിയ നിരീക്ഷണത്തിലേക്കുള്ള വ്യത്യാസം.

(c) വലിയ നിരീക്ഷണത്തിന്റെയും ചെറിയ നിരീക്ഷണത്തിന്റെയും ശരാശരി.

(d) ചെറിയ നിരീക്ഷണവും വലിയ നിരീക്ഷണവും തമ്മിലുള്ള അനുപാതം.

2. വസ്തുക്കളെ വർഗീകരിക്കുന്നതുകൊണ്ട് എന്തെങ്കിലും മെച്ചമുണ്ടോ? നിങ്ങളുടെ നിത്യജീവിതത്തിലെ ഉദാഹരണം സഹിതം വിശദീകരിക്കുക.

3. ചരം എന്നാൽ എന്ത്? സന്തതചരങ്ങളും അസന്തതചരങ്ങളും തമ്മിൽ വേർതിരിച്ചറിയുക.

4. ദത്തങ്ങളുടെ വർഗീകരണത്തിന് ഉപയോഗിക്കപ്പെട്ടിരിക്കുന്ന ഒഴിവാക്കൽരീതിയും ഉൾച്ചേർക്കൽരീതിയും വിശദീകരിക്കുക.

5. പട്ടിക 3.2 –ൽ കൊടുത്തിരിക്കുന്ന 50 കുടുംബങ്ങളുടെ പ്രതിമാസ ഗാർഹിക ഭക്ഷണ ച്ചെലവുകൾ (രൂപയിൽ) ഉപയോഗിച്ച്

(i) പ്രതിമാസഗാർഹികഭക്ഷണച്ചെലവിന്റെ റേഞ്ച് കണക്കാക്കുക,

(ii) റേഞ്ചിനെ അനുയോജ്യ എണ്ണം ക്ലാസ് ഇടവേളകളായി തിരിച്ച് ചെലവിന്റെ ആവൃത്തിവിതരണം തയ്യാറാക്കുക.

(iii) താഴെ പറയുന്ന രീതിയിലുള്ള ഭക്ഷണച്ചെലവുകളുള്ള കുടുംബങ്ങളുടെ എണ്ണം കണക്കാക്കുക.

(a) 2,000 രൂപയിൽ കുറവുള്ള കുടുംബങ്ങൾ

(b) 3,000 രൂപയിൽ കൂടുതലുള്ള കുടുംബങ്ങൾ

(c) 1,500 നും 2,500 നും രൂപക്ക് ഇടയ്ക്കുള്ള കുടുംബങ്ങൾ

6. ഒരു പട്ടണത്തിലെ 45 കുടുംബങ്ങളിൽ അവർ ഉപയോഗിക്കുന്ന സെൽഫോണുകളെ കുറിച്ച് ഒരു സർവേ നടത്തി താഴെ രേഖപ്പെടുത്തിയിരിക്കുന്ന അവരുടെ മറുപടി അനുസരിച്ച് ഒരു ആവൃത്തിനിര തയ്യാറാക്കുക.

1	3	2	2	2	2	1	2	1	2	2	3	3	3	3
3	3	2	3	2	2	6	1	6	2	1	5	1	5	3
2	4	2	7	4	2	4	3	4	2	0	3	1	4	3

7. വർഗീകരിക്കപ്പെട്ട ദത്തങ്ങളിലെ വിവരനഷ്ടം എന്നതുകൊണ്ട് അർത്ഥമാക്കുന്നതെന്ത്?

8. വർഗീകരിക്കപ്പെട്ട ദത്തങ്ങൾ അസംസ്കൃത ദത്തങ്ങളെക്കാൾ മെച്ചപ്പെട്ടതാണെന്ന് നിങ്ങൾ കരുതുന്നുണ്ടോ? എന്തുകൊണ്ട്?

9. ഏകചര ആവൃത്തിവിതരണം, ദ്വിചര ആവൃത്തിവിതരണം എന്നിവ വേർതിരിച്ചറിയുക.

10. താഴെക്കൊടുത്തിരിക്കുന്ന ദത്തങ്ങളിൽ നിന്നും ക്ലാസ് ഇടവേള 7 ആയി എടുത്ത് ഉൾച്ചേർക്കൽ രീതിയിൽ ഒരു ആവൃത്തി വിതരണം തയ്യാറാക്കുക.

28	17	15	22	29	21	23	27	18	12	7	2	9	4
1	8	3	10	5	20	16	12	8	4	33	27	21	15
3	36	27	18	9	2	4	6	32	31	29	18	14	13
15	11	9	7	1	5	37	32	28	26	24	20	19	25
19	20	6	9										

നിർദ്ദേശിക്കപ്പെട്ട അധികപ്രവർത്തനം

- നിങ്ങളുടെ പഴയ മാർക്ക് ഷീറ്റുകളിൽ നിന്നും മുൻക്ലാസുകളിൽ ഗണിതത്തിന് ലഭിച്ച മാർക്ക് കണ്ടെത്തുക. വർഷാടിസ്ഥാനത്തിൽ അവയെ ക്രമീകരിക്കുക. ആ വിഷയത്തിൽ നിങ്ങൾ കരസ്ഥമാക്കിയ മാർക്ക് ചരമാണോ അല്ലയോ എന്ന് പരിശോധിക്കുക. പ്രസ്തുത വർഷങ്ങളിൽ ഗണിതത്തിന് നിങ്ങൾ പുരോഗതി നേടിയോ എന്നും കണ്ടെത്തുക.