



समानुपात (Proportion)

शैली के पास बेर थे तथा मिश्री के पास अंगूर। दोनों ने बेर एवं अंगूर आपस में बांटना तय किया। शैली ने मिश्री को अपने 24 बेरों में से 12 बेर दिए और मिश्री ने शैली को अपने 150 अंगूर में से 75 अंगूर दिए। बंटवारे को समझ नहीं पा रहे थे। मिश्री कह रही थी कि तुमने मुझे कम बेर दिए। शैली की बात मिश्री ने नहीं मानी और दोनों अपनी बुआ निशा के पास गयी। निशा ने शैली से कहा कि आपके पास कुल 24 बेर थे। मिश्री को मिले 12 अतः आप दोनों के बेरों में अनुपात हुआ $12 : 12$ या $1 : 1$

उसी प्रकार मिश्री ने 150 अंगूर में से 75 अंगूर शैली को दिए हैं। शैली एवं मिश्री को मिले अंगूरों में अनुपात $75 : 75$ या $1 : 1$ है अर्थात् बँटवारा ठीक हुआ है। क्या निशा की बात सही है? इस स्थिति में दोनों को मिले फलों का अनुपात बराबर है। यहाँ फलों का जो बँटवारा हुआ उसमें बेरों का बांटना बराबर $12 : 12$ के अनुपात में हुआ और अंगूरों का $75 : 75$ के अनुपात में। ये दोनों अनुपात एक समान हैं अर्थात् समानुपाती हैं। ऐसी ही स्थितियों में हमें कभी-कभी अनुपातों की तुलना करने की आवश्यकता होती है। आइए कुछ उदाहरण देखें –

उदाहरण 1. (Example 1)

दूध के 10 पैकेट का मूल्य 150 रु. एवं 25 पैकेट का मूल्य 375 रु. है। यहां दूध के पैकेटों की संख्या में अनुपात $= 10 : 25 = 2 : 5$

दूध की कीमत का अनुपात $= 150 : 375 = 2 : 5$

ये दोनों अनुपात समान है।

उदाहरण 2. पांच बोरे सीमेंट की कीमत 550 रु. एवं 20 बोरे सीमेंट की कीमत 2200 रु. है। सीमेंट के बोरो की संख्या में अनुपात $= 5 : 20 = 1 : 4$

सीमेंट की कीमत में अनुपात $= 550 : 2200 = 1 : 4$

बोरो की संख्या में अनुपात = कीमत में अनुपात

$$1 : 4 = 1 : 4$$

यहां भी दोनों अनुपात बराबर हैं। ये भी अनुपात समान हैं अतः इन्हें समानुपात कहेंगे।

क्या $4 : 5$ एवं $20 : 25$ भी आपस में बराबर है ?

आप भी चार उदाहरण बताइए जिनमें दो राशियों का अनुपात अन्य दो राशियों के अनुपात के समान हो।

आप भी इस प्रकार की कुछ परिस्थितियों के बारे में सोचिए तथा उनके अनुपातों की तुलना कीजिए।

यदि दो राशियाँ a और b के बीच का अनुपात अन्य दो राशियों c और d के बीच के अनुपात के बराबर हो तो $a : b = c : d$ या $a : b :: c : d$ लिखते हैं जिसमें $::$ समानुपात का चिह्न है।

$a : b :: c : d$ में a तथा d बाह्य पद कहलाते हैं एवं b तथा c मध्य पद कहलाते हैं। a, b, c व d क्रमशः प्रथम, द्वितीय, तृतीय, चतुर्थ पद कहलाते हैं। जाँचकर देखें कि चारों पदों में पहले दो पदों का अनुपात तीसरे एवं चौथे पदों के अनुपात के बराबर है अथवा नहीं।

1. $1 : 5$ एवं $6 : 30$
2. $20 : 10$ एवं $30 : 15$
3. $4 : 12$ एवं $18 : 54$

क्या उपरोक्त सभी उदाहरण समानुपात में है ? निम्न सारिणी में जहाँ रिक्त पद हैं उन्हें समानुपात के नियम के आधार पर भरिए।

सारणी 1

क्र.	समानुपाती पद	बाह्य पदों का गुणनफल	मध्य पदों का गुणनफल
1	$1 : 2 :: 4 : 8$	$1 \times 8 = 8$	$2 \times 4 = 8$
2	$5 : 6 :: 75 : 90$	---	---
3	$3 : 4 :: 24 : 32$	---	96
4	$2.5 : 2.4 :: 7.5 : 7.2$	$2.5 \times 7.2 = \text{---}$	$\text{----} = 18$
5	$2 : 5 :: 4 : \text{---}$	---	20

उपरोक्त उदाहरणों में आप पायेंगे कि बाह्य पदों का गुणनफल मध्यपदों के गुणनफल के बराबर होता है।

समानुपात में मध्यपदों का गुणनफल = बाह्य पदों का गुणनफल



क्रियाकलाप 1 (Activity 1)

दो सहेलियाँ हमीदा और अनु पतंग लेने बाजार गईं। उन्होंने 45 पतंगें 15 रु में खरीदी। 15 रु में से 9 रु अनु ने तथा 6 रु हमीदा ने दिए। वे जब बाजार से घर आईं तो अनु ने पतंग का बँटवारा कुछ इस प्रकार से किया – दो पतंगें तुम्हारे लिए, तीन पतंगे मेरे लिए।

आप बताइए कि –

1. अनु किस अनुपात में पतंग बाँट रही है ?
2. हमीदा सोच रही है कि अनु पतंग का बँटवारा ठीक नहीं कर रही। हमें बराबर-बराबर पतंगें मिलनी चाहिए। अनु कहती है कि हमने पतंग के मूल्यों का भुगतान $6 : 9$ अथवा $2 : 3$ में किया है इसलिए प्रत्येक 5 पतंगों में से दो पतंगें तुम्हारी तथा तीन पतंगें मेरी होगी। कुल 45 पतंगें हैं इसलिए $2 \times 9 = 18$ पतंगें तुम्हें तथा $3 \times 9 = 27$ पतंगें मुझे मिलेंगी। क्या अनु का तर्क सही है? अपने उत्तर का कारण भी बताइये।

उदाहरण 3. क्या 40, 30, 60, 45 समानुपात में है ?

हल : यहाँ $40 : 30 = 40/30 = 4/3 = 4 : 3$
 $60 : 45 = 60/45 = 4/3 = 4 : 3$
 अतः $40 : 30 :: 60 : 45$
 इसलिए 40, 30, 60, 45 समानुपाती हैं।

उदाहरण 4. समानुपात के प्रश्नों में अज्ञात पद का मान ज्ञात करना

$$8 : \underline{\hspace{1cm}} :: 7 : 14$$

इस उदाहरण में दूसरा पद ज्ञात नहीं है। इस स्थान पर x लिखने पर समानुपात होगा

$$8 : x :: 7 : 14$$

अतः बाह्य पदों का गुणनफल = मध्य पदों का गुणनफल

$$8 \times 14 = x \times 7$$

$$7x = 112$$

$$x = \frac{112}{7} = 16$$

गर्मी के दिनों में हम शर्बत बनाते हैं। शर्बत में शक्कर मिलाई जाती है। यदि 6 गिलास शर्बत में 12 चम्मच शक्कर मिलाई गई तो प्रति गिलास 2 चम्मच शक्कर डाली गई है और अधिक मीठा शर्बत बनाने के लिए यदि प्रति गिलास 3 चम्मच शक्कर डालें तो दोनों प्रकार के शर्बत में प्रति गिलास शक्कर का अनुपात 2 : 3 होगा।

इस प्रकार दैनिक जीवन में अनुपात एवं समानुपात के बहुत से उदाहरण हैं। आप दैनिक जीवन से इससे सम्बन्धित तीन उदाहरण सोच कर बताएं। ध्यान रखें कि अनुपात समान इकाई में दर्शाई गई दो समान राशियों के बीच ही दर्शाया जाता है।

उदाहरण 5.

यदि $100 \times 75 = 150 \times 50$, जाँच कीजिए कि क्या 100, 150 तथा 50, 75 समानुपाती हैं।

हल : $100/150 = 2/3 = 2 : 3$

$$50/75 = 2/3 = 2 : 3$$

स्पष्ट है $100 : 150 :: 50 : 75$

अतः संख्याएँ 100, 150, 50, 75 समानुपात में हैं।

उदाहरण 6.

एक विद्यालय के खेल के मैदान की लम्बाई और चौड़ाई में 4 : 3 का अनुपात है। यदि लम्बाई 28 मीटर हो तो चौड़ाई ज्ञात कीजिए।

हल : माना कि मैदान की चौड़ाई x है।

4 : 3 और 28 : x एक जैसे अनुपात हैं।

$$\text{अतः } 4 : 3 :: 28 : x$$

$\Rightarrow$ बाह्य पदों का गुणनफल = मध्य पदों का गुणनफल

$$4 \times x = 3 \times 28$$

$$x = 3 \times 28/4$$

$$x = 21 \text{ मीटर}$$

उदाहरण 7.

2 किलो टमाटर का मूल्य 16 रु है। ज्ञात कीजिए कि 40 रु में कितने किलो टमाटर आएंगे।

हल : माना कि 40 रुपये में x किलो टमाटर आएंगे

2 : x और 16 : 40 (2 किलो और x किलो तथा 16 रु. और 40 रु. एक जैसे हैं)

अतः 2 : x :: 16 : 40

$$x \times 16 = 2 \times 40$$

$$x = \frac{2 \times 40}{16} = 5$$

अतः 40 रुपये में 5 किलो टमाटर आएंगे।

उदाहरण 8.

1 : 4 = 8 : 32 से कितने समानुपात बनाए जा सकते हैं।

हल : निम्न समानुपात बन सकते हैं—

1. 1 : 4 :: 8 : 32, $1 \times 32 = 4 \times 8$

2. 1 : 8 :: 4 : 32, $1 \times 32 = 8 \times 4$

3. 32 : 8 :: 4 : 1, $32 \times 1 = 8 \times 4$

4. 32 : 4 :: 8 : 1, $32 \times 1 = 4 \times 8$

उपरोक्त संख्याओं से क्या कुछ और समानुपात बन सकते हैं?

प्रश्नावली 14.1 (Exercise 14.1)

1. समानुपात के नियम को लागू करते हुए बताइए कि निम्न में से कौन सा कथन सत्य है और क्यों?

(i) 10 : 20 :: 300 : 600 -----

(ii) 38 : 76 :: 250 : 500 -----

(iii) 22 : 66 :: 66 : 22 -----

(iv) 24 : 96 :: 16 : 54 -----

(v) 25 : 65 :: 1 : 3 -----

(vi) 15 : 30 :: 200 : 400 -----

(vii) 34 : 136 :: 45 : 180 -----

(viii) 70 : 350 :: 1 : 4 -----

(ix) 5 : 25 :: 30 : 150 -----

(x) 33 : 11 :: 133 : 111 -----

(xi) 18 : 24 :: 15 : 20 -----

(xii) 75 : 150 :: 3 : 18 -----

2. निम्न में से कौन-कौन से संख्या समूह समानुपाती हैं? यदि समानुपाती नहीं हैं तो क्या यह संभव है कि क्रम बदल कर व उन्हें पुनः व्यवस्थित कर समानुपाती बनाया जा सके? किनमें यह भी नहीं किया जा सकता?

(i) 4, 8, 16, 32

(ii) 12, 16, 48, 64

(iii) 4, 6, 18, 12

(iv) 200, 300, 400, 600

(v) 11, 22, 88, 44

(vi) 4, 1, 2, 8

(vii) 25, 15, 3, 5

(viii) 224, 34, 68, 112

(ix) 67, 134, 45, 90

(x) 1, 2, 3, 6

(xi) 5, 7, 9, 13

3. रिक्त स्थानों को इस प्रकार भरें कि दोनों पक्षों के अनुपात समान हों।
- (i) $32 : \text{---} = 6 : 12$
- (ii) $22 \text{ किग्रा} : 26 \text{ किग्रा} = \text{---} : 260 \text{ मीटर}$
- (iii) $45 \text{ किमी} : 60 \text{ किमी} = \text{---} : 12 \text{ घंटे}$
4. 8 किलोग्राम चीनी का मूल्य 72 रु. है तो 15 किलोग्राम चीनी का मूल्य ज्ञात कीजिए।
5. किसी मैदान की लम्बाई एवं चौड़ाई का अनुपात 5 : 2 है मैदान की लम्बाई मीटर में ज्ञात कीजिए, यदि चौड़ाई 40 मीटर है।
6. किसी व्यक्ति ने एक पुस्तक की तीन प्रतियां 75 रु में खरीदी। बताइए कि 300 रु में वह व्यक्ति पुस्तक की कितनी प्रतियां खरीद सकता है?

ऐकिक विधि (Unitary Method)

दी गई राशियों से पहले एक राशि का इकाई मान ज्ञात कर फिर वांछित संख्या में राशियों का मान ज्ञात करने की विधि को ऐकिक विधि कहा जाता है। आपने इसे पूर्व कक्षाओं में पढ़ा है। समान अनुपात के प्रश्नों को ऐकिक विधि से भी किया जा सकता है।



उदाहरण 9. यदि दो कॉपियाँ की कीमत 20 रु हो तो 5 कापियों की कीमत क्या होगी?

समानुपात के द्वारा हल—

दो कॉपियों की कीमत 20 रु है अर्थात् कॉपियों तथा कीमत का अनुपात = 2 : 20

तो 5 कॉपियों तथा उनकी कीमत का अनुपात भी वही होगा। यदि 5 कॉपियों की कीमत x रख लें तो

कॉपियाँ : कीमत = कॉपियाँ : कीमत

$$2 : 20 = 5 : x$$

चूँकि मध्य पदों का गुणनफल = बाह्य पदों का गुणनफल

$$5 \times 20 = x \times 2$$

$$100 = 2x$$

$$x = 50$$

अर्थात् 5 कॉपियों की कीमत 50 रु होगी।

ऐकिक विधि के द्वारा हल —

दो कॉपियों की कीमत 20 रु है

तो 1 कॉपी की कीमत होगी = 10 रु

अब 1 कॉपी की कीमत 10 रु है

तो 5 कॉपियों की कीमत = $10 \times 5 = 50$ रु

इस प्रकार के कुछ अन्य सवाल प्रश्नावली में दिए गए हैं। इन्हें हल कीजिए।

प्रश्नावली 14.2 (Exercise 14.2)

- तीन कॉपियों की कीमत 16.50 रु. है। तो 7 कॉपियों की कीमत ज्ञात कीजिए।
- एक कार 3 घंटों में 165 किलोमीटर चलती है। तो वह कार,
 - 440 किलोमीटर की दूरी कितने समय में तय करेगी ?
 - $6\frac{1}{2}$ घंटों में कितनी दूरी तय करेगी ?
- 72 किताबों का वज़न 9 किलोग्राम है।
 - 80 किताबों का वज़न ज्ञात कीजिए।
 - कितनी किताबों का वज़न 6 किलोग्राम होगा?
- किसी मज़दूर की 25 दिनों की आय 1500 रु. है। उसकी 30 दिनों की आय ज्ञात कीजिए।
- यदि 22 मीटर कपड़े का मूल्य 704 रु है तो 20 मीटर कपड़े का मूल्य क्या होगा ?
- सारिणी पूरी कीजिए :



किताबों की संख्या	मूल्य (रुपये में)
50	2500
75	—
—	100
—	3000

हमने सीखा (We have learnt)

- दो अनुपातों में समता समानुपात कहलाता है। यदि $a : b$ और $c : d$ बराबर या समान हैं, तो यह समानुपात बनाते हैं।
- समानुपात में पहले तथा चौथे पद को बाह्यपद तथा दूसरे तथा तीसरे पद को मध्यपद कहते हैं।
- जब चार संख्याएँ समानुपात में हो तो बाह्यपदों का गुणनफल = मध्यपदों का गुणनफल
- यदि हमें पता है कि $a : b$ और $c : d$ एक समान हैं तो उससे निम्न समानुपात बन सकते हैं—

अ. $a : b :: c : d$	ब. $b : a :: d : c$
स. $c : a :: d : b$	द. $b : d :: a : c$
- दी गई राशियों से पहले एक राशि का इकाई मान ज्ञात कर फिर वांछित संख्या में राशियों का मान ज्ञात करने की विधि को ऐकिक विधि कहा जाता है।

