12

शांकव परिच्छेद
(Conic section)

12.01 प्रस्तावना (Introduction):

एक द्विशंकु को एक समतल द्वारा अक्ष के साथ भिन्न–भिन्न कोण से काटने पर प्राप्त परिच्छेद **शांकव परिच्छेद** कहलाते हैं।

मानलो द्विशंकु का शीर्ष O, अक्ष AOA' तथा अर्द्धशीर्ष कोण α है। यदि एक समतल P द्विशंकु के अक्ष AOA' को θ कोण पर काटता है तो प्रतिच्छेद वक्रों का वर्गीकरण निम्न प्रकार से होगा।

स्थिति I: यदि समतल P, शंकु के शीर्ष O से गुजरता हो तो प्रतिच्छेदन शीर्ष से गुजरने वाली एक सरल रेखा युग्म होती है। चित्र 12.01 (a) ये रेखाएँ

(i) वास्तविक तथा भिन्न होगी, यदि $\theta < \alpha$ हो।

(ii) सम्पाती होगी, यदि $\theta = \alpha$ हो।

(iii) काल्पनिक होगी, यदि $\theta > \alpha$ हो।

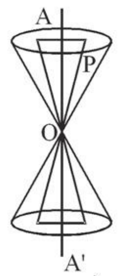
स्थिति II: यदि समतल P, शंकु के शीर्ष O से नहीं गुजरता हो तो प्रतिच्छेदन एक वक्र होगा तथा यह वक्र

(i) एक वृत्त होगा, यदि $\theta = 90^\circ$ हो अर्थात् समतल P, शंकु के अक्ष AOA' को लम्बवत् काटे। इस वृत्त का केन्द्र अक्ष AOA' पर होगा। (चित्र 12.01 (b))

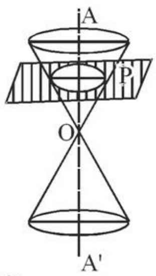
(ii) एक परवलय होगा, यदि $\theta = \alpha$ हो अर्थात् समतल P शंकु की जनक रेखा OG के समान्तर हो। परवलय की अक्ष जनक रेखा के समान्तर होगी। (चित्र 12.02)

(iii) एक दीर्घवृत्त होगा, यदि $\theta > \alpha$ हो अर्थात् समतल P शंकु के दोनों जनक रेखाओं को काटे। (चित्र 12.03)

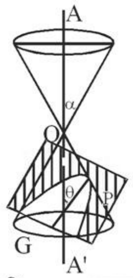
(iv) एक अतिपरवलय होगा, यदि $\theta < \alpha$ हो अर्थात् समतल P दोनों शंकुओं को काटे। (चित्र 12.04)



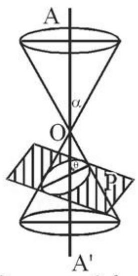
चित्र 12.01 (a) रेखायुग्म



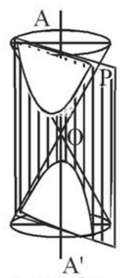
चित्र 12.01 (b) वृत्त



चित्र 12.02 परवलय



चित्र 12.03 दीर्घवृत्त



चित्र 12.04 अतिपरवलय

12.02 शांकव परिच्छेद (Conic sections)

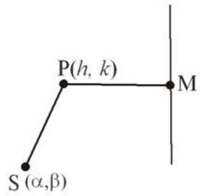
परिभाषा: एक गतिशील बिन्दु P का बिन्दुपथ जो एक समतल में इस प्रकार गमन करता है कि उसकी उसी समतल में स्थित स्थिर बिन्दु S तथा एक स्थिर रेखा से दूरियों का अनुपात सदैव अचर रहता है, **शांकव परिच्छेद** कहलाता है।

स्थिर बिन्दु S तथा स्थिर रेखा को शांकव परिच्छेद की क्रमशः **नाभि** एवं **नियता** कहते हैं तथा अचर अनुपात **उत्केन्द्रता** कहलाती है जिसे e से निरूपित किया जाता है। नाभि से गुजरने वाली तथा नियता के लम्बवत् रेखा शांकव परिच्छेद की **अक्ष** कहलाती है।

शांकव **परिच्छेद** तथा इसके अक्ष का प्रतिच्छेदन बिन्दु शीर्ष कहलाता है। शांकव पर स्थित दो बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा उसकी जीवा कहलाती है। शांकव **परिच्छेद** की प्रत्येक जीवा एक बिन्दु पर समद्विभाजित होती है वह बिन्दु शांकव **परिच्छेद** का केन्द्र कहलाता है। यह बिन्दु अक्ष पर नाभियों की दूरी का मध्य बिन्दु होता है। अक्ष के लम्बवत् तथा नाभि से गुजरने वाली जीवा शांकव का नाभिलम्ब कहलाता है।

शांकव परिच्छेद का व्यापक समीकरण (General equation of conic section)

मानलो एक समतल में स्थिर बिन्दु S के निर्देशांक (α, β), स्थिर रेखा का समीकरण $ax+by+c=0$ तथा उत्केन्द्रता e है। इस समतल में कोई स्वेच्छ बिन्दु $P(h, k)$ लो। PS को मिलाओं तथा P से नियता पर लम्ब PM डालो। अब शांकव की परिभाषानुसार,



चित्र 12.05

या $\quad SP = e\,PM \qquad \dfrac{SP}{PM} = e \qquad$ या $\quad SP^2 = e^2 PM^2$

या $\quad (h-\alpha)^2 + (k-\beta)^2 = e^2 \left\{ \dfrac{ah+bk+c}{\sqrt{a^2+b^2}} \right\}^2$

अंतः बिन्दु P का बिन्दुपथ अर्थात् शांकव परिच्छेद का समीकरण होगा

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = e^2 \frac{(ax+by+c)^2}{a^2+b^2}$$

अर्थात् समीकरण को सरल कर व्यापक रूप में इस प्रकार लिखा जा सकता है।

$$Ax^2 + 2Hxy + By^2 + 2Gx + 2Fy + C = 0$$

12.03 शांकव परिच्छेद के विभिन्न रूप (Different forms of conic section)

शांकव परिच्छेद, नाभि S की नियता के सापेक्ष स्थिति तथा उत्केन्द्रता e के मान पर निर्भर करते हैं।

I. जब नाभि नियता पर स्थित हो,

शांकव परिच्छेद एक रेखा युग्म को प्रदर्शित करता है, ये रेखाएँ

(i) वास्तविक एवं भिन्न होंगी, यदि $e > 1$ हो।

(ii) वास्तविक एवं संपाती होंगी, यदि $e = 1$ हो।

(iii) काल्पनिक होंगी, यदि $e < 1$ ।

(iv) समान्तर होंगी, यदि नियता अनन्त पर हो।

II. जब नाभि नियता पर स्थित न हो,

उत्केन्द्रता e के विभिन्न मानों के लिए शांकव परिच्छेद

(i) एक वृत्त होगा, यदि $e = 0$ हो।

(ii) एक परवलय होग, यदि $e = 1$ हो।

(iii) एक दीर्घवृत्त होगा, यदि $e < 1$ हो।

(iv) एक अतिपरवलय होगा, यदि $e > 1$ हो।

12.04 सिद्ध कीजिए कि x तथा y में व्यापक द्विघात समीकरण सदैव एक शांकव को निरूपित करता है। (To prove that the general equation of second degree in x and y always represents a conic section)

माना शांकव का व्यापक समीकरण

$$\phi(x, y) \equiv ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \qquad (1)$$

है। xy को विलोपित करने के लिए मूल बिन्दु को स्थिर रखते हुए आयतीय अक्षों को θ कोण पर घुमाते है। इस हेतु समीकरण (1) में x को $(x\cos\theta - y\sin\theta)$ तथा y को $(x\sin\theta + y\cos\theta)$ से प्रतिस्थापित करने पर रूपान्तरित समीकरण

$$a(x\cos\theta - y\sin\theta)^2 + 2h(x\cos\theta - y\sin\theta)(x\sin\theta + y\cos\theta) + b(x\sin\theta + y\cos\theta)^2$$
$$+2g(x\cos\theta - y\sin\theta) + 2f(x\sin\theta + y\cos\theta) + c = 0 \qquad (2)$$

प्राप्त होता है।

अब θ इस प्रकार चुनते है की xy का गुणाँक शून्य हो जाए,

अर्थात् $2(b-a)\sin\theta\cos\theta + 2h(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = 0$ या $\tan 2\theta = \dfrac{2h}{a-b}$

अब समीकरण (2) का रूप

$$Ax^2 + By^2 + 2Gx + 2Fy + C = 0, \tag{3}$$

जहाँ A, B, G, F तथा C अचर है, प्राप्त होता है।

स्थिति I: जब $A \neq 0,\ B \neq 0$

समीकरण (3) से

$$A\left(x+\frac{G}{A}\right)^2 + B\left(y+\frac{F}{B}\right)^2 = \frac{G^2}{A}+\frac{F^2}{B}-C = K \text{ (माना)}$$

मूल बिन्दु को $\left(-\dfrac{G}{A}, -\dfrac{F}{B}\right)$ पर स्थानान्तरित करने पर

$$Ax^2 + By^2 = K \tag{4}$$

(i) जब $K=0,\ \Delta = 0$ अर्थात् $abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2 = 0$ तब समीकरण (4) रेखा युग्म को निरूपित करती है जो A तथा B के विपरीत चिह्न के होने पर वास्तविक तथा समान चिह्न होने पर काल्पनिक होगी।

(ii) जब $K \neq 0$, समीकरण (4) से

$$\frac{x^2}{\frac{K}{A}} + \frac{y^2}{\frac{K}{B}} = 1$$

जो K/A तथा K/B के समान चिह्न के होने पर दीर्घवृत्त तथा विपरीत चिह्न के होने पर अतिपिरवलय को निरूपित करती है।

(iii) जब $K \neq 0$, तथा $A = B$ तो समीकरण (4) एक वृत्त को निरूपित करती है।

(iv) जब $K \neq 0$, तथा $A = -B$ तो समीकरण (4) एक आयतीय अतिपरवलय को निरूपित करती है।

स्थिति II: जब A या B में से एक शून्य है (माना B = 0)

समीकरण (4) से

$$A\left(x+\frac{G}{A}\right)^2 = -2Fy + \frac{G^2}{A} - C = -2F\left(y - \frac{G^2 - AC}{2F}\right) \tag{5}$$

(i) जब F = 0, समीकरण (5) दो समान्तर सरल रेखाओं को निरूपित करेगा एवं यदि $(G^2/A) - C = 0$ तो ये सरल रेखाएँ संपाती होगी।

(ii) जब $F \neq 0$, समीकरण (5) में मूल बिन्दु को $\left(-\dfrac{G}{A}, \dfrac{G^2 - AC}{2F}\right)$ पर स्थानान्तरित करने पर,

$$Ax^2 = -2Fy \quad \text{या} \quad x^2 = -\frac{2F}{A}y \tag{6}$$

जो कि एक परवलय का समीकरण है।

अर्थात् सभी परिस्थितियों में व्यापक द्विघात समीकरण एक शांकव को निरूपित करती है।

निम्न सारणी में व्यापक द्विघात समीकरण

$$\phi(x, y) = ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

द्वारा निरूपित होने वाले विभिन्न शांकवों के लिए शर्तें दर्शायी गयी है।

भाग सं.	शर्तें	परिच्छेद की प्रकृति
	$\Delta = abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2$	
A	$\Delta = 0$ तथा	
	1. $h^2 \neq ab$	रेखा युग्म
	2. $h^2 = ab$	समान्तर रेखा युग्म
	3. $a + b = 0$	लम्बवत रेखा युग्म
B	$\Delta \neq 0$ तथा	
	1. $a = b,\ h = 0$	वृत्त
	2. $h^2 = ab$	परवलय
	3. $h^2 < ab$	दीर्घवृत
	4. $h^2 > ab$	अतिपरवलय
	5. $h^2 > ab$ तथा $a + b = 0$	आयतीय अतिपरवलय

आगे के अनुच्छेदों में हम प्रमुख शांकवों यथा वृत्त (Circle), परवलय (Parabola), दीर्घवृत्त (Ellipse) तथा अतिपरवलय (Hyperbola) के मानक समीकरण ज्ञात करते हुए उनके प्रमुख गुणों का अध्ययन करेंगे।

वृत्त (Circle)

12.05 वृत का केन्द्रीय रूप में समीकरण (Equation of the circle in central form)

परिभाषाः किसी दिये हुए समतल में गतिमान ऐसे बिन्दु का बिन्दु पथ जिसकी उसी समतल में स्थित किसी स्थिर बिन्दु से दूरी सदैव समान (अचर) रहे, वृत कहलाता है।

यहाँ स्थिर बिन्दु को वृत का केन्द्र एवं समान (अचर) दूरी को वृत की त्रिज्या कहते है।

माना वृत का केन्द्र $C(h, k)$ है, त्रिज्या r है तथा गतिमान बिन्दु P की किसी स्थिति पर निर्देशांक (x, y) है तो

चित्रानुसार $CQ = ON - OM = x - h$

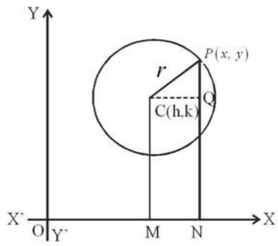
$QP = NP - NQ = y - k$

समकोण त्रिभुज CQP में

$$CQ^2 + QP^2 = CP^2$$

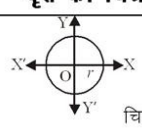
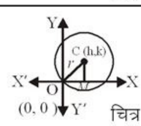
या $$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

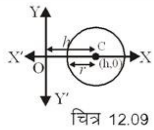
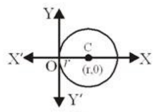
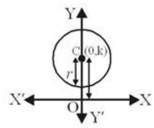
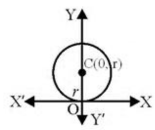
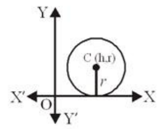
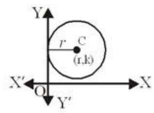
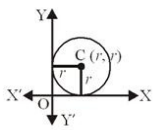
इसे वृत का **केन्द्रीय रूप** भी कहते है।



चित्र 12.06

विशेष स्थितियों में वृत के समीकरणः

क्र.सं.	विभिन्न स्थितियां	वृत का समीकरण	वृत का चित्र
1.	$h = 0,\ k = 0$	$x^2 + y^2 = r^2$ (मानक)	 चित्र 12.07
2.	वृत मूल बिन्दु (0, 0) से गुजरता है तथा केन्द्र प्रथम पाद में हों	$x^2 + y^2 - 2hx - 2ky = 0$	 चित्र 12.08

3.	$k=0$ तथा $h>r$	$(x-h)^2+y^2=r^2$	 चित्र 12.09
4.	$k=0$ तथा $h=r$	$x^2+y^2-2rx=0$	 चित्र 12.10
5.	$h=0$ तथा $k>r$	$x^2+(y-k)^2=r^2$	 चित्र 12.11
6.	$h=0$ तथा $k=r$	$x^2+y^2-2ry=0$	 चित्र 12.12
7.	वृत x- अक्ष को स्पर्श करता है तथा $k=r$	$x^2+y^2-2hx-2ry+h^2=0$	 चित्र 12.13
8.	वृत y- अक्ष को स्पर्श करता है तथा $h=r$	$x^2+y^2-2rx-2ky+k^2=0$	 चित्र 12.14
9.	$h=k=r$	$x^2+y^2-2rx-2ry+r^2=0$	 चित्र 12.15
10.	$r=0$	$(x-h)^2+(y-k)^2=0$	वृत एक बिन्दु हो जाता है इसे बिन्दु वृत करते है।

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण 1: केन्द्र $(2, -3)$ तथा 4 इकाई त्रिज्या वाले वृत का समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल: यहाँ $h=2,\ k=-3$ तथा $r=4$, अतः वृत का अभीष्ट समीकरण $(x-2)^2+(y+3)^2=16$ है।

उदाहरण 2: वृत $x^2+y^2+8x+10y-8=0$ का केन्द्र तथा त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

हल: दिया गया समीकरण

$$(x^2+8x)+(y^2+10y)=8$$

अब कोष्ठकों को पूर्ण वर्ग बनाने पर

$$(x^2+8x+16)+(y^2+10y+25)=8+16+25$$

$$(x+4)^2+(y+5)^2=49$$

$$\{x-(-4)\}^2+\{y-(-5)\}^2=7^2$$

अतः वृत का केन्द्र $(-4,\ -5)$ व त्रिज्या 7 इकाई है।

उदाहरण 3: उस वृत का समीकरण ज्ञात कीजिए जो x- अक्ष को स्पर्श करता है तथा y- अक्ष पर 2ℓ लम्बाई का अन्तःखण्ड काटता है।

हल: वृत के मानक समीकरण में $k=r$ तथा $h=\sqrt{r^2-\ell^2}$

अतः वृत का समीकरण

$$\left\{x-\sqrt{r^2-\ell^2}\right\}+(y-r)^2=r^2$$

या $x^2+y^2-2x\sqrt{r^2-\ell^2}-2ry+r^2-\ell^2=0$

उदाहरण 4: उस वृत का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु $(1, 2)$ से गुजरता है तथा जिसका केन्द्र रेखा $x+y+3=0$ एवं $2x+3y+7=0$ का प्रतिच्छेद बिन्दु है।

हल : दी गई रेखाएं हैं $x+y+3=0$ (1)

तथा $2x+3y+7=0$ (2)

इन्हें हल करने पर प्रतिच्छेद बिन्दु $(-2, -1)$ प्राप्त होता है, जो वृत्त के केन्द्र के निर्देशांक हैं। अब, चूंकि वृत्त बिन्दु $(1, 2)$ से गुजरता है अतः वृत्त के केन्द्र को इस बिन्दु से मिलाने वाली दूरी वृत्त की त्रिज्या होगी, अर्थात्

त्रिज्या $=\sqrt{\{(1+2)^2+(2+1)^2\}}=\sqrt{(9+9)}=3\sqrt{2}$

अतः अभीष्ट वृत्त का समीकरण होगा

$$(x+2)^2+(y+1)^2=(3\sqrt{2})^2$$

या $x^2+y^2+4x+2y-13=0$

प्रश्नमाला 12.1

1. उस वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए, जिसका

   (i) केन्द्र $(-2,3)$ तथा त्रिज्या 4 हो। (ii) केन्द्र (a,b) तथा त्रिज्या $a-b$ हो।

2. निम्न वृत्तों के केन्द्र के निर्देशांक तथा त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

   (i) $x(x+y-6)=y(x-y+8)$ (ii) $\sqrt{1+k^2}\,(x^2+y^2)=2ax+2aky$ (iii) $4(x^2+y^2)=1$

3. उस वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जो y- अक्ष को स्पर्श करे तथा x- अक्ष पर 2ℓ लम्बाई का अन्तःखण्ड काटे।

4. उस वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए, जो x- अक्ष को मूल बिन्दु से +3 दूरी पर स्पर्श करता है तथा y- अक्ष पर 6 इकाई लम्बाई का अन्त खण्ड काटता है।

5. वृत $x^2+y^2-8x+10y-12=0$ का केन्द्र एवं त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

6. वृत $2x^2+2y^2-x=0$ का केन्द्र एवं त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

7. बिन्दुओं (2, 3) और (–1, 1) से जाने वाले वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका केन्द्र रेखा $x-3y-11=0$ पर स्थित है।

8. त्रिज्या 5 के उस वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका केन्द्र x-अक्ष पर हो और जो बिन्दु (2, 3) से जाता है।

9. (0, 0) से होकर जाने वाले वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जो निर्देशांक्षों पर a और b अंतःखण्ड बनाता है।

12.06 वृत्त एवं सरल रेखा का प्रतिच्छेदन (Intersection of a circle and a line)

माना कि वृत्त $$x^2+y^2=a^2 \quad (1)$$

को सरल रेखा $$y=mx+c \quad (2)$$

प्रतिच्छेदित करती है।

समीकरण (1) एवं (2) को हल करने पर हमें प्रतिच्छेद बिन्दुओं के निर्देशांक प्राप्त होंगे। इसके लिए समीकरण (2) से y का मान (1) में रखने पर

$$x^2+(mx+c)^2=a^2$$

या $$(1+m^2)x^2+2mcx+(c^2-a^2)=0 \quad (3)$$

समीकरण (3), x में एक द्विघात समीकरण है। अतः इसे हल करने पर हमें x के दो मान प्राप्त होंगे जो कि प्रतिच्छेद बिन्दुओं के भुजांक होंगे। x के मानों को समीकरण (2) में रखने पर हमें y के संगत दो मान प्राप्त होंगे जो कि प्रतिच्छेद बिन्दुओं की कोटि होगी। अतः हम कह सकते है कि एक सरल रेखा दिये गए वृत्त को दो बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करती है।

प्रतिच्छेद बिन्दुओं की प्रकृति (Nature of Points of intersection)

प्रतिच्छेद बिन्दु वास्तविक एवं भिन्न, सम्पाती अथवा काल्पनिक होंगे यदि द्विघात समीकरण (3) के मूल वास्तविक एवं भिन्न, सम्पाती अथवा काल्पनिक हों इसके लिये निम्न तीन स्थितियाँ सम्भव हैं:

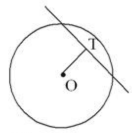
स्थिति–I जब प्रतिच्छेद बिन्दु वास्तविक एवं भिन्न हों :

इस स्थिति में, द्विघात समीकरण (3) के मूल वास्तविक एवं भिन्न होंगें जिसके लिये विविक्तिकर $B^2-4AC>0$

या $$4m^2c^2-4(1+m^2)(c^2-a^2)>0$$

या $$a^2(1+m^2)-c^2>0$$

या $$a^2>\frac{c^2}{1+m^2} \quad \text{फलतः} \quad a>\left|\frac{c}{\sqrt{1+m^2}}\right|$$



चित्र 12.16

इस प्रतिबन्ध से स्पष्ट है कि एक सरल रेखा दिए गए वृत्त को दो भिन्न–भिन्न बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करेगी यदि वृत्त के केन्द्र से सरल रेखा पर डाले गये लम्ब की लम्बाई, वृत्त की त्रिज्या से कम हो।

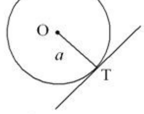
स्थिति–II जब प्रतिच्छेद बिन्दु सम्पाती हों :

इस स्थिति में स्पष्ट है कि द्विघात समीकरण (3) के दोनों मूल समान हो, अर्थात् विविक्तिकर

$$B^2-4AC=0$$

या $$4m^2c^2-4(1+m^2)(c^2-a^2)=0$$

या $$a^2=\frac{c^2}{1+m^2} \quad \text{फलत्} \quad a=\left|\frac{c}{\sqrt{1+m^2}}\right|$$



चित्र 12.17

इस प्रतिबन्ध से स्पष्ट है कि एक सरल रेखा दिये गए वृत्त को स्पर्श करेगी यदि वृत्त के केन्द्र से सरल रेखा पर डाले गए लम्ब की लम्बाई वृत्त की त्रिज्या के बराबर हो।

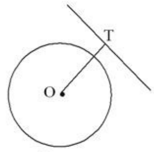
स्थिति–III जब प्रतिच्छेद बिन्दु काल्पनिक हों :

इस स्थिति में, स्पष्ट है कि द्विघात समीकरण (3) के दोनों मूल काल्पनिक होंगे अर्थात् विविक्तिकर

$$B^2 - 4AC < 0$$

या $\qquad 4m^2c^2 - 4(1+m^2)(c^2 - a^2) < 0$

या $\qquad a^2 < \dfrac{c^2}{1+m^2}$ फलत् $a < \left|\dfrac{c}{\sqrt{1+m^2}}\right|$



चित्र 12.18

इस प्रतिबन्ध से स्पष्ट है कि एक सरल रेखा दिए गए वृत्त को प्रतिच्छेद नहीं करेगी यदि वृत्त के केन्द्र से सरल रेखा पर डाले गये लम्ब की लम्बाई वृत्त की त्रिज्या से अधिक हो।

12.07 वृत्त द्वारा रेखा पर काटे गये अन्तःखण्ड की लम्बाई

(Length of intercept cut off from a line by a circle)

वृत्त $x^2 + y^2 = a^2$ द्वारा रेखा $y = mx + c$ पर काटे गये अन्तःखण्ड की लम्बाई ज्ञात करना

दिया गया वृत्त $\qquad x^2 + y^2 = a^2 \qquad (1)$

तथा सरल रेखा $\qquad y = mx + c \qquad (2)$

चित्र 12.19 के अनुसार माना (1) एवं (2) के प्रतिच्छेद बिन्दुओं P एवं Q के निर्देशांक क्रमशः (x_1, y_1) तथा (x_2, y_2) है। तब हमें अन्तःखण्ड PQ की लम्बाई ज्ञात करनी है। अतः

$$PQ = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \qquad (3)$$

चूँकि P तथा Q रेखा (2) पर स्थित है अतः

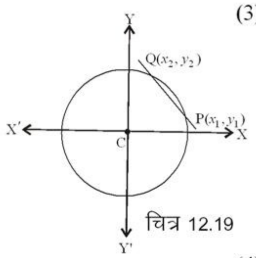
$$y_1 = mx_1 + c$$

तथा $\qquad y_2 = mx_2 + c$

घटाने पर, $\qquad y_1 - y_2 = m(x_1 - x_2)$

अतः (3) से, $\qquad PQ = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + m^2(x_1 - x_2)^2}$

$$= (x_1 - x_2)\sqrt{1+m^2} \qquad (4)$$



चित्र 12.19

अब (1) एवं (2) को x में हल करने पर]

$$x^2 + (mx + c)^2 = a^2$$

या $\qquad (1+m^2)x^2 + 2mcx + (c^2 - a^2) = 0 \qquad (5)$

यह x में द्विघात समीकरण है, अतः x के दो मान होंगे] माना ये मान x_1 तथा x_2 है तब,

$$x_1 + x_2 = -\frac{2mc}{1+m^2} \quad \text{तथा} \quad x_1x_2 = \frac{c^2 - a^2}{1+m^2}$$

परन्तु $\qquad (x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2$

मान रखने पर] $\qquad (x_1 - x_2)^2 = \dfrac{4m^2c^2}{(1+m^2)^2} - 4\dfrac{(c^2 - a^2)}{1+m^2}$

अतः $\qquad x_1 - x_2 = \dfrac{2}{1+m^2}\sqrt{a^2(1+m^2) - c^2}$

अब, (4) में यह मान रखने पर

$$PQ = \frac{2}{\sqrt{1+m^2}}\sqrt{a^2\left(1+m^2\right)-c^2}$$

$$PQ = 2\sqrt{a^2 - \frac{c^2}{1+m^2}} \qquad (6)$$

जो कि अभीष्ट अन्तःखण्ड PQ की लम्बाई दर्शाता है।

स्पर्शता का प्रतिबन्ध (Condition of tangency):

रेखा $y = mx + c$ द्वारा वृत्त $x^2 + y^2 = a^2$ को स्पर्श करने का प्रतिबन्ध ज्ञात करना।

प्रथम विधि : यदि रेखा $y = mx + c$, वृत्त $x^2 + y^2 = a^2$ को स्पर्श करे तो वृत्त द्वारा रेखा पर काटे गये अन्तःखण्ड की लम्बाई शून्य होगी, फलत् $PQ = 0$

या $$\frac{2}{\sqrt{1+m^2}}\sqrt{a^2\left(1+m^2\right)-c^2} = 0$$

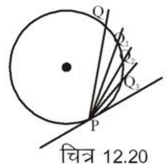
या $$a^2\left(1+m^2\right) = c^2$$

या $$c = \pm a\sqrt{1+m^2}$$

जो कि अभीष्ट स्पर्शता का प्रतिबन्ध है।

12.08 स्पर्श रेखा (Tangent)

परिभाषा : चित्र 12.20 के अनुसार यदि वृत्त की छेदक रेखा PQ इस प्रकार गमन करे कि बिन्दु Q वृत्त के अनुदिश गमन करता हुआ बिन्दु P के सम्पाती हो जाए तो छेदक रेखा PQ, वृत्त के बिन्दु P पर **स्पर्श रेखा** PT कहलाती है तथा बिन्दु P को इस स्पर्श रेखा का **स्पर्श बिन्दु** कहते है।



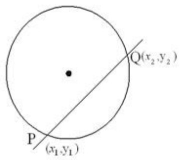
चित्र 12.20

वृत्त $x^2 + y^2 = a^2$ के बिन्दु (x_1, y_1) पर स्पर्श रेखा का समीकरण

दिया गया वृत्त है $x^2 + y^2 = a^2$ (1)

माना इस वृत्त पर कोई बिन्दु $P(x_1, y_1)$ है जहां हमें स्पर्श रेखा का समीकरण ज्ञात करना है। यदि वृत्त (1) पर कोई दूसरा बिन्दु $Q(x_2, y_2)$ लें तो जीवा PQ का समीकरण होगा

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \qquad (2)$$



चित्र 12.21

परन्तु बिन्दु P एवं Q वृत्त पर स्थित है

अतः $$x_1^2 + y_1^2 = a^2 \qquad (3)$$

तथा $$x_2^2 + y_2^2 = a^2 \qquad (4)$$

(4) में से (3) को घटाने पर

$$(x_2^2 - x_1^2) + (y_2^2 - y_1^2) = 0$$

या $$(x_2 - x_1)(x_2 + x_1) = -(y_2 - y_1)(y_2 + y_1)$$

या $$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -\frac{x_2 + x_1}{y_2 + y_1} \qquad (5)$$

यह मान (2) में रखने पर $$y - y_1 = -\frac{x_2 + x_1}{y_2 + y_1}(x - x_1) \qquad (6)$$

अब, यदि बिन्दु Q वृत्त के अनुदिश चलता हुआ बिन्दु P की ओर अग्रसर होता हुआ P के संपाती हो जाए तो स्पष्ट है कि ऐसी स्थिति में $x_2 = x_1$ तथा $y_2 = y_1$ एवं जीवा PQ वृत्त के बिन्दु P पर स्पर्श रेखा बन जाएगी।

अतः (6) से, $$y - y_1 = -\frac{2x_1}{2y_1}(x - x_1)$$

या $$yy_1 - y_1^2 = -xx_1 + x_1^2$$

या $$xx_1 + yy_1 = x_1^2 + y_1^2$$

$\therefore$ $$xx_1 + yy_1 = a^2 \qquad [(3) \text{ से}]$$

जो कि वृत्त के बिन्दु $P(x_1, y_1)$ पर स्पर्श रेखा का अभीष्ट समीकरण है।

(ii) प्रवणता के रूप में स्पर्श रेखा का समीकरण ज्ञात करना।

वृत्त $x^2 + y^2 = a^2$ के बिन्दु $P(x_1, y_1)$ पर स्पर्श रेखा का निम्न समीकरण होता है।

$$xx_1 + yy_1 = a^2 \qquad (1)$$

समीकरण (1) को, $y = mx + c$ के रूप में लिखने पर

$$y = -\frac{x_1}{y_1}x + \frac{a^2}{y_1}$$

इस रेखा की प्रवणता

$$m = -x_1 / y_1 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -my_1 \qquad (2)$$

परंतु बिन्दु (x_1, y_1) वृत्त $x^2 + y^2 = a^2$ पर स्थित है

अतः $$x_1^2 + y_1^2 = a^2 \qquad (3)$$

(2) एवं (3) से, $$m^2 y_1^2 + y_1^2 = a^2$$

या $$y_1 = \pm\frac{a}{\sqrt{1+m^2}} \qquad (4)$$

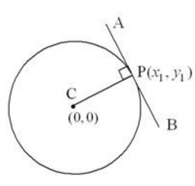
अब, (2) से, $$x_1 = \mp\frac{am}{\sqrt{1+m^2}} \qquad (5)$$

अतः स्पर्श बिन्दु के निर्देशांक $\left(\mp\frac{am}{\sqrt{1+m^2}}, \pm\frac{a}{\sqrt{1+m^2}}\right)$ होंगे तथा (1) से, वृत्त की स्पर्श रेखा का प्रवणता रूप $y = mx \pm a\sqrt{1+m^2}$ होगा।

12.09 अभिलम्ब (Normal)

परिभाषाः एक दिए गए वक्र के किसी बिन्दु पर **अभिलम्ब** वह सरल रेखा होती है जो उस बिन्दु पर स्पर्श रेखा के लम्बवत् होती है।

वृत्त के किसी बिन्दु पर अभिलम्ब वृत्त के केन्द्र से होकर गुजरता है। इस प्रकार दिए गए बिन्दु तथा केन्द्र से गुजरने वाली रेखा का समीकरण ही अभीष्ट अभिलम्ब का समीकरण होगा।



चित्र 12.22

वृत्त के किसी बिन्दु पर अभिलम्ब का समीकरण ज्ञात करना।

(i) जब वृत्त का समीकरण $x^2+y^2=a^2$ के रूप का हो :

हम जानते है कि वृत्त $x^2+y^2=a^2$ के बिन्दु (x_1, y_1) पर स्पर्श रेखा का समीकरण

$$xx_1+yy_1=a^2 \tag{1}$$

या
$$y=-\frac{x_1}{y_1}x+\frac{a^2}{y_1},$$

इसकी प्रवणता $=-x_1/y_1$ है। अतः इसके लम्ब रेखा की प्रवणता $=y_1/x_1$

फलत, चित्र 12.22 में बिन्दु $P(x_1, y_1)$ से गुजरने वाली तथा (1) के लम्बवत् रेखा का समीकरण होगा

$$y-y_1=\frac{y_1}{x_1}(x-x_1) \text{ या } xy_1-yx_1=0$$

जो कि वृत्त के बिन्दु (x_1, y_1) पर अभिलम्ब का समीकरण है।

(ii) वृत्त $x^2+y^2=a^2$ के अभिलम्ब का प्रवणता रूप : (i) में हम देख चुके है कि स्पर्श रेखा की प्रवणता m हो तो अभिलम्ब की प्रवणता $-1/m$ होगी। अतः $(0,0)$ से गुजरने वाली लम्ब रेखा का समीकरण

$$y-0=-\frac{1}{m}(x-0)$$

या
$$x+my=0$$

जो कि अभिलम्ब का अभीष्ट प्रवणता रूप है।

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण 5: वृत्त $x^2+y^2-5x-y+4=0$ एवं सरल रेखा $x-2y+1=0$ के प्रतिच्छेद बिन्दुओं के निर्देशांक ज्ञात कीजिए तथा प्रतिच्छेद जीवा की लम्बाई भी ज्ञात कीजिए।

हल : दिये वृत्त का समीकरण $x^2+y^2-5x-y+4=0$ (1)

है तथा सरल रेखा $x-2y+1=0$ (2)

प्रतिच्छेद बिन्दुओं के निर्देशांक ज्ञात करने के लिये हम समीकरण (1) तथा (2) को x तथा y के लिए हल करेंगे। समीकरण (2) से $x=2y-1$, समीकरण (1) में रखने पर

$$(2y-1)^2+y^2-5(2y-1)-y+4=0$$

या
$$y^2-3y+2=0$$

अतः
$$y=1 \text{ तथा } 2$$

समीकरण (2) से जब $y=1$ तो $x=1$ तथा जब $y=2$ तो $x=3$

अतः दिये गये वृत्त एवं सरल रेखा के प्रतिच्छेद बिन्दुओं P तथा Q के निर्देशांक $(1,1)$ तथा $(3,2)$ होंगे।

इसलिए, प्रतिच्छेद जीवा की लम्बाई $=\sqrt{(3-1)^2+(2-1)^2}=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}$

उदाहरण 6: वृत्त $x^2+y^2-6x+4y-12=0$ की उन स्पर्श रेखाओं के समीकरण ज्ञात कीजिए जो रेखा $4x-3y+6=0$ के समान्तर है।

हल : दिये गये वृत्त का समीकरण $x^2+y^2-6x+4y-12=0$ (1)

का केन्द्र $(3,-2)$ तथा त्रिज्या 5 है।

माना, दी गयी रेखा $4x-3y+6=0$ के समान्तर कोई रेखा है

$$4x-3y+k=0 \tag{2}$$

यह दिए गए वृत्त को स्पर्श करेगी यदि

वृत्त की त्रिज्या = वृत्त के केन्द्र से स्पर्श रेखा पर डाले गए लम्ब की लम्बाई

या $$5 = \pm \frac{4 \times 3 - 3 \times (-2) + k}{\sqrt{16+9}}$$

या $$25 = \pm(18 + k)$$

+ चिह्न लेने पर $k = 7$] – चिह्न लेने पर $k = -43$

अतः (1) से स्पर्श रेखाओं के अभीष्ट समीकरण $4x - 3y + 7 = 0$ तथा $4x - 3y - 43 = 0$ हैं।

प्रश्नमाला 12.2

1. वृत्त $x^2 + y^2 = 25$ तथा रेखा $4x + 3y = 12$ के प्रतिच्छेद बिन्दुओं को ज्ञात कीजिए तथा प्रतिच्छेद जीवा की लम्बाई भी ज्ञात कीजिए।
2. यदि वृत्त $x^2 + y^2 = a^2$ सरल रेखा $y = mx + c$ पर $2l$ लम्बाई का अंतःखण्ड काटता हो तो सिद्ध कीजिए $c^2 = (1+m^2)(a^2 - l^2)$
3. वृत्त $x^2 + y^2 = c^2$ द्वारा रेखा $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ पर काटे गये अन्तःखण्ड की लम्बाई ज्ञात कीजिए।
4. k के किस मान के लिए रेखा $3x + 4y = k$ वृत्त $x^2 + y^2 = 10x$ को स्पर्श करती है।
5. वह प्रतिबन्ध ज्ञात कीजिए जब

   (i) रेखा $y = mx + c$ वृत्त $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ को स्पर्श करे।

   (ii) रेखा $lx + my + n = 0$ वृत्त $x^2 + y^2 = a^2$ को स्पर्श करे।
6. (i) वृत्त $x^2 + y^2 = 64$ की उस स्पर्श रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु $(4,7)$ से गुजरती है।

   (ii) वृत्त $x^2 + y^2 = 4$ की उस स्पर्श रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो x–अक्ष से 60° का कोण बनाती है।
7. c का मान ज्ञात कीजिए जबकि रेखा $y = c$ वृत्त $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 2 = 0$ के बिन्दु (1,1) पर स्पर्श रेखा हो।
8. वृत्त $x^2 + y^2 = 169$ के बिन्दुओं $(5,12)$ तथा $(12,-5)$ पर स्पर्श रेखाओं के समीकरण ज्ञात कीजिए। सिद्ध कीजिए कि वे परस्पर लम्बवत् होंगी। इनके प्रतिच्छेद बिन्दु के निर्देशांक भी ज्ञात कीजिए।

परवलय (Parabola)

12.10 परिभाषा (Definition)

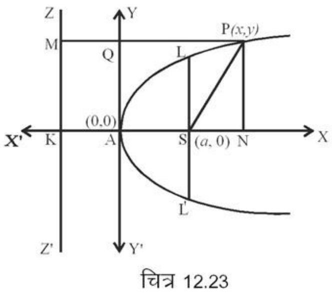
परवलय एक ऐसे चलित बिन्दु का बिन्दुपथ है जो एक समतल में इस प्रकार से गति करता है कि उसकी एक स्थिर बिन्दु तथा एक स्थिर रेखा से दूरी सदैव समान रहती है। स्थिर बिन्दु को परलवय की **नाभि** तथा स्थिर रेखा को **नियता** कहते हैं। नाभि से गुजरने वाली तथा नियता के लम्बवत् रेखा परवलय की **अक्ष** कहलाती है। परवलय एवं अक्ष का प्रतिच्छेद बिन्दु **शीर्ष** कहलाता है।

12.11 परवलय का मानक समीकरण (Standard equation of the Parabola)

माना कि ZZ' परवलय की नियता तथा S परवलय की नाभि है। नाभि S से ZZ' पर SK लम्ब डाला। माना A, SK का मध्य बिन्दु है तो परिभाषानुसार A परवलय पर स्थित होगा। $[\because AS = AK]$

रेखा AS को x- अक्ष, बिन्दु A को मूल बिन्दु और A से जाने वाली तथा AS पर लम्ब रेखा AY को y- अक्ष माना। यदि SK = $2a$ हो तो AS = AK = a होगा, अतः नाभि S के निर्देशांक $(a, 0)$ तथा नियता का समीकरण $x = -a$ होगा।

माना $P(x, y)$ परवलय पर स्थित कोई चर बिन्दु है। SP को मिलाया तथा P से PN तथा PM क्रमशः x- अक्ष तथा नियता ZZ' पर लम्ब डालें। तब परवलय की परिभाषानुसार,



चित्र 12.23

$$SP = PM \text{ या } SP^2 = PM^2$$

या
$$(x-a)^2 + y^2 = (x+a)^2$$

$$x^2 + y^2 - 2ax + a^2 = x^2 + 2ax + a^2$$

$$y^2 = 4ax$$

जो परवलय का अभीष्ट समीकरण है।

12.12 महत्वपूर्ण परिभाषाएँ (Important definitions)

(i) **नामीय जीवा (Focal chord):** परवलय की कोई जीवा जो नाभि से गुजरती है, **नामीय जीवा** कहलाती है।

(ii) **नामीय दूरी (Focal distance):** परवलय पर स्थित किसी भी बिन्दु की नाभि से दूरी, उस बिन्दु की **नामीय दूरी** कहलाती हैं।

(iii) **नामीय गुण (Focal Property):** चित्र 12.25 के अनुसार

$$SP = PM = PQ + QM = a + x$$

अर्थात् परवलय पर स्थित किसी बिन्दु की नाभीय दूरी इसकी भुज तथा शीर्ष से नाभि के मध्य दूरी का योग होता है।

(iv) **नाभिलम्ब (Latus rectum):** वह नाभीय जीवा जो परवलय के अक्ष के लम्बवत् हो, **नाभिलम्ब** कहलाती है।

(v) **द्विकोटि (Double ordinate):** परवलय की वह जीवा जो परवलय के अक्ष के लम्बवत् हो, परवलय की **द्विकोटि** कहलाती है।

(vi) **अर्द्धनाभिलम्ब (Semi latus rectum):** नाभिलम्ब की लम्बाई की आधी लम्बाई परवलय की **अर्द्धनाभिलम्ब** कहलाती है।

(vii) **नाभिलम्ब की लम्बाई (Length of latus rectum):** माना LSL' परवलय $y^2 = 4ax$ का नाभिलम्ब है अतः चित्र 12.23 के अनुसार $SL = SL'$ या $LL' = 2SL$

माना $SL = \ell$, अतः L के निर्देशांक (a, ℓ) होंगे तथा यह परवलय पर स्थित है

$\therefore \quad \ell^2 = 4a \cdot a \qquad$ या $\qquad \ell = \pm 2a$

अतः नाभिलम्ब की लम्बाई $= 2 \times 2a = 4a$

बिन्दु L के निर्देशांक $(a, 2a)$ तथा L' के निर्देशांक $(a, -2a)$ होंगे।

12.13 परवलय के मानक समीकरण का अनुरेखण

(Tracing of the standard equation of the Parabola)

परवलय $y^2 = 4ax$ अथवा $y = \pm 2\sqrt{ax}$ से हम निम्न निष्कर्ष निकालते हैं कि–

(i) यदि x का मान ऋणात्मक है तो y का मान काल्पनिक होगा अतः y- अक्ष के बायीं ओर वक्र का कोई भी भाग नहीं होगा।

(ii) x के प्रत्येक धनात्मक मान के लिए y के दो समान किन्तु विपरीत चिह्न के मान प्राप्त होते हैं। अतः वक्र x- अक्ष के परित सममित होगा।

(iii) यदि x का मान धनात्मक दिशा में बढ़ता है, तब y का मान भी बढ़ता है अर्थात् $x \to \infty$ तब $y \to \infty$, अतः वक्र y- अक्ष के दायीं ओर अनन्त तक फैला हुआ है।

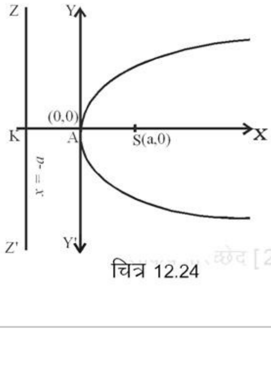
(iv) यदि $x = 0$ तब $y = 0$ होगा, तब वक्र मूलबिन्दु (0, 0) से गुजरेगा।

(v) यदि समीकरण $y^2 = 4ax$ की सहायता से x के कुछ मानों के लिये y के संगत मान ज्ञात करलें तथा प्राप्त समस्त युग्मों को लेखा चित्र में अंकित करके उनको आपस में मिलादें तो इस प्रकार बने वक्र की आकृति चित्र 12.24 में दिखाई आकृति के समान होगी।

12.14 परवलय के चार विभिन्न रूप (Four different forms of Parabola)

1. परवलय $\quad y^2 = 4ax$

शीर्ष	A(0, 0)
नाभि	S(a, 0)
अक्ष	$y = 0$
नियता	$x = -a$
नाभिलम्ब की लम्बाई	$= 4a$
नाभिलम्ब की समीकरण	$x = a$



चित्र 12.24

2. परवलय $y^2 = -4ax$

शीर्ष A(0, 0)

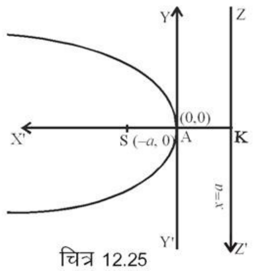
नाभि S(–a, 0)

अक्ष $y = 0$

नियता $x = a$

नाभिलम्ब की लम्बाई $= 4a$

नाभिलम्ब की समीकरण $x = -a$



चित्र 12.25

3. परवलय $x^2 = 4ay$

शीर्ष A(0, 0)

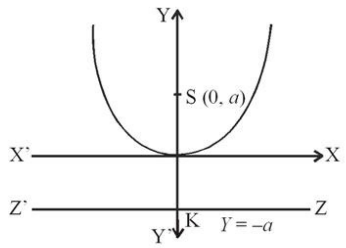
नाभि S(0, a)

अक्ष $x = 0$

नियता $y = -a$

नाभिलम्ब की लम्बाई $= 4a$

नाभिलम्ब की समीकरण $y = a$



चित्र 12.26

4. परवलय $x^2 = -4ay$

शीर्ष A(0, 0)

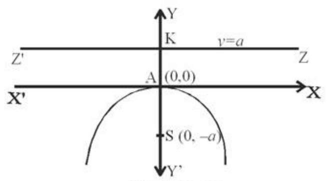
नाभि S(0, –a)

अक्ष $x = 0$

नियता $y = a$

नाभिलम्ब की लम्बाई $= 4a$

नाभिलम्ब की समीकरण $y = -a$



चित्र 12.27

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण 7: उस परवलय का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसकी नाभि (–1, –2) तथा नियता $x - 2y + 3 = 0$ है।

हल : मान लो परवलय पर कोई चर बिन्दु $P(h, k)$ है। परवलय की परिभाषानुसार

$$SP = PM \quad \text{या} \quad SP^2 = PM^2$$

या $$(h+1)^2 + (k+2)^2 = \left(\frac{h-2k+3}{\sqrt{1+4}}\right)^2$$

या $$5\left\{(h+1)^2 + (k+2)^2\right\} = (h-2k+3)^2$$

या $$5\left(h^2 + k^2 + 2h + 4k + 5\right) = h^2 + 4k^2 + 9 - 4hk + 6h - 12k$$

या $$4h^2 + k^2 + 4hk + 4h + 32k + 16 = 0$$

अतः बिन्दु $P(h, k)$ का बिन्दुपथ $4x^2 + y^2 + 4xy + 4x + 32y + 16 = 0$ जो कि अभीष्ट परवलय का समीकरण है।

उदाहरण 8: परवलय $y^2 = 2y - 2x$ का शीर्ष, अक्ष, नाभि, नियता एवं नाभिलम्ब ज्ञात कीजिए।

हल : परवलय का समीकरण $y^2 = 2y - 2x$ है।

$\therefore \quad y^2 - 2y = -2x$

या $\quad y^2 - 2y + 1 = -2x + 1$

या $\quad (y-1)^2 = -2(x - 1/2) \quad (1)$

समीकरण (1) में $y - 1 = Y$ एवं $x - (1/2) = X$ रखने पर परवलय का नया समीकरण होगा

$$Y^2 = -2X \quad (2)$$

जो $y^2 = 4ax$ के रूप का हैं अतः इसकी (2) से तुलना करने पर

$$4a = -2 \Rightarrow a = -1/2$$

परवलय $Y^2 = -2X$ के लिये

(a) शीर्ष (0, 0) अर्थात् $X = 0; Y = 0$

(b) नाभि (–1/2, 0) अर्थात् $X = -1/2; Y = 0$

(c) अक्ष $Y = 0$

(d) नियता $X = 1/2$

(e) नाभिलम्ब $= 4a = 4(-1/2) = 2$ (धनात्मक)

उपर्युक्त परिणामों में $X = x - (1/2)$ एवं $Y = y - 1$ रखने पर दिए हुए परवलय के लिए

(a) शीर्ष $x - (1/2) = 0$ या $x = 1/2$, $y - 1 = 0$ या $y = 1$, अतः शीर्ष के निर्देशांक $(1/2, 1)$ है।

(b) नाभि $x - (1/2) = -1/2$ या $x = 0$ तथा $y - 1 = 0$ या $y = 1$ अतः नाभि के निर्देशांक $(0, 1)$ है।

(c) अक्ष $y - 1 = 0$ या $y = 1$

(d) नियता $x - 1/2 = 1/2 \Rightarrow x = 1$

(e) नाभिलम्ब =2

उदाहरण 9: परवलय $4y^2 - 6x - 4y = 5$ के शीर्ष, अक्ष, नाभि, नियता और नाभिलम्ब (समीकरण एवं लम्बाई) ज्ञात कीजिए।

हल : परवलय का समीकरण $4y^2 - 6x - 4y = 5$

या $\quad \left[y - (1/2)\right]^2 = \frac{6}{4}(x+1)$

या $\quad \left[y - (1/2)\right]^2 = \frac{3}{2}(x+1) \quad (1)$

मूल बिन्दु को $(-1, 1/2)$ पर प्रतिस्थापित करने पर समीकरण (1) का परिवर्तित समीकरण होगा

$$Y^2 = \frac{3}{2}X \quad (2)$$

जहाँ $Y = y - (1/2)$ एवं $X = x + 1$ नाभिलम्ब की लम्बाई $= 3/2$

$\therefore \quad a = 1/4$ नाभिलम्ब $= 3/8$, अतः परवलय (2) के नाभि एवं शीर्ष के निर्देशांक क्रमशः $(3/8, 0)$ एवं $(0, 0)$ है। परवलय (2) के नाभिलम्ब का समीकरण $X = 3/8$ तथा नियता का समीकरण $X = -3/8$ होगा।

अतः परवलय (1) के नाभि एवं शीर्ष के निर्देशांक क्रमशः $(-5/8, 1/2)$ तथा $(-1, 1/2)$ होंगे, नाभिलम्ब की समीकरण $x + 1 = 3/8$ या $x = -5/8$ तथा नियता का समीकरण $x + 1 = -3/8$ या $x = -11/8$ होगा।

उदाहरण 10: परवलय $9x^2-6x+36y+19=0$ का शीर्ष, अक्ष, नाभि और नाभिलम्ब ज्ञात कीजिए।

हल : परवलय का दिया गया समीकरण $9x^2-6x+36y+19=0$ है।

या $$9x^2-6x=-36y-19$$

या $$x^2-(2/3)x=-4y-(19/9)$$

या $$x^2-(2x/3)+(1/3)^2=-4y-(19/9)+(1/9)$$

या $$\left[x-(1/3)\right]^2=-4y-2$$

या $$\left[x-(1/3)\right]^2=-4\left[y+(1/2)\right] \quad (1)$$

मूल बिन्दु (0, 0) को $(1/3,\ -1/2)$ पर स्थानान्तरित करने के लिए (1) में

$$x-(1/3)=X \text{ तथा } y+(1/2)=Y$$

स्थापित करने पर (1) का रूप निम्नांकित होगा

$$X^2=-4Y \quad (2)$$

(यह परवलय $X^2=4aY$ के रूप का है जहाँ $a=-1$ है।)

जिसका अक्ष $X=0$ है

शीर्ष के निर्देशांक $=(0,\ 0)$ अर्थात् $X=0$ तथा $Y=0$

नाभि के निर्देशांक $=(0,\ -1)$ अर्थात् $X=0$ तथा $Y=-1$

नाभिलम्ब की लम्बाई $=4\times1=4 \quad (\because\ a=-1)$

दिये हुए परवलय (1) के लिए उपर्युक्त परिणामों में X तथा Y के मान रखने पर अक्ष का समीकरण

$$X=0\Rightarrow x-1/3=0\Rightarrow x=1/3$$

शीर्ष के निर्देशाँक $X=0\Rightarrow x=1/3;\ Y=0\Rightarrow y+(1/2)=0\Rightarrow y=-1/2$

अतः शीर्ष के निर्देशांक $=(1/3,\ -1/2)$

नाभि के निर्देशांक $X=0\Rightarrow x-(1/3)=0\Rightarrow x=1/3;\ Y=-1\Rightarrow y+(1/2)=-1\Rightarrow y=-3/2$

अतः नाभि के निर्देशांक $=(1/3,\ -3/2)$, नाभिलम्ब की लम्बाई $=4\times1=4$

प्रश्नमाला 12.3

1. उस परवलय का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसकी
   (i) नाभि (2, 3) तथा नियता $x-4y+3=0$ है। (ii) नाभि (–3, 0) तथा नियता $x+5=0$ है।
2. निम्नलिखित परवलय के शीर्ष, अक्ष, नाभि तथा नाभिलम्ब ज्ञात कीजिए।
   (i) $y^2=8x+8y$ (ii) $x^2+2y=8x-7$
3. परवलय $y^2=4ax$ की एक द्विकोटि की लम्बाई $8a$ है। सिद्ध कीजिए कि मूलबिन्दु से इस द्विकोटि के शीर्षों को मिलाने वाली रेखाएँ लम्बवत् होंगी।
4. यदि परवलय का शीर्ष तथा नाभि x- अक्ष पर मूलबिन्दु से a तथा a' दूरी पर हो, तो सिद्ध कीजिए कि परवलय की समीकरण $y^2=4(a'-a)(x-a)$ होगी।
5. PQ एक परवलय की द्विकोटि है। इसके समत्रिभाजन वाले बिन्दुओं का बिन्दुपथ ज्ञात कीजिए।
6. सिद्ध कीजिए कि परवलय $y^2=4ax$ में शीर्ष से गुजरने वाली सभी जीवाओं के मध्य बिन्दुओं का बिन्दुपथ भी परवलय $y^2=2ax$ होता है।

12.15 परवलय एवं सरल रेखा का प्रतिच्छेदन (Intersection of a Parabola and a line)

माना परवलय समीकरण है $$y^2 = 4ax \quad (1)$$

तथा सरल रेखा का समीकरण है $$y = mx + c \quad (2)$$

y का मान समीकरण (1) से (2) में रखने पर

$$(mx+c)^2 = 4ax$$

या $$m^2x^2 + 2(mc-2a)x + c^2 = 0 \quad (3)$$

यह x में द्विघातीय है माना इसके मूल x_1 एवं x_2 है अतः

$$x_1 + x_2 = \frac{-2(mc-2a)}{m^2} \quad (4)$$

एवं $$x_1x_2 = \frac{c^2}{m^2} \quad (5)$$

$$\therefore \quad x_1 - x_2 = \sqrt{(x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2} = \sqrt{\left(\frac{4(cm-2a)^2}{m^4} - \frac{4c^2}{m^2}\right)}$$

$$= \frac{1}{m^2}\sqrt{4m^2c^2 - 16amc + 16a^2 - 4m^2c^2}$$

अतः $$x_1 - x_2 = \frac{4}{m^2}\sqrt{a(a-mc)} \quad (6)$$

समीकरण (4) एवं (6) को सरल करने पर x_1 तथा x_2 के मान ज्ञात किए जा सकते हैं। x_1 तथा x_2 के मानों को समीकरण (2) में रखने पर y के संगत मान y_1 तथा y_2 ज्ञात किये जा सकते हैं। अतः सरल रेखा परवलय को दो बिन्दुओं पर काटती है।

12.16 प्रतिच्छेद बिन्दुओं की प्रकृति (Nature of the points of intersection)

उपर्युक्त समीकरण (3) के मूलों के वास्तविक एवं भिन्न, समान या काल्पनिक होने के अनुसार ही प्रतिच्छेद बिन्दु भी वास्तविक, संपाती या काल्पनिक होते है जिसके लिए व्यंजक

$$\{2(mc-2a)\}^2 - 4m^2c^2 >=< 0$$

या $$a(a-mc) >=< 0$$

या $$a >=< mc$$

12.17 सरल रेखा $y = mx + c$ द्वारा परवलय $y^2 = 4ax$ को स्पर्श करने का प्रतिबन्ध (Condition for straight line $y = mx + c$ to be tangent to the parabola $y^2 = 4ax$)

यदि सरल रेखा एवं परवलय के प्रतिच्छेद बिन्दु संपाती हो तो रेखा परवलय को स्पर्श करेगी। अतः रेखा (2) परवलय (1) को स्पर्श करेगी यदि समीकरण (3) के मूल समान हो, अर्थात्

$$4(mc-2a)^2 = 4m^2c^2 \quad (B^2 = 4AC)$$

या $$a(a-mc) = 0$$

या $$a - mc = 0$$

अतः $$c = a/m$$

यह रेखा (2) के परवलय (1) को स्पर्श करने का अभीष्ट प्रतिबन्ध है। c का मान समीकरण (2) में रखने पर परवलय का स्पर्श रेखा का समीकरण $y = mx + (a/m)$ प्राप्त होता है। अतः रेखा $y = mx + (a/m)$ (m के प्रत्येक मान के लिये) परवलय $y^2 = 4ax$ को स्पर्श करती है।

12.18 स्पर्श बिन्दु के निर्देशांक (Co-ordinates of the point of contact)

अनुच्छेद 12.15 के समीकरण (3) में $c = a/m$ प्रतिस्थापित करने पर,

$$m^2x^2 + 2x\left(\frac{ma}{m} - 2a\right) + \frac{a^2}{m^2} = 0$$

या
$$\left(mx - \frac{a}{m}\right)^2 = 0$$

अर्थात् $x = \frac{a}{m^2}, x$ का मान (2) में रखने पर $y = m\left(\frac{a}{m^2}\right) + \frac{a}{m} = \frac{2a}{m}$

अतः स्पर्श बिन्दु के निर्देशांक $\left(\frac{a}{m^2}, \frac{2a}{m}\right)$ होंगे।

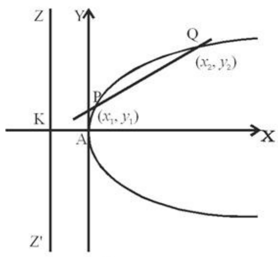
12.19 अन्तः खण्ड की लम्बाई (Length of intercept)

माना सरल रेखा का समीकरण है

$$y = mx + c \qquad (1)$$

एवं परवलय का समीकरण है

$$y^2 = 4ax \qquad (2)$$



चित्र 12.28

समीकरण (1) एवं (2) के प्रतिच्छेद बिन्दु $P(x_1, y_1)$ तथा $Q(x_2, y_2)$ है चूंकि बिन्दु P एवं Q सरल रेखा पर स्थित हैं अतः

$$y_1 = mx_1 + c \text{ तथा } y_2 = mx_2 + c$$

$$\therefore \quad y_1 - y_2 = m(x_1 - x_2) \qquad (3)$$

अब $$PQ = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + m^2(x_1 - x_2)^2} \qquad [(3) \text{ से}]$$

$$= (x_1 - x_2)\sqrt{1 + m^2}$$

परन्तु $$(x_1 - x_2) = \frac{4}{m^2}\sqrt{a(a - mc)}$$ [अनुच्छेद 12.15, समीकरण (6) से]

$$\therefore \quad PQ = \frac{4}{m^2}\sqrt{\left[a(a - mc)(1 + m^2)\right]}$$

12.20 स्पर्श रेखा (Tangent)

(i) परवलय के किसी बिन्दु पर स्पर्श रेखा का समीकरण

माना $P(x_1, y_1)$ तथा $Q(x_2, y_2)$ परवलय पर दो बिन्दु हैं

$$\therefore \quad y_1^2 = 4ax_1 \qquad (1)$$

तथा $$y_2^2 = 4ax_2 \qquad (2)$$

रेखा PQ का समीकरण, $$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \qquad (3)$$

समीकरण (1) एवं (2) से

$$y_2^2 - y_1^2 = 4a(x_2 - x_1)$$

या $$(y_2 - y_1)(y_2 + y_1) = 4a(x_2 - x_1)$$

या $$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4a}{y_1 + y_2} \qquad (4)$$

अब समीकरण (3) एवं (4) की सहायता से PQ का समीकरण होगा

$$y - y_1 = \frac{4a}{y_1 + y_2}(x - x_1) \qquad (5)$$

जब बिन्दु Q बिन्दु P पर सम्पाती हो तो जीवा PQ बिन्दु P पर स्पर्श रेखा हो जाती है। अतः $y_2 = y_1$ समीकरण (5) में रखने पर

$$y - y_1 = \frac{4a}{2y_1}(x - x_1)$$

या $$yy_1 - y_1^2 = 2a(x - x_1)$$

या $$yy_1 = 2ax - 2ax_1 + y_1^2$$

या $$yy_1 = 2ax - 2ax_1 + 4ax_1$$

$yy_1 = 2a(x + x_1)$, जो कि स्पर्श रेखा का अभीष्ट समीकरण है।

(ii) ढाल के रूप में स्पर्श रेखा का समीकरण

माना परवलय का समीकरण $$y^2 = 4ax \qquad (1)$$

है तथा इसके बिन्दु $P(x_1, y_1)$ पर स्पर्श रेखा का समीकरण

$$yy_1 = 2a(x + x_1) \qquad (2)$$

माना $$m = \frac{2a}{y_1}$$

या $$y_1 = \frac{2a}{m}$$

चूँकि बिन्दु $P(x_1, y_1)$ परवलय पर स्थित है अतः

$$y_1 = 4ax_1$$

या $$\frac{4a^2}{m^2} = 4ax_1$$

या $$x_1 = \frac{a}{m^2}$$

x_1 तथा y_1 के मानों को समीकरण (2) में रखने पर अभीष्ट स्पर्श रेखा का समीकरण होगा

$$y\left(\frac{2a}{m}\right) = 2a\left(x + \frac{a}{m^2}\right),$$

$y = mx + \frac{a}{m}$ तथा स्पर्श बिन्दु के निर्देशांक $\left(\frac{a}{m^2}, \frac{2a}{m}\right)$ होंगे।

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण 11: सिद्ध कीजिए कि रेखा $y = mx + c$ परवलय $y^2 = 4a(x+a)$ को स्पर्श करती है यदि $c = am + \dfrac{a}{m}$.

हल : यदि सरल रेखा $y = mx + c$ परवलय $y^2 = 4a(x+a)$ को स्पर्श करती है, तो इसे दो संपाती बिन्दुओं पर काटेगी। रेखा एवं परवलय के समीकरण में से y विलोपित करने पर

$$(mx+c)^2 = 4a(x+a)$$

या $$m^2x^2 + 2(mc-2a)x + (c^2 - 4a^2) = 0$$

इस समीकरण के मूल समान होंगे यदि

$$4(mc-2a)^2 - 4m^2(c^2-4a^2) = 0 \qquad [B^2 - 4AC = 0 \text{ से}]$$

या $$m^2c^2 + 4a^2 - 4amc - m^2c^2 + 4a^2m^2 = 0$$

या $$4a(a - mc + am^2) = 0$$

या $$a - mc + am^2 = 0$$

अतः $$c = am + \frac{a}{m}$$

उदाहरण 12: परवलय $y^2 = 4x$ तथा $x^2 = 32y$ को स्पर्श करने वाली रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल : हम जानते है कि रेखा

$$y = mx + \frac{1}{m} \qquad (1)$$

m के प्रत्येक मान के लिए परवलय $y^2 = 4x$ को स्पर्श करती है। यदि (1) परवलय $x^2 = 32y$ को भी स्पर्श करे तो समीकरण (1) एवं परवलय $x^2 = 32y$ के प्रतिच्छेद बिन्दु संपाती होने चाहिए।

अर्थात् समीकरण

$$x^2 = 32\left(mx + \frac{1}{m}\right)$$

या $$mx^2 - 32m^2x - 32 = 0$$

के मूल समान होने चाहिए। अतः शर्त $B^2 - 4AC = 0$ का उपयोग करने पर

$$(-32m^2)^2 - 4m(-32) = 0$$

$\Rightarrow$ $$8m^3 = -1 \Rightarrow m = -1/2$$

अतः परवलयों की उभयनिष्ठ स्पर्श रेखा का समीकरण होगा

$$y = -\frac{x}{2} + \frac{1}{(-1/2)}$$

या $$x + 2y + 4 = 0$$

उदाहरण 13: परवलय $y^2 = 8x$ की वह स्पर्श रेखा ज्ञात कीजिए जो रेखा $2y - x + 1 = 0$ के लम्बवत् है।

हल : सरल रेखा $2y - x + 1 = 0$ के लम्बवत् सरल रेखा का समीकरण होगा

$$y + 2x + k = 0 \qquad (1)$$

रेखा (1) परवलय $y^2 = 8x$ को स्पर्श करेगी यदि समीकरण $(2x + k)^2 = 8x$

या $\quad 4x^2 + 4(k-2)x + k^2 = 0$

के मूल सम्पाती हो, जिसके लिए शर्तानुसार $(B^2 = 4AC)$

$$16(k-2)^2 = 4 \times 4 \times k^2$$

$\Rightarrow \quad k^2 - 4k + 4 = k^2 \qquad \Rightarrow \qquad k = 1$

अतः अभीष्ट स्पर्श रेखा का समीकरण होगा

$$y + 2x + 1 = 0$$

12.21 अभिलम्ब का समीकरण (Equation of normal)

(i) परवलय $y^2 = 4ax$ के बिन्दु (x_1, y_1) पर अभिलम्ब का समीकरण ज्ञात करना।

परवलय $y^2 = 4ax$ के बिन्दु (x_1, y_1) पर स्पर्श रेखा का समीकरण

$$yy_1 = 2a(x + x_1) \qquad (1)$$

यदि स्पर्श रेखा (1) की प्रवणता $m = \dfrac{2a}{y_1}$ हो तब $P(x_1, y_1)$ पर अभिलम्ब की प्रवणता $= \dfrac{-y_1}{2a}$ होगी अतः परवलय $y^2 = 4ax$ के बिन्दु (x_1, y_1) पर अभिलम्ब का समीकरण होगा

$$y - y_1 = \frac{-y_1}{2a}(x - x_1)$$

(ii) ढाल के रूप में अभिलम्ब का समीकरण

परवलय $y^2 = 4ax$ का किसी बिन्दु $P(x_1, y_1)$, पर अभिलम्ब का समीकरण है

$$y - y_1 = \frac{-y_1}{2a}(x - x_1) \qquad (1)$$

यदि अभिलम्ब की प्रवणता m हो तो

$$\frac{-y_1}{2a} = m \qquad \text{या} \qquad y_1 = -2am \qquad (2)$$

चूंकि बिन्दु $P(x_1, y_1)$ परवलय पर स्थित है अतः

$$y_1^2 = 4ax_1 \qquad \text{अतः} \qquad (-2am)^2 = 4ax_1 \qquad \text{या} \qquad x_1 = am^2$$

x_1, y_1 का मान समीकरण (1) में रखने पर अभीष्ट अभिलम्ब का समीकरण होगा

$$y = mx - 2am - am^3 \qquad (3)$$

समीकरण (3) में m उस कोण की स्पर्शज्या है जो अभिलम्ब परवलय के अक्ष के साथ बनाता है। अभिलम्ब के पाद के निर्देशांक $(am^2, -2am)$ होंगे।

12.22 किसी बिन्दु से परवलय पर तीन अभिलम्ब खींचें जा सकते है।
(Three normals can be drawn from any point on the parabola)

माना परवलय का समीकरण $y^2 = 4ax$ तथा अभिलम्ब का समीकरण $y = mx - 2am - am^3$ है। यदि यह अभिलम्ब दिए हुए बिन्दु (x_1, y_1) से गुजरता है तब $y_1 = mx_1 - 2am - am^3$ या $am^3 + (2a - x_1)m + y_1 = 0$

यह m में त्रिघातीय समीकरण है इससे m के तीन मान प्राप्त होते है। अतः m के प्रत्येक मान के लिए बिन्दु (x_1, y_1) से परवलय पर तीन अभिलम्ब खीचें जा सकते है।

गुणधर्म : (i) यदि किसी बिन्दु से परवलय पर तीन अभिलम्ब खींचें जा सकते हैं तब उनकी प्रवणताओं का योग शून्य होता है।

(ii) इनके पादों की कोटियों का बीजीय योग शून्य होता है।

प्रमाणः बिन्दु (x_1, y_1) से गुजरने वाले परवलय $y^2 = 4ax$ के अभिलम्ब का समीकरण

$$am^3 + (2a - x_1)m + y_1 = 0 \tag{1}$$

है, यह m में त्रिघातीय है माना इसके मूल है m_1, m_2 तथा m_3

(i) मूलों का योग $m_1 + m_2 + m_3 = \dfrac{-m^2 \text{ का गुणाँक}}{m^3 \text{ का गुणाँक}} = \dfrac{0}{a} = 0$

अतः प्रवणताओं का योग शून्य है।

(ii) अभिलम्ब के पादों की कोटियों (y-निर्देशांक) का योग

$$= -2am_1 - 2am_2 - 2am_3$$

$$= -2a(m_1 + m_2 + m_3) = -2a \times 0 = 0$$

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण 14: सिद्ध कीजिए कि परवलय $y^2 = 4ax$ की वह जीवा जिसका समीकरण $y - x\sqrt{2} + 4a\sqrt{2} = 0$ है, परवलय पर अभिलम्ब है एवं उसकी लम्बाई $6a\sqrt{3}$ है।

हल : परवलय $y^2 = 4ax$ के किसी बिन्दु m के पदों में अभिलम्ब का समीकरण है।

$$y = mx - 2am - am^3 \tag{1}$$

जीवा का समीकरण है,

$$y = x\sqrt{2} - 4a\sqrt{2} \tag{2}$$

समीकरण (2) परवलय पर अभिलम्ब होगी, यदि यह समीकरण (1) की तरह हो। अतः (1) एवं (2) की तुलना करने पर,

$$m = \sqrt{2}\ ;\ -4a\sqrt{2} = -2am - am^3$$

जो कि स्वतः सन्तुष्ट होते है। अतः रेखा (2) परवलय पर अभिलम्ब है। समीकरण (2) से y का मान परवलय के समीकरण में रखने पर

$$\left(x\sqrt{2} - 4a\sqrt{2}\right)^2 = 4ax$$

या $$2x^2 + 32a^2 - 16ax - 4ax = 0$$

$$x^2 - 10ax + 16a^2 = 0$$

या $$(x - 2a)(x - 8a) = 0$$

अतः $x = 2a, 8a$ इसी प्रकार $y = -2a\sqrt{2}, 4a\sqrt{2}$

अतः अभिलम्ब जीवा की लम्बाई $= \sqrt{\left[(8a - 2a)^2 + \left(4a\sqrt{2} + 2a\sqrt{2}\right)^2\right]} = \sqrt{36a^2 + 72a^2} = 6a\sqrt{3}$

प्रश्नमाला 12.4

1. उन प्रतिच्छेद बिन्दुओं के निर्देशांक ज्ञात कीजिए जहाँ सरल रेखा $4y+3x+6=0$ परवलय $2y^2=9x$ को काटती है।
2. परवलय $y^2=8x$ पर रेखा $4y-3x=8$ द्वारा काटी गई जीवा की लम्बाई ज्ञात कीजिए।
3. सिद्ध करो कि सरल रेखा $x+y=1$ परवलय $y=x-x^2$ को स्पर्श करती है।
4. परवलय $y^2=4ax$ को रेखा $\ell x+my+n=0$ द्वारा स्पर्श करने का प्रतिबन्ध ज्ञात कीजिए।
5. सिद्ध कीजिए कि x- अक्ष से "α" कोण बनाने वाली परवलय $y^2=4ax$ की नाभीय जीवा की लम्बाई $4a\operatorname{cosec}^2\alpha$ होगी।
6. वह प्रतिबन्ध ज्ञात कीजिए जिससे रेखा $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$ परवलय $y^2=4ax$ को स्पर्श करे।
7. निम्न परवलयों पर स्पर्श रेखाओं के समीकरण ज्ञात कीजिए–

   (i) $y^2=6x$, जो रेखा $2x-3y=4$ के समान्तर हो। (ii) $y^2=8x$, जो रेखा $2x-y+1=0$ के लम्बवत् हो।
8. k के किस मान के रेखा $2x-3y=k$ परवलय $y^2=6x$ को स्पर्श करेगी?
9. स्पर्श रेखाओं के समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु (4, 10) से परवलय $y^2=8x$ पर खींची जाती है।
10. निम्न परवलयों पर अभिलम्ब के समीकरण ज्ञात कीजिए–

    (i) $y^2=8x$ के बिन्दु $(2,4)$ पर (ii) $y^2+12x=0$ की नाभिलम्ब के ऊपरी सिरे पर
11. निम्न परवलयों पर अभिलम्ब के समीकरण ज्ञात कीजिए–

    (i) $y^2=4x$ जो रेखा $y-2x+5=0$ के समान्तर हो।

    (ii) $y^2=4x$ जो रेखा $x+3y-1=0$ के लम्बवत् हो।
12. सिद्ध कीजिए कि रेखा $2x+y-12a=0$ परवलय $y^2=4ax$ पर अभिलम्ब जीवा है तथा उसकी लम्बाई $5\sqrt{5}a$ इकाई है।

दीर्घवृत्त (Ellipse)

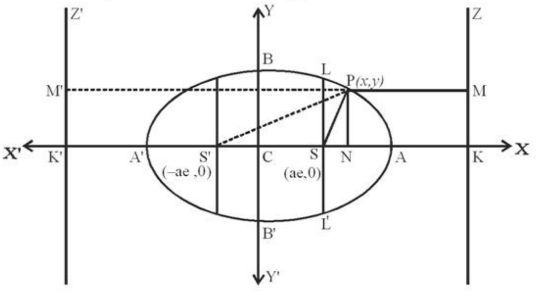
12.23 परिभाषा (Definition)

दीर्घवृत्त एक ऐसे चलित बिन्दु का बिन्दुपथ है जो इस प्रकार गमन करे कि उसका एक निश्चित बिन्दु तथा एक निश्चित रेखा से दूरी का अनुपात एक अचर राशि हो एवं उसका मान सदैव एक से कम हो। इस निश्चित बिन्दु को दीर्घवृत्त की **नाभि** तथा निश्चित रेखा को **नियता** कहते है। अचर अनुपात (e) उत्क्रेन्द्रता कहलाती है।

12.24 दीर्घवृत्त का मानक समीकरण (Standard equation of the Ellipse)

माना कि बिन्दु S दीर्घवृत्त की नाभि, रेखा ZK नियता, e उत्क्रेन्द्रता तथा $P(x, y)$ कोई चलित बिन्दु है।

क्योंकि यहाँ $e<1$ है, इसीलिये दीर्घवृत्त, SK को e : 1 के अनुपात में A तथा A' पर क्रमशः अन्तः एवं बाह्य विभाजित करेगा।



चित्र 12.29

$$\frac{AS}{AK}=\frac{e}{1} \quad \text{या} \quad AS=e\cdot AK \qquad (1)$$

इसी प्रकार क्योंकि A' दीर्घवृत्त पर स्थित है अतः

$$\frac{A'S}{A'K}=\frac{e}{1} \quad \text{या} \quad A'S=e\cdot A'K \qquad (2)$$

मानलों $AA'=2a$ तथा C इसका मध्य बिन्दु है तब $CA=CA'=a$ (1) एवं (2) को जोड़ने पर,

$$AS+A'S=e(AK+A'K) \quad \text{या} \quad AA'=e\{CK-CA+CA'+CK\}$$

या $\quad AA'=e(2CK),\qquad [\because CA=CA']$

या $\quad 2a=2e\cdot CK,\qquad [\because AA'=2a]$

अतः $\quad CK=a/e \qquad (3)$

अब (2) में से (1) को घटाने पर $\quad A'S-AS=e(A'K-AK)$

या $\quad (CA'+CS)-(CA-CS)=e(AA')$

$$2CS=eAA', \qquad [\because CA=CA']$$

$$2CS=e\cdot 2a, \qquad [\because AA'=2a]$$

अतः $\quad CS=ae \qquad (4)$

अब हम C को मूल बिन्दु, CAX को x- अक्ष तथा इसके लम्बवत् रेखा CY को y- अक्ष मानते हुए दीर्घवृत्त का समीकरण ज्ञात करेंगे। समीकरण (4) से नाभि के निर्देशांक $S(ae,\,0)$ तथा समीकरण (3) से नियता का समीकरण $X=a/e$ है। बिन्दु P से PN तथा PM क्रमशः x- अक्ष और नियता ZK पर लम्ब डालें एवं P तथा S को मिलायें, तो दीर्घवृत्त की परिभाषानुसार,

$$SP=ePM$$

या $$SP^2=e^2PM^2$$

या $$SN^2+NP^2=e^2NK^2$$

या $$(CN-CS)^2+NP^2=e^2(CK-CN)^2$$

या $$(x-ae)^2+y^2=e^2\left(\frac{a}{e}-x\right)^2 \qquad \text{((3) एवं (4) से)}$$

या $$x^2(1-e^2)+y^2=a^2(1-e^2) \quad \text{या} \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2(1-e^2)}=1 \qquad (5)$$

समीकरण (5) में $a^2(1-e^2)=b^2$ रखने पर, दीर्घवृत्त का समीकरण मानक रूप में निम्न प्रकार से लिखा जा सकता है।

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \quad \text{जहाँ} \quad b^2=a^2(1-e^2) \qquad (6)$$

टिप्पणी : (1) समीकरण (5) में $x=0$ रखने पर हमें दीर्घवृत्त और y- अक्ष $(x=0)$ के परिच्छेद बिन्दु B एवं B' के निर्देशांक क्रमशः $\left(o,\,a\sqrt{1-e^2}\right)$ तथा $\left(o,\,-a\sqrt{1-e^2}\right)$ अर्थात् $(0,\,b)$ एवं $(0,\,-b)$ प्राप्त होंगे।

(2) यदि समीकरण (6) में $a=b$ हो तो दीर्घवृत्त $x^2+y^2=a^2$ में रूपान्तरित हो जाता है, जो एक वृत्त का मानक समीकरण है जिसका केन्द्र मूल बिन्दु एवं त्रिज्या a है।

12.25 कुछ परिभाषाएं

1. **दीर्घ अक्ष** (Major axis): दोनों शीर्ष A तथा A' को मिलाने वाली रेखा AA' **दीर्घ अक्ष** कहलाती है तथा इसकी लम्बाई $2a$ होती है। (देखे चित्र 12.29)
2. **लघु अक्ष** (Minor axis): दीर्घ अक्ष पर लम्ब रेखा तथा केन्द्र C(0, 0) से गुजरने वाली रेखा BB' **लघु अक्ष** कहलाती तथा उसकी लम्बाई $2b$ होती है। (देखे चित्र 12.29)
3. **मुख्य अक्ष** (Principal axes): दीर्घ तथा लघु दोनों ही अक्ष दीर्घवृत्त के **मुख्य अक्ष** कहलाते है।
4. **नाभिलम्ब** (Latus rectum): यह वह रेखा है जो नाभि से गुजरती है तथा दीर्घ अक्ष पर लम्ब होती है, नाभिलम्ब कहलाती है।

12.26 दीर्घवृत्त के मानक समीकरण का अनुरेखण (Tracing of standard equation of the ellipse)

दीर्घवृत्त का मानक समीकरण है $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (1)$$

समीकरण (1) से $$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{(a^2-x^2)} \qquad (2)$$

तथा $$x=\pm\frac{a}{b}\sqrt{(b^2-y^2)} \qquad (3)$$

समीकरण (2) में x की जगह $-x$ रखने पर हम देखते है कि y के मान में कोई परिवर्तन नहीं होता। अतः दीर्घवृत्त y- अक्ष के सापेक्ष सममित है। इसी प्रकार समीकरण (3) में y की जगह $-y$ रखने पर x के मान में कोई परिवर्तन नही होता। अतः दीर्घवृत्त x– अक्ष के सापेक्ष सममित है।

समीकरण (2) में यदि $x>a$, तो y काल्पनिक होता है अतः दीर्घवृत्त का कोई भी भाग, इसके शीर्ष A के दांई और शीर्ष A' के बाई ओर नहीं होगा।

इसी प्रकार समीकरण (3) में यदि $y>b$ हो तो x काल्पनिक होता है, अतः दीर्घवृत्त का कोई भी भाग B के ऊपर तथा B' के नीचे नहीं होगा। इसीलिए दीर्घवृत्त एक बन्द वक्र है।

समीकरण (2) से हम देखते है कि जब x बढ़ता है तो y घटता है। इसी प्रकार समीकरण (3) से, जब y बढ़ता है तो x घटता है। अतः दीर्घवृत्त एक वृत्त के समान दिखायी देता है जो एक व्यास के अनुदिश निकला हुआ है तथा इसके लम्ब व्यास के अनुदिश चपटा है।

उपर्युक्त तथ्यों एवं जानकारी के आधार पर वक्र को खींचने पर चित्र 12.29 की आकृति प्राप्त होती है।

12.27 दीर्घवृत्त का दूसरा रूप (Another form of the ellipse)

यदि दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ में $b>a$ हो तो $a^2=b^2(1-e^2)$ होगा। दीर्घवृत्त के इस रूप में x– अक्ष लघु अक्ष तथा y– अक्ष दीर्घ अक्ष होती है, यहाँ दीर्घ अक्ष की लम्बाई $2b$ तथा लघु अक्ष की लम्बाई $2a$ होती है।

इसकी नाभियों S एवं S' के निर्देशाँक क्रमशः $(0, be)$ एवं $(0, -be)$ होते है तथा नियताओं के समीकरण $y=\pm b/e$ होते है, यहाँ नाभिलम्ब की लम्बाई $2a^2/b$ होगी।

12.28 दीर्घवृत्त की दूसरी नाभि और दूसरी नियता (Second focus and second directrix of the ellipse)

चित्र 12.29 के अनुसार x– अक्ष पर मूल बिन्दु की बायीं तरफ एक बिन्दु S' तथा एक अन्य बिन्दु K' इस प्रकार लिए जाएँ कि

$$CS'=CS=ae \qquad \text{तथा} \qquad CK'=CK=a/e$$

$\therefore$ रेखा K' M' का समीकरण होगा

$$x=-a/e \qquad (1)$$

अब दीर्घवृत्त पर बिन्दु $P(x, y)$ से रेखा K'Z' पर लम्ब PM' डाले। अब यदि S' को नाभि एवं रेखा K' M' को नियता मानें तो दीर्घवृत्त की परिभाषानुसार

$$PS'=ePM' \qquad \text{या} \qquad (PS')^2=e^2(PM')^2 \qquad (2)$$

चूंकि बिन्दु S' के निर्देशांक $(-ae, 0)$ है अतः समीकरण (2) से,

$$(x+ae)^2+y^2=e^2(x+a/e)^2$$

या $$x^2+2aex+a^2e^2+y^2=e^2x^2+2aex+a^2$$

या $$x^2(1-e^2)+y^2=a^2(1-e^2)$$

या $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2(1-e^2)}=1$$

या $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \text{ जहाँ } b^2=a^2(1-e^2)$$

परन्तु यह उसी दीर्घवृत्त का समीकरण है जिसमें नाभि S एवं नियता KM है। अतः दीर्घवृत्त में दो नाभि एवं दो नियता होती है।

12.29 नाभिक गुण (Focal Property)

दीर्घवृत्त की परिभाषा से

$$SP = e \cdot PM = eNK = e(CK - CN) \quad (1)$$

तथा
$$S'P = ePM' = eNK' = e(CN + CK') \quad (2)$$

अतः
$$SP + S'P = e(CK + CK') = e\left(\frac{a}{e} + \frac{a}{e}\right) = 2a = \text{दीर्घ अक्ष}$$

अर्थात् दीर्घवृत्त पर किसी बिन्दु की नाभीय दूरियों का योग अचर होता है तथा यह दीर्घ अक्ष की लम्बाई के बराबर होता है। उपर्युक्त महत्वपूर्ण गुणधर्म के आधार पर दीर्घवृत्त की परिभाषा निम्न प्रकार से दी जा सकती है:

"दीर्घवृत्त उस चलित बिन्दु का बिन्दुपथ होता है जिसकी दो स्थिर बिन्दुओं (नाभियों) से दूरियों का योग अचर होता है।"

12.30 दीर्घवृत्त के नाभिलम्बों की लम्बाई (Length of the latus-rectum of the ellipse)

चित्र 12.29 में LSL' एक नाभिलम्ब है तथा L एवं L' इसके सिरे है जो कि दीर्घवृत्त पर स्थित है, यहाँ L एवं L' के लिये $x = ae$ है। माना $SL = y'$ है। तब L के निर्देशांक $(ae,\, y')$ होंगे। चूंकि बिन्दु L, दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ पर स्थित है

अतः
$$\frac{a^2e^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$$

या
$$y'^2 = \frac{b^4}{a^2} \qquad \left[\because\ b^2 = a^2(1 - e^2)\right]$$

या
$$y' = \pm\frac{b^2}{a}$$

$\therefore$ नाभिलम्ब की लम्बाई
$$= LL' = 2SL = \frac{2b^2}{a}$$

यहाँ नाभिलम्ब के सिरों L एवं L' के निर्देशांक क्रमशः $(ae,\, b^2/a)$ एवं $(ae,\, -b^2/a)$ होंगे।

इसी प्रकार दूसरी नाभिलम्ब, जो S' से गुजरती है, के सिरों के निर्देशांक $(-ae,\, -b^2/a)$ एवं $(-ae,\, b^2/a)$ होंगे।

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण 15: उस दीर्घवृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसकी नाभि (–1, 1), नियता $x - y + 3 = 0$ और उत्केन्द्रता $e = 1/2$ हो।

हल : माना कि दीर्घवृत्त पर कोई बिन्दु P(*h*, *k*) है तब परिभाषानुसार

P की नाभि से दूरी = *e* (P की नियता से दूरी)

या
$$PS = e(PM)$$

या
$$(PS)^2 = e^2(PM)^2$$

या
$$(h+1)^2 + (k-1)^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{h-k+3}{\sqrt{2}}\right)^2$$

या
$$8(h^2 + k^2 + 2h - 2k + 2) = (h - k + 3)^2$$

या
$$7h^2 + 2hk + 7k^2 + 10h - 10k + 7 = 0$$

अतः बिन्दु $P(h,\, k)$ का बिन्दुपथ $7x^2 + 2xy + 7y^2 + 10x - 10y + 7 = 0$ जो कि अभीष्ट दीर्घवृत्त का समीकरण है।

उदाहरण 16: निम्नलिखित दीर्घवृत्तों की उत्क्रेन्द्रता, नाभिलम्ब और नाभियों के निर्देशाँक ज्ञात कीजिए:

(i) $3x^2 + 4y^2 = 12$ (ii) $9x^2 + 5y^2 - 30y = 0$

हल : (i) दीर्घवृत्त के समीकरण को निम्न प्रकार से लिखा जा सकता है

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1, \quad (1)$$

यहाँ $a^2 = 4$ तथा $b^2 = 3$

(i) उत्क्रेन्द्रता : चूँकि $b^2 = a^2\left(1 - e^2\right)$ $\therefore$ $3 = 4\left(1 - e^2\right) \Rightarrow e = 1/2$

(ii) नाभिलम्ब : $= \frac{2b^2}{a} = \frac{2 \times 3}{2} = 3$

(iii) नाभि के निर्देशांक : $(ae, 0)$ तथा $(-ae, 0)$ अर्थात् $(1, 0)$ और $(-1, 0)$

(ii) यहाँ दीर्घवृत्त का समीकरण है

$$9x^2 + 5y^2 - 30y = 0$$

या $$9x^2 + 5\left(y - 3\right)^2 = 45$$

या $$\frac{x^2}{5} + \frac{\left(y - 3\right)^2}{9} = 1 \quad (1)$$

मूल बिन्दु को $(0, 3)$ पर स्थानान्तरित करने पर,

$$\frac{X^2}{5} + \frac{Y^2}{9} = 1, \text{ यहाँ } a^2 = 5 \text{ तथा } b^2 = 9 \text{ अतः } b > a \quad (2)$$

(i) **उत्क्रेन्द्रताः** $a^2 = b^2\left(1 - e^2\right)$ से $5 = 9\left(1 - e^2\right) \Rightarrow e = \frac{2}{3}$

(ii) **नाभिलम्बः** $= \frac{2a^2}{b} = \frac{2 \cdot 5}{3} = \frac{10}{3}$

(iii) **नाभि के निर्देशांकः** दीर्घवृत्त (2) की नाभि के निर्देशांक $\left(0, \pm be\right)$ क्योंकि नाभि Y–अक्ष पर स्थित है अर्थात् नाभि $(0, +2)$ होगी।

दिये गये दीर्घवृत्त (1) की नाभि के निर्देशांक होंगे $(0, 3 \pm 2)$ अर्थात् $(0, 1)$ तथा $(0, 5)$

उदाहरण 17: उस दीर्घवृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसके शीर्ष एवं नाभियों के निर्देशांक क्रमशः$(\pm 5, 0)$ तथा $(\pm 4, 0)$ हो।

हल : दीर्घवृत्त का समीकरण है

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (1)$$

इसके शीर्ष तथा नाभियों के निर्देशांक क्रमशः $(\pm a, 0)$ तथा $(\pm ae, 0)$ है। दिये गये निर्देशांकों से तुलना करने पर, $a = 5$ तथा $ae = 4$

अतः $a = 5$ तथा $e = 4/5$

पुनः $e = \sqrt{\left(1 - b^2/a^2\right)}$ से $4/5 = \sqrt{\left(1 - b^2/25\right)}$ $\Rightarrow$ $b = 3$

a तथा b का मान (1) में रखने पर $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

यही अभीष्ट दीर्घवृत्त का समीकरण है।

उदाहरण 18: उस दीर्घवृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसकी उत्क्रेन्द्रता 3/5 तथा नाभिलम्ब 6 है।

हल : माना अभीष्ट दीर्घवृत्त का समीकरण है

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \quad (a>b) \qquad (1)$$

दिया हुआ है, नाभिलम्ब $=\frac{2b^2}{a}=6$

या $2\frac{a^2(1-e^2)}{a}=6$

या $a\left(1-\frac{9}{25}\right)=3 \qquad \therefore \ a=\frac{75}{16}$

समीकरण (2) से $2b^2=6\times\frac{75}{16}$

या $b=\frac{15}{4}$

अतः a एवं b के मान (2) में रखने पर, $256x^2+400y^2=5625$, यही अभीष्ट दीर्घवृत्त का समीकरण है।

प्रश्नमाला 12.5

1. उस दीर्घवृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए, जिसकी
   (i) नाभि $(-1, 1)$, नियता $x-y+4=0$ तथा उत्क्रेन्द्रता $e=1/\sqrt{5}$ हो।
   (ii) नाभि $(-2, 3)$, नियता $3x+4y=1$ तथा उत्क्रेन्द्रता $e=1/3$ हो।
2. निम्न दीर्घवृत्तों की उत्क्रेन्द्रता, नाभिलम्ब और नाभि के निर्देशांक ज्ञात करो।
   (i) $4x^2+9y^2=1$ (ii) $25x^2+4y^2=100$ (iii) $3x^2+4y^2-12x-8y+4=0$
3. उस दीर्घवृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिये जिसके अक्ष निर्देश अक्ष हो तथा यह बिन्दुओं $(6, 2)$ एवं $(4, 3)$ से गुजरता हो।
4. उस दीर्घवृत्त की उत्केन्द्रता ज्ञात कीजिये जिसकी नाभिलम्ब उस की लघु अक्ष की आधी हो।
5. एक बिन्दु का बिन्दु पथ ज्ञात कीजिये जो इस प्रकार गमन करे कि उसकी बिन्दु $(1, 0)$ तथा $(-1, 0)$ से दूरियों का योग सदैव 3 रहता है। यह बिन्दुपथ कौनसा वक्र है।

12.31 दीर्घवृत्त एवं सरल रेखा का प्रतिच्छेदन (Intersection of an ellipse and a straight line)

माना सरल रेखा तथा दीर्घवृत्त के समीकरण क्रमशः है

$$y=mx+c \qquad (1)$$

तथा

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (2)$$

समीकरण (1) से y का मान (2) में रखने पर

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{(mx+c)^2}{b^2}=1$$

या $x^2(a^2m^2+b^2)+2a^2mcx+a^2(c^2-b^2)=0 \qquad (3)$

यह एक द्विघात समीकरण है जिसके दो मूल होंगे। अतः यह दर्शाता है कि रेखा (1) दीर्घवृत्त (2) को हमेशा दो बिन्दुओं पर काटेगी।

यदि रेखा (1) दीर्घवृत्त (2) को स्पर्श करती है तो समीकरण (3) के मूल समान होंगे। अर्थात्

$$\left(2a^2mc\right)^2 - 4\left(a^2m^2 + b^2\right)a^2\left(c^2 - b^2\right) = 0, \qquad \left(B^2 = 4AC\right)$$

या $$4a^4m^2c^2 - 4a^2\left(a^2m^2c^2 - a^2b^2m^2 + b^2c^2 - b^4\right) = 0$$

या $$a^2b^2m^2 - b^2c^2 + b^4 = 0$$

या $$b^2\left(a^2m^2 - c^2 + b^2\right) = 0$$

या $$a^2m^2 - c^2 + b^2 = 0$$

या $$c = \pm\sqrt{a^2m^2 + b^2}$$

अतः रेखा (1) दीर्घवृत्त (2) को स्पर्श करेगी यदि

$$c = \pm\sqrt{a^2m^2 + b^2} \text{ हो।} \qquad (4)$$

c का मान समीकरण (1) में रखने पर स्पर्श रेखा का समीकरण $y = mx \pm \sqrt{\left(a^2m^2 + b^2\right)}$ प्राप्त होता है। अतः रेखा $y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2}$ दीर्घवृत्त $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ को स्पर्श करती है तथा स्पर्श बिन्दु के निर्देशांक होंगे।

$$\left(\mp\frac{a^2m}{\sqrt{\left(a^2m^2 + b^2\right)}}, \ \pm\frac{b^2}{\sqrt{\left(a^2m^2 + b^2\right)}}\right)$$

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण 19: दीर्घवृत्त $x^2 + 4y^2 = 8$ तथा सरल रेखा $y = 2x - 3$ के प्रतिच्छेद बिन्दुओं के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

हल : दीर्घवृत्त एवं सरल रेखा के समीकरण क्रमशः

$$x^2 + 4y^2 = 8 \qquad (1)$$

तथा $$y = 2x - 3 \qquad (2)$$

हैं। समीकरण (1) एवं (2) को सरल करने पर,

$$x^2 + 4\left(2x - 3\right)^2 = 8 \quad \text{या} \quad 17x^2 - 48x + 28 = 0$$

$\Rightarrow$ $x = 2,\ 14/17$ अतः (2) से $y = 1,\ -23/17$

अतः प्रतिच्छेद बिन्दुओं के निर्देशांक (2, 1) तथा $\left(\frac{14}{17}, \frac{-23}{17}\right)$ होंगे।

उदाहरण 20: यदि, रेखा $y = x + c$ दीर्घवृत्त $2x^2 + 3y^2 = 6$ को स्पर्श करे तो c का मान क्या होगा?

हल : रेखा एंव दीर्घवृत्त का समीकरण क्रमशः हैं

$$y = x + c \qquad (1)$$

तथा $$2x^2 + 3y^2 = 6. \qquad (2)$$

समीकरण (2) में y का मान समीकरण (1) से रखने पर

$$2x^2 + 3\left(x + c\right)^2 = 6 \quad \text{या} \quad 5x^2 + 6cx + \left(3c^2 - 6\right) = 0 \qquad (3)$$

चूँकि रेखा (1) दीर्घवृत्त (2) को स्पर्श करती है अतः

$$\left(6c\right)^2 - 4.5\left(3c^2 - 6\right) = 0 \quad \text{या} \quad 24c^2 = 120 \quad \Rightarrow \quad c = \pm\sqrt{5}$$

उदाहरण 21: रेखा $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$ के दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ की स्पर्श रेखा होने का प्रतिबन्ध ज्ञात कीजिए।

हल : y का मान रेखा $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$ से दीर्घवृत्त

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ में रखने पर, $$\frac{x^2}{a^2}+\left(\frac{p-x\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)\frac{1}{b^2}=1$$

या $$x^2\left(a\cos^2\alpha+b^2\sin^2\alpha\right)-2a^2px\cos\alpha+\left(a^2p^2-a^2b^2\sin^2\alpha\right)=0 \qquad (1)$$

दी हुई रेखा दीर्घवृत्त को स्पर्श करेगी यदि समीकरण (1) के दोनों मूल समान हो अर्थात्

$$\left(-2a^2p\cos\alpha\right)^2-4\left(a^2\cos^2\alpha+b^2\sin^2\alpha\right)\left(a^2p^2-a^2b^2\sin^2\alpha\right)=0$$

या $$4a^2b^2\sin^2\alpha\left\{a^2\cos^2\alpha-p^2+b^2\sin^2\alpha\right\}=0$$

अतः $p^2=a^2\cos^2\alpha+b^2\sin^2\alpha$

प्रश्नमाला 12.6

1. सिद्ध कीजिए कि रेखा $y = x+\sqrt{(5/6)}$ दीर्घवृत्त $2x^2+3y^2=1$ को स्पर्श करती है। स्पर्श बिन्दु के निर्देशांक भी ज्ञात कीजिए।
2. प्रदर्शित कीजिए कि रेखा $x-3y-4=0$ दीर्घवृत्त $3x^2+4y^2=20$ को स्पर्श करती है।
3. k के किस मान के लिए रेखा $3x-4y=k$ दीर्घवृत्त $5x^2+4y^2=20$ को स्पर्श करती है।
4. सिद्ध कीजिए कि रेखा $x+y=\sqrt{\left(a^2+b^2\right)}$ दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ को स्पर्श करती है। स्पर्श बिन्दु के निर्देशांक भी ज्ञात कीजिए।
5. दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ को रेखा $\ell x+my=n$ द्वारा स्पर्श करने की शर्त ज्ञात कीजिए।
6. दीर्घवृत्त $4x^2+3y^2=5$ के लिये उन स्पर्श रेखाओं के समीकरण ज्ञात कीजिए जो x- अक्ष के साथ 60° का कोण बनाती है। स्पर्श बिन्दु के निर्देशांक भी ज्ञात कीजिए।

अतिपरवलय (Hyperbola)

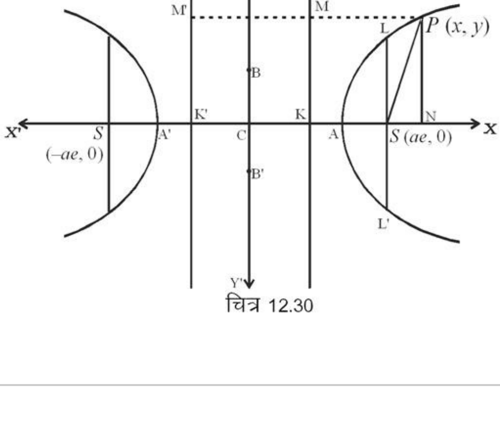
12.32 परिभाषा (Defination):

उस चलित बिन्दु का बिन्दुपथ, जो इस प्रकार से गमन करे कि इसकी एक स्थिर बिन्दु तथा एक स्थिर रेखा से लम्बवत् दूरी का स्थिर अनुपात (e) एक से अधिक हो, **अतिपरवलय** कहलाता है। स्थिर बिन्दु, स्थिर रेखा तथा गतिमान बिन्दु एक ही समतल में होने चाहिये।

12.33 अतिपरवलय का मानक समीकरण (Standard equation of Hyperbola)

माना एक स्थिर बिन्दु S तथा स्थिर रेखा ZK है। P(x, y) कोई चलित बिन्दु है। S से नियता ZK पर लम्ब SK डाला।

माना अतिपरवलय की उत्क्रेन्द्रता e है। SK को A तथा A' पर $e:1$ के अनुपात में अन्तः तथा बाह्य विभाजन किया। माना C मूल बिन्दु है तथा AA' = $2a$



चित्र 12.30

चूंकि $e>1$

$$\therefore \quad \frac{SA}{AK}=\frac{e}{1}$$

या $$SA=eAK \quad (1)$$

तथा $$\frac{SA'}{KA'}=\frac{e}{1}$$

या $$SA'=eKA' \quad (2)$$

(1) एवं (2) का योग करने पर

$$SA+SA'=e(AK+KA')$$

या $$(CS-CA)+(CS+CA')=e\{(CA-CK)+(CA'+CK)\}$$

या $$2CS=2eCA \quad [\because CA=CA']$$

या $$CS=ae \quad (3)$$

(2) में से (1) को घटाने पर,

$$SA'-SA=e(KA'-AK)$$

$$AA'=e\{(CA'+CK)-(CA-CK)\}$$

या $$2a=e\cdot 2CK$$

या $$CK=a/e \quad (4)$$

अतः नाभि के निर्देशांक $(ae,0)$ है तथा नियता का समीकरण है, $x=a/e$ अब अतिपरिवलय की परिभाषानुसार,

P की नाभि S से दूरी $=e$ {P से नियता पर लम्ब की लम्बाई}

या $$SP=ePM$$

$$\Rightarrow \quad SP^2=e^2PM^2$$

या $$(x-ae)^2+(y-0)^2=e^2(CN-CK)^2$$

या $$(x-ae)^2+y^2=e^2\left(x-\frac{a}{e}\right)^2$$

या $$x^2+a^2e^2-2aex+y^2=e^2\left(x^2+\frac{a^2}{e^2}-\frac{2ax}{e}\right)$$

या $$x^2(e^2-1)-y^2=a^2(e^2-1)$$

या $$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2(e^2-1)}=1$$

अतः $$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

जहाँ $$b^2=a^2(e^2-1)$$

अतः अतिपरिवलय का अभीष्ट समीकरण $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ होगा। $(e>1)$.

12.34 महत्वपूर्ण परिभाषाएँ (Important definitions)

1. **अनुप्रस्थ अक्ष (Transverse axis):** शीर्ष A तथा A' को मिलाने वाली रेखा ACA' अनुप्रस्थ अक्ष कहलाती है इसकी लम्बाई AA' = $2a$ होती है।
2. **संयुग्मी अक्ष (Conjugate axis):** अनुप्रस्थ अक्ष पर लम्ब तथा बिन्दु C से गुजरने वाली रेखा संयुग्मी अक्ष कहलाती है। यदि केन्द्र के दोनों ओर रेखा पर बिन्दु B तथा B' इस प्रकार हो कि $CB = CB' = b,$ तब $BB' = 2b,$ संयुग्मी अक्ष की लम्बाई कहलाती है।
3. **मुख्य अक्ष (Principal axes):** अतिवरलय के अनुप्रस्थ एवं संयुग्मी अक्षों को मुख्य अक्ष कहते हैं।
4. **नाभि (Focus):** अतिपरवलय की दो नाभि होती है। $S(ae, 0)$ तथा $S'(-ae, 0)$
5. **नियता (Directrix):** अतिपरवलय की दो नियता होती है जो उसके केन्द्र C से समान दूरीयों पर है तथा उनके समीकरण क्रमशः $x = a/e$ तथा $x = -a/e$ है।
6. **शीर्ष (Vertex):** बिन्दु A(a, 0) तथा A' ($-a$, 0) अतिपरवलय के शीर्ष कहलाते हैं।
7. **नाभिलम्ब (Latus rectum):** अतिपरवलय की वह जीवा जो अनुप्रस्थ अक्ष पर लम्ब तथा नाभि से होकर जाती है, नाभिलम्ब कहलाती है। चित्र (12.30) में LSL' नाभिलम्ब है, L एवं L' नाभिलम्ब के सिरे कहलाते है। माना L के निर्देशांक (ae, ℓ) है। चूंकि बिन्दु L अतिपरवलय पर स्थित है अतः

$$\frac{a^2e^2}{a^2} - \frac{\ell^2}{b^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\ell^2}{b^2} = e^2 - 1 \quad \text{या} \quad \ell^2 = \frac{b^2}{a^2} \qquad \left[\because b^2 = a^2\left(e^2 - 1\right)\right]$$

$\therefore \quad \ell = \pm b^2 / a$

अतः नाभिलम्ब की लम्बाई $= LSL' = 2\ell = 2b^2 / a$.

8. **नामीय गुण (Focal property):** माना अतिपरवलय का समीकरण है,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (1)$$

एवं नाभियों के निर्देशांक $(\pm ae, 0)$ है।

$$\therefore \quad SP = ePM = eNK = e(CN - CK) \qquad SP = e\left(x - \frac{a}{e}\right) = ex - a \qquad (2)$$

इसी प्रकार $S'P = ePM' = eNK' = e(CN + CK')$

या $\quad S'P = e\left(\frac{a}{e} + x\right) = a + ex$

$\therefore \quad S'P - SP = 2a$ (अचर) = अनुप्रस्थ अक्ष

अतः अतिपरवलय के किसी बिन्दु P की नाभीय दूरियों का अन्तर अतिपरवलय के अनुप्रस्थ अक्ष की लम्बाई के बराबर होता है।

12.35 विशेष प्रकार के अतिपरवलय (Special types of hyperbola)

(1) आयतीय अतिपरवलय (Rectangular Hyperbola)

यदि किसी अतिपिरवलय के अनुप्रस्थ तथा संयुग्मी अक्ष समान हो अर्थात् $a = b$ हो तो वह **आयतीय अतिपरवलय** कहलाता है। अतः इसका समीकरण होगा,

$$x^2 - y^2 = a^2$$

क्योंकि अतिपिरवलय में $\qquad b^2 = a^2\left(e^2 - 1\right)$

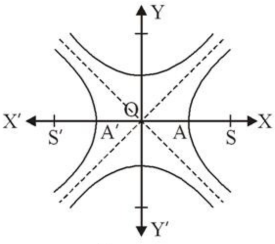
जब $a = b$ हो तब $\qquad a^2 = a^2\left(e^2 - 1\right) \Rightarrow e = \sqrt{2}$

अतः आयतीय अतिपरवलय की उत्केन्द्रता $\sqrt{2}$ होती है।

(2) संयुग्मी अतिपरलवय (Conjugate Hyperbola)

यदि दो अतिपरवलय इस प्रकार हो कि एक के अनुप्रस्थ तथा संयुग्मी अक्ष दूसरे के संयुग्मी तथा अनुप्रस्थ अक्ष है तो वे परस्पर संयुग्मी अतिपरवलय कहलाते है।

निम्न चित्र में यदि एक अतिपरवलय का समीकरण $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ है तो इसके संयुग्मी अतिपरवलय का समीकरण $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$ होगा।



चित्र 12.31

12.36 अतिपरवलय एवं सरल रेखा का प्रतिच्छेदन (Intersection of hyperbola and a straight line)

माना सरल रेखा तथा अतिपरवलय के समीकरण क्रमशः है

$$y = mx + c \tag{1}$$

तथा
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \tag{2}$$

समीकरण (1) एवं (2) को सरल करने पर,

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{(mx+c)^2}{b^2}=1$$

या
$$x^2\left(a^2m^2-b^2\right)+2a^2mcx+a^2\left(c^2+b^2\right)=0 \tag{3}$$

यह x में द्विघातीय समीकरण है जिसके दो मूल होंगे, जिन्हें समीकरण (1) में रखने पर y के दो संगत मान प्राप्त किए जा सकते है। रेखा (1) अतिपरवलय (2) को **स्पर्श करेगी** यदि समीकरण (3) के मूल समान हो

अर्थात् $\left(2a^2mc\right)^2-4\left(a^2m^2-b^2\right)\left\{\left(b^2+c^2\right)a^2\right\}=0$ $\left[B^2=4AC \text{ से}\right]$

या
$$b^2\left(a^2m^2-b^2\right)-b^2c^2=0$$

$\Rightarrow$
$$c=\pm\sqrt{\left(a^2m^2-b^2\right)} \tag{4}$$

जो कि रेखा (1) के अतिपरवलय (2) को स्पर्श करने का प्रतिबन्ध है। c का मान समीकरण (1) में रखने पर स्पर्श रेखा का समीकरण

$$y = mx\pm\sqrt{\left(a^2m^2-b^2\right)}$$

प्राप्त होता है तथा स्पर्श बिन्दु के निर्देशांक होंगे, $\left(\mp\frac{a^2m}{\sqrt{a^2m^2-b^2}},\mp\frac{b^2}{\sqrt{a^2m^2-b^2}}\right)$.

दृष्टांतीय उदाहरण

उदाहरण 22: अतिपरवलय $(x-1)^2-2(y-2)^2=-6$ के अक्ष, नाभियां, उत्केन्द्रता तथा नाभिलम्ब ज्ञात कीजिए।

हल : अतिपरवलय की समीकरण को निम्न प्रकार से लिखा जा सकता है

$$\frac{(x-1)^2}{\left(\sqrt{6}\right)^2}-\frac{(y-2)^2}{\left(\sqrt{3}\right)^2}=-1$$

(1) की मानक समीकरण से तुलना करने पर केन्द्र $(1, 2)$, अनुप्रस्थ अक्ष $=2\sqrt{3}$,

संयुग्मी अक्ष $=2\sqrt{6}$, उत्केन्द्रता $=\sqrt{\left(\frac{6+3}{3}\right)}=\sqrt{3}$ (1)

नाभियाँ $=\left[1,\ 2+\sqrt{3}\times\sqrt{3}\right]$ तथा $\left[1,\ 2-\sqrt{3}\times\sqrt{3}\right]$ या $(1, 5)$ तथा $(1, -1)$

उदाहरण 23: उस अतिपरवलय का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसकी नाभि (0, 0), नियता $x\cos\alpha + y\sin\alpha = \ell$ तथा उत्केन्द्रता 5 / 4 हो।

हल : माना $P(h, k)$ अतिपरवलय पर कोई बिन्दु है।

अतः परिभाषानुसार P की नाभि से दूरी $= e$ (नियता की P से लम्बवत् दूरी)

$$\sqrt{\left\{(h-0)^2+(k-0)^2\right\}} = \frac{5}{4}\left[\frac{h\cos\alpha + k\sin\alpha - \ell}{\sqrt{(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)}}\right]$$

$$\Rightarrow \qquad 4\sqrt{(h^2+k^2)} = 5(h\cos\alpha + k\sin\alpha - \ell)$$

वर्ग करने पर

$$16h^2 + 16k^2 = 25(h\cos\alpha + k\sin\alpha - \ell)^2$$

बिन्दु पथ लेने पर अभीष्ट अतिपरवलय का समीकरण

$$16(x^2+y^2) = 25(x\cos\alpha + y\sin\alpha - \ell)^2$$ प्राप्त होता है।

उदाहरण 24: उस अतिपरवलय का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसकी नाभियाँ (4, 0) तथा (–4, 0) हो तथा उत्केन्द्रता 8 हो।

हल : नाभियों के मध्य की दूरी $= \sqrt{\left[(4-4)^2+(0-0)^2\right]} = 8$

$\therefore \quad 2ae = 8$ या $2a\times 8 = 8 \quad \therefore \quad a = 1/2$

पुनः $\quad b^2 = a^2(e^2-1) = \frac{1}{4}(64-1) = \frac{63}{4} \Rightarrow b = \frac{\sqrt{63}}{2}$

अतः अतिपरवलय का अभीष्ट समीकरण होगा, $\frac{x^2}{(1/2)^2} - \frac{y^2}{(\sqrt{63}/2)^2} = 1$

उदाहरण 25: यदि एक अतिपरवलय तथा इसके संयुग्मी अतिपरवलय की उत्केन्द्रतायें क्रमशः e तथा e' हो तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{1}{e^2} + \frac{1}{e'^2} = 1$.

हल : माना अतिपरवलय का समीकरण $\qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (1)$

है तो इसके संयुग्मी अतिपरवलय का समीकरण होगा

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (2)$$

(1) की उत्केन्द्रता $\qquad e^2 = 1 + \frac{b^2}{a^2} = \frac{a^2+b^2}{a^2} \qquad (3)$

(2) की उत्केन्द्रता $\qquad e'^2 = 1 + \frac{a^2}{b^2} = \frac{a^2+b^2}{b^2} \qquad (4)$

अतः समीकरण (3) एवं (4) से

$$\frac{1}{e^2} + \frac{1}{e'^2} = \frac{a^2}{a^2+b^2} + \frac{b^2}{a^2+b^2} = 1$$

उदाहरण 26: सरल रेखा $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$ द्वारा अतिपरवलय $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ को स्पर्श करने का प्रतिबन्ध ज्ञात कीजिए।

हल : y का मान रेखा $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$ से अतिपरवलय

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ में रखने पर, $\frac{x^2}{a^2} - \frac{1}{b^2}\left[\frac{p - x\cos\alpha}{\sin\alpha}\right]^2 = 1$

या $x^2\left(b^2\sin^2\alpha - a^2\cos^2\alpha\right) + 2a^2px\cos\alpha - \left(a^2b^2\sin^2\alpha + a^2p^2\right) = 0 \quad (1)$

दी गई रेखा अतिपरवलय को स्पर्श करेगी यदि समीकरण (1) के मूल समान हो अर्थात् $\left(B^2 = 4AC\right)$

या $\left(2a^2p\cos\alpha\right)^2 = -4\left(b^2\sin^2\alpha - a^2\cos^2 a\right)\left(a^2b^2\sin^2\alpha + a^2p^2\right)$

या $4a^4p^2\cos^2\alpha = -4\left[a^2b^4\sin^4\alpha + a^2b^2p^2\sin^2\alpha - a^4b^2\sin^2\alpha\cos^2\alpha - p^2a^4\cos^5\alpha\right]$

अतः $a^2\cos^2\alpha - b^2\sin^2\alpha = p^2$ यही अभीष्ट प्रतिबन्ध है।

प्रश्नमाला 12.7

1. अतिपरवलय $9x^2 - 16y^2 = 144$ के अक्षों की लम्बाइयाँ, नाभियाँ, उत्केन्द्रता, नाभिलम्ब तथा नियताओं के समीकरण ज्ञात कीजिए।
2. अतिपरवलय का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसकी
   (i) नाभि (2, 1) नियता $x + 2y - 1 = 0$ तथा उत्केन्द्रता 2 है।
   (ii) नाभि (1, 2) नियता $2x + y = 1$ तथा उत्केन्द्रता $\sqrt{3}$ है।
3. अतिपरवलय $x^2 - 6x - 4y^2 - 16y - 11 = 0$ के, शीर्ष, नाभियाँ, नाभिलम्ब तथा उत्केन्द्रता ज्ञात कीजिए।
4. अतिपरवलय का समीकरण ज्ञात कीजिए जबकि
   (i) नाभिलम्ब की लम्बाई 8 तथा संयुग्मी अक्ष $= 1/2$ (नाभियों के मध्य की दूरी)
   (ii) नाभियों के मध्य की दूरी 16 तथा संयुग्मी अक्ष $\sqrt{2}$ हो।
   (iii) संयुग्मी अक्ष की लम्बाई 7 तथा बिन्दु (3, –2) से गुजरता हो।
5. सिद्ध कीजिए कि सरल रेखाओं $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = m$ तथा $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \frac{1}{m}$ के प्रतिच्छेद बिन्दु का बिन्दुपथ अतिपरवलय होता है।
6. अतिपरवलय $5x^2 - 9y^2 = 45$ तथा रेखा $y = x + 2$ के उभयनिष्ठ बिन्दु ज्ञात कीजिए।
7. सिद्ध कीजिए कि रेखा $\ell x + my = 1$ अतिपरवलय $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ को स्पर्श करेगी यदि $a^2\ell^2 - b^2m^2 = 1$.
8. अतिपरवलय $4x^2 - 4y^2 = 1$ की स्पर्श रेखाओं के समीकरण ज्ञात कीजिए जो रेखा $4y = 5x + 7$ के समान्तर हों।
9. सिद्ध कीजिए कि अतिपरवलय की किसी स्पर्श रेखा पर नाभि से डाले गये लम्ब के पाद का बिन्दु पथ वृत्त होता है।

विविध प्रश्नमाला–12

1. वृत्त $9x^2 + y^2 + 8x = 4\left(x^2 - y^2\right)$ की त्रिज्या है :
   (A) 1 (B) 2 (C) 4 / 5 (D) 5 / 4
2. उस वृत्त का समीकरण जिसका केन्द्र प्रथम पाद में (α, β) है तथा x–अक्ष को स्पर्श करता है] होगाः
   (A) $x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \alpha^2 = 0$ (B) $x^2 + y^2 + 2\alpha x - 2\beta y + \alpha^2 = 0$
   (C) $x^2 + y^2 - 2\alpha x + 2\beta y + \alpha^2 = 0$ (D) $x^2 + y^2 + 2\alpha x + 2\beta y + \alpha^2 = 0$

3. यदि रेखा $y = mx + c$ वृत्त $x^2 + y^2 = 4y$ को स्पर्श करें तो c का मान है :

(A) $2+\sqrt{1+m^2}$ (B) $2-\sqrt{1+m^2}$ (C) $2+2\sqrt{1+m^2}$ (D) $1+\sqrt{1+m^2}$

4. रेखा $3x+4y=25$ वृत्त $x^2+y^2=25$ को किस बिन्दु पर स्पर्श करती है :

(A) $(4,3)$ (B) $(3,4)$ (C) $(-3,-4)$ (D) $(3,-4)$

5. एक शांकवीय परिच्छेद परवलय होगा, यदि

(A) $e=0$ (B) $e<1$ (C) $e>1$ (D) $e=1$

6. परवलय $x^2=-8y$ की नियता का समीकरण है

(A) $y=-2$ (B) $y=2$ (C) $x=2$ (D) $x=-2$

7. परवलय $x^2+4x+2y=0$ का शीर्ष है:

(A) $(0, 0)$ (B) $(2, -2)$ (C) $(-2, -2)$ (D) $(-2, 2)$

8. यदि किसी परवलय की नाभि $(-3, 0)$ तथा नियता $x+5=0$ हो तो इसका समीकरण होगा

(A) $y^2=4(x+4)$ (B) $y^2+4x+16=0$ (C) $y^2+4x=16$ (D) $x^2=4(y+4)$

9. किसी परवलय के शीर्ष एवं नाभि क्रमशः $(2, 0)$ तथा $(5, 0)$ हो, तो इसका समीकरण होगा

(A) $y^2=12x+24$ (B) $y^2=12x-24$ (C) $y^2=-12x-24$ (D) $y^2=-12x+24$

10. परवलय $x^2=-8y$ की नाभि है

(A) $(2, 0)$ (B) $(0, 2)$ (C) $(-2, 0)$ (D) $(0, -2)$

11. परवलय $y^2=x$ की किसी स्पर्श रेखा का समीकरण है

(A) $y=mx+1/m$ (B) $y=mx+1/4m$ (C) $y=mx+4/m$ (D) $y=mx+4m$

12. यदि रेखा $2y-x=2$ परवलय $y^2=2x$ को स्पर्श करती हो, तो स्पर्श बिन्दु है

(A) $(4, 3)$ (B) $(-4, 1)$ (C) $(2, 2)$ (D) $(1, 4)$

13. परवलय $x^2=8y$ की रेखा $x+2y+1=0$ के समान्तर स्पर्श रेखा का समीकरण है

(A) $x+2y+1=0$ (B) $x-2y+1=0$ (C) $x+2y-1=0$ (D) $x-2y-1=0$

14. परवलय $y^2=4x$ का एक अभिलम्ब है

(A) $y=x+4$ (B) $y+x=3$ (C) $y+x=2$ (D) $y+x=1$

15. दीर्घवृत्त $3x^2+4y^2=12$ के अर्द्धनाभिलम्ब की लम्बाई होगी

(A) $\frac{3}{2}$ (B) 3 (C) $\frac{8}{\sqrt{3}}$ (D) $\frac{4}{\sqrt{3}}$

16. दीर्घवृत्त $3x^2+4y^2=12$ की उत्केन्द्रता होगी

(A) –2 (B) ½ (C) 1 (D) 2

17. यदि रेखा $y=mx+c$ दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ का स्पर्श करती है तो c का मान होगा

(A) $c=\frac{a}{m}$ (B) $c=\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}$ (C) $c=\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$ (D) $c=a\sqrt{1+m^2}$

18. दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(b>a)$ के नाभियों के निर्देशाँक होंगे

(A) $(\pm ae, 0)$ (B) $(\pm be, 0)$ (C) $(0, \pm ae)$ (D) $(0, \pm be)$

19. आयतीय अतिपरवलय की उत्केन्द्रता होगी

(A) 0 (B) 1 (C) $\sqrt{2}$ (D) 2

20. अतिपरवलय $9x^2-16y^2=144$ की उत्केन्द्रता होगी

(A) 1 (B) 0 (C) 5 / 16 (D) 5 / 4

21. उस वृत्त का समीकरण लिखिए जिसका केन्द्र $(a\cos\alpha, a\sin\alpha)$ तथा त्रिज्या a है।

22. यदि वृत्त $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ के बिन्दु (x_1, y_1) तथा (x_2, y_2) पर स्पर्श रेखाएँ परस्पर लम्बवत् हो तो सिद्ध कीजिए।
$x_1x_2+y_1y_2+g(x_1+x_2)+f(y_1+y_2)+g^2+f^2=0$

23. r त्रिज्या वाले उस वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका केन्द्र प्रथम पाद में स्थित है तथा y–अक्ष को मूल बिन्दु से h दूरी पर स्पर्श करता है। मूल बिन्दु से होकर जाने वाली दूसरी स्पर्श रेखा का समीकरण भी ज्ञात कीजिए।

24. वृत्त $x^2+y^2=a^2$ के बिन्दु (α, β) पर खींची गई स्पर्श रेखा अक्षों को क्रमशः A एवं B बिन्दुओं पर मिलती है। सिद्ध कीजिए कि त्रिभुज OAB का क्षेत्रफल $\frac{a^4}{2\alpha\beta}$ होगा, जहाँ O मूल बिन्दु है।

25. वृत्त $x^2+y^2=a^2$ पर उस स्पर्श रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो अक्षों के साथ a^2 क्षेत्रफल वाला त्रिभुज निर्मित करती है।

26. परवलय $x^2-4x-8y=4$ की नाभि के निर्देशांक लिखिए।

27. परवलय $x^2-4x-4y+4=0$ की उत्केन्द्रता लिखिए।

28. रेखा $\ell x+my+n=0$ के परवलय $y^2=4ax$ को स्पर्श करने का प्रतिबन्ध लिखिए।

29. उस परवलय का समीकरण लिखिए। जिसका शीर्ष (0, 0) तथा नाभि (0, $-a$) हो।

30. परवलय $9y^2-16x-12y-57=0$ के अक्ष का समीकरण लिखिए।

31. दीर्घवृत्त $\frac{x^2-ax}{a^2}+\frac{y^2-by}{b^2}=0$ के केन्द्र के निर्देशांक लिखिए।

32. रेखा $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$ के दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ को स्पर्श करने का प्रतिबन्ध लिखिए।

33. अतिपरवलय का समीकरण लिखिए जिसकी अनुप्रस्थ अक्ष और संयुगी अक्ष क्रमशः 4 तथा 5 है।

34. अतिपरवलय $\frac{(x-1)^2}{16}-\frac{(y+2)^2}{9}=1$ के केन्द्र के निर्देशांक लिखिए।

महत्वपूर्ण बिन्दु

1. एक समतल, द्विशंकु (जिसका अर्द्धशीर्ष कोण α हो) की अक्ष को कोण θ पर काटता है और समतल

   (क) शंकु के शीर्ष से गुजरता है तो प्रतिच्छेद वक्र रेखा युग्म होगा जो

   (i) वास्तविक तथा भिन्न होगा, यदि $\theta < \alpha$ (ii) वास्तविक तथा संपाती होगा, यदि $\theta = \alpha$

   (iii) काल्पनिक होगा, यदि $\theta > \alpha$

   (ख) द्विशंकु के शीर्ष से नहीं गुजरता है तो प्रतिच्छेदित वक्र–

   (i) वृत्त होगा यदि $\theta = 90^o$ (ii) परवलय होगा यदि $\theta = \alpha$

   (iii) दीर्घवृत्त होगा यदि $\theta > \alpha$ (iv) अतिपरवलय होगा $\theta < \alpha$

2. वृत्त का केन्द्रीय रूप में समीकरण

   $(x-h)^2 + (y-k)^2 = a^2$; केन्द्र (h, k), त्रिज्या $= a$

3. वृत्त का समीकरण मानक रूप में $x^2 + y^2 = a^2$

4. वृत्त का समीकरण (व्यापक रूप में) $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$;

   केन्द्र $(-g, -f)$, त्रिज्या $= \sqrt{g^2 + f^2 - c}$

5. रेखा $y = mx + c$, वृत्त $x^2 + y^2 = a^2$ को स्पर्श करेगी यदि $c = \pm a\sqrt{1+m^2}$

6. स्पर्श रेखा : (क) वृत्त $x^2 + y^2 = a^2$ के

   (i) बिन्दु (x_1, y_1) पर $xx_1 + yy_1 - a^2 = 0$

   (ii) प्रवणता (m) रूप में $y = mx \pm a\sqrt{1+m^2}$ स्पर्श बिन्दु $\left(\mp \frac{am}{\sqrt{1+m^2}}, \pm \frac{a}{\sqrt{1+m^2}}\right)$

   (ख) वृत्त $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ के बिन्दु (x_1, y_1) पर

   $xx_1 + yy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c = 0$

7. अभिलम्ब : वृत्त $x^2 + y^2 = a^2$ के

   (i) बिन्दु (x_1, y_1) पर $xy_1 - yx_1 = 0$

   (ii) प्रवणता (m) रूप $x + my = 0$, जहाँ m वृत्त की स्पर्श रेखा की प्रवणता है।

8. परवलय का मानक समीकरण $y^2 = 4ax$

9. परवलय $y^2 = 4ax$ के शीर्ष के निर्देशांक (0, 0) नाभि के निर्देशांक$(a, 0)$, नाभि लम्ब की लम्बाई $4a$ नियता का समीकरण $x + a = 0$

10. (i) रेखा $y = mx + c$ के परवलय $y^2 = 4ax$ को स्पर्श करने का प्रतिबन्ध $c = a/m$.

    (ii) स्पर्श बिन्दु के निर्देशांक $\left(\frac{a}{m^2}, \frac{2a}{m}\right)$

11. परवलय $y^2 = 4ax$ से संबंधित मानक सूत्र

    (i) बिन्दु (x_1, y_1) पर स्पर्श रेखा $yy_1 = 2a(x + x_1)$

    (ii) ढाल रूप में स्पर्श रेखा का समीकरण $y = mx + \frac{a}{m}$

    (iii) बिन्दु (x_1, y_1) पर अभिलम्ब $y - y_1 = -\frac{y_1}{2a}(x - x_1)$

    (iv) ढाल रूप में अभिलम्ब $y = mx - 2am - am^3$

12. दीर्घवृत्त का मानक समीकरण $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

13. दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ में

(i) नाभियां $(\pm ae, 0)$ (ii) नियताएँ $x=\pm a/e$

(iii) नाभिलम्ब की लम्बाई $=\frac{2b^2}{a}$ (iv) उत्केन्द्रता $e=\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)^{1/2}$

14. (i) रेखा $y=mx+c$ का दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ की स्पर्शी होने का प्रतिबन्ध $c=\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$.

(ii) स्पर्श बिन्दु के निर्देशांक $\left[\mp\frac{a^2m}{\sqrt{a^2m^2+b^2}}, \pm\frac{b^2}{\sqrt{a^2m^2+b^2}}\right]$

15. अतिपरवलय का मानक समीकरण $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, जहाँ $b^2=a^2(e^2-1)$

16. अतिपरवलय $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (a>b)$ में

(i) नाभियाँ $(\pm ae, 0)$ (ii) नियताएँ $x=\pm a/e$

(iii) नाभिलम्ब की लम्बाई $=\frac{2b^2}{a}$ (iv) उत्केन्द्रता $e=\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)^{1/2}$

17. (i) रेखा $y=mx+c$ का अतिपरवलय $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ की स्पर्शी होने का प्रतिबन्ध $c=\pm\sqrt{(a^2m^2-b^2)}$

(ii) स्पर्श बिन्दु के निर्देशांक $\left[\mp\frac{a^2m}{\sqrt{a^2m^2-b^2}}, \mp\frac{b^2m}{\sqrt{a^2m^2-b^2}}\right]$

18. आयतीय अतिपरवलय $x^2-y^2=a^2$ की उत्केन्द्रता $e=\sqrt{2}$

उत्तरमाला

उत्तरमाला 12.1

1. (i) $x^2+y^2+4x-6y-3=0$; (ii) $x^2+y^2-29x-2by+2ab=0$

2. (i) केन्द्र (3, 4); त्रिज्या 5 ; (ii) केन्द्र $\left(\frac{a}{\sqrt{1+k^2}}, \frac{ak}{\sqrt{1+k^2}}\right)$, त्रिज्या a ; (iii) केन्द्र (0, 0) ; त्रिज्या ½

3. $x^2+y^2-2rx-2y\sqrt{r^2-\ell^2}+\left(r^2-\ell^2\right)=0$

4. $x^2+y^2-6x\pm 6\sqrt{2}y+9=0$

5. केन्द्र (4, –5), त्रिज्या $\sqrt{53}$

6. केन्द्र $\left(\frac{1}{4}, 0\right)$ त्रिज्या $\frac{1}{4}$

7. $x^2+y^2-7x+5y-14=0$

8. $x^2+y^2+4x-21=0$ तथा $x^2+y^2-12x+11=0$

9. $x^2+y^2-ax-by=0$

प्रश्नमाला 12.2

1. $\left[\frac{48\pm 3\sqrt{481}}{25}, \frac{36\mp 4\sqrt{481}}{25}\right]$; $\frac{2}{5}\sqrt{481}$

3. $2\sqrt{c^2-\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}}$

4. $k=40$ या -10

5. (i) $m^2\left(a^2-r^2\right)+2ma(c-b)+(c-b)^2=r^2$ (ii) $n^2=a^2\left(l^2+m^2\right)$

6. (i) $4x+3y-40=0$ तथा $5x+12y-104=0$ (ii) $y=\sqrt{3}\pm 4$

7. $c=1$

8. $5x+12y-169=0$

प्रश्नमाला 12.3

1. (i) $16x^2+8xy+y^2-74x-78y+212=0$; (ii) $y^2=4x+16$

2.

	शीर्ष	अक्ष	नाभिलम्ब	नाभि
(i)	$(-2, 4)$	$y=4$	8	$(0, 4)$
(ii)	$(4, 9/2)$	$x=4$	2	$(4, 4)$

5. $9y^2=4ax$

प्रश्नमाला 12.4

1. $(2, -3)$ 2. $\frac{80}{9}$ 4. $am^2 = \ell n$ 6. $a\sin^2\alpha = -p\cos\alpha$

7. (i) $8x - 12y + 27 = 0$; (ii) $x + 2y + 8 = 0$; $y + 2x + \frac{4}{9} = 0$

8. $-\frac{27}{4}$ 9. $x^2 - 5xy + 2y^2 + 42x - 20y + 16 = 0$

10. (i) $x + y - 6 = 0$; (ii) $x + y + 9 = 0$

11. (i) $2x - y - 12 = 0$; (ii) $3x - y - 33 = 0$

प्रश्नमाला 12.5

1. (i) $9x^2 + 9y^2 + 2xy + 12x - 12y + 4 = 0$

(ii) $216x^2 + 209y^2 - 24xy + 906x + 1342y + 2924 = 0$

2.

	उत्केन्द्रता	नाभिलम्ब	नाभि
(i)	$\frac{\sqrt{5}}{3}$	$\frac{4}{9}$	$\left(\pm\frac{\sqrt{5}}{6}, 0\right)$
(ii)	$\frac{\sqrt{21}}{5}$	$\frac{8}{5}$	$(0, \pm\sqrt{21})$
(iii)	$\frac{1}{2}$	3	$(3, 1), (1, 1)$

3. $\frac{x^2}{52} + \frac{y^2}{13} = 1$ 4. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

5. $\frac{x^2}{9/4} + \frac{y^2}{5/4} = 1$; दीर्घवृत्त

प्रश्नमाला 12.6

1. $\left[-\sqrt{(3/10)}, \sqrt{(2/15)}\right]$ 3. $\mp 2\sqrt{29}$

4. $\left[\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\right]$ 5. $a^2\ell^2 + b^2m^2 = n^2$

6. $y = \sqrt{3}x \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{65}{3}}$; $\left[\pm\frac{15}{2\sqrt{65}}, \mp\frac{10}{3}\sqrt{\frac{15}{65}}\right]$

प्रश्नमाला 12.7

1. अनुप्रस्थ अक्ष = 8 संयुग्मी अक्ष = 6

उत्केन्द्रता = 5/4 नाभियां $(\pm 5, 0)$

नाभिलम्ब की लम्बाई = 9 / 4 नियता $= \pm\frac{16}{5}$

2. (i) $x^2 - 16xy - 11y^2 - 12x + 6y + 21 = 0$

(ii) $7x^2 + 12xy - 2y^2 - 2x + 14y - 22 = 0$

3. $(5,\,-2)$, $(1,\,-2)$; $\left(3 \pm \sqrt{5},\,-2\right)$; 1; $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

4. (i) $x^2 - 3y^2 = 144$; (ii) $x^2 - y^2 = 32$; (iii) $65x^2 - 36y^2 = 441$

7. $(-9/2,\,-5/2)$ 9. $4y = 5x \pm 3/2$

विविध प्रश्नमाला 12

1. (C)	2. (A)	3. (C)	4. (B)	5. (C)	6. (B)	7. (D)
8. (A)	9. (B)	10. (D)	11. (B)	12. (C)	13. (A)	14. (B)
15. (A)	16. (B)	17. (C)	18. (D)	19. (C)	20. (D)	

21. $x^2 + y^2 - 2ax\cos\alpha - 2ay\sin\alpha = 0$ 23. $(x-r)^2 + (y-h)^2 = r^2$; $(r^2 - h^2)x + 2rhy = 0$

25. $y = \pm x \pm a\sqrt{2}$ 26. (2, 1) 27. 1 28. $\ell n = am^2$ 29. $x^2 = -4ay$

30. $3y = 2$ 31. $\left(\dfrac{a}{2}, \dfrac{b}{2}\right)$ 32. $p^2 = a^2\cos^2\alpha + b^2\sin^2\alpha$ 33. $25x^2 - 16y^2 = 100$ 34. $(1,\,-2)$