JEE MAIN - 2017 (Paper 2)

31. A અને B સાન્ત ગણ છે અને Aના કુલ ઉપગણોની સંખ્યા Bના કુલ ઉપગણોની સંખ્યા કરતાં 960 વધારે છે, તો $n(A) - n(B) =$ .... ($n(X)$ એ Xના ઘટકોની સંખ્યા દર્શાવે છે.)

(A) 6 (B) 2 (C) 3 (D) 4

ઉકેલ : ધારો કે $n(A) = a$ તથા $n(B) = b$

$2^a - 2^b = 960$ છે.

આથી, $2^b(2^{a-b} - 1) = 64 \cdot 15 = 2^6(2^4 - 1)$

$\therefore b = 6, a - b = 4.$

$\therefore b = 6, \boxed{a - b = 4}$ **જવાબ (D)**

32. ઊગમબિંદુ કેન્દ્રવાળા ઉપવલયોના વિકલ સમીકરણની કક્ષા તથા પરિમાણ .... છે. ઉપવલયનો પ્રધાન અક્ષ X-અક્ષ તથા ઉત્કેન્દ્રતા $\frac{\sqrt{3}}{2}$ છે.

(A) 2, 2 (B) 1, 1 (C) 2, 1 (D) 1, 2

ઉકેલ : $b^2 = a^2(1 - e^2) = a^2\left(1 - \frac{3}{4}\right) = \frac{a^2}{4}$

ઉપવલયનું સમીકરણ :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\frac{a^2}{4}} = 1.$$

$\therefore x^2 + 4y^2 = a^2$

આથી, $2x + 8y\frac{dy}{dx} = 0$. આથી કક્ષા **1** પરિમાણ **1**. **જવાબ (B)**

33. નિરપેક્ષ ઘટનાઓ A અને B માટે $P(A) = \frac{3}{10}$ અને $P(A \cup B) = \frac{4}{5}$, તો $P(A \cap B) =$ ....

(A) $\frac{3}{35}$ (B) $\frac{1}{5}$ (C) $\frac{1}{10}$ (D) $\frac{3}{14}$

ઉકેલ : A અને B નિરપેક્ષ ઘટના છે.

$\therefore \quad P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

હવે, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$\therefore \quad \frac{4}{5} = \frac{3}{10} + P(B) - \left(\frac{3}{10}\right)P(B)$

$\therefore \quad \frac{4}{5} - \frac{3}{10} = \left(\frac{7}{10}\right) P(B)$

$\therefore \quad \frac{5}{10} = \left(\frac{7}{10}\right) P(B)$

$\therefore \quad P(B) = \frac{5}{7}$

$\therefore \quad P(A \cap B) = \frac{3}{10} \cdot \frac{5}{7} = \frac{3}{14}$ **જવાબ (D)**

34. નીચેની સુરેખ સમીકરણ સંહતિ જેના માટે સુસંગત હોય તેવી 'a'ની કિંમતોનો ગણ S છે.

$ax + 2y + 5z = 1$

$2x + y + 3z = 1$

$3y + 7z = 1$

S ....

(A) ખાલી ગણ છે (B) R છે (C) R – {1} છે (D) {1} છે

ઉકેલ : $ax + 2y + 5z = 1$

$2x + y + 3z = 1$

$3y + 7z = 1$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & 2 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 7 \end{vmatrix} = a(-2) - 2(14) + 5(6) = -2a + 2 = -2(a - 1)$$

$\therefore$ જો $a \neq 1$, તો અનન્ય ઉકેલ મળે.

ધારો કે $a = 1$. સમીકરણ આ પ્રમાણે બનશે.

$x + 2y + 5z = 1$ (i)

$2x + y + 3z = 1$ (ii)

$3y + 7z = 1$ (iii)

2(i) – (ii) પરથી $3y + 7z = 1$

$x + 2y + 5z = 1$ (iv)

$3y + 7z = 1$ (v)

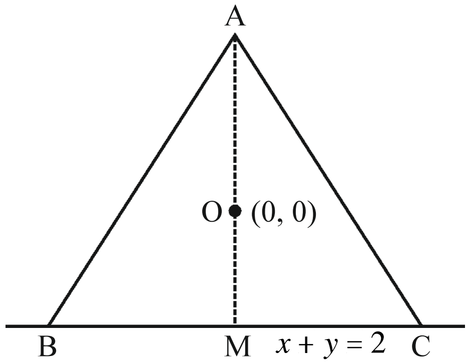
(iv) – (v) પરથી $x = y + 2z$

$\therefore \quad \left(\frac{1-t}{3}, \frac{1-7t}{3}, t\right)$ પ્રત્યેક $t \in R$ માટે ઉકેલ છે.

$\therefore$ પ્રત્યેક $a \in R$ માટે સમીકરણો સુસંગત છે. **જવાબ (B)**

35. કોઈ સમભૂજ ત્રિકોણનું મધ્ય કેન્દ્ર ઊગમબિંદુ હોય તથા એક બાજુ $x + y = 2$ પર હોય તો, તેનું ક્ષેત્રફળ .... ચો. એકમ છે.

(A) $3\sqrt{6}$ (B) 6 (C) $6\sqrt{3}$ (D) $\frac{9}{2}\sqrt{3}$



ઉકેલ : $OM = \frac{|0 + 0 - 2|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$.

$\therefore AM = 3\sqrt{2}$

ΔABMમાં (AM = 3OM)

$AB^2 = AM^2 + BM^2$

$\therefore a^2 = (3\sqrt{2})^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$, તેથી $\frac{3a^2}{4} = 18$

$\therefore \quad a^2 = 24$

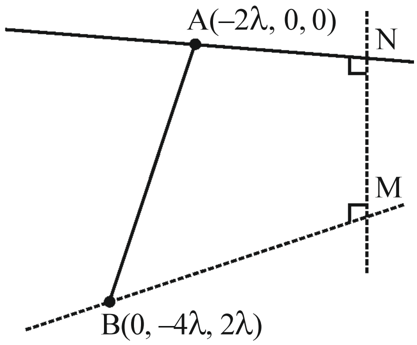
$\therefore$ ક્ષેત્રફળ $= \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 24 = 6\sqrt{3}$ **જવાબ (C)**

નોંધ : મધ્યકેન્દ્ર એ લંબકેન્દ્ર પણ છે.

36. $x + 2\lambda = 2y = -12z$, $x = y + 4\lambda = 6z - 12\lambda$ વચ્ચેનું ટૂંકામાં ટૂંકુ અંતર $4\sqrt{2}$ છે. λનું એક મૂલ્ય .... છે.

(A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (B) 2 (C) $\sqrt{2}$ (D) $2\sqrt{2}$

ઉકેલ :



$\vec{a} = (-2\lambda, 0, 0)$, $\vec{b} = (0, -4\lambda, 2\lambda)$

$x + 2\lambda = 2y = -12z$ અને $x = y + 4\lambda = 6z - 12\lambda$ આપેલ રેખાઓ છે.

$\therefore \frac{x + 2\lambda}{1} = \frac{y}{\frac{1}{2}} = \frac{z}{-\frac{1}{12}}$ $\qquad \therefore \frac{x}{1} = \frac{y + 4\lambda}{1} = \frac{z - 2\lambda}{\frac{1}{6}}$

$\therefore \frac{x + 2\lambda}{12} = \frac{y}{6} = \frac{z}{-1}$ $\qquad \therefore \frac{x}{6} = \frac{y + 4\lambda}{6} = \frac{z - 2\lambda}{1}$

બંને રેખાને લંબ રેખાની દિશા $= (12, 6, -1) \times (6, 6, 1)$

$= (12, -18, 36)$

i.e. (2, –3, 6)

ટૂંકામાં ટૂંકું અંતર $= \left| \dfrac{(\vec{b} - \vec{a}) \cdot \vec{l}}{\left|\vec{l}\right|} \right|$

$= \dfrac{|(2\lambda, -4\lambda, 2\lambda) \cdot (2, -3, 6)|}{7}$

$= \left|\dfrac{28\lambda}{7}\right| = 4\sqrt{2}$

$\therefore \quad \lambda = \pm\sqrt{2}$ **જવાબ (C)**

37. $(11)^{2016}$ના દશક તથા શતકના અંક અનુક્રમે x અને y હોય, તો ક્રમયુક્ત જોડ (x, y) = ...

(A) (1, 8) (B) (1, 6) (C) (6, 1) (D) (8, 1)

ઉકેલ : $(11)^{2016} = (10 + 1)^{2016}$

$= {}^{2016}C_0\, 10^{2016} + ... + {}^{2016}C_{2014}\, 10^2 + {}^{2016}C_{2015}\, 10 + {}^{2016}C_{2016}$

$\equiv (1008)(2015)10^2 + 20160 + 1 \pmod{1000}$

$\equiv 0 + 160 + 1 \pmod{1000}$

$\equiv 161 \pmod{1000}$ આથી, $x = 6, y = 1$ **જવાબ (C)**

38. $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1$ને $(8, 3\sqrt{3})$ પર દોરેલા અભિલંબ પર નીચેના પૈકી કયું બિંદુ નથી ?

(A) $(10, \sqrt{3})$ (B) $\left(13, \dfrac{-1}{\sqrt{3}}\right)$ (C) $\left(12, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ (D) $(11, \sqrt{3})$

ઉકેલ : $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1 \Rightarrow \dfrac{2x}{16} - \dfrac{2y}{9}\dfrac{dy}{dx} = 0$

$(8, 3\sqrt{3})$ આગળ,

$\dfrac{2 \times 8}{16} = \dfrac{2 \times 3\sqrt{3}}{9}\dfrac{dy}{dx} \Rightarrow \dfrac{3}{2\sqrt{3}} = \dfrac{dy}{dx}$

$(8, 3\sqrt{3})$ આગળ અભિલંબનું સમીકરણ

$y - 3\sqrt{3} = -\dfrac{2}{\sqrt{3}}(x - 8)$

$(10, \sqrt{3})$ આની ઉપર નથી.

બીજી રીત :

અભિલંબનું સમીકરણ

$$\dfrac{x - x_1}{\frac{x_1}{a^2}} = -\dfrac{y - y_1}{\frac{y_1}{b^2}}$$

$$\therefore \quad \dfrac{x - 8}{\frac{8}{16}} = -\dfrac{y - 3\sqrt{3}}{\frac{3\sqrt{3}}{9}}$$

$(10, \sqrt{3})$ આની ઉપર નથી.

જવાબ (A)

39. પેટીમાં 5 લાલ, 4 કાળી અને 3 સફેદ લખોટી છે. વધુમાં વધુ 3 લાલ લખોટીની પસંદગી થાય તે રીતે 4 લખોટીની પસંદગીના પ્રકારની સંખ્યા .... છે.

(A) 495 (B) 455 (C) 460 (D) 490

ઉકેલ : માંગેલ પ્રકારોની સંખ્યા $= {}^{12}C_4 - {}^{5}C_4$

$= 495 - 5 = 490$ **જવાબ (D)**

40. જો $(x + iy)^2 = 7 + 24i$, તો $\left(7+\sqrt{-576}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(7-\sqrt{-576}\right)^{\frac{1}{2}}$ નું એક મૂલ્ય .... છે.

(A) $-6i$ (B) $-3i$ (C) $2i$ (D) 6

ઉકેલ : $(x + iy)^2 = 7 + 24i$

$x^2 - y^2 + i(2xy) = 7 + 24i$

$\therefore \quad x^2 - y^2 = 7,\ xy = 12$

$\therefore \quad \left(\frac{12}{y}\right)^2 - y^2 = 7$

$\therefore \quad 144 - y^4 = 7y^2$

$\therefore \quad y^4 + 7y^2 - 144 = 0$

$\therefore \quad y^2 = -16$ અથવા 9. પરંતુ $y^2 \neq -16$

$\therefore \quad y = \pm 3$

તેથી $\left(7+\sqrt{-576}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(7-\sqrt{-576}\right)^{\frac{1}{2}} = (x + iy) - (x - iy) = 2iy = \pm 6i$ **જવાબ (A)**

41. વર્તુળ $x^2 + y^2 - 2x = 0$ નું $y = 3 - x$ માં આરસી-પ્રતિબિંબ .... છે.

(A) $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 12 = 0$ (B) $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 24 = 0$

(C) $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 24 = 0$ (D) $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 12 = 0$

ઉકેલ : વર્તુળનું કેન્દ્ર (1, 0) તથા ત્રિજ્યા 1 છે.

$x + y - 3 = 0$ માં (1, 0)નું પ્રતિબિંબ મેળવવા,

$\frac{x-1}{1} = \frac{y-0}{1} = \frac{-2(1+0-3)}{1+1} = 2$. તેથી $x = 3$, $y = 2$

કેન્દ્ર (3, 2) અને 3 ત્રિજ્યાવાળા વર્તુળનું સમીકરણ, $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 1$

$\therefore \quad x^2 + 9 - 6x + y^2 + 4 - 4y = 1$

$\therefore \quad x^2 + y^2 - 6x - 4y + 12 = 0$ **જવાબ (A)**

42. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\log(\sin 7x + \cos 7x)}{\sin 3x} =$ ....

(A) $\frac{1}{3} \log 7$ (B) $\frac{7}{3}$ (C) $\frac{14}{3}$ (D) $\frac{1}{3}$

ઉકેલ : $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\log(\sin 7x + \cos 7x)}{\sin 3x} = \frac{1}{2} \lim\limits_{x \to 0} \frac{\log(1+\sin 14x)}{\sin 3x}$ $\quad ((\sin 7x + \cos 7x)^2 = 1 + \sin 14x)$

$= \frac{1}{2} \lim\limits_{x \to 0} \left\{ \frac{\log(1+\sin 14x)}{\sin 14x} \cdot \frac{\sin 14x}{14x} \cdot \frac{14x}{3x} \cdot \frac{3x}{\sin 3x} \right\}$

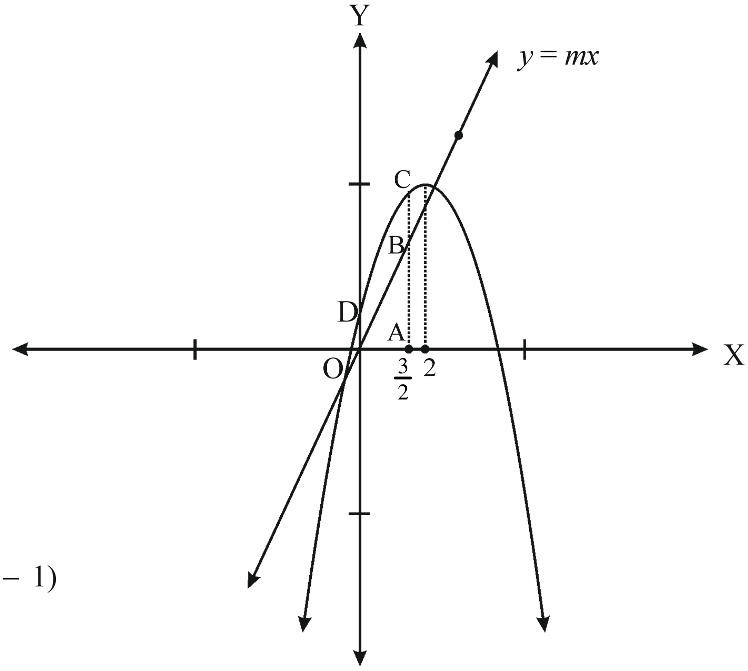
$= \frac{1}{2} \cdot \frac{14}{3} = \frac{7}{3}$

બીજી રીત :

$$\lim_{x \to 0}\left(\frac{7\cos 7x - 7\sin 7x}{\sin 7x + \cos 7x}\right)\frac{1}{3\cos 3x} = \frac{7}{3}$$ (લા પીટલનો નિયમ) **જવાબ (B)**

43. જો રેખા $y = mx$ એ $\{(x, y) : 0 \le x \le \frac{3}{2}, 0 \le y \le 1 + 4x - x^2\}$ના બે સમાન ભાગ કરે તો $m =$ ....

(A) $\frac{39}{16}$ (B) $\frac{9}{8}$ (C) $\frac{13}{3}$ (D) $\frac{13}{6}$



ઉકેલ : $y = -(x^2 - 4x - 1)$

OABનું ક્ષેત્રફળ = OBCDનું ક્ષેત્રફળ = OACDનું ક્ષેત્રફળ – OABનું ક્ષેત્રફળ

ΔOABનું ક્ષેત્રફળ $= \frac{1}{2} \times$ પાયો $\times$ વેધ

$= \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{3}{2}m$ કારણ કે B $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}m\right)$ છે.

$\therefore$ 2(OABનું ક્ષેત્રફળ) = (OACDનું ક્ષેત્રફળ)

$$\therefore \quad 2\left[\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\times\frac{3}{2}m\right] = \int_0^{\frac{3}{2}}(1 + 4x - x^2)dx$$

$$\therefore \quad \frac{9}{4}m = \left[x + 2x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{3}{2} + \frac{9}{2} - \frac{9}{8} = 6 - \frac{9}{8} = \frac{39}{8}$$

$\therefore \quad m = \frac{13}{6}$ **જવાબ (D)**

44. $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{25} = 1$ની નાભિમાંથી $\left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{5\sqrt{3}}{2}\right)$ આગળ દોરેલા સ્પર્શકો પર દોરેલા લંબની લંબાઈનો ગુણાકાર = ...

(A) $3\sqrt{13}$ (B) 9 (C) $\dfrac{189}{13}$ (D) 18

ઉકેલ : ગુણધર્મ : કોઈપણ ઉપવલયની નાભિમાંથી કોઈપણ સ્પર્શક પર દોરેલા લંબનો ગુણાકાર ગૌણ અક્ષનો વર્ગ છે.

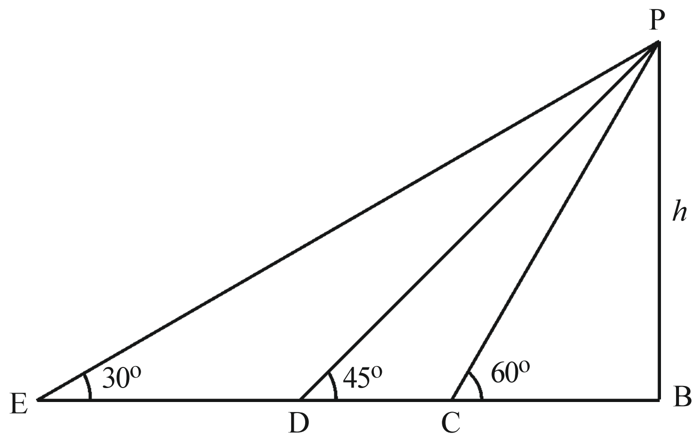
જવાબ : 9

જવાબ (B)

45. દરિયાકિનારા નજીક આવેલી એક ટેકરીની ટોચ પરના બિંદુ P આગળથી એક નિરીક્ષકને ટેકરી તરફ રેખામાં અચળ ઝડપે આવતા વહાણનો અવસેધકોણ 30^o જણાય છે. 45 મિનિટ પછી આ અવસેધકોણ 45^o બને છે. જો કુલ T મિનિટમાં આ વહાણ દરિયામાં એવા સ્થળે પહોંચે કે જ્યાં અવસેધકોણ 60^o બને તો T = ...

(A) $45\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ (B) $45\left(1+\sqrt{3}\right)$ (C) $45\left(1+\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)$ (D) $45\left(2+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$

ઉકેલ :



ધારો કે ટેકરીની ઊંચાઈ h = PB

$BD = h,\ EB = h\sqrt{3},\ BC = \dfrac{h}{\sqrt{3}}$ $\left(tan30^o = \dfrac{h}{EB}, tan60^o = \dfrac{h}{CB}\right)$

હવે ઝડપ $= v = \dfrac{ED}{45} = \dfrac{(\sqrt{3}-1)h}{45}$ $(ED = EB - BD)$

હવે $DC = vT_1$

$\therefore \left(h - \dfrac{h}{\sqrt{3}}\right) = \dfrac{(\sqrt{3}-1)h}{45} \times T_1$

$T_1 = \dfrac{45}{\sqrt{3}}$

$T = \dfrac{45}{\sqrt{3}} + 45$

જવાબ (A)

46. પ્રથમ 6 ધન પૂર્ણાંકોમાંથી પૂરવણી સિવાય 2 પૂર્ણાંક પસંદ કરવામાં આવે છે. આ પૈકીનો નાનો પૂર્ણાંક X હોય તો Xનું અપેક્ષિત મૂલ્ય .... છે.

(A) $\frac{5}{3}$ (B) $\frac{14}{3}$ (C) $\frac{13}{3}$ (D) $\frac{7}{3}$

ઉકેલ : શક્ય જોડીઓ (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 5), (4, 6), (5, 6)

Xનું અપેક્ષિત મૂલ્ય $= \frac{(1\times5)+(2\times4)+(3\times3)+(4\times2)+(5\times1)}{15} = \frac{5+8+9+8+5}{15}$

$= \frac{35}{15} = \frac{7}{3}$ **જવાબ (D)**

47. (1, 2, 3)માંથી પસાર થતા $\overline{r} = \hat{i} + \hat{j} + \lambda(2\hat{i} + \hat{j} + 4\hat{k})$ રેખાને સમાવતા સમતલનું (3, 1, 1)થી લંબ અંતર .... છે.

(A) $\frac{3}{\sqrt{11}}$ (B) $\frac{1}{\sqrt{11}}$ (C) $\frac{4}{\sqrt{41}}$ (D) 0

ઉકેલ : ધારો કે (1, 2, 3)માંથી તથા રેખામાંથી પસાર થતા સમતલનું સમીકરણ $l(x-1) + m(y-2) + n(z-3) = 0$ છે.

$\vec{b} = (1, 2, 3)$ અને $\vec{a} = (1, 1, 0)$ સમતલ પર છે.

$\vec{b} - \vec{a} = (0, 1, 3)$. સમતલના અભિલંબની દિશા $(0, 1, 3) \times (2, 1, 4) = (1, 6, -2)$

$\therefore$ સમતલનું સમીકરણ $(x-1) + 6(y-2) - 2(z-3) = 0$ છે.

એટલે કે $x + 6y - 2z - 7 = 0$

તેનું (3, 1, 1) થી લંબ અંતર $= \left|\frac{3+6-2-7}{\sqrt{41}}\right| = 0$

i.e. (3, 1, 1) સમતલમાં છે. **જવાબ (D)**

48. સંકલ $\int \frac{(x+2)\,dx}{(x^2+3x+3)\sqrt{x+1}}$ = ...

(A) $\frac{1}{\sqrt{3}} cot^{-1}\left[\frac{x\sqrt{3}}{\sqrt{x+1}}\right] + c$

(B) $\frac{1}{\sqrt{3}} tan^{-1}\left[\frac{x}{\sqrt{x+1}}\right] + c$

(C) $\frac{2}{\sqrt{3}} tan^{-1}\left[\frac{x}{\sqrt{3(x+1)}}\right] + c$

(D) $\frac{2}{\sqrt{3}} cot^{-1}\left[\frac{x}{\sqrt{x+1}}\right] + c$

ઉકેલ : $\int \frac{(x+2)\,dx}{(x^2+3x+3)\sqrt{x+1}}$

ધારો કે $x + 1 = t^2$ $(t > 0)$ $dx = 2t\,dt$

$$\therefore \quad \int \frac{2(t^2+1)t\,dt}{[(t^2-1)^2+3t^2]\cdot t} = \int \frac{2(t^2+1)\,dt}{(t^4+t^2+1)}$$

$$= \int \frac{2(t^2+1)\,dt}{(t^2-t+1)(t^2+t+1)}$$

$$= \int \frac{\left((t^2-t+1)+(t^2+t+1)\right)dt}{(t^2-t+1)(t^2+t+1)}$$

$$= \int \frac{dt}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} + \int \frac{dt}{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\left[tan^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(t+\frac{1}{2}\right)\right)+tan^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(t-\frac{1}{2}\right)\right)\right]$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}tan^{-1}\left[\frac{\frac{4t}{\sqrt{3}}}{1-\frac{4}{3}\left(t^2-\frac{1}{4}\right)}\right]$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}tan^{-1}\left[\frac{t\sqrt{3}}{1-t^2}\right] = \frac{2}{\sqrt{3}}tan^{-1}\left[\frac{\sqrt{3(x+1)}}{-x}\right]$$

$$\therefore \quad I = \frac{2}{\sqrt{3}}cot^{-1}\left(\frac{\sqrt{3(x+1)}}{x}\right)+c = \frac{2}{\sqrt{3}}tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{3(x+1)}} + c$$ જવાબ **(C)**

49. $\frac{1}{cos\,285^o}+\frac{1}{\sqrt{3}\,sin\,255^o}$ નું મૂલ્ય .... છે.

(A) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ (B) $2\sqrt{2}$ (C) $\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ (D) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

ઉકેલ : $\frac{1}{cos\,285^o}+\frac{1}{\sqrt{3}\,sin\,255^o} = \frac{1}{cos\,(270+15)^o}+\frac{1}{\sqrt{3}\,sin\,(270-15)^o}$

$$= \frac{1}{sin15^o}+\frac{1}{\sqrt{3}\,(-cos15^o)}$$

$$= \frac{\sqrt{3}\,cos\,15^o - sin\,15^o}{\sqrt{3}\,sin\,15^o\,cos\,15^o}$$

$$= \frac{2(cos\,(30^o+15^o))}{\frac{\sqrt{3}}{2}\times sin\,30^o}$$

$$= \frac{2\,cos\,45^o}{\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)} = \frac{8}{\sqrt{3}}\times\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$ જવાબ **(C)**

50. a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 ધન પદોની ગુ. શ્રે.માં છે. a_2 તથા a_4નો સમાંતર મધ્યક 117 છે. a_2 તથા a_4નો ગુ. મધ્યક 108 છે. તો a_1 તથા a_5નો સમાંતર મધ્યક .... છે.

(A) 145.5 (B) 108 (C) 117 (D) 144.5

ઉકેલ : a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 ગુ. શ્રે.માં છે.

$a_2 + a_4 = 234$ ...(i)

$a_2a_4 = (108)^2$ ...(ii)

ધારો કે $a_2 = a_1r,\ a_3 = a_1r^2,\ a_4 = a_1r^3,\ a_5 = a_1r^4$

$\therefore\ a_1r(1 + r^2) = 234$ ...(iii)

$(a_1r^2)^2 = (108)^2 \Rightarrow a_1r^2 = 108$ ...(iv)

$$\frac{(1+r^2)}{r} = \frac{234}{108} = \frac{117}{54} = \frac{13}{6}$$

$\therefore\ 6 + 6r^2 = 13r$

$\therefore\ (2r - 3)(3r - 2) = 0$

$\therefore\ r = \frac{3}{2}$ અથવા $\frac{2}{3}$

હવે, $a_1r^2 = 108 \Rightarrow a_1 \times \frac{9}{4} = 108$. તેથી, $a_1 = 48$ $\left(r = \frac{3}{2}\right)$

$\therefore\ a_5 = a_1r^4 = 48 \times \frac{81}{16} = 243$

$\therefore\ a_1$ તથા a_5નો સમાંતર મધ્યક $= \frac{48+243}{2} = \frac{291}{2} = 145.5$

[જો $r = \frac{2}{3}$, તો $a_1 = \frac{108 \times 9}{4} = 243,\ a_5 = a_1r^4 = \frac{243 \times 16}{81} = 48.$

$\therefore$ તે જ જવાબ.] **જવાબ (A)**

51. સંકલ $\int_{\frac{\pi}{24}}^{\frac{5\pi}{24}} \frac{dx}{1+\sqrt[3]{tan2x}} = ...$

(A) $\frac{\pi}{18}$ (B) $\frac{\pi}{3}$ (C) $\frac{\pi}{12}$ (D) $\frac{\pi}{6}$

ઉકેલ : $I = \int_{\frac{\pi}{24}}^{\frac{5\pi}{24}} \frac{dx}{1+\sqrt[3]{tan2x}}$

$$I = \int_{\frac{\pi}{24}}^{\frac{5\pi}{24}} \frac{dx}{1+\sqrt[3]{tan\left(2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right)}} = \int_{\frac{\pi}{24}}^{\frac{5\pi}{24}} \frac{dx}{1+\sqrt[3]{cot2x}}$$

બંને સંકલના પરિણામ ઉમેરતાં,

$$2I = \int_{\frac{\pi}{24}}^{\frac{5\pi}{24}} dx = \frac{\pi}{6}$$

$\therefore \quad I = \frac{\pi}{12}$ **જવાબ (C)**

52. ત્રણ સદિશો $\vec{a}$, $\vec{b}$ તથા $\vec{c}$ માટે $|\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = 2, |\vec{c}| = 4$ તથા $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$. તો $4\vec{a}\cdot\vec{b} + 3\vec{b}\cdot\vec{c} + 3\vec{c}\cdot\vec{a} = ...$

(A) 27 (B) –68 (C) –26 (D) –34

ઉકેલ : $\vec{c} = -\vec{a} - \vec{b}$

$\therefore \quad 4(\vec{a}\cdot\vec{b}) + 3(\vec{b}\cdot\vec{c}) + 3(\vec{c}\cdot\vec{a}) = 4(\vec{a}\cdot\vec{b}) + 3\vec{b}\cdot(-\vec{a}-\vec{b}) + 3\vec{a}\cdot(-\vec{a}-\vec{b}))$

$= 4(\vec{a}\cdot\vec{b}) - 3(\vec{a}\cdot\vec{b}) - 3|\vec{b}|^2 - 3(\vec{a}\cdot\vec{b}) - 3|\vec{a}|^2 = -2(\vec{a}\cdot\vec{b}) - 3(4) - 3(1) = -15 - 2(\vec{a}\cdot\vec{b})$

$\because \quad \vec{a} + \vec{b} = -\vec{c}$

$\therefore \quad |\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{c}|$

$\therefore \quad \sqrt{1+4+2(\vec{a}\cdot\vec{b})} = 4$

$2(\vec{a}\cdot\vec{b}) = 11 \Rightarrow (\vec{a}\cdot\vec{b}) = \frac{11}{2}$

$-15 - 2(\vec{a}\cdot\vec{b}) = -15 - 11 = -26$

બીજી રીત :

$\vec{a} + \vec{b} = -\vec{c}, \ |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{c}|^2$

$\therefore \quad 2\vec{a}\cdot\vec{b} = 11$

$4\vec{a}\cdot\vec{b} + 3\vec{b}\cdot\vec{c} + 3\vec{c}\cdot\vec{a} = 4\vec{a}\cdot\vec{b} + 3\vec{c}\cdot(\vec{a} + \vec{b})$

$= 4\vec{a}\cdot\vec{b} + 3\vec{c}\cdot(-\vec{c}) = 22 - 3(16) = -26$ **જવાબ (C)**

53. તમામ વાસ્તવિક $x, y, z,$ માટે નિશ્ચાયક $\begin{vmatrix} 2x & xy - xz & y \\ 2x + z + 1 & xy - xz + yz - z^2 & 1 + y \\ 3x + 1 & 2xy - 2xz & 1 + y \end{vmatrix}$ નું મૂલ્ય ....

(A) $(y - xz)(z - x)$ (B) શૂન્ય

(C) $(x - y)(y - z)(z - x)$ (D) $(x - yz)(y - z)$

ઉકેલ : $\begin{vmatrix} 2x & xy-xz & y \\ 2x+z+1 & xy-xz+yz-z^2 & 1+y \\ 3x+1 & 2xy-2xz & 1+y \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} 2x & x(y-z) & y \\ z+1 & z(y-z) & 1 \\ x+1 & x(y-z) & 1 \end{vmatrix}$ $\begin{Bmatrix} R_2 \to R_2 - R_1 \\ R_3 \to R_3 - R_1 \end{Bmatrix}$

$= (y-z) \begin{vmatrix} 2x & x & y \\ z+1 & z & 1 \\ x+1 & x & 1 \end{vmatrix}$

$= (y-z) \begin{vmatrix} x & x & y \\ 1 & z & 1 \\ 1 & x & 1 \end{vmatrix}$ $\{C_1 \to C_1 - C_2\}$

$= (y-z) \begin{vmatrix} x & x & y \\ 0 & z-x & 0 \\ 1 & x & 1 \end{vmatrix}$ $\{R_2 \to R_2 - R_3\}$

$= (x-y)(y-z)(z-x)$ **જવાબ (C)**

54. λ ની બે કિંમતો λ_1 તથા λ_2 માટે $\lambda(x^2 - x) + x + 5 = 0$ નાં બીજ α, β માટે $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} + \frac{4}{5} = 0$,

તો $\frac{\lambda_1}{\lambda_2^2} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1^2} = ...$

(A) 488 (B) 536 (C) 512 (D) 504

ઉકેલ : $\lambda x^2 + (1 - \lambda)x + 5 = 0$ નાં બીજ α, β છે.

હવે, $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} + \frac{4}{5} = 0$

$\therefore \quad \frac{(\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta}{\alpha\beta} + \frac{4}{5} = 0$

$\therefore \quad \frac{\left(\frac{\lambda-1}{\lambda}\right)^2 - \frac{10}{\lambda}}{\left(\frac{5}{\lambda}\right)} = -\frac{4}{5}$

$\therefore \quad \frac{\lambda^2 - 2\lambda + 1}{\lambda^2} - \frac{10}{\lambda} = \frac{-4}{\lambda}$

$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 6\lambda$

$\therefore \quad \lambda^2 - 8\lambda + 1 = 0$ નાં બીજ λ_1 તથા λ_2 છે.

હવે, $\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2^2}+\dfrac{\lambda_2}{\lambda_1^2} = \dfrac{\lambda_1^3+\lambda_2^2}{(\lambda_1\cdot\lambda_2)^2}$

$$= \frac{(\lambda_1+\lambda_2)^3-3\lambda_1\lambda_2(\lambda_1+\lambda_2)}{(\lambda_1\cdot\lambda_2)^2}$$

$= 512 - 24 = 488$ **જવાબ (A)**

55. જો શ્રેઢી 3 + 7 + 14 + 24 + 37 +... નાં 15 પદોનો સરવાળો $15k$ હોય તો k = ...

(A) 126 (B) 122 (C) 81 (D) 119

ઉકેલ : $S_n = 3 + 7 + 14 + 24 + 37 + ... + T_n$

$S_n = \quad 3 + 7 + 14 + 24 + ... + T_{n-1} + T_n$

$\therefore \quad 0 = 3 + 4 + 7 + 10 + 13 + ... - T_n$

$\therefore \quad T_n = 3 + 4 + 7 + 10 + 13 + ...$ n પદ સુધી

$\therefore \quad T_n = 3 + \left(\frac{n-1}{2}\right) [8 + (n-2)3]$

$= 3 + \frac{(n-1)(3n+2)}{2} = \frac{3n^2-n+4}{2}$

$\therefore \quad T_n = \frac{3}{2}n^2 - \frac{n}{2} + 2$

$S_n = \Sigma T_n$

$\therefore \quad S_n = \frac{3}{2}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{4} + 2n$

$\therefore \quad S_{15} = \frac{3}{2}\left[\frac{15\times16\times31}{6}\right] - \left(\frac{15\times16}{4}\right) + (2\times15) = 1860 - 60 + 30$

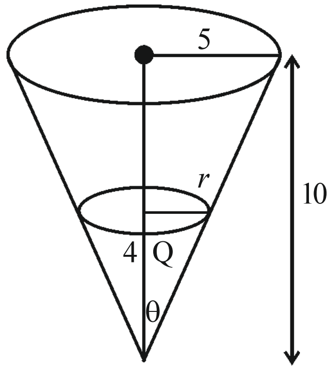
$\therefore \quad S_{15} = 1830 = 15k$

$\therefore \quad k = 122$ **જવાબ (B)**

56. 10 મી ઊંડી અને 5 મી ત્રિજ્યાવાળી શંકુ આકારની ભૂગર્ભ ટાંકીમાં પાણી પડે છે. ટાંકીમાં પાણીના જથ્થાના બદલાવાનો દર $\frac{3}{2}\pi$ મી^{3}/મી છે, જ્યારે પાણીની ઊંચાઈ 4મી. હોય ત્યારે પાણીની ઊંચાઈ વધવાનો દર શોધો.

(A) $\frac{3}{2}$ (B) $\frac{3}{8}$ (C) $\frac{1}{8}$ (D) $\frac{1}{4}$

ઉકેલ :



$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi h^3 \tan^2\theta$

$\frac{dV}{dt} = \pi h^2 \tan^2\theta \frac{dh}{dt} = \pi r^2 \frac{dh}{dt}$

હવે, $\frac{r}{4} = \frac{5}{10}$. આથી, $r = 2$, આથી $\frac{dV}{dt} = \frac{3}{2}\pi = \pi(2)^2\frac{dh}{dt} \Rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{3}{8}$ **જવાબ (B)**

57. એક પેટીમાં ત્રણ સિક્કા છે. તે પૈકી એક સિક્કાની બંને બાજુ છાપ છે. બીજો સિક્કો અસમતોલ છે અને ઉછાળતી વખતે 90 % વખત છાપ બતાવે છે. ત્રીજો સિક્કો સમતોલ છે. આ પેટીમાંથી એક સિક્કો લઈને ઉછાળવામાં આવે છે. જો તેની પર છાપ આવે તો તે સમતોલ સિક્કો હોવાની સંભાવના .... છે.

(A) $\frac{3}{8}$ (B) $\frac{5}{12}$ (C) $\frac{5}{24}$ (D) $\frac{1}{3}$

ઉકેલ : $P(H|C_1) = 1$, $P(H|C_2) = 0.9$, $P(H|C_3) = \frac{1}{2}$, $P(C_i) = \frac{1}{3}$

$P(C_3|H) = \frac{P(H \cap C_3)}{P(H)} = \frac{P(H|C_3)\,P(C_3)}{P(H)}$

માંગેલ સંભાવના $= \frac{\left(\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{1}{3}\times 1\right)+\left(\frac{1}{3}\times\frac{9}{10}\right)+\left(\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\right)} = \frac{5}{10+9+5} = \frac{5}{24}$ **જવાબ (C)**

58. જો વિધેય $f : R \to R$, $f(x) = \begin{cases} ax & x < 2 \\ ax^2 - bx + 3 & x \ge 2 \end{cases}$ વિકલનીય હોય તો $f'(-3) + f'(3)$ નું મૂલ્ય .... છે.

(A) 0 (B) 3 (C) 4 (D) $\frac{15}{2}$

ઉકેલ : $f(x) = \begin{cases} ax & x < 2 \\ ax^2 - bx + 3 & x \ge 2 \end{cases}$

$f(x)$ વિકલનીય વિધેય છે.

$\therefore$ $f(x)$ સતત છે.

$\therefore \lim_{x\to 2+} f(x) = \lim_{x\to 2-} f(x) = f(2)$

$\therefore \quad 4a - 2b + 3 = 2a$

$\therefore \quad 2a - 2b + 3 = 0$ ...(i)

વળી, $Rf'(2) = Lf'(2)$

$2a(2) - b = a$

$\therefore \quad 3a = b$ ...(ii)

(i) તથા (ii) ઉકેલતાં,

$a = \frac{3}{4}$ અને $b = \frac{9}{4}$

$f'(-3) = a$

$f'(3) = 2a(3) - b = 6a - b$

$\therefore \quad f'(-3) + f'(3) = 7a - b = \frac{21}{4} - \frac{9}{4} = \frac{12}{4} = 3$ **જવાબ (B)**

59. નીચેના પૈકી કયું નિત્ય સત્ય છે ?

(A) $p \to (p \to q)$ (B) $(p \vee q) \to q$ (C) $p \vee (p \to q)$ (D) $p \vee (q \to p)$

ઉકેલ :

p	q	$p \to q$	$q \to p$	$p \vee q$	$p \to (p \to q)$	$(p \vee q) \to q$	$p \vee (p \to q)$	$p \vee (q \to p)$
T	T	T	T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	T	F	F	T	T
F	T	T	F	T	T	T	T	F
F	F	T	T	F	T	T	T	T

$\therefore \quad p \vee (p \to q)$ નિત્ય સત્ય છે.

બીજી રીત :

(1) $p' + (p' + q) = p' + q$

(2) $(p + q)' + q = p'q' + q = (q + q')(q + p') = q + p'$

(3) $p + p' + q = t$

(4) $p + (q' + p) = p + q'$

$\therefore$ (C) નિત્ય સત્ય છે. **જવાબ (C)**

60. જ્યાં વક્ર $y = kx^2 + (5k + 3)x + 6k + 5$, $(k \in R)$, X-અક્ષને સ્પર્શે છે તે બિંદુઓના X-યામનો સરવાળો .... છે.

(A) $-\frac{4}{3}$ (B) $-\frac{19}{3}$ (C) $-\frac{10}{3}$ (D) $\frac{5}{3}$

ઉકેલ : $y = kx^2 + (5k + 3)x + (6k + 5)$

વક્ર X-અક્ષને સ્પર્શે છે.

$\therefore$ D = 0

$\therefore$ $(5k + 3)^2 = 4k(6k + 5)$

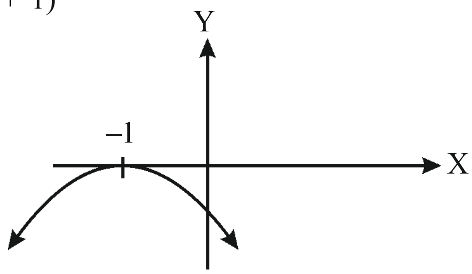
અથવા $25k^2 + 30k + 9 = 24k^2 + 20k$

આથી, $k^2 + 10k + 9 = 0$

$\therefore$ $k = -1$ અને -9

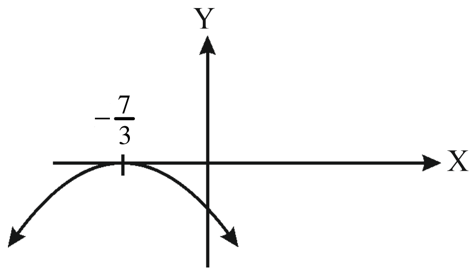
$\therefore$ વક્ર

$y = -x^2 - 2x - 1 = -(x + 1)^2$



અથવા વક્ર

$y - 9x^2 - 42x - 49 = -(3x + 7)^2$



$\therefore$ X-યામનો સરવાળો $= -1 - \frac{7}{3} = \frac{-10}{3}$ **જવાબ (C)**

●