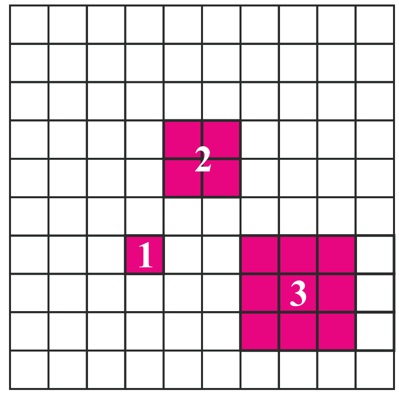
अध्याय 3

वर्ग एवं वर्गमूल

3.1 सोनू तथा दीनू वर्ग शीट पर वर्ग बना रहे हैं तथा उनका क्षेत्रफल वर्ग गिनकर लिख रहे हैं।



एक इकाई भुजा के वर्ग (वर्ग–1) का क्षेत्रफल= 1 वर्ग इकाई

दो इकाई भुजा के वर्ग (वर्ग–2) का क्षेत्रफल = 4 वर्ग इकाई

तीन इकाई भुजा के (वर्ग–3) का क्षेत्रफल = 9 वर्ग इकाई

आप भी वर्ग शीट पर 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 इकाई के वर्ग बनाइए व उनका क्षेत्रफल इकाई वर्गों को गिनकर ज्ञात कीजिए। नीचे दी गई सारणी को पूरा कीजिए –

वर्ग की भुजा	1	2	3	4	5	6					
वर्ग का क्षेत्रफल	1	4	9								

तालिका 3.1

संख्याएँ 1, 4, 9, 16, 25, ... और इसी प्रकार की संख्याओं में क्या विशेष है?

चूंकि इन्हें $1 = 1 \times 1 = 1^2$; $4 = 2 \times 2 = 2^2$; $9 = 3 \times 3 = 3^2$ के रूप में व्यक्त कर सकते हैं। अतः हम पाते हैं कि इन संख्याओं को, एक संख्या को उसी से गुणा करके प्राप्त किया जाता है। इस प्रकार की संख्याओं 1, 4, 9, 16, ... को **वर्ग संख्याएँ** कहते हैं।

व्यापक रूप में $s = r^2$ है तो s एक वर्ग संख्या है। क्या 24 एक वर्ग संख्या है?

निम्न संख्याओं एवं उनके वर्गों के बारे में विचार कीजिए एवं रिक्त स्थानों को भरिए।

संख्याएँ	वर्ग
1	1 × 1 = 1
2	2 × 2 = 4
3	3 × 3 = 9
4	4 × 4 = 16
5	5 × 5 = 25
6	....
7	....
8	....
9	....
10	

तालिका 3.2

उपर्युक्त तालिका में आप पाएँगे कि 1 से 100 के बीच मात्र 10 संख्याएँ ही वर्ग संख्याएँ हैं, शेष संख्याएँ वर्ग संख्या नहीं हैं।

संख्याएँ 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, एवं 100 वर्ग संख्याएँ हैं तथा इन्हें पूर्ण वर्ग संख्याएँ भी कहते हैं।

करो और सीखो ◆ दी गई संख्याओं के बीच की पूर्ण वर्ग संख्या लिखिए।

(i) 20 व 30 (ii) 40 व 50

3.2 वर्ग संख्याओं के गुणधर्म

नीचे 1 से 20 तक की संख्याओं की वर्ग संख्याओं को दिखाया गया है–

संख्याएँ	वर्ग	संख्याएँ	वर्ग
1	1	11	121
2	4	12	144
3	9	13	169
4	16	14	196
5	25	15	225
6	36	16	256
7	49	17	289
8	64	18	324
9	81	19	361
10	100	20	400

तालिका 3.3

उक्त तालिका में वर्ग संख्याओं के इकाई स्थान के अंकों को समूह A के रूप में नीचे लिखिए।

A = { 0, 1, 4, ... }

0 से 9 के बीच के जो अंक समूह A में नहीं आए हैं उन्हें समूह B में लिखिए –

B = { 2, 3, ... }

आप समूह A तथा समूह B की संख्याओं के आधार पर यह कह सकते हैं कि संख्याएँ जिनके इकाई का अंक 2, 3, 7, 8 हो वे वर्ग संख्याएँ नहीं हो सकती हैं।

करो और सीखो ◆

(1) इकाई के अंक के आधार पर यह बताइए निम्न में से कौन–कौन सी संख्याएँ पूर्ण वर्ग संख्या नहीं हो सकती है?

(i) 2304 (ii) 402 (iii) 3003 (iv) 100 (v) 1008

(2) ऐसी तीन संख्याएँ बताइए जिनमें आप निश्चयपूर्वक कह सकते हैं कि वह पूर्ण वर्ग संख्याएँ नहीं है।

(i) .... (ii) .... (iii) ....

तालिका 3.3 में दी गई सम एवं विषम संख्याओं के पूर्ण वर्ग किस प्रकार के हैं ?

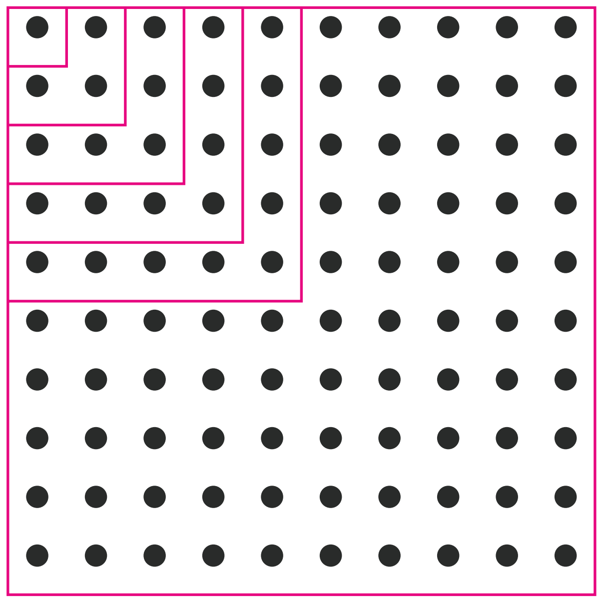
विषम संख्याओं का पूर्ण वर्ग –सम / विषम

सम संख्याओं का पूर्ण वर्ग –सम / विषम

उक्त गतिविधि से हम यह कह सकते हैं कि **सभी सम संख्याओं के वर्ग सम संख्या तथा विषम संख्याओं के वर्ग विषम संख्या ही प्राप्त होती है।**

1. वर्ग संख्याओं के रोचक प्रतिरूप

(i)



चित्र में एक कोने से प्रारम्भ करते हुए विभिन्न आकार के वर्ग बनाए गए हैं। इन वर्गों को ध्यान से देखिए तथा बिन्दुओं की संख्याएँ लिखिए –

पहला वर्ग	1	=	1	=	1^2
दूसरा वर्ग	1+3	=	4	=	2^2
तीसरा वर्ग	1+3+5	=	9	=	3^2
चौथा वर्ग	1+3+5+7	=	....	=	....
पाँचवा वर्ग	1+3+5+7+9	=	....	=	....
छठा वर्ग	....	=	....	=	....
सातवाँ वर्ग	....	=	....	=	....

हमने देखा कि पहला वर्ग = पहली विषम संख्या = 1^2

दूसरा वर्ग = पहली दो विषम संख्याओं का योग = 2^2

तीसरा वर्ग = पहली तीन विषम संख्याओं का योग = 3^2

इसी तरह आगे बढ़ने पर प्रथम आठ विषम संख्याओं का योग = 8^2 = 64 होगा।

2. 1, 11, 111, ... की वर्ग संख्याओं को देखें।

$1^2=1$

$11^2=121$

$111^2=12321$

$1111^2=1234321$

$11111^2=$........................

$111111^2=$........................

3. दो क्रमागत संख्याएँ लिखिए, जैसे 4 व 5

उनके वर्ग करें $4^2 = 16,\ 5^2 = 25$

वर्गों का अन्तर $25 - 16 = 9$

संख्याओं का योग $4 + 5 = 9$

ऐसी कुछ और क्रमागत संख्याएँ लिखिए।

आप पाएँगे कि क्रमागत संख्याओं के वर्गों का अन्तर = संख्याओं का योग

4. पाइथागोरियन त्रिक $3^2 + 4^2$

$9 + 16 = 25 = (5)^2$

$6^2 + 8^2$

$36 + 64 = 100 = (10)^2$

आप देखेंगे कि हर उदाहरण में संख्याओं की एक तिकड़ी है प्रत्येक तिकड़ी में बड़ी संख्या का वर्ग शेष दोनों संख्याओं के वर्गों के योग के बराबर है।

इस प्रकार की संख्याएँ **पाइथागोरियन त्रिक** कहलाती है।

ऊपर दिए गए उदाहरण में 3, 4, 5, और 6, 8,10 पाइथोगोरियन त्रिक है।

उदाहरण 1 जाँच कीजिए 9, 40, 41 पाइथोगोरियन त्रिक हैं अथवा नहीं ?

हल $(9)^2 + (40)^2$

$= 81 + 1600$

$= 1681 = (41)^2$

अतः $(9)^2 + (40)^2 = (41)^2$ है अर्थात् 9, 40 व 41 एक पाइथोगोरियन त्रिक है।

प्रश्नावली 3.1

1. निम्नलिखित संख्याओं के वर्गों के इकाई के अंक क्या होंगे?

(i) 24 (ii) 17 (iii) 100 (iv) 55 (v) 111

(vi) 1023 (vii) 5678 (viii) 12796 (ix) 2412

2. नीचे दी गई संख्याओं का वर्ग ज्ञात कीजिए।

(i) 18 (ii) 11 (iii) 107 (iv) 15 (v) 200 (vi) 27

3. निम्न में से कौन–कौन सी संख्याओं का वर्ग सम संख्या होगा।

(i) 235 (ii) 396 (iii) 5508

(iv) 2001 (v) 82003 (vi) 10224

4. बिना संक्रिया किए निम्न का योग ज्ञात कीजिए ।

(i) 1 + 3 + 5 + 7

(ii) 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13

(iii) 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19

5. संख्या 64 को आठ विषम संख्याओं के योग के रूप में लिखिए।

6. निम्नलिखित संख्याओं के वर्गों के बीच में कितनी संख्याएँ है?

(i) 10 व 11 (ii) 17 व 18 (iii) 30 व 31

7. जाँच कीजिए कि दी गई तीन संख्याएँ पाइथागोरियन त्रिक है अथवा नहीं।

(i) 9, 12, 15 (ii) 7, 11, 13 (iii) 10, 24, 26

3.3 वर्गमूल

निम्न संख्याओं के वर्गों पर ध्यान दीजिए–

$(4)^2 = 4 \times 4 = 16$

$(5)^2 = 5 \times 5 = 25$

$(6)^2 = 6 \times 6 = 36$

उपर्युक्त उदाहरणों में हम देखते हैं कि 4 का वर्ग 16 है, इसके विपरीत हम कह सकते हैं कि 16 का वर्गमूल 4 है, इसी प्रकार का 5 का वर्ग 25 है, तो 25 का वर्गमूल 5 होगा। अर्थात् **वर्गमूल, वर्ग की प्रतिलोम संक्रिया है।**

वर्गमूल को " $\sqrt{\ }$ " चिह्न "करणी चिह्न" द्वारा दर्शाते हैं।

जैसे – 81 का वर्गमूल $= \sqrt{81} = 9$

करो और सीखो ◆ तालिका 3.3 देखकर बताइए कि निम्न के वर्गमूल क्या होंगे ?

(i) 49 (ii) 64 (iii) 100

हम पूर्व उदाहरणों में देख चुके है कि 'n' विषम संख्याओं का योग n^2 के बराबर होता है।

जैसे $5^2 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9$

जिस प्रकार पाँच प्रारम्भिक विषम संख्याओं को जोड़कर 5 का वर्ग ज्ञात किया जा सकता है, उसी प्रकार 25 में से विषम संख्याओं को घटाकर 25 का वर्गमूल ज्ञात कर सकते हैं, आइए देखें।

$25 - 1 = 24$ $24 - 3 = 21$ $21 - 5 = 16$

$16 - 7 = 9$ $9 - 9 = 0$

यहाँ 25 में से उत्तरोत्तर प्रारम्भिक पाँच विषम संख्याओं को घटाने पर शेषफल शून्य (0) प्राप्त हुआ है, इसका अर्थ हुआ कि 25 का वर्गमूल 5 है। अर्थात् $\sqrt{25} = 5$

आप भी इसी प्रकार कुछ पूर्ण वर्ग संख्याओं का इस प्रक्रिया से वर्गमूल ज्ञात करने का प्रयास कीजिए।

3.4 अभाज्य गुणनखण्ड विधि द्वारा वर्गमूल ज्ञात करना

नीचे कुछ संख्याओं तथा उनके वर्गों के गुणनखण्ड दिए गए हैं।

संख्या	संख्या के अभाज्य गुणनखण्ड	वर्ग संख्या	वर्ग संख्या के अभाज्य गुणनखण्ड
6	2 × 3	36	2 × 2 × 3 × 3
8	2 × 2 × 2	64	2 × 2 × 2 × 2 × 2 × 2
12	2 × 2 × 3	144	2 × 2 × 2 × 2 × 3 × 3

आप पाएँगे कि संख्या के अभाज्य गुणनखण्ड ही उसके वर्ग के अभाज्य गुणनखण्ड में दो बार आते हैं, जैसे 6 के अभाज्य गुणनखण्ड 2 व 3 हैं तो इसके वर्ग संख्या के अभाज्य गुणनखण्ड में 2×2 तथा 3×3 आ रहे हैं।

इसके विपरीत वर्गमूल में अभाज्य गुणनखण्डों की संख्या उनके वर्ग के अभाज्य गुणनखण्डों की संख्या की आधी होती है।

आइए हम एक दी गई वर्ग संख्या 144 का वर्गमूल ज्ञात करते हैं।

2	144
2	72
2	36
2	18
3	9
3	3
	1

हम जानते है कि 144 का अभाज्य गुणनखण्ड

$144 = \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times \underline{3 \times 3}$

अभाज्य गुणनखण्ड के युग्म बनाने पर हम पाते है :

$144 = (2 \times 2 \times 3)^2$

$\sqrt{144} = 2 \times 2 \times 3$

$\sqrt{144} = 12$

इसी तरह संख्या 192 के अभाज्य गुणनखण्ड पर ध्यान दीजिए ।

$192 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3$

यहाँ सारे गुणनखण्ड युग्म में नहीं है। अतः 192 एक पूर्ण वर्ग संख्या नहीं है। यदि इसे पूर्ण बनाना है तो या तो उसे 3 से गुणा करना पड़ेगा या 3 से भाग करना पड़ेगा।

$192 \times 3 = \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times \underline{3 \times 3}$

$\sqrt{192 \times 3} = 2 \times 2 \times 2 \times 3$

$\sqrt{576} = 24$

इसी प्रकार $\frac{192}{3} = \frac{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3}{3}$

$\sqrt{\frac{192}{3}} = 2 \times 2 \times 2 = 8$

उदाहरण 3 संख्या 6400 का वर्गमूल ज्ञात कीजिए ।

हल

2	6400
2	3200
2	1600
2	800
2	400
2	200
2	100
2	50
5	25
5	5
	1

$$6400 = \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times \underline{5 \times 5}$$

$$\sqrt{6400} = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5$$

$$= 80$$

उदाहरण 4 क्या 60 एक पूर्ण वर्ग संख्या है ?

हल

2	60
2	30
3	15
5	5
	1

$$60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$$

अभाज्य गुणनखण्ड में 3 और 5 युग्म में नहीं है। अतः 60 पूर्ण वर्ग संख्या नही है। जिसे यथार्थ रूप में हम इस प्रकार भी देख सकते हैं कि इसमें केवल एक शून्य है।

उदाहरण 5 क्या 1800 एक पूर्ण वर्ग संख्या है। यदि नहीं तो 1800 का सबसे छोटा गुणज प्राप्त कीजिए, जो कि पूर्ण वर्ग संख्या हो तथा नई संख्या का वर्गमूल ज्ञात कीजिए।

हल हम जानते हैं कि $1800 = \underline{2 \times 2} \times 2 \times \underline{3 \times 3} \times \underline{5 \times 5}$

अभाज्य गुणनखण्ड के अनुसार 2 के युग्म नहीं हैं, अतः 1800 एक पूर्ण वर्ग नहीं है। यदि 2 का एक जोड़ा और बनाते हैं तब संख्या पूर्ण वर्ग हो जाएगी। अतः 1800 का 2 से गुणा करने पर हम पाएँगे।

$$1800 \times 2 = \underline{2 \times 2} \times \underline{2 \times 2} \times \underline{3 \times 3} \times \underline{5 \times 5}$$

अब प्रत्येक अभाज्य गुणनखण्ड युग्म में है अतः

$1800 \times 2 = 3600$ पूर्ण वर्ग संख्या है।

$$\sqrt{3600} = 2 \times 2 \times 3 \times 5$$

$$= 60$$

उदाहरण 6 सबसे छोटी वर्ग संख्या ज्ञात कीजिए जो 6, 9, 15 प्रत्येक संख्या से विभाजित हो जाए।

हल इसे दो चरणों में हल करेंगे पहले 6, 9 व 15 से विभाजित संख्या के लिए ल.स. ज्ञात करेंगे तत्पश्चात् ल.स. का वह गुणज ज्ञात करेंगे जो पूर्ण वर्ग हो –

6, 9, 15 का ल.स. 2 x 3 x 3 x 5

= 90

2	6, 9, 15
3	3, 9, 15
3	1, 3, 5
5	1, 1, 5
	1, 1, 1

चूंकि 90 के गुणनखण्ड युग्मों में नहीं हैं।

अतः युग्म बनाने के लिए 2 व 5 से गुणा करना होगा।

90 × 2 x 5 = 2 x $\underline{2}$ x 3 x 3 x 5 x $\underline{5}$

अतः 900 सबसे छोटी वर्ग संख्या है, जो 6, 9, 15 से विभाजित होती है।

प्रश्नावली 3.2

1. निम्नलिखित संख्याओं के वर्गमूल में इकाई का अंक क्या हो सकता है?
   (i) 9604 (ii) 65536 (iii) 998001 (iv) 60481729
2. अनुमान लगाकर बताइए निम्नलिखित में कौन–2 सी संख्याएँ पूर्ण वर्ग संख्या नहीं हो सकती है?
   (i) 48 (ii) 81 (iii) 102 (iv) 24636
3. अभाज्य गुणनखण्ड विधि द्वारा वर्गमूल ज्ञात कीजिए।
   (i) 1296 (ii) 729 (iii) 1764 (iv) 3969 (v) 4356 (vi) 1600
4. नीचे दी गई संख्याएँ पूर्ण वर्ग संख्याएँ नहीं है। वह सबसे छोटी पूर्ण संख्या बताइए जिससे गुणा करने पर ये पूर्ण वर्ग संख्या बन जाएगी।
   (i) 252 (ii) 396 (iii) 1620
5. नीचे दी गई संख्याएँ पूर्ण वर्ग नहीं है। अभाज्य गुणनखण्ड करके पता लगाएँ कि इनमें किस संख्या का भाग दिया जाए कि यह पूर्ण वर्ग संख्या बन जाएगी ?
   (i) 1000 (ii) 867 (iii) 4375
6. एक वर्गाकार बाग में गुलाब के पौधे लगाए जाने हैं। प्रत्येक पंक्ति में पौधों की संख्या उतनी है, जितनी की पंक्तियों की संख्या। यदि बाग में 2401 पौधे लगे हों तो उसमें पंक्तियों की संख्या ज्ञात कीजिए।
7. वह सबसे छोटी वर्ग संख्या ज्ञात कीजिए जो 4, 9 व 10 से पूर्णतः विभाजित हो।

3.5 भागफल विधि से वर्गमूल ज्ञात करना

जब संख्याएँ बहुत बड़ी हो तब अभाज्य गुणनखण्ड विधि लम्बी तथा बोझिल हो जाती है। इसके लिए हम भाग विधि का उपयोग कर वर्गमूल ज्ञात करते हैं।

उदाहरण 7 संख्या 576 का वर्गमूल ज्ञात करने के लिए निम्न चरणों पर विचार कीजिए।

हल **चरण 1** इकाई स्थान से प्रारम्भ करते हुए 2–2 अंकों का जोड़ा बनाएँगे।
जैसे 576 में $\overline{5}\ \overline{76}$

$$\begin{array}{r|l} & 2 \\ \hline 2 & \overline{5}\ \overline{76} \\ & -4 \\ \cline{2-2} & 1 \end{array}$$

चरण 2 वह सबसे बड़ी संख्या चुनिए जिसका वर्ग सबसे बाईं ओर की संख्या के बराबर अथवा छोटा हो।
अतः हमें 5 से छोटी वर्ग संख्या ढूँढ़नी है, जो कि 2 है

$$(2)^2 < 5 < (3)^2$$

$$\begin{array}{r|l} & 2 \\ \hline 2 & \overline{5}\ \overline{76} \\ +2 & -4 \\ \cline{2-2} 4 & 176 \end{array}$$

उस संख्या को भागफल के रूप में ऊपर तथा उसके वर्ग को 5 के नीचे लिखकर घटाएँ ।

चरण 3 पुनः शेषफल के आगे अंकों का अगला जोड़ा लिखें। जैसे भाग की संक्रिया में करते हैं। (ध्यान रहे भाग में केवल 1 अंक लिखा जाता है, जबकि वर्गमूल में जोड़ा लिखा जाता है।)

चरण 4 भाजक को उसी संख्या में जोड़कर नीचे लिखिए ।

चरण 5 उक्त उदाहरण में भाजक 4 के आगे रिक्त स्थान में एक अंक (0 से 9 के मध्य कोई एक) लिखना होगा जिससे हमारा भाजक (40, 41, 42, ... 49) तक हो सकता है साथ ही हमें वही अंक भागफल (0 से 9) में मिलेगा जिसे भागफल में 2 के आगे लिखेंगे। नए भाजक तथा इस अंक (0 से 9) का गुणनफल ऐसी संख्या होनी चाहिए, जो हमारे भाज्य 176 के बराबर या उससे छोटी हो।

$$\begin{array}{r|l} & 2\ 4 \\ \hline 2 & \overline{5}\ \overline{76} \\ +2 & 4 \\ \cline{2-2} 44 & 176 \\ 4 & 176 \\ \cline{2-2} & 0 \end{array}$$

चरण 6 इस स्थिति में 44 × 4 = 176 है। अब चूँकि शेषफल 0 है तथा दी गई संख्या में कोई अंक शेष नहीं है, अतः 576 = 24 प्राप्त होता है।

उदाहरण 8 संख्या 7056 का वर्गमूल भाग विधि से ज्ञात कीजिए।

हल **चरण 1** इकाई से प्रारम्भ करते हुए दो–दो संख्या के जोड़े बनाएँगे। $\overline{70}\ \overline{56}$

$$\begin{array}{r|l} & \\ \hline & \overline{70}\ \overline{56} \end{array}$$

चरण 2 उस सबसे बड़ी संख्या का चयन करते हैं, जिसका वर्ग 70 के बराबर अथवा उससे कम हो –

$$(8)^2 < 70 < (9)^2$$

इस संख्या को भाजक में तथा इसके वर्ग 64 को 70 के नीचे लिखते हैं।

चरण 3 भाजक 8 को पुनः 8 जोड़कर लिखा जाता है और नया भाजक 16 प्राप्त होता है।

$$\begin{array}{r|l} & 8 \\ \hline 8 & \overline{70}\ \overline{56} \\ +8 & 64 \\ \cline{2-2} 16 & 6 \end{array}$$

चरण 4 अब संख्याओं का अगला जोड़ा 56 उतारते हैं। अब हमें नया भाज्य 656 प्राप्त होता है।

चरण 5 पुनः भाजक (16) में रिक्त स्थान हेतु एक अंक (0–9 के मध्य) का चयन करना होगा, जो (160, 161,....169) तक हो सकती है, तथा उसे उसी अंक से गुणा करने पर प्राप्त गुणनफल 656 से कम अथवा उसके बराबर हो।

8
8 | 70 56
+ 8 | 64
16_ | 6 56

8
8 | 70 56
+ 8 | 64
164 | 6 56
4 | - 6 56
| 0 00

जो कि उक्त उदाहरण में 4 होगी, क्योंकि 164 × 4 = 656 प्राप्त होगा।

अतः 7056 = 84 प्राप्त होगा।

उदाहरण 9 एक वर्गाकार मैदान का क्षेत्रफल 1089 मी^{2} है तो मैदान की भुजा ज्ञात कीजिए।

हल वर्गाकार मैदान का क्षेत्रफल = 1089 मी^{2}

इसलिए मैदान की भुजा = $\sqrt{1089}$

अतः = $\sqrt{1089}$ = 33 मी

अतः मैदान की भुजा = 33 मी

3 3
3 | 10 89
3 | 9
63 | 1 89
3 | 1 89
| 0

उदाहरण 10 वह सबसे छोटी संख्या ज्ञात कीजिए जिसको 1989 में से घटाने पर वह पूर्ण वर्ग संख्या बन जाए तथा उस पूर्ण वर्ग संख्या का वर्गमूल भी ज्ञात कीजिए।

हल आइए 1989 का वर्गमूल ज्ञात करने का प्रयास करते हैं –

4 4
4 | 19 89
+ 4 | 16
84 | 3 89
+4 | 3 36
| 53

यहाँ हम देखते है कि 1989 पूर्ण वर्ग संख्या से 53 अधिक है।

अतः 1989 में से 53 घटाने पर हमें पूर्ण वर्ग संख्या प्राप्त हो जाएगी।

1989 – 53 = 1936

जिसका वर्ग मूल $\sqrt{1936}$ = 44 होगा।

इसी प्रकार यदि हमें वह संख्या ज्ञात करनी है जिसे 1989 में जोड़ने से पूर्ण वर्ग संख्या प्राप्त हो तो हम 44 के स्थान पर 45 के वर्ग पर विचार करेंगे जो की 45^2 = 2025 है। अतः हमें **2025** – 1989 = 36 जोड़ना होगा

उदाहरण 11 चार अंकों की सबसे बड़ी संख्या ज्ञात कीजिए, जो पूर्ण वर्ग हो।

हल हम जानते हैं कि चार अंकों की सबसे बड़ी संख्या 9999 है। भाग विधि से वर्गमूल ज्ञात करने का प्रयास करते हैं। शेषफल 198 है यह दर्शाता है कि 99^2, 9999 से 198 कम हो।

अतः अभीष्ट संख्या 9999 − 198 = 9801

	9 9
9	$\overline{99}\ \overline{99}$
+9	81
189	18 99
9	17 01
	1 98

3.6 दशमलव संख्या का वर्गमूल

उदाहरण 12 संख्या $\sqrt{51.84}$ पर विचार कीजिए।

हल **चरण 1** दशमलव संख्या का वर्गमूल ज्ञात करने के लिए भी दो–दो अंकों के जोड़े बनाएँगे। चूँकि किसी भी दशमलव संख्या में दो भाग होते है पूर्ण भाग एवं दशमलव भाग। पूर्ण भाग में जोड़े वैसे ही बनेंगे, जैसे उपर्युक्त उदाहरणों में बनाए गए है इकाई स्थान से। परन्तु दशमलव भाग में ये जोड़े दशांश से बनेंगे अर्थात दशांश व शतांश एक जोड़ा, हजारवाँ व दस हजारवाँ एक साथ एवं इसी प्रकार आगे भी।

ऊपर के उदाहरण में $\overline{51}$ व $\overline{84}$ के जोड़े बनेंगे।

	7
7	$\overline{51}.\overline{84}$
7	49
	284

चरण 2 पूर्व की भाँति ही एक संख्या चुनेंगे, जिसका वर्ग 51 से कम या बराबर हो। $7^2 < 51 < 8^2$ इसे भाजक व भागफल दोनों में लिखेंगे।

चरण 3 7 को 7 से गुणा कर भाज्य के नीचे लिखेंगे व 7 को 7 में जोड़कर भाजक वाले कॉलम में लिखेंगे।

	7.2
7	$\overline{51}.\overline{84}$
7	49
142	284
2	284
144	0 00

चरण 4 शेषफल 2 है। अगली बार नीचे की संख्या में 84 शेषफल के दाएँ लिखेंगे। जिससे 284 प्राप्त होता है। क्योंकि 84 दशमलव भाग में था, अतः भागफल में दशमलव रखेंगे।

चरण 5 अब 14 को आगे रिक्त स्थान में पूर्व की भाँति 0 से 9 के बीच की संख्या चुनेंगे। जिससे नया भाजक (140, 141, ... 149) तक बने और उसे उसी संख्या से गुणा करने पर 284 से बड़ी संख्या प्राप्त न हो।

यह हमारे भागफल को दर्शाता है।

उक्त उदाहरण में वह संख्या 2 होगी, जिससे 142 × 2 = 284 ।

अतः $\sqrt{51.84} = 7.2$

किस तरफ बढ़ें

संख्या 176.341 पर ध्यान दीजिए। पूर्ण संख्या और दशमलव संख्या के दोनों भागों पर बार लगाइए। अब 176 पर ध्यान दीजिए हम दशमलव के पास के इकाई स्थान से प्रारम्भ करके बाईं तरफ जाते है, प्रथम बार 76 के ऊपर और दूसरा बार 1 के ऊपर है, 0.341 के लिए हम दशमलव से प्रारम्भ करके दाईं तरफ जाते है।

पहला बार 34 के ऊपर और दूसरा बार लगाने के लिए हम 1 के बाद 0 रखते है और इस प्रकार $0.\overline{34}\ \overline{10}$ बनाते हैं।

3.7 वर्गमूल का अनुमान लगाना

(i) वर्गमूल में अंकों की संख्या

निम्न सारणी पर विचार कीजिए –

$1^2 = 1$	$99^2 = 9801$
$9^2 = 81$	$100^2 = 10000$
$10^2 = 100$	$999^2 = 9898001$

1 अंक वाली संख्या के वर्ग में कितने अंक है ? 1 अथवा 2

2 अंकों वाली संख्या के वर्ग में कितने अंक है ? 3 अथवा 4

3 अंकों वाली संख्या के वर्ग में कितने अंक है ? ....

इसके विपरित 1 अंक वाली संख्या के वर्गमूल में 1 अंक होगा। जबकि दो अंकों वाली संख्या के वर्गमूल में 1 अथवा 2 अंक होंगे। इसी प्रकार आगे भी।

करो और सीखो

बताइए निम्न संख्याओं के वर्गमूल में कितने अंक होंगे?

(i)1369 (ii)15376 (iii) 6031936

कई बार हमें दैनिक जीवन में वर्गमूल निकालने की आवश्यकता होती है।

एक विद्यालय में 350 बच्चे है स्वतंत्रता दिवस समारोह में उन्हें वर्गाकार जमावट में खड़ा करना है तथा शेष विद्यार्थी व्यवस्था देखेंगे। ऐसे में हमें पूर्ण वर्ग संख्या का अनुमान लगाने की आवश्यकता होगी। हम जानते है कि $100 < 350 < 400$ और

$\sqrt{100} = 10$ तथा $\sqrt{400} = 20$

अतः $10 < \sqrt{350} < 20$ लेकिन फिर भी हम वर्ग संख्या के करीब नहीं है। हम जानते हैं कि

$18^2 = 324$ व $19^2 = 361$

अतः $18 < \sqrt{350} < 19$

अतः $\sqrt{350}$ में हम 18 छात्रों की पक्तियाँ बनवा सकते हैं।

प्रश्नावली 3.3

1. निम्नलिखित संख्याओं के वर्गमूल भाग विधि से ज्ञात कीजिए।
   (i) 441 (ii) 576 (iii)1225 (iv) 2916 (v) 4624 (vi) 7921
2. निम्नलिखित संख्याओं के वर्गमूल बिना गणना के ज्ञात कीजिए।
   (i)121 (ii) 256 (iii) 4489 (iv) 60025
3. निम्नलिखित दशमलव संख्याओं के वर्गमूल ज्ञात कीजिए।
   (i) 6.25 (ii) 2.89 (iii) 32.49 (iv) 31.36 (v) 57.76
4. निम्न संख्याओं में क्या जोड़ा जाए कि यह पूर्ण वर्ग संख्या बन जाए।
   (i) 420 (ii) 2000 (iii) 837 (iv) 3500
5. निम्न संख्याओं में से क्या घटाया जाए कि यह पूर्ण वर्ग संख्या बन जाए।
   (i) 555 (ii) 252 (iii) 1650 (iv) 6410
6. एक विवाह समारोह में वर्गाकार जमावट में कुर्सियाँ लगायी जानी है। 1000 कुर्सियाँ उपलब्ध है। वर्गाकार जमावट के लिए और कितनी कुर्सियों की आवश्यकता होगी। साथ ही यह भी बताएँ, प्रत्येक पक्ति में कुल कितनी कुर्सियाँ होंगी।
7. एक वर्गाकार खेत का क्षेत्रफल 361 मी ^{2} है तो उस खेत के चारों और तारबंदी हेतु कितने मीटर तार की आवश्यकता होगी ?
8. वह छोटी से छोटी संख्या ज्ञात कीजिए जिसका 2352 में भाग देने पर भागफल पूर्ण वर्ग बन जाए ?

हमने सीखा

1. साधारणतया यदि एक संख्या m को n^2 से व्यक्त किया जाए (जहाँ m एवं n दोनों प्राकृत संख्याएँ हो) तो m एक वर्ग संख्या होती है। जैसे $n = 5$ एवं $m = 5^2 = 25$ ।
2. वे संख्याएँ जिनके इकाई का अंक 2, 3, 7, 8 हो वे कभी वर्ग संख्याएँ नहीं हो सकती अर्थात् सभी वर्ग संख्याओं में इकाई का अंक सदैव 0, 1, 4, 5, 6 या 9 होता है।
3. वर्ग संख्याओं के अंत में शून्यों की संख्या केवल सम होती है।
4. वर्गमूल, वर्ग की प्रतिलोम संक्रिया है।
5. एक पूर्ण वर्ग संख्या के दो पूर्ण वर्गमूल होते हैं एक धनात्मक एवं एक ऋणात्मक। धनात्मक वर्गमूल को संकेत $\sqrt{}$ द्वारा व्यक्त किया जाता है।