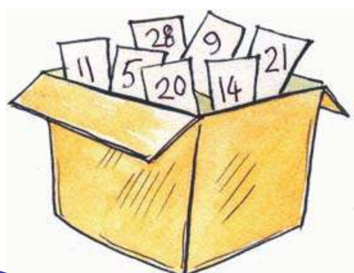
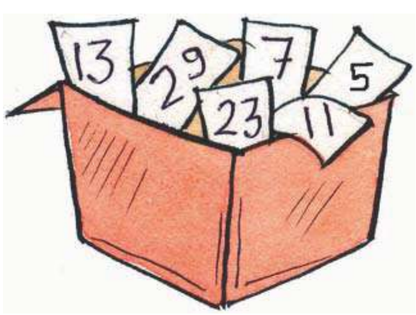
## अध्याय 4

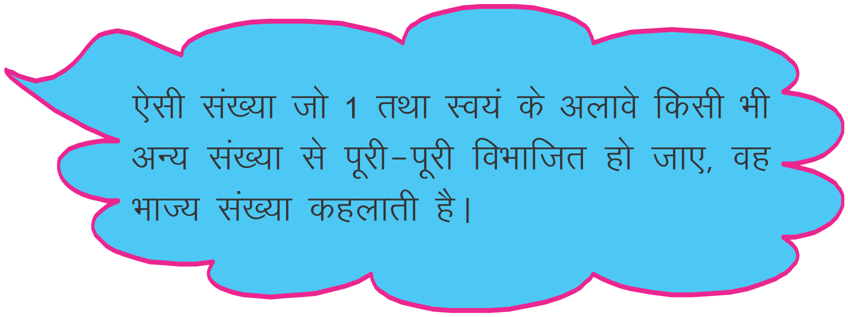
# गुणज तथा गुणनखंड

इस डिब्बे में संख्यांक लिखे हुए बहुत से कार्ड रखे हैं, आपको इनमें से एक-एक कार्ड उठाना है और अलग-अलग संख्याओं से भाग देकर पता लगाना है कि कौन-सी संख्या पूरी तरह विभाजित होती है और कौन-सी संख्या नहीं।



हमारे पास दो खाली डिब्बे भी है जिन संख्याओं में किसी संख्या से पूरा-पूरा भाग नहीं लगेगा उन्हें लाल डिब्बे में और जिनमें पूरा-पूरा भाग लग जाए उन्हें हरे डिब्बे में रखेंगे।






### अब बताइए–

#### नीचे दी गई संख्याएँ किन-किन संख्याओं से विभाजित होती हैं?

1 → 1

2 → 1,2

3 →

4 →

5 →

6 →

7 →

8 →

9 →

### पता कीजिए

10 से 30 तक वे कौन-कौन सी संख्याएँ हैं जो सिर्फ 1 तथा स्वयं से विभाजित होती हैं?

1 को छोड़कर वे संख्याएँ जो सिर्फ स्वयं तथा 1 से पूर्ण विभाजित होते हैं अभाज्य संख्याएँ कहलाती हैं। जैसे– लाल डिब्बे वाली संख्याएँ 11, 13, 5, 7 .... इत्यादि।

### स्वयं कीजिए

2 से 50 के बीच की संख्याओं में भाज्य और अभाज्य संख्याओं के लिए अपनी कॉपी में एक सारणी बनाइए और लिखिए।

**सोचिये और कीजिये–**

नीचे दी गई संख्याओं में 2 से विभाजित होने वाली संख्या को △ से, 3 से विभाजित होने वाली संख्या को ▭ से तथा 5 से विभाजित होने वाली संख्या को ○ से घेरिये–

344, 458, 573, 779, 480, 944, 410, 1260, 6655, 1904, 2751, 4210, 1905

**अब बताइए–**

3 अंको वाली 7 संख्याएँ लिखिए जिनमें 3 और 5 से पूरा–पूरा भाग लग जाए।

आओ सिमरन अब यह पता लगाते हैं कि किसी संख्या में किन-किन संख्याओं से पूरा-पूरा भाग लग जाता है। आप ऐसी कोई एक संख्या बताइए।

45

45 में 3, 5, 9, 15 और 45 से पूरा–पूरा भाग लग जाता है।

3, 5, 9, 15 और 45 से 45 में पूरा-पूरा भाग लग जाता है। इसलिए इन संख्याओं को 45 का विभाजक कहते हैं। जिसे 'अपवर्तक' भी कहा जाता है।

16 एवं 64 के अपवर्तकों को देखिए और समझिए।

16 के अपवर्तक = 2, 4, 8 और 16

64 के अपवर्तक = 2, 4, 8, 16, 32 और 64

आप भी निम्नांकित संख्याओं के सभी अपवर्तकों की गणना कीजिए।

90 के अपवर्तक = ......................................

75 के अपवर्तक = ......................................

60 के अपवर्तक = ......................................

अब हम 16 और 64 के अपवर्तकों पर गौर करेंगे।

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 16 | = | 2, | 4, | 8, | 16 | | |
| 64 | = | 2, | 4, | 8, | 16 | 32 | 64 |

यहाँ 16 एवं 64 के अपवर्तकों को मिलान करने से स्पष्ट होता है कि 2, 4, 8 तथा 16 दोनों संख्याओं में शामिल (उभयनिष्ठ) हैं जिन्हें 16 और 64 के समान अपवर्तक कहते हैं। इसे समापवर्तक भी कहा जाता है।

## निम्नांकित संख्याओं को समापवर्तकों को निकालिए–

(i) 24, 48

(ii) 5, 15

(iii) 12, 24, 36

दो या दो से अधिक संख्याओं के सबसे बड़े समापवर्तक को उन संख्याओं का महत्तम समापवर्तक कहते हैं।

तब तो 16 व 64 का महत्तम समापवर्तक 16 होगा।

## गुणनखण्ड

किसी संख्या के ऐसे खण्ड या टुकड़े जिनका गुणनफल उस संख्या के बराबर हो उस संख्या के गुणनखण्ड होते हैं।

जैसे– 40 के गुणनखण्ड

$1 \times 40 = 40$

$2 \times 20 = 40$

$4 \times 10 = 40$

$5 \times 8 = 40$

$2 \times 4 \times 5 = 40$

$2 \times 2 \times 2 \times 5 = 40$

के अलावा और 40 के गुणनखण्ड नहीं हो सकते।

**अभाज्य गुणनखण्ड**– किसी संख्या के ऐसे गुणनखण्ड जो अभाज्य हो।

जैसे–

40 = 2 x2 x 2 x 5

अभाज्य गुणनखंड की सहायता से भी महत्तम समापवर्तक निकाला जा सकता है। जानते हो 30, 36 और 54 का महत्तम समापवर्तक क्या होगा?

संख्याओं के अभाज्य गुणनखंड में समान (उभयनिष्ठ) संख्याओं का गुणनफल ही इनका महत्तम समापवर्तक है।

## इसे ऐसे समझिये–

30, 36, 54 का महत्तम समापवर्तक

| | |
|---|---|
| 2 | 30 |
| 3 | 15 |
| 5 | 5 |
| | 1 |

| | |
|---|---|
| 2 | 36 |
| 2 | 18 |
| 3 | 9 |
| 3 | 3 |
| | 1 |

| | |
|---|---|
| 2 | 54 |
| 3 | 27 |
| 3 | 9 |
| 3 | 3 |
| | 1 |

30, 36 और 54 के अभाज्य गुणनखंड

30 = 2 x 3 x 5

36 = 2 x 3 x 2 x 3

54 = 2 x 3 x 3 x 3

अतः 30, 36, 54 का महत्तम समापवर्तक 2 x3 = 6

## इन्हें कीजिये–

- 16, 48 और 56 का महत्तम समापवर्तक ज्ञात कीजिए।
- वह सबसे बड़ी संख्या ज्ञात कीजिए जिससे 84 और 105 में पूरा–पूरा भाग लग जाता है।

20 और 12 का महत्तम समापवर्तक ज्ञात करने के लिए सबसे पहले बड़ी संख्या 20 में छोटी संख्या 12 से भाग देते हैं। अब प्राप्त शेष से प्रथम भाजक में भाग देते हैं। यह क्रिया तब तक जारी रखते हैं, जब तक कि शेष शून्य न आ जाए अंतिम भाजक 4, 20 और 12 का महत्तम समापवर्तक है।

```
12) 20 (1
    12
    ---
     8) 12 (1
         8
        ---
         4) 8 (2
            8
           ---
            0
```

**भाग विधि द्वारा महत्तम समापवर्तक ज्ञात कीजिए–**

(1) 16 और 20 (2) 30 और 32

## गुणज

3 का पहाड़ा = 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30

4 का पहाड़ा = 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40

इन पहाड़ों को देखने से स्पष्ट होता है कि किसी संख्या में क्रमशः 1, 2, 3, 4, ....... से गुणा करने पर जो संख्याएँ प्राप्त होती है उनमें संख्या से पूरा–पूरा भाग लग जाता है। सभी संख्याएँ जिनमें दी गई किसी संख्या से पूरा–पूरा भाग लग जाए वह दी गई संख्या के गुणज या अपवर्त्य कहलाती है।

6 के अपवर्त्य = 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60, ......

8 के अपवर्त्य = 8, 16, 24, 32, 40, 48, 56, 64, 72, 80, ......

तो 6 एवं 8 के समान अपवर्त्य (समापवर्त्य) – 24, 48, 72, ......

6 व 8 में सबसे छोटा समान अपवर्त्य 24 है यह **लघुतम समापवर्त्य** कहलाता है।

> दो या दो से अधिक संख्याओं का लघुत्तम समापवर्त्य वह छोटी से छोटी संख्या है, जिसमें दी हुई संख्याओं से पूरा–पूरा भाग लग जाए।

## लघुत्तम समापवर्त्य ज्ञात करने की विधियाँ–

### (1) अभाज्य गुणनखण्ड विधि

दी गई संख्याओं का सबसे पहले अभाज्य गुणनखण्ड करते हैं, फिर इनमें कम-से-कम दो संख्याओं के उभयनिष्ठ गुणनखण्ड को एक बार तथा शेष गुणनखण्डों को इसके साथ लिखकर गुणा की क्रिया की जाती है। प्राप्त गुणनफल दी गयी संख्याओं का लघुतम समापवर्त्य होता है।

**इसे ऐसे समझे–**

4, 6 व 8 का लघुतम समापवर्त्य

| | |
|---|---|
| 2 | 4 |
| 2 | 2 |
| | 1 |

| | |
|---|---|
| 2 | 6 |
| 3 | 3 |
| | 1 |

| | |
|---|---|
| 2 | 8 |
| 2 | 4 |
| 2 | 2 |
| | 1 |

4, 6 व 8 के अभाज्य गुणनखण्ड

4 = 2 x 2

6 = 2 x3

8 = 2 x2 x 2

4, 6 एवं 8 का लघुतम समापवर्त्य होगा– 2 x 2 x 2 x 3 = 24

अभाज्य गुणनखंड विधि से लघुतम समापवर्त्य ज्ञात कीजिये–

(1) 3, 6 और 9

(2) 4, 8 और 12

## (2) भाग विधि

इसमें सभी संख्याओं को एक साथ विराम चिह्न (,) लगाकर लिखते हैं। अब ऐसी छोटी अभाज्य संख्या से सभी संख्याओं में भाग देते हैं जिससे कि कम से कम दो संख्याओं में उससे पूरा-पूरा भाग लग जाए। इस प्रकार अभाज्य गुणनखंड ज्ञात होते हैं। उनका गुणनफल ही दी गई संख्याओं का लघुतम समापवर्त्य है।

जैसे–

| | |
|---|---|
| 2 | 6, 8, 9 |
| 3 | 3, 4, 9 |
| | 1, 4, 3 |

अतः 6, 8, 9 का लघुतम समापवर्त्य = 2 x3 x4 x3 = 72

### समझिए और कीजिए–

| पहली संख्या | दूसरी संख्या | ल.स. | म.स. | ल.स. > म.स. | ल.स.x म.स.    पहली सं. x दूसरी सं. | पहली सं. x दूसरी सं. = ल.सं. x म.स. |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 10 | 15 | 30 | 5 | 30 > 5 | 30 x5 = 150   10 x 15 = 150 | 10 x 15 = 30 x 5 |
| 9 | 18 | | | | | |
| 14 | 21 | | | | | |
| 8 | 6 | | | | | |
| 12 | 18 | | | | | |

### अभ्यास

(1) गुणज और गुणनखंड में अन्तर स्पष्ट कीजिए।

(2) 51 से 100 के बीच अभाज्य संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

**(3) निम्नांकित के अभाज्य गुणनखंड ज्ञात कीजिए–**

(i) 424 (ii) 525

(iii) 728 (iv) 378

(v) 939 (vi) 139

(4) 4, 12 और 18 का महत्तम समापवर्तक ज्ञात कीजिये।

(5) 3, 9 और 36 का महत्तम समापवर्तक निकालिये।

(6) भाग विधि द्वारा 6, 7 और 8 का लघुतम समापवर्त्य ज्ञात कीजिए।

(7) 5, 6 और 9 के अभाज्य गुणनखंड निकालकर लघुतम समापवर्त्य ज्ञात कीजिए।

(8) 11, 22 और 121 का लघुतम समापवर्त्य निकालिये।

**(9) रिक्त स्थानों को भरिए।**

(i) संख्याओं के उभयनिष्ठ अपवर्तकों को ––––––––– कहते हैं।

(ii) संख्या अपने अपवर्तकों से –––––––––– होती है।

(iii) संख्याओं के सबसे छोटे उभयनिष्ठ अपवर्त्य को ––––––– कहते हैं।

****