अध्याय

7

महत्तम समापवर्तक तथा लघुत्तम समापवर्त्य

HCF and LCM

दो या दो से अधिक संख्याओं का 'महत्तम समापवर्तक' वह अधिकतम संख्या है, जो दी गई संख्याओं को पूर्णतया विभाजित करती है जबकि उन्हीं संख्याओं का 'लघुत्तम समापवर्त्य' वह छोटी-से-छोटी संख्या है, जो उन दी गई संख्याओं में से प्रत्येक से पूर्णतया विभाजित हो जाती है।
जैसे *18 व 36 का म.स. 9 है क्योंकि 9 वह बड़ी-से-बड़ी (अधिकतम) संख्या है, जो इन दोनों संख्याओं को पूर्णतया विभाजित करती है। जबकि दी गई संख्याओं का ल.स. 36 है क्योंकि 36 वह छोटी-से-छोटी (न्यूनतम) संख्या है जो इन दोनों संख्याओं से पूर्णतः विभाजित हो जाती है।*

महत्तम समापवर्तक ज्ञात करने की विधियाँ
Methods to Find Out HCF

महत्तम समापवर्तक ज्ञात करने की दो विधियाँ हैं

1. गुणनखण्ड विधि Factorization Method

यह विधि निम्न उदाहरण द्वारा समझी जा सकती है

उदाहरण 28, 42 और 98 का म.स. ज्ञात कीजिए।

हल ∵ $28 = 2 \times 2 \times 7$

$42 = 2 \times 3 \times 7$

$98 = 2 \times 7 \times 7$

∴ 28, 42 और 98 का म.स. $= 2 \times 7 = 14$

2. भाग विधि Division Method

इस विधि में दी गई दो संख्याओं में से बड़ी संख्या में छोटी संख्या से भाग दिया जाता है तथा शेषफल द्वारा भाजक में पुन: भाग दिया जाता है। यह क्रिया तब तक जारी रहती है, तब तक शेषफल शून्य न प्राप्त हो जाए। अन्तिम भाजक ही दी गई दो संख्याओं का म.स. होता है।

दो से अधिक संख्याओं का म.स. निकालने में पहले दो संख्याओं का म.स. ज्ञात किया जाता है तथा इस म.स. का तीसरी संख्या के साथ म.स. निकालते हैं। यही म.स. तीनों संख्याओं का अभीष्ट म.स. होता है।

यह विधि निम्न उदाहरण द्वारा समझी जा सकती है।

उदाहरण 36, 54, 81 का म.स. ज्ञात कीजिए।

हल सर्वप्रथम 36 तथा 54 का म.स. इस विधि से निकालते हैं

```
36) 54 (1
    36
    ---
18) 36 (2
    36
    --
    ×
```

अत: 36 तथा 54 का म.स. = 18

अब, 18 तथा 81 का म.स. निकालते हैं।

```
18) 81 (4
    72
    --
 9) 18 (2
    18
    --
    ×
```

अत: 36, 54 तथा 81 का म.स. 9 है।

लघुत्तम समापवर्त्य ज्ञात करने की विधियाँ Methods to Find Out LCM

लघुत्तम समापवर्त्य ज्ञात करने की दो विधियाँ हैं

1. गुणनखण्ड विधि Factorization Method

यह विधि निम्न उदाहरण द्वारा समझी जा सकती है

उदाहरण 16, 24, 40, 42 का ल.स. ज्ञात कीजिए।

हल $16 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^4$

$24 = 3 \times 2 \times 2 \times 2 = 3 \times 2^3$

$40 = 5 \times 2 \times 2 \times 2 = 5 \times 2^3$

$42 = 7 \times 3 \times 2 = 7 \times 3 \times 2$

ल.स. $= 2^4 \times 3 \times 5 \times 7 = 16 \times 105 = 1680$

2. भाग विधि Division Method

इस विधि को निम्न उदाहरण द्वारा समझा जा सकता है

उदाहरण 36, 48 और 80 का ल.स. ज्ञात कीजिए।

हल

2	36, 48, 80
2	18, 24, 40
2	9, 12, 20
2	9, 6, 10
3	9, 3, 5
3	3, 1, 5
5	1, 1, 5
	1, 1, 1

अत: 36, 48 और 80 का ल.स.
$= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 = 720$

इसमें संख्याओं को उभयनिष्ठ अभाज्य भाजकों द्वारा विभाजित किया जा सकता है तथा इस क्रिया की पुनरावृत्ति तब तक करते हैं जब तक शेषफल एक प्राप्त हो। इन अभाज्य भाजकों का गुणनफल ही अभीष्ट ल.स. होगा।

महत्त्वपूर्ण तथ्य एवं सूत्र

- दशमलव संख्याओं का म.स. तथा ल.स. निकालने के लिए सर्वप्रथम सभी दी गई संख्याओं को समान दशमलव रूप में लिखते हैं। इन संख्याओं को प्राकृतिक संख्या मानकर इनका म.स. या ल.स. निकालते हैं। इसके बाद प्राप्त म.स. या ल.स. में दशमलव समान दशमलव रूप के अनुसार लगाया जाता है।
- यदि किन्हीं संख्याओं में कोई उभयनिष्ठ गुणनखण्ड न हो, तो उनका म.स. 1 तथा ल.स. उनका गुणनफल होता है।
- भिन्नों का ल.स. = $\frac{\text{अंशों का ल.स.}}{\text{हरों का म.स.}}$
- भिन्नों का म.स. = $\frac{\text{अंशों का म.स.}}{\text{हरों का ल.स.}}$
- पहली संख्या × दूसरी संख्या = ल.स. × म.स.

साधित उदाहरण

1. $\frac{5}{6}, \frac{10}{18}, \frac{25}{36}$ का म.स. है

(1) 5/36 (2) 25/6 (3) 25/36 (4) 5/18
(5) 6/5

हल *(1)* $\frac{5}{6}, \frac{10}{18}, \frac{25}{36}$ का म.स. $= \frac{5, 10, 25 \text{ का म.स.}}{6, 18, 36 \text{ का ल.स.}} = \frac{5}{36}$

2. $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}$ का ल.स. है

(1) 42 (2) 24 (3) 17 (4) 4/5
(5) 12

हल *(5)* $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}$ का ल.स. $= \frac{1, 2, 3, 4 \text{ का ल.स.}}{2, 3, 4, 5 \text{ का म.स.}} = \frac{12}{1} = 12$

3. एक व्यापारी के पास तीन किस्म की चाय हैं पहली 117 किग्रा, दूसरी 130 किग्रा और तीसरी 143 किग्रा। एक ही आकार के कम-से-कम कितने डिब्बों में सारी चाय बिना मिलावट के आ जाएगी?

(1) 30 (2) 12 (3) 19 (4) 15
(5) 23

हल *(1)* सबसे पहले 117, 130 तथा 143 का म.स. निकाला जाएगा।

```
117) 130 (1        13) 143 (11
     117               13
     ---               --
     13)117(9          13
        117            13
        ---            --
          ×             ×
```

अत: म.स. = 13

∴ डिब्बों की संख्या $= \frac{117}{13} + \frac{130}{13} + \frac{143}{13} = 9 + 10 + 11 = 30$

4. यदि दो संख्याओं का म.स. 15 है, तो उन दोनों संख्याओं के वर्गों का अन्तर निम्नलिखित में से कौन-सा हो सकता है?

(1) 120 (2) 150 (3) 900 (4) 675
(5) 717

हल *(4)* दो संख्याएँ 15*a* तथा 15*b* हैं, जहाँ *a* तथा *b* असहभाज्य संख्याएँ हैं।

$(15a)^2 - (15b)^2 = 225\,(a^2 - b^2)$

अत: दिए गए विकल्प में जो 225 से पूरा-पूरा विभाजित होगा, वही सही विकल्प होगा। अत: सही उत्तर (4) होगा।

5. वह छोटी-से-छोटी माप ज्ञात कीजिए, जो 3 मी 50 सेमी, 4 मी 80 सेमी तथा 5 मी 60 सेमी द्वारा पूर्णतया विभाजित हो सके।

(1) 152 मी (2) 174 मी (3) 136 मी (4) 232 मी
(5) 168 मी

हल *(5)* 3 मी 50 सेमी, 4 मी 80 सेमी, 5 मी 60 सेमी का ल.स. = 350 सेमी, 480 सेमी, 560 सेमी का ल.स.

$= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 5 \times 2 = 16800$ सेमी

अत: अभीष्ट माप = 168 मी

6. 305 में से वह कौन-सी छोटी-से-छोटी संख्या घटाई जाए, ताकि वह 4, 5, 10 और 15 से भाग देने पर प्रत्येक दशा में 2 शेष बचे?

(1) 0 (2) 1 (3) 2 (4) 3
(5) 7

हल *(4)* 4, 5, 10 और 15 का ल.स. = 60
तब वह संख्या जो 4, 5, 10 व 15 से भाग देने पर प्रत्येक दशा में 2 शेष बचाएगी = 60 × 5 + 2 = 302

अभ्यास प्रश्न

1. $2^3 \times 3^2 \times 5^4$ तथा $2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7$ का म. स. होगा
(1) 180 (2) 360 (3) 540
(4) 35 (5) 270

2. 3556 तथा 3444 का म. स. होगा
(1) 25 (2) 28 (3) 3
(4) 26 (5) 24

3. 28 और 42 का ल. स. तथा म. स. किस अनुपात में है?
(1) 6 : 1 (2) 2 : 3 (3) 3 : 2
(4) 7 : 2 (5) 2 : 7

4. $\frac{5}{6}, \frac{10}{18}, \frac{25}{36}$ का म. स. है
(1) 5/36 (2) 25/6 (3) 25/36
(4) 5/18 (5) 36/5

5. $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}$ का ल. स. है
(1) 42 (2) 24 (3) 20
(4) 4/5 (5) 12

6. 1056, 1584, 2178 का म. स. है
(1) 60 (2) 56
(3) 62 (4) 64
(5) 66

7. 22, 54, 108, 135 का ल. स. है
(1) 5940 (2) 5490
(3) 5495 (4) 5049
(5) 5409

8. 14 तथा 16 के ल. स. तथा म. स. का गुणनफल है
(1) 2 (2) 12
(3) 224 (4) 112
(5) 124

9. यदि a एक प्राकृतिक संख्या है, तो a तथा $(a+1)$ का ल. स. है
(1) $(a+1)$ (2) $a(a+1)$
(3) $(a+1)^2$ (4) a^2
(5) $a^2(a+1)^2$

10. 7200, 1050 तथा 2100 का म. स. है
(1) 1050 (2) 2100
(3) 7200 (4) 1200
(5) इनमें से कोई नहीं

11. $2^{-7}, 2^{-4}$ तथा 2^{-9} का ल. स. है
(1) 2^{-8} (2) 2^{-7}
(3) 2^{-9} (4) 2^{-6}
(5) इनमें से कोई नहीं

12. दो संख्याओं का गुणनफल 19712 तथा महत्तम समापवर्तक 16 है। ऐसी संख्याओं के सभी सम्भव जोड़ों की संख्या है
(1) 1 (2) 2
(3) 3 (4) 4
(5) 5

13. 11, 1.1, 0.11, 0.011 का म. स. है
(1) 0.011 (2) 1.1 (3) 0.11
(4) 0.111 (5) 0.001

14. एक 15 मी 17 सेमी लम्बे तथा 9 मी 2 सेमी चौड़े कमरे के फर्श पर वर्गाकार टाइलें कम से कम लगेंगी
(1) 814 (2) 815 (3) 841
(4) 481 (5) 818

15. दो संख्याओं का ल. स. 495 तथा म. स. 5 है। यदि उन संख्याओं का योग 100 है, तो उनका अन्तर है
(1) 10 (2) 46 (3) 70
(4) 90 (5) 30

16. दो संख्याओं का ल. स. 225 है तथा उनका म. स. 5 है। यदि एक संख्या 25 हो, तो दूसरी संख्या होगी
(1) 5 (2) 25 (3) 45
(4) 225 (5) 54

17. वह बड़ी से बड़ी संख्या जिससे 63, 138 व 228 में भाग देने पर प्रत्येक दशा में समान शेष बचे, है
(1) 14 (2) 13 (3) 12
(4) 10 (5) 15

18. वह छोटी से छोटी संख्या, जिसे 12, 15, 20 या 54 से भाग करने पर प्रत्येक दशा में शेष 4 बचे है
(1) 450 (2) 454 (3) 540
(4) 544 (5) 550

19. चार घण्टियाँ 4, 6, 8 और 14 सेकण्ड के अन्तराल में बजती हैं। वे चारों इकट्ठी 12 बजे बजना प्रारम्भ करती हैं। किस समय वे फिर इकट्ठी बजेंगी?
(1) 12 बजकर 2 मिनट 48 सेकण्ड
(2) 12 बजकर 3 मिनट
(3) 12 बजकर 3 मिनट 20 सेकण्ड
(4) 12 बजकर 3 मिनट 44 सेकण्ड
(5) 12 बजकर 5 मिनट 40 सेकण्ड

20. दो संख्याओं का म. स. 23 है तथा उनके ल. स. के अन्य दो गुणनखण्ड 13 व 14 हैं। उनमें से बड़ी संख्या होगी
(1) 276 (2) 299 (3) 345
(4) 322 (5) 75

उत्तरमाला

1. (1)	2. (2)	3. (1)	4. (1)	5. (5)	6. (5)	7. (1)	8. (3)	9. (2)	10. (5)
11. (5)	12. (2)	13. (1)	14. (1)	15. (1)	16. (3)	17. (5)	18. (4)	19. (1)	20. (4)

संकेत एवं हल

3. $\because 28 = 2\times2\times7$ व $42 = 2\times7\times3$
28 व 42 का म. स. $= 7\times2 = 14$
तथा 28 व 42 का ल. स. $= 7\times2\times2\times3 = 84$
$\therefore$ अभीष्ट अनुपात $= \dfrac{\text{ल. स.}}{\text{म. स.}} = \dfrac{84}{14} = \dfrac{6}{1} = 6:1$

4. $\dfrac{5}{6}, \dfrac{10}{18}, \dfrac{25}{36}$ का म. स. $= \dfrac{5, 10, 25 \text{ का म. स.}}{6, 18, 36 \text{ का ल. स.}} = \dfrac{5}{36}$

5. $\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{4}{5}$ का ल. स. $= \dfrac{1, 2, 3, 4 \text{ का ल. स.}}{2, 3, 4, 5 \text{ का म. स.}}$
$= \dfrac{12}{1} = 12$

8. पहली संख्या $= 14$ तथा दूसरी संख्या $= 16$
$\because$ म. स. $\times$ ल. स. = पहली संख्या $\times$ दूसरी संख्या
$\therefore$ म. स. $\times$ ल. स. $= 14\times16 = 224$

10.

10	7200, 1050, 2100
5	720, 105, 210
3	144, 21, 42
	48, 7, 14

$\therefore$ 7200, 1050, 2100 का म. स.
$= 10\times5\times3$
$= 150$

11. $2^{-7}, 2^{-4}, 2^{-9}$ का ल. स. $= \dfrac{1}{2^7, 2^4, 2^9 \text{ का म. स.}}$
$= \dfrac{1}{2^4}$
$= 2^{-4}$

12. संख्याओं का म. स. = 16
तथा संख्याओं का गुणनफल = 19712
माना संख्याएँ $16x, 16y$ हैं।
$\therefore \quad 16x \times 16y = 19712$
$\Rightarrow \quad xy = \dfrac{19712}{16 \times 16} = 77$
$\therefore x, y$ के सम्भावित जोड़े (7, 11) तथा (1, 77) हैं।
$\therefore$ संख्याओं के अभीष्ट जोड़े (112, 176) तथा (16, 1232) हैं।
अत: संख्याओं के सम्भावित जोड़ों की संख्या = 2

14. कमरे की लम्बाई = 15 मी 17 सेमी = 1517 सेमी
कमरे की चौड़ाई = 9 मी 2 सेमी = 902 सेमी
$\because$ टाइलों की संख्या कम से कम है। इसलिए टाइल का आकार अधिक से अधिक होना चाहिए।
$\therefore$ वर्गाकार टाइल की भुजा = 1517 व 902 का म. स. = 41 सेमी
1 वर्गाकार टाइल का क्षेत्रफल = (भुजा)$^2 = 41 \times 41 = 1681$ सेमी^{2}
$\therefore$ टाइलों की संख्या $= \dfrac{\text{कमरे का क्षेत्रफल}}{\text{टाइलों का क्षेत्रफल}}$
$= \dfrac{1517 \times 902}{1681} = 814$

15. माना पहली संख्या = x, दूसरी संख्या = y
संख्याओं का ल. स. = 495
तथा संख्याओं का म. स. = 5
$\therefore$ संख्याओं का गुणनफल = म. स. × ल. स.
$xy = 5 \times 495 = 2475 \quad \ldots(i)$
तथा $x + y = 100 \quad \ldots(ii)$
हम जानते हैं कि, $(x + y)^2 = (x - y)^2 + 4xy$
$\Rightarrow \quad (x - y)^2 = (x + y)^2 - 4xy$
$\therefore \quad (x - y)^2 = 10000 - 9900$ [समी (i) व (ii) से]
$\Rightarrow \quad (x - y)^2 = 100$
$\Rightarrow \quad x - y = 10$

16. दूसरी संख्या $= \dfrac{\text{म. स.} \times \text{ल. स.}}{\text{पहली संख्या}}$
$= \dfrac{225 \times 5}{25} = 45$

17. 138 व 63 का अन्तर = 75
तथा 228 व 138 का अन्तर = 90
$\therefore$ अभीष्ट संख्या = 75 व 90 का म. स. = 15

18. 12, 15, 20 व 54 का ल. स. $= 2 \times 2 \times 5 \times 3 \times 3 \times 3 = 540$
$\therefore$ अभीष्ट संख्या = 540 + 4 = 544