باب 13

احتمال
(PROBABILITY)

❖ احتمالات کا نظریہ سادے طور پر منطق کی سائنس ہے، جسے مقداری طور پر سمجھا گیا ہے — سی-ایس- پیرس ❖

13.1 تعارف (Introduction)

پچھلی جماعتوں میں ہم نے ایک بلامنصوبہ تجربہ میں احتمال کا مطالعہ واقعات کے غیر یقینی وقوعات کی پیمائش کے طور پر کیا ہے۔ ہم نے موضوعی نظریہ پر بحث کیا ہے جو کہ روسی ریاضی داں، اے.این.کول موگورو (1903–1987) نے تشکیل کیا تھا، اور احتمال کو تجربہ کے ایک تفاعل کے نتائج کے طور پر سمجھا ہے۔ ہم نے مساوی ممکنہ نتائج کے کیس میں احتمال کے موضوعی نظریہ اور معیاری نظریہ کے درمیان معادلت کو قائم کیا ہے۔ اس رشتہ کی بنیاد پر، ہم نے واقعات کے احتمالات کو حاصل کیا ہے جو کہ منفصل سیمپل فضا سے جڑا ہوا ہے۔ ہم نے احتمال کے مجموعی اصول کا بھی مطالعہ کیا ہے۔ اس باب میں، ہم ایک واقعہ کا مشروط احتمال کے مخصوص تصور پر بحث کریں گے جب کہ دیا ہوا ہے کہ ایک دوسرا واقع وجود میں آ گیا ہے، اور جو بائیس مسئلہ (Bayes' Theorem) کو سمجھنے میں مددگار ثابت ہوگا، ایک احتمال کا ضربی اصول اور واقعات کا غیر تابع ہے۔ ہم غیر منصوبہ متغیر اور اس کے احتمالی بٹوارے کے ایک مخصوص تصور اور احتمال بٹوارے کے درمیانہ اور تغیر (تبدیلی) کو بھی سیکھیں گے۔ باب کے آخری حصہ میں ہم ایک مخصوص منفصل احتمال بٹوارے کا مطالعہ کریں گے، جسے دورکنی بٹاؤ (Binomial distribution) کہتے ہیں۔ اس مکمل باب میں ہم ان تجربات کو لیں گے جن میں مساوی ممکنہ نتائج موجود ہیں، جب تک بیان نہ کیا گیا ہو۔

پیرے ڈی فرماٹ
(Pierre de Fermat)
(1601-1665)

© NCERT not to be republished

13.2 مشروط احتمال (Conditional Probability)

ابھی تک احتمال میں، ہم نے احتمال کے وقوعات کو معلوم کرنے کے طریقوں پر بحث کی ہے۔ اگر ہمارے پاس اُس سیمپل فضا سے دو وقوعات موجود ہیں، کیا وقوعات میں سے ایک کے وقوعہ کی خبر دوسرے وقوعہ کے احتمال پر اثر ڈالے گی؟ ایک غیر منصوبہ تجربہ کرکے ہمیں اس سوال کا جواب دینے کی کوشش کرنی چاہیے جس میں نتائج کا وقوعہ مساوی ممکنہ ہو۔

تین غیر جانب دار سکوں کو اچھالنے کے ایک تجربہ پر غور کیجیے۔ تجربہ کی سیمپل فضا ہے

$$S = \{HHH,\ HHT,\ HTH,\ THH,\ HTT,\ THT,\ TTH,\ TTT\}$$

کیونکہ سکے اچھے ہیں، ہم ہر سیمپل نقطہ کو $\frac{1}{8}$ احتمال دے سکتے ہیں۔ مان لیجیے کم سے کم ہیڈ نمودار ہونے کا واقعہ E ہے اور، پہلے سکے کی ٹیل پر ٹیل آنے کا، واقعہ F ہے۔

تب

$$E = \{HHH,\ HHT,\ HTH,\ THH\}$$

اور $$F = \{THH,\ THT,\ TTH,\ TTT\}$$

اس لیے $$P(E) = P(\{HHH\}) + P(\{HHT\}) + P(\{HTH\}) + P(\{THH\})$$

$$= \frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{2} \quad (\text{کیوں؟})$$

اور $$P(F) = P(\{THH\}) + P(\{THT\}) + P(\{TTH\}) + P(\{TTT\})$$

$$= \frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{2}$$

ساتھ ہی $$E \cap F = \{THH\}$$

جس کے ساتھ ہے $$P(E \cap F) = P(\{THH\}) = \frac{1}{8}$$

اب، مان لیجیے کہ ہمیں دیا ہوا ہے کہ پہلا سکا ٹیل دکھاتا ہے، یعنی. F واقع ہوا ہے، تب E کے واقع ہونے کا کیا احتمال ہے؟ F کے واقع ہونے کی خبر سے، ہمیں یقین ہے کہ جن کیس میں پہلے سکہ کا نتیجہ ایک ٹیل نہیں ہے، پر E کا احتمال معلوم کرنے میں غور نہیں کیا جانا چاہیے۔ یہ معلومات ہماری سیمپل فضا کو سیٹ 'S' سے وقوعہ E کے لیے ماتحت سیٹ F میں تحویل کر دیتی

© NCERT not to be republished

ہے۔ دوسرے الفاظ میں، حقیقت میں مزید معلومات ہمیں یہ بتاتی ہے کہ حالات پر ایک نئے بلامنصوبہ تجربہ کی طرح غور کرنا چاہیے جس کے لیے سیمپل فضا میں تمام نتائج موجود ہوں جو کہ وقوعہ F کے واقع ہونے کے موافق ہیں۔

اب، F کا سیمپل نقطہ جو کہ واقعہ E کے لیے موافق ہے THH ہے۔

اس طرح، F کو سیمپل فضا تصور کرتے ہوئے E کا احتمال $= \frac{1}{4}$ ہے،

یا E کی احتمال جب کہ دیا ہوا ہے کہ وقوعہ F واقع ہو گیا

واقعہ E کا یہ احتمال E کا مشروط احتمال کہلاتا ہے جب کہ دیا ہوا ہے کہ F پہلے ہی وجود میں آچکا ہے، اور اسے P(E|F) سے ظاہر کیا گیا ہے۔

اس طرح $P(E|F) = \frac{1}{4}$

یہ نوٹ کر لیجیے کہ F کے عناصر جو کہ واقعہ E کے موافق لیے ہیں، E اور F ہیں مشترک عناصر ہیں، یعنی $E \cap F$ کے سیمپل نقاط۔

اس طرح، ہم E کا مشروط احتمال لکھ سکتے ہیں جب کہ دیا ہوا ہے کہ F اس طرح وجود میں آچکا ہے

$$P(E|F) = \frac{\text{بنیادی واقعات کی تعداد جو کہ } E \cap F \text{ کے موافق ہیں}}{\text{بنیادی واقعات کی تعداد جو کہ } F \text{ کے موافق ہیں}}$$

$$= \frac{n(E \cap F)}{n(F)}$$

سیمپل فضا کے بنیادی وقوعات کی کل تعداد سے شمار کنندہ اور نسب نماں کو تقسیم کرنے پر، ہم دیکھتے ہیں کہ P(E|F) اس طرح بھی لکھا جا سکتا ہے

$$P(E|F) = \frac{\frac{n(E \cap F)}{n(S)}}{\frac{n(F)}{n(S)}} = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} \quad \text{(1) ...}$$

یہ نوٹ کر لیجیے کہ (1) صرف اسی وقت صحیح ہے جب کہ $P(F) \neq 0$، یعنی $F \neq \phi$ (کیوں؟)

اس طرح، ہم مشروط احتمال کو ذیل کی طرح بیان کر سکتے ہیں:

تعریف 1: اگر دو واقعات ایک بلامنصوبہ تجربہ میں E اور F ایک ہی سیمپل فضا کے ساتھ جڑے ہوئے ہوں، واقعہ E کا مشروط

احتمال، جب کہ دیا ہوا ہے کہ F وجود میں آ چکا ہے.، یعنی P (E|F) اس طرح دیا گیا ہے

جب کہ $P(F) \neq 0$

13.2.1 مشروط احتمال کی خصوصیات (Properties of Conditional Probability)

مان لیجیے، ایک تجربہ میں ایک سیمپل فضا کے E اور F وقوعات ہیں، تب ہمارے ماس ہے

خصوصیت 1: $P(S|F) = P(F|F) = 1$

ہم جانتے ہیں کہ

$$P(S|F) = \frac{P(S \cap F)}{P(F)} = \frac{P(F)}{P(F)} = 1$$

ساتھ ہی

$$P(F|F) = \frac{P(F \cap F)}{P(F)} = \frac{P(F)}{P(F)} = 1$$

اس طرح

$$P(S|F) = P(F|F) = 1$$

خصوصیت 2: مان لیجیے ایک سیمپل فضا S کے دو وقوعات A اور B ہیں اور S، F کا ایک وقوعہ ہے تا کہ $P(F) \neq 0$، تب

$$P((A \cup B)|F) = P(A|F) + P(B|F) - P((A \cap B)|F)$$

خاص طور پر، اگر A اور B غیر مشترک وقوعات ہیں، تب

$$P((A \cup B)|F) = P(A|F) + P(B|F)$$

ہمارے پاس ہے

$$P((A \cup B)|F) = \frac{P[(A \cup B) \cap F]}{P(F)}$$

$$= \frac{P[(A \cap F) \cup (B \cap F)]}{P(F)}$$

نقاطع پر سیٹوں کے اجماع کی تقسیمی خصوصیت ہے۔

$$= \frac{P(A \cap F) + P(B \cap F) - P(A \cap B \cap F)}{P(F)}$$

$$= \frac{P(A \cap F)}{P(F)} + \frac{P(B \cap F)}{P(F)} - \frac{P[(A \cap B) \cap F]}{P(F)}$$

© NCERT not to be republished

$$=P(A|F) + P(B|F) - P((A\cap B)|F)$$

جب A اور B غیر مشترک وقوعات ہیں، تب

$$P((A \cap B)|F)=0$$

$$\Rightarrow \qquad P((A \cup B)|F) = P(A|F) + P(B|F)$$

خصوصیت 3: $P(E'|F) = 1 - P(E|F)$

خصوصیت 1، سے، ہم جانتے ہیں کہ $P(S|F) = 1$

$P(E \cup E'|F) = 1 \quad \Rightarrow$ کیوں کہ $S = E \cup E'$

$P(E|F) + P(E'|F) = 1 \quad \Rightarrow$ کیونکہ E اور E′ غیر مشترک وقوعات ہیں

اس طرح $P(E'|F) = 1 - P(E|F)$

اب ہمیں کچھ مثالیں لینی چاہئیں

مثال 1: اگر $P(A) = \frac{7}{13}$، $P(B) = \frac{9}{13}$ اور $P(A \cap B) = \frac{4}{13}$ ہے، تب $P(A|B)$ کی قیمت کا اندازہ لگایئے۔

حل: ہمارے پاس ہے $P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{4}{13}}{\frac{9}{13}} = \frac{4}{9}$

مثال 2: ایک خاندان میں دو بچے ہیں، اس کا کیا احتمال ہے کہ دونوں بچے لڑکے ہیں جبکہ یہ دیا ہوا ہے کہ ان میں سے کم سے کم ایک لڑکا ہے؟

حل: مان لیجیے b لڑکے کو اور g لڑکی کو ظاہر کرتا ہے۔ تجربہ کی سیمپل فضا ہے

$$S = \{(b, b), (g, b), (b, g), (g, g)\}$$

مان لیجیے E اور F ذیل واقعات کو ظاہر کرتے ہیں۔

E : 'دونوں بچے لڑکے ہیں'

F : 'کم سے کم ایک بچہ لڑکا ہے'

تب $E = \{(b,b)\}$ اور $F = \{(b,b), (g,b), (b,g)\}$

© NCERT not to be republished

اب $E \cap F = \{(b,b)\}$

اس طرح $P(F) = \frac{3}{4}$ اور

اس لیے $P(E|F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$

مثال 3: دس کارڈ جن پر 1 تا 10 نمبر ڈالے گئے ہیں ایک باکس میں رکھے گئے ہیں، اور اچھی طرح ملائے گئے ہیں، اور تب ایک کارڈ بلا منصوبہ نکالا گیا ہے۔ اگر یہ معلوم ہے کہ نکالے ہوئے کارڈ پر نمبر، 3 سے زیادہ ہے، تب اس کا کیا احتمال ہے کہ یہ نمبر جفت ہے؟

حل: مان لیجیے A نکالے ہوئے کارڈ پر جفت نمبر کا وقوعہ ہے اور B نکالے ہوئے کارڈ پر 3 سے زیادہ نمبر کا وقوعہ ہے۔ ہمیں P(A|B) معلوم کرنا ہے۔ اب تجربہ کی سیمپل فضا ہے $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

تب $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}, \; B = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

اور $A \cap B = \{4, 6, 8, 10\}$

ساتھ ہی $P(A \cap B) = \frac{4}{10}$ اور $P(B) = \frac{7}{10}$ ، $P(A) = \frac{5}{10}$

تب $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{4}{10}}{\frac{7}{10}} = \frac{4}{7}$

مثال 4: ایک اسکول میں 1000 طلبا ہیں، جن میں 430 لڑکیاں ہیں۔ یہ معلوم ہے کہ 430 میں، 10 فی صدی لڑکیاں بارھویں جماعت میں پڑھتی ہیں۔ اس کا کیا احتمال ہے کہ بلا منصوبہ چنی گئی لڑکی بارھویں جماعت میں پڑھتی ہے، جب کہ دیا ہوا ہے کہ چنی گئی لڑکی بارھویں جماعت کی طالبہ ہے؟

حل: مان لیجیے E اس واقعہ کو ظاہر کرتا ہے کہ بلا منصوبہ چنا گیا طالب علم بارھویں جماعت میں پڑھتا ہے اور F اس وقوعہ کو ظاہر کرتا ہے کہ بلا منصوبہ چنی گئی ایک طالبہ ہے۔ ہمیں P (E|F) معلوم کرنا ہے۔

اب $P(F) = \frac{430}{1000} = 0.43$ اور $P(E \cap F) = \frac{43}{1000} = 0.043$ (کیوں؟)

تب $P(E|F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} = \frac{0.043}{0.43} = 0.1$

© NCERT not to be republished

مثال 5: ایک پانسہ کو تین مرتبہ اچھالا گیا ہے۔ وقوعات A اور B کو ذیل کی طرح بیان کیا گیا ہے:

A: 4 تیسری بار اچھالنے میں

B: 6 پہلی بار میں اور 5 دوسری بار اچھالنے میں

A کا احتمال معلوم کیجیے جب کہ دیا ہوا ہے کہ B پہلے ہی واقع ہو چکا ہے۔

حل: سیمپل فضا میں 216 نتائج ہیں۔

$$A = \begin{Bmatrix} (1,1,4) & (1,2,4) & \ldots & (1,6,4) & (2,1,4) & (2,2,4) & \ldots & (2,6,4) \\ (3,1,4) & (3,2,4) & \ldots & (3,6,4) & (4,1,4) & (4,2,4) & \ldots & (4,6,4) \\ (5,1,4) & (5,2,4) & \ldots & (5,6,4) & (6,1,4) & (6,2,4) & \ldots & (6,6,4) \end{Bmatrix}$$

$$B = \{(6,5,1), (6,5,2), (6,5,3), (6,5,4), (6,5,5), (6,5,6)\}$$

اور $A \cap B = \{(6,5,4)\}$

اب $P(A \cap B) = \frac{1}{216}$ اور $P(B) = \frac{6}{216}$

تب $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{216}}{\frac{6}{216}} = \frac{1}{6}$

مثال 6: ایک ڈائی (پانسہ) کو دو بار اچھالا گیا ہے اور اس پر ظاہر ہونے والے اعداد کا حاصل جمع 6 ہے مشاہدہ کیا گیا ہے۔ عدد 4 کم سے کم ایک بار ظاہر ہونے کا شرطیہ احتمال کیا ہے؟

حل: مان لیجیے E وہ واقعہ ہے کہ 'عدد 4 کم سے کم ایک بار ظاہر' ہوا ہے اور F وہ 'واقعہ ہے کہ ظاہر ہونے والے اعداد کا حاصل جمع 6 ہے۔'

تب، $E = \{(4,1), (4,2), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), (1,4), (2,4), (3,4), (5,4), (6,4)\}$

اور $F = \{(1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1)\}$

ہمارے پاس ہے $P(F) = \frac{5}{36}$ اور $P(E) = \frac{11}{36}$

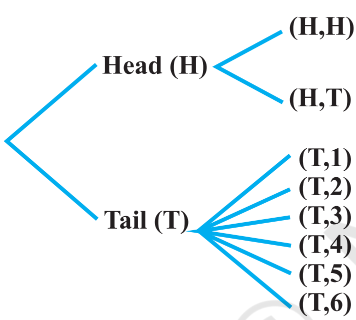
ساتھ ہی $E \cap F = \{(2,4), (4,2)\}$

اس لیے $P(E\cap F)=\frac{2}{36}$

اس لیے، مطلوبہ احتمال

$$P(E|F)=\frac{P(E\cap F)}{P(F)}=\frac{\frac{2}{36}}{\frac{5}{36}}=\frac{2}{5}$$

مشروط احتمال کے لیے جس پر اوپر بحث کی گئی ہے، جس کے لیے، ہم نے تجربہ کے بنیادی وقوعات پر غور کیا ہے جو کہ مساوی امکانی ہیں اور اس کے مطابق ایک وقوعہ کے احتمال کو استعمال کیا گیا ہے۔ حالانکہ، یہی تعریف عام کیس میں بھی استعمال کی جاسکتی ہے جہاں سیمپل فضا کے بنیادی واقعات مساوی امکانی نہیں ہیں، احتمالات $P(E\cap F)$ اور $P(F)$ اسی کے مطابق حل کیے گئے ہیں۔ ہمیں مندرجہ ذیل مساوات کو لینا چاہیے۔



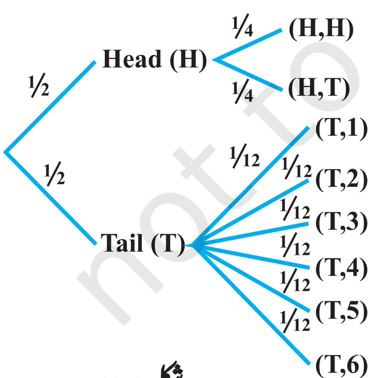
شکل 13.1

مثال 7: ایک سکہ کے ٹاس کرنے کے تجربہ پر غور کیجیے، اگر سکہ ہیڈ دکھاتا ہے، اسے دوبارہ ٹاس کیجیے، لیکن اگر یہ ٹیل دکھاتا ہے، تب ایک پانسہ پھینکنے واقعہ کا شرطی احتمال معلوم کیجیے جبکہ پانسہ 4 سے بڑا عدد دکھاتا ہے، یہ دیا ہوا ہے کہ کم سے کم ایک ٹیل ہے۔

حل: تجربہ کے نتائج مندرجہ ذیل شکلی انداز میں ایک 'پیڑ کی تصویر' کی شکل میں دکھائے گئے ہیں۔

تجربہ کی سیمپل فضا اس طرح بیان کی جاسکتی ہے

S = {(H,H), (H,T), (T,1), (T,2), (T,3), (T,4), (T,5), (T,6)}



شکل 13.1

جہاں (H,H) ظاہر کرتے ہیں کہ دونوں ٹاس کے نتائج ہیڈ ہیں اور (T, i) پہلے ٹاس کے نتیجہ کو ظاہر کرتا ہے جس میں ایک ٹیل نمودار ہوئی ہے اور عدد 'i' جو کہ پانسہ پر ظاہر ہوتا ہے، $i=1,2,3,4,5,6$ کے لیے ہے۔ اس طرح 8 بنیادی وقوعات

(H, H), (H, T), (T, 1), (T, 2), (T, 3) (T, 4), (T, 5), (T, 6)

کو جو احتمالات دیے گئے ہیں، وہ بالترتیب ہیں:

$\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{12},\frac{1}{12},\frac{1}{12},\frac{1}{12},\frac{1}{12},\frac{1}{12}$ جو کہ تصویر 13.2 سے صاف ہے۔

© NCERT not to be republished

مان لیجیے، کم سے کم ایک ٹیل کا وقوعہ F ہے اور پانسہ کے ذریعہ 4 سے بڑا ایک عدد دکھانے کا وقوعہ E ہے۔ تب،

$$F = \{(H,T), (T,1), (T,2), (T,3), (T,4), (T,5), (T,6)\}$$

$$E = \{(T,5), (T,6)\} \text{ اور } E \cap F = \{(T,5), (T,6)\}$$

اب

$$P(F) = P(\{(H,T)\}) + P(\{(T,1)\}) + P(\{(T,2)\}) + P(\{(T,3)\}) + P(\{(T,4)\}) + P(\{(T,5)\}) + P(\{(T,6)\})$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{3}{4}$$

اور

$$P(E \cap F) = P(\{(T,5)\}) + P(\{(T,6)\}) = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{1}{6}$$

اس طرح

$$P(E|F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{4}} = \frac{2}{9}$$

مشق 13.1

1۔ E اور F دو وقوعات دیے ہوئے ہیں تا کہ $P(E) = 0.6$، $P(F) = 0.3$ اور $P(E \cap F) = 0.2$، تب $P(E|F)$ اور $P(F|E)$ معلوم کیجیے۔

2۔ $P(A|B)$ معلوم کیجیے، اگر $P(B) = 0.5$ اور $P(A \cap B) = 0.32$ ہے۔

3۔ اگر $P(A) = 0.8$، $P(B) = 0.5$ اور $P(B|A) = 0.4$ ہے۔ تب معلوم کیجیے۔

(i) $P(A \cap B)$ (ii) $P(A|B)$ (iii) $P(A \cup B)$

4۔ $P(A \cup B)$ کی قدر معلوم کیجیے، اگر $2P(A) = P(B) = \frac{5}{13}$ اور

5۔ اگر $P(A) = \frac{6}{11}$، $P(B) = \frac{5}{11}$ اور $P(A \cup B) = \frac{7}{11}$، تو معلوم کیجیے۔

(i) $P(A \cap B)$ (ii) $P(A|B)$ (iii) $P(B|A)$

سوال 6 تا 9 میں $P(E|F)$ معلوم کیجیے۔

6۔ ایک سکہ کو تین بار اچھالا کیا گیا ہے، جہاں

(i) E : ہیڈ تیسری اچھال پر، F : ہیڈ پہلی دو اچھال پر

(ii) E : کم سے کم دو ہیڈ، F : زیادہ سے زیادہ دو ہیڈ

(iii) E : زیادہ سے زیادہ دو ٹیل، F : کم سے کم ایک ٹیل

7۔ دو سکے ساتھ اُچھالے گئے، جہاں

(i) E : ٹیل ایک سکہ پر ظاہر ہوئی F : ایک سکہ ہیڈ دکھاتا ہے

(ii) E : کوئی ٹیل ظاہر نہیں ہوئی F : کوئی ہیڈ ظاہر نہیں ہوا

8۔ ایک پانسہ کو تین بار پھینکا گیا ہے

E : تیسری اُچھال پر 4 ظاہر ہوتا ہے F : پہلی دو اُچھال پر بالترتیب 6 اور 5 ظاہر ہوتے ہیں

9۔ ایک فیملی کی تصویر کھینچنے کے لیے ماں، باپ اور لڑکے کو بلا منصوبہ ایک قطار میں کھڑا کیا گیا

E : لڑکے کو ایک سرے پر F : والد کو درمیان میں

10۔ ایک کالے اور ایک لال پانسے کو پھینکا گیا۔

(a) 9 سے زیادہ حاصل جمع حاصل کرنے کے لیے مشروط احتمال معلوم کیجیے، جب کہ دیا ہوا ہے کہ کالے پانسہ کا نتیجہ 5 ہے۔

(b) حاصل جمع 8 حاصل کرنے کے لیے مشروط احتمال معلوم کیجیے، جب کہ دیا ہوا ہے کہ لال پانسہ کا نتیجہ عدد 4 سے کم ہے۔

11۔ ایک غیر جانب دار پانسہ پھینکا گیا ہے۔ وقوعات $E=\{1,3,5\}$، $F=\{2,3,\}$ اور $G=\{2,3,4,5\}$ پر غور کیجیے معلوم کیجیے

(i) $P(E|F)$ اور $P(F|E)$ (ii) $P(E|G)$ اور $P(G|E)$

(iii) $P((E \cup F)|G)$ اور $P((E \cap F)|G)$

12۔ یہ مان لیجیے کہ ہر پیدا ہونے والا بچہ مساوی امکانی طور پر ایک لڑکا یا ایک لڑکی ہے۔ اگر ایک خاندان میں دو بچے ہیں، مشروط احتمال کیا ہے کہ دونوں لڑکیاں ہے، دیا ہوا ہے کہ (i) پہلے پیدا ہونے والا بچہ لڑکی ہے، (ii) کم سے کم ایک لڑکی ہے؟

13۔ ایک معلم (Instructor) کے پاس ایک سوالوں کا بینک ہے جس میں 300 آسان صحیح/ غلط سوال شامل ہیں، 200

© NCERT not to be republished

مشکل صحیح / غلط سوال، 500 آسان کثیر جوابی سوالات اور 400 مشکل کثیر جوابی سوالات ہیں۔ اگر ایک سوال کو سوالوں کے بینک سے بلامنصوبہ چنا گیا ہے۔ اس کا کیا احتمال ہے کہ یہ ایک آسان سوال ہے، یہ دیا ہوا ہے کہ یہ ایک کثیر جوابی سوال ہے؟

14۔ دیا ہوا ہے کہ اچھالے گئے دو پانسوں پر دو مختلف اعداد ظاہر ہو رہے ہیں۔ اس وقوعہ کا احتمال معلوم کیجیے، 'جس میں پانسوں پر اعداد کا حاصل جمع 4 ہے'۔

15۔ ایک پانسہ کے اچھالنے کے تجربہ پر غور کیجیے، اگر 3 کا ضعف آتا ہے، پانسہ کو دوبارہ پھینکیے اور اگر کوئی دوسرا نمبر آتا ہے، سکہ کو اچھالیے۔ اس وقوعہ کا مشروط احتمال معلوم کیجیے، 'جس میں سکہ ایک ٹیل دکھاتا ہے'، یہ دیا ہوا ہے کہ 'کم سے کم ایک پانسہ 3 دکھاتا ہے'۔

16 اور 17 ہر ایک سوالوں میں صحیح جوابات کا انتخاب کیجیے

16۔ اگر $P(A)=\frac{1}{2}$، $P(B)=0$، تب $P(A/B)$ ہے

(A) 0 (B) $\frac{1}{2}$

(C) بیان نہیں کیا گیا ہے۔ (D) 1

17۔ اگر A اور B اس طرح کے وقوعات واقعات ہیں تا کہ $P(A|B)=P(B|A)$، تب

(A) $A \subset B$ لیکن $A \neq B$ (B) $A = B$

(C) $A \cap B = \phi$ (D) $P(A) = P(B)$

13.3 احتمال پر ضربی مسئلہ (Multiplication Theorem on Probability)

مان لیجیے کہ سیمپل فضا 'S' کے ساتھ E اور F دو وقوعات شامل ہیں۔ صاف طور پر، سیٹ $E \cap F$ اُس وقوعہ کو ظاہر کرتا ہے کہ دونوں E اور F واقع ہو چکے ہیں۔ دوسرے الفاظ میں وقوعہ $E'E \cap F'$ اور F کو ایک کے بعد ایک وقوع میں آنے کو ظاہر کرتا ہے۔ وقوعہ $E \cap F$ کو E F کی طرح بھی لکھا جاسکتا ہے۔

اکثر ہمیں وقوعہ E F کا احتمال معلوم کرنے کی ضرورت ہوتی ہے۔ مثال کے طور پر، دو پتوں (کارڈ) کو ایک کے بعد ایک کو نکالنے کے تجربہ میں، ہماری دلچسپی 'ایک بادشاہ یا ایک ملکہ' کے وقوعہ کا احتمال معلوم کرنے میں ہے۔ واقعہ E F کا احتمال

© NCERT not to be republished

مشروط احتمال کا استعمال کر کے حاصل ہوتی ہے جیسا کہ مندرجہ ذیل حاصل ہوا ہے:

ہم جانتے ہیں کہ واقعہ E کا مشروط احتمال جبکہ دیا ہوا ہے کہ F واقع ہو چکا ہے P(E|F) سے ظاہر کی جاتی ہے اور اس طرح دی گئی ہے

$$P(E|F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)}, P(F) \neq 0$$

اس نتیجہ سے، ہم لکھ سکتے ہیں

$$P(E \cap F) = P(F).\ P(E/F) \quad \text{... (1)}$$

ساتھ ہی، ہم جانتے ہیں کہ

$$P(F|E) = \frac{P(F \cap E)}{P(E)}, P(E) \neq 0$$

یا $P(F|E) = \frac{P(E \cap F)}{P(E)}$ (کیونکہ $E \cap F = F \cap E$)

اس طرح، $P(E \cap F) = P(F).\ P(E/F)$ ... (2)

(1) اور (2) کو ملانے پر، ہمیں حاصل ہوتا ہے کہ

$$P(E \cap F) = P(E).\ P(F/E)$$

$= P(F).\ P(E/F)$ جبکہ $P(E) \neq O$ اور $P(F) \neq O$ ہے

مندرجہ بالا نتیجہ احتمال کا ضربی اصول کہلاتا ہے۔

آیئے ایک مثال لیتے ہیں

مثال 8: ایک خاکدان میں 10 کالی اور 5 سفید گیندیں موجود ہیں۔ خاکدان سے بغیر واپس ڈالے ہوئے، ایک کے بعد ایک، دو گیندیں نکالی گئیں۔ اس کا کیا احتمال ہے کہ دونوں نکالی گئیں گیندیں کالی ہیں؟

حل: مان لیجیے E اور F بالترتیب پہلی اور دوسری نکالی گئی کالی گیندوں کے وقوعات کو ظاہر کرتے ہیں۔ ہمیں $P(E \cap F)$ یا $P(EF)$ معلوم کرنا ہے۔

اب $P(E) = P(\text{پہلی بار نکالنے میں کالی گیند}) = \frac{10}{15}$

ساتھ ہی یہ دیا ہوا ہے کہ پہلی نکالی گئی گیند کالی ہے، یعنی، وقوعہ E واقع ہو گیا ہے، اب خاکدان میں 9 کالی اور پانچ سفید گیندیں باقی بچی ہیں۔ اس لیے، اس کا احتمال کہ نکالی گئی دوسری گیند کالی ہے، دیا گیا ہے کہ پہلی بار میں نکالی گئی گیند کالی ہے، کچھ نہیں ہے لیکن F کا مشروط احتمال ہے کہ E واقع ہو گیا ہے۔

یعنی،
$$P(F|E) = \frac{9}{14}$$

احتمال کے ضربی اصول سے، ہمارے پاس ہے

$$P\,(E \cap F) = P\,(E).\,P\,(F/E)$$
$$= \frac{10}{15} \times \frac{9}{14} = \frac{3}{7}$$

دو وقوعات سے زیادہ احتمال کے لیے ضربی اصول E، F اور G اگر سیمپل فضا کے تین واقعات ہے، ہمارے پاس ہے

$$P(E \cap F \cap G) = P(E)\,P(F/E)\,P(G/(E \cap F)) = P(E)\,P(F/E)\,P(G/EF)$$

اسی طرح احتمال کے ضربی اصول کی توسیع چار یا اس سے زیادہ واقعات کے لیے بھی کی جا سکتی ہے۔

مندرجہ ذیل مثالیں تین واقعات سے زیادہ احتمال کے ضربی اصول کو واضح کرتی ہیں۔

مثال 9: تاش کے 52 پتوں کی ایک اچھی طرح پھینٹی ہوئی گڈی سے تین تاش بغیر واپس کیے گئے لگاتار نکالے گئے ہیں۔ اس کی کیا احتمالی ہے کہ پہلے نکالے گئے دو پتے بادشاہ ہیں اور تیسرا پتا ایک اِکّا ہے۔

حل: مان لیجیے K اس وقوعہ کو ظاہر کرتا ہے کہ جس میں نکالا گیا پتا ایک بادشاہ ہے اور A وہ وقوعہ ہے جس میں نکالا گیا پتا ایک اِکّا ہے۔ صاف طور پر، ہمیں P (KKA) معلوم کرنا ہے

اب
$$P(K) = \frac{4}{52}$$

ساتھ ہی، P (P/K) دوسرے بادشاہ کا احتمال اس شرط کے ساتھ ہے کہ ایک بادشاہ پہلے ہی نکالا جا چکا ہے۔ اب، 51=(52-1) پتوں میں تین بادشاہ ہیں۔

اس لیے
$$P(K|K) = \frac{3}{51}$$

آخر میں، P (A/KK) تیسرے نکالے گئے پتے کا احتمال ہے کہ یہ ایک اِکا ہے، اس شرط کے ساتھ کہ جو پتے پہلے نکالے جا چکے ہیں وہ بادشاہ ہیں۔ اب باقی بچے 50 پتوں میں 4 اِکّے موجود ہیں۔

اس لیے

احتمال کے ضربی اصول سے، ہمارے پاس ہے۔

$$P(K/KA) = P(K)\, P(K|K)\, P(A|KK)$$
$$= \frac{4}{52} \times \frac{3}{51} \times \frac{4}{50} = \frac{2}{5525}$$

13.4 غیر تابع وقوعات (Independent Events)

کھیلنے والے تاش کے 52 پتوں کی ایک گڈی سے ایک پتے کے نکالنے کے تجربہ پر غور کیجیے، جس میں بنیادی واقعات کو مساوی امکانی تصور کیا گیا ہے۔ اگر E اور F بالترتیب ان واقعات کو ظاہر کرتے ہیں جن میں نکالا گیا پتہ ایک حکم کا ہے، اور 'نکالا گیا پتہ ایک اِکا ہے، تب

$$P(F) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13} \text{ اور } P(E) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$$

ساتھ ہی E اور F وہ واقعہ ہے جس میں 'نکالا گیا پتہ حکم کا اِکا ہے' تا کہ

$$P(E \cap F) = $$

اس لیے
$$P(E|F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} = \frac{\frac{1}{52}}{\frac{1}{13}} = \frac{1}{4}$$

کیونکہ $P(E) = \frac{1}{4} = P(F/E)$ ہم کہہ سکتے ہیں کہ وقوعہ E کے واقع ہونے سے وقوعہ F کے واقع ہونے کے احتمال پر پر اثر نہیں پڑا ہے۔

ہمارے پاس ہے

$$P(F|E) = \frac{P(E \cap F)}{P(E)} = \frac{\frac{1}{52}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{13} = P(F)$$

دوبارہ، $P(F) = \frac{1}{13} = P(F/E)$ دکھاتا ہے کہ وقوعہ E کے واقع ہونا وقوعہ F کے واقع ہونے کی احتمالی پر اثر نہیں ڈالا ہے۔

اس طرح، E اور F دو ایسے وقوعات ہیں جن میں سے ایک کے واقع ہونے سے دوسرے کے واقع ہونے کا احتمال

© NCERT not to be republished

پر اثر نہیں ہوا ہے۔

اس طرح کے واقعات کو غیر تابع وقوعات کہا جاتا ہے۔

تعریف 2: دو وقوعات E اور F کو غیر تابع کہا جاتا ہے، اگر

$P(F|E) = P(F)$ جبکہ $P(E) \neq 0$ ہو

اور $P(E|F) = P(E)$ جبکہ $P(F) \neq 0$ ہو

اس طرح، اس تعریف میں ہمیں $P(E) \neq 0$ اور $P(F) \neq 0$ رکھنے کی ضرورت ہے

اب، احتمال کے ضربی اصول سے، ہمارے پاس ہے

$$P(E \cap F) = P(E) \,.\, P(F|E) \quad (1) \ldots$$

اگر E اور F آزاد ہیں تب (1) ہو جاتی ہے

$$P(E \cap F) = P(E) \,.\, P(F) \quad (2) \ldots$$

اس طرح، (2) کا استعمال کرنے پر، دو واقعات کی آزادی مندرجہ ذیل طریقے سے بھی بیان کی جاتی ہے:

تعریف 3: مان لیجے E اور F دو واقعات ہیں جو کہ یکساں بلا منصوبہ تجربہ سے جڑے ہوئے ہیں، تب E اور F کو آزاد کہا جاتا ہے اگر

$$P(E \cap F) = P(E) \,.\, P(F)$$

ریمارک (Remark):

(i) دو واقعات E اور F تابع کہلاتے ہیں اگر وہ غیر تابع نہیں ہیں، یعنی اگر

$$P(E \cap F) \neq P(E) \,.\, P(F)$$

(ii) کئی بار غیر تابع وقوعات اور باہمی اخراجی وقوعات کے درمیان مغالطہ ہو جاتا ہے۔ رکن 'غیر تابع' وقوعات کے احتمال، کے طور پر بیان کیا جاتا ہے، جبکہ باہمی اخراجی وقوعات کی شکل میں بیان کیا گیا ہے۔ (سیمپل فضا کے ماتحت سیٹ)۔ اس کے علاوہ، باہمی اخراجی وقوعات کبھی بھی مشترک نتائج نہیں رکھتے، لیکن، غیر تابع وقوعات میں مشترک نتائج ہوتے ہیں۔ صاف طور پر 'غیر تابع' اور باہمی اخراجی کا یکساں مطلب نہیں ہوتا۔

دوسرے الفاظ میں دو غیر تابع وقوعات جن کے پیش آنے میں غیر صفر احتمالات ہوتے ہیں باہمی اخراجی نہیں ہو سکتے اور اس کے برعکس، یعنی، دو باہمی اخراجی واقعات جن کے پیش آنے والے غیر صفر احتمالات ہوتے ہیں، غیر تابع نہیں ہو سکتے۔

© NCERT not to be republished

(iii) دو تجربات اس وقت غیر تابع ہوں گے اگر وقوعات E اور F کے ہر جوڑے کے لیے، جہاں E پہلے تجربہ کے ساتھ ملوث ہے اور F دوسرے تجربہ کے ساتھ ملوث ہے، وقوعات E اور F کی ہم وقت واقع ہونے کا احتمال جبکہ دو تجربات کو P (E) اور P (F) کے ما حاصل ضرب میں ترجیح دی جاتی ہے اور ان کا حساب دو تجربات کی بنیاد پر الگ الگ لگایا جاتا ہے. یعنی

$$P(E \cap F) = P(E) \,.\, P(F)$$

(iv) تین وقوعات A، B اور C کو باہمی غیر تابع کہا جاتا ہے، اگر

$$P(A \cap B) = P(A) \,.\, P(B)$$

$$P(A \cap C) = P(A) \,.\, P(C)$$

$$P(B \cap C) = P(B) \,.\, P(C)$$

اور
$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \,.\, P(B) \,.\, P(C)$$

اگر مندرجہ بالا تین وقوعات میں سے ایک بھی صحیح نہیں ہے، ہم کہتے ہیں کہ وقوعات غیر تابع نہیں ہیں۔

مثال 10: ایک پانسہ اچھالا گیا ہے۔ اگر E وہ وقوعہ ہے 'جس میں ظاہر ہونے والا عدد 3 کا ضعف' ہے اور F وہ وقوعہ ہے جس میں ظاہر ہونے والا عدد جفت ہے، تب معلوم کیجیے کہ کیا E اور F غیر تابع ہیں؟

حل: ہم جانتے ہیں کہ سیمپل فضا $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ہے

اب $E = \{3, 6\}$، $F = \{2, 4, 6\}$ اور $E \cap F = \{6\}$

تب $P(E) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ ، $P(F) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ اور

صاف طور پر $P(E \cap F) = P(E) \,.\, P(F)$

اس لیے E اور F غیر تابع وقوعات ہیں۔

مثال 11: ایک سیدھا پانسہ دو بار اچھالا گیا ہے۔ مان لیجیے 'پہلے اچھال پر وقوعہ 'A' ایک طاق عدد' ہے، اور 'دوسرے اچھال پر وقوعہ 'B' طاق عدد' ہے۔ وقوعات A اور B کی غیر تابع ہونے کی جانچ کیجیے۔

حل: اگر تجربے کے تمام 36 بنیادی وقوعات کے مساوی امکانی ہونے پر غور کیا جائے، ہمارے پاس ہے

$$P(A) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2} \text{ اور } P(B) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

ساتھ ہی $P(A \cap B) = P($دونوں بار اچھانے پر طاق عدد$)$

© NCERT not to be republished

$$= \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

اب $$P(A)\,P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

صاف طور پر $$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

اس طرح، A اور B غیر تابع واقعات ہیں

مثال 12: تین سکّے ہم وقت اچھالے گئے ہیں۔ وقوعہ E پر غور کیجیے جس میں تین ہیڈ یا تین ٹیل ہیں، F 'کم سے کم دو ہیڈ' اور G 'زیادہ سے زیادہ دو ہیڈ'، (E,F)، (E,G) اور (F,G) جوڑوں میں سے کون سا غیر تابع ہے؟ اور کون سا تابع ہے؟

حل: تجربہ کی سیمپل فضا اس طرح دی گئی ہے

$$S = \{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\}$$

صاف طور پر $$E = \{HHH, TTT\},\ F = \{HHH, HHT, HTH, THH\}$$

اور $$G = \{HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\}$$

ساتھ ہی $$E \cap F = \{HHH\},\ E \cap G = \{TTT\},\ F \cap G = \{HHT, HTH, THH\}$$

اس لیے $$P(E) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4},\ P(F) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2},\ P(G) = \frac{7}{8}$$

اور $$P(E \cap F) = \frac{1}{8},\ P(E \cap G) = \frac{1}{8},\ P(F \cap G) = \frac{3}{8}$$

ساتھ ہی $$P(E)\,.\,P(F) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8},\ P(E) \cdot P(G) = \frac{1}{4} \times \frac{7}{8} = \frac{7}{32}$$

اور $$P(F)\,.\,P(G) = \frac{1}{2} \times \frac{7}{8} = \frac{7}{16}$$

اس طرح $$P(E \cap F) = P(E)\,.\,P(F)$$

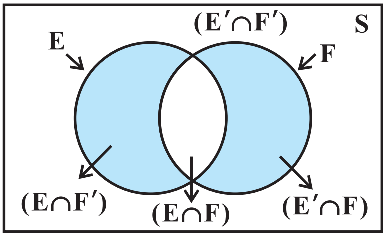
$$P(E \cap G) \neq P(E)\,.\,P(G)$$

اور $$P(F \cap G) \neq P(F)\,.\,P(G)$$

اس لیے، وقوعات (E اور F) آزاد ہیں، اور وقوعات (E اور G) اور (F اور G) ایک دوسرے پر مبنی ہیں۔

مثال 13: ثابت کیجیے کہ اگر E اور F غیر تابع وقوعات ہیں، تب وقوعات E اور F بھی غیر تابع ہیں۔

© NCERT not to be republished



(شکل 13.3)

$$P(E \cap F) = P(F) \cdot P(F) \quad \text{(1)......}$$

شکل 13.3 میں موجود وین تصویر سے، یہ صاف ہے کہ $E \cap F$ اور $E \cap F'$ باہمی اخراجی واقعات ہیں اور ساتھ ہی $E = (E \cap F) \cup (E \cap F')$ ہے۔

اس لیے $P(E) = P(E \cap F) + P(E \cap F')$

یا $P(E \cap F') = P(E) - P(E \cap F)$

$= P(E) - P(E) \cdot P(F)$ (مساوات '1' سے)

$= P(E)(1 - P(F))$

$= P(E) \cdot P(F')$

اس لیے، E اور F' غیر تابع ہیں۔

نوٹ بالکل اسی طریقہ سے، یہ دکھایا جا سکتا ہے کہ اگر واقعات E اور F غیر تابع ہیں، تب

(a) E' اور F غیر تابع ہیں۔

(b) E' اور F' غیر تابع ہیں۔

مثال 14: اگر A اور B دو غیر تابع وقوعات ہیں، تب کم سے کم A اور B میں سے کسی ایک کے واقع ہونے کا احتمال $1 - P(A') P(B')$ سے دیا گیا ہے۔

حل: ہمارے پاس ہے۔

$P(A \cup B) = P$ (A اور B کا کم سے کم ایک)

$= P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$= P(A) + P(B) - P(A) \cdot (B)$

$= P(A) + P(B)[1 - P(A)]$

$= P(A) + P(B) \cdot P(A')$

$= 1 - P(A') + P(B) \cdot P(A')$

$= 1 - P(A')[1 - P(B)$

$= 1 - P(A') \cdot P(B')$

© NCERT not to be republished

مشق 13.2

1۔ اگر $P(A)=\frac{3}{5}$ اور $P(B)=\frac{1}{5}$ ہے، $P(A\cap B)$ معلوم کیجیے اگر A اور B غیر تابع وقوعات ہیں۔

2۔ کھیلنے والے تاش کے 52 پتوں کی ایک گڈی سے دو تاش بلا منصوبہ اور بغیر واپس رکھے ہوئے کھینچے گئے ہیں۔ اس کا احتمال دریافت کیجیے کہ دونوں کھینچے گئے تاش کالے ہیں۔

3۔ سنتروں کے ایک ڈبے کا معائنہ تین بلا منصوبہ چنے گئے سنتروں سے بغیر واپس رکھے کیا گیا ہے۔ اگر تینوں سنتروں اچھے ہیں، ڈبہ کو بکری کے لیے منتخب کر لیا گیا ہے، ورنہ، اسے منسوخ کر دیا گیا ہے۔ اس احتمال کو معلوم کیجیے جس میں ایک ڈبے میں 15 سنترے میں جن میں 12 اچھے اور 3 خراب ہیں، بکری کیے لیے منتخب کر لیا جائے گا۔

4۔ ایک صاف سکہ اور ایک صحیح پانسہ اُچھالا گیا۔ مان لیجیے A وہ وقوعہ ہے جس میں 'سکہ پر ہیڈ آتا ہے' اور B وہ وقوعہ ہے جس میں پانسہ پر '3' آتا ہے۔ جانچ کیجیے کہ کیا A اور B غیر تابع ہیں یا نہیں۔

5۔ ایک پانسہ جس پر 1، 2، 3 کے نشانات لال سے اور 4، 5، 6 کے ہرے سے لگائے گئے ہیں کو اُچھالا گیا۔ مان لیجیے A وہ وقوعہ ہے 'جس میں عدد جفت' ہے اور B وہ وقوعہ ہے جس میں عدد لال ہے۔ کیا A اور B غیر تابع ہیں؟

6۔ مان لیجیے E اور F وہ وقوعات ہیں جس میں $P(E)=\frac{3}{5}$، $P(F)=\frac{3}{5}$ اور $P(E\cap F)=\frac{1}{5}$ ہیں۔ کیا E اور F غیر تابع ہیں؟

7۔ واقعات A اور B اس طرح دیے گئے ہیں تا کہ $P(A)=\frac{1}{2}$، $P(A\cup B)=\frac{3}{5}$ اور $P(B)=P$ ہے۔ P معلوم کیجیے۔ اگر (i) باہمی اخراجی ہیں (ii) غیر تابع ہیں۔

8۔ مان لیجیے A اور B غیر تابع وقوعات ہیں جس میں $P(A)=0.3$ اور $P(B)=0.4$ ہیں معلوم کیجیے

(i) $P(A\cap B)$ (ii) $P(A\cup B)$

(iii) $P(A|B)$ (iv) $P(B|A)$

9۔ اگر A اور B دو وقوعات ہیں جب کہ $P(A)=\frac{1}{4}$، $P(B)=\frac{1}{2}$ اور $P(A\cap B)=\frac{1}{8}$ ہیں۔ P معلوم کیجیے (نا تو A اور نہ ہی B)

10۔ واقعات A اور B اس طرح ہیں کہ $P(A)=\frac{1}{2}$، $P(B)=\frac{7}{12}$ اور P (نا تو A اور نہ ہی B) $=\frac{1}{4}$۔ بیان کیجیے کہ

کیا A اور B غیر تابع ہیں؟

11۔ دو غیر تابع وقوعات A اور B دیئے گئے ہیں تاکہ P (A) = 0.3، P (B) = 0.6 ہیں۔ معلوم کیجیے

(i) P (A اور B) (ii) P (A اور B نہیں)

(iii) P (A یا B) (iv) P (نہ تو A اور نہ ہی B)

12۔ ایک پانسہ کو تین بار اچھالا گیا ہے۔ کم سے کم ایک ناطق عدد حاصل کرنے کا احتمال معلوم کیجیے۔

13۔ ایک ڈبہ میں سے 2 گیندیں واپس رکھنے کے حساب سے بلا منصوبہ نکالی گئیں جس میں 10 کالی اور 8 لال گیندیں ہیں۔ احتمال معلوم کیجیے کہ،

(i) دونوں گیندیں لال ہیں۔

(ii) پہلی گیند کالی ہے اور دوسری لال ہے۔

(iii) ان میں سے ایک کالی ہے اور دوسری لال ہے۔

14۔ ایک مخصوص سوال کو A اور B کے ذریعے غیر تابع طریقے سے حل کرنے کا احتمال بالترتیب $\frac{1}{2}$ اور $\frac{1}{3}$ ہے۔ اگر دونوں سوال کو غیر تابع طور پر حل کرنے کی کوشش کرتے ہیں، تو اس کا احتمال معلوم کیجیے کہ

(i) مسئلہ حل ہو گیا ہے (ii) ان میں سے صرف ایک مسئلہ حل کرتا ہے۔

15۔ 52 پتوں کی اچھی طرح پھینٹی گئی ایک گڈی سے بلا منصوبہ ایک تاش نکالا گیا۔ مندرجہ ذیل کن کیسوں میں وقوعات E اور F غیر تابع ہیں۔

(i) E : 'نکالا گیا پتا ایک حکم کا پتہ ہے'

F : 'نکالا گیا پتہ ایک اِکّا ہے'

(ii) E : 'نکالا گیا پتا کالا ہے'

F : 'نکالا گیا پتا بادشاہ ہے'

(iii) E : 'نکالا گیا پتا ایک بادشاہ ہے یا ملکہ'

E : 'نکالا گیا پتا ایک بیگم ہے یا غلام ہے'

16۔ ایک ہاسٹل میں 50 فی صدی طلبا ہندی کا اخبار پڑھتے ہیں، 40 فی صدی انگریزی کا اخبار اور 20 فی صدی ہندی اور

© NCERT not to be republished

انگریزی دونوں کا اخبار پڑھتے ہیں۔ایک طالبہ کو بلامنصوبہ چنا گیا ہے۔

(a) وہ احتمال معلوم کیجیے کہ نہ تو وہ ہندی کا اخبار پڑھتی ہے اور نہ ہی انگریزی کا۔

(b) اگر وہ ہندی کا اخبار پڑھتی ہے، تو اس کا احتمال معلوم کیجیے کہ وہ انگریزی کا اخبار پڑھتی ہے۔

(c) اگر وہ انگریزی کا اخبار پڑھتی ہے، تو اس کے ہندی کا اخبار پڑھنے کا احتمال معلوم کیجیے۔

سوال 17 اور 18 میں صحیح جوابات کا انتخاب کیجیے۔

17۔ ہر ایک پانسہ پر ایک جفت مفرد عدد حاصل کرنے کا احتمال بتائیے، جبکہ پانسہ کے ایک جوڑے کو گھمایا گیا ہے

(A) 0 (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{12}$ (D) $\frac{1}{36}$

18۔ دو وقوعات A اور B غیر تابع ہوں گے، اگر

(A) A اور B باہمی اخراجی ہیں۔

(B) $P(A'B') = [1-P(A)][1-P(B)]$

(C) $P(A) = P(B)$

(D) $P(A) + P(B) = 1$

13.5 بائیس کا مسئلہ (Bayes' Theorem)

غور کیجیے کہ I اور II دو تھیلے ہیں۔ تھیلہ I میں 2 سفید اور 3 لال گیندیں ہیں اور تھیلہ II میں 4 سفید اور 5 لال گیندیں ہیں۔ ایک تھیلے سے بلامنصوبہ ایک گیند نکالی گئی۔ ہم کسی بھی تھیلے کے چنے کا احتمال معلوم کر سکتے ہیں (یعنی $\frac{1}{2}$) یا کسی خاص تھیلے سے (مان لیجیے تھیلہ I سے) ایک خاص رنگ کی گیند نکالنے کا احتمال (مان لیجیے سفید)۔ دوسرے الفاظ میں، ہم یہ احتمال معلوم کر سکتے ہیں نکالی گئی گیند ایک خاص رنگ کی ہے، اگر ہمیں ہر تھیلا دیا ہوا ہو جس سے گیند نکالی گئی ہے۔ لیکن کیا ہم یہ احتمال معلوم کر سکتے ہیں کہ گیند ایک خاص تھیلے سے نکالی گئی ہے (مان لیجیے تھیلہ II)، اگر نکالی گئی گیند کا رنگ دیا ہوا ہے؟ یہاں، ہمیں تھیلہ II کا معکوس احتمال معلوم کرنا ہے جو چننا ہے جبکہ ایک واقعہ پہلے سے ہی جاننے کے بعد پیش آیا ہے۔ مشہور ریاضی داں جون بائیس (John Bayes') نے مشروط احتمال کا استعمال کر کے معکوس احتمال کو معلوم کرنے کے مسئلہ کو حل کیا تھا۔ انھوں نے جو فارمولہ پیش کیا تھا وہ بائیس مسئلہ (Bayes' theorem) کے نام سے جانا جاتا ہے جو کہ 1763 میں ان کے مرنے کے بعد شائع ہوا تھا۔ بائیس مسئلہ کو بیان کرنے اور ثابت کرنے سے پہلے ہمیں ایک تعریف اور کچھ ابتدائی نتائج لینے چاہئیں۔

© NCERT not to be republished

13.5.1 ایک سیمپل فضا کا بٹوارہ (Partition of a sample space)

وقوعات $E_1, E_2, ..., E_n$ کا ایک سیٹ سیمپل فضا 'S' کو ظاہر کرتا ہے اگر

(a) $E_i \cap E_j = \phi, i \neq j, i, j = 1, 2, 3, ..., n$

(b) $E_1 \cup E_2 \cup ... \cup E_n = S$

(c) $P(E_i) > 0$ for all i = 1, 2, ..., n

دوسرے الفاظ میں، وقوعات $E_1, E_2, ... E_n$ سیمپل فضا S کے بٹوارے کو ظاہر کرتے ہیں اگر وہ جوڑوں کے حساب حساب سے غیر مشترک ہیں، مکمل اور غیر صفر احتمالات رکھتے ہیں۔

مثال کے طور پر، ہم دیکھتے ہیں کہ کوئی بھی غیر خالی وقوعہ E اور اس کا تمتہ E^1 سیمپل فضا S کے بٹوارے کو بناتے ہیں کیونکہ کیونکہ وہ $E \cap E' = \phi$ اور $E \cup E' = S$ کو مطمئن کرتے ہیں۔

شکل 13.3 میں دین تصویر سے، کوئی بھی آسانی سے یہ مشاہدہ کرسکتا ہے کہ اگر E اور F کوئی بھی دو واقعات ایک سیمپل فضا S کے ساتھ ملوث ہیں، تب سیٹ $[E \cap F', E \cap F, E' \cap f, E' \cap F']$ سیمپل فضا 'S' کا ایک بٹوارہ ہے۔ یہ بھی دکھایا جاسکتا ہے کہ سیمپل فضا کا بٹوارہ اکیلا نہیں ہیں۔ سیمپل فضا کے بہت سے بٹوارے ہو سکتے ہیں۔

اب ہم ایک مسئلہ کو ثابت کریں گے جسے 'کل احتمال کا مسئلہ' کہا جاتا ہے۔

13.5.2 کل احتمال کا مسئلہ (Theorem of total probability)

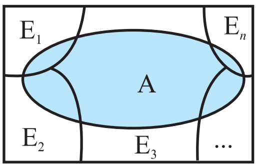
مان لیجیے $\{E_1, E_2,...,E_n\}$ سیمپل فضا S کا ایک بٹوارہ ہے، اور مان لیجیے کہ ہر وقوعہ $E_1, E_2,...,E_n$ واقع ہو کی غیر صفر احتمال رکھتا ہے۔ مان لیجیے کوئی بھی واقعہ A, S کے ساتھ منسلک ہے، تب

$$P(A) = P(E_1) P(A|E_1) + P(E_2) P(A|E_2) + ... + P(E_n) P(A|E_n)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} P(E_j) P(A|E_j)$$

ثبوت۔ دیا ہوا ہے کہ $E_1, E_2,...,E_n$ سیمپل فضا S کا ایک تقسیم کیا ہوا حصہ ہے (شکل 13.4) اس لیے

$$S = E_1 \cup E_2 \cup ... \cup E_n \quad ...(1)$$



شکل 13.4

اور $E_i \cap E_j = \phi, i \neq j, i, j = 1, 2, ..., n$

اب، ہم جانتے ہیں کہ کسی بھی واقعہ A کے لیے

$$A = A \cap S$$

$$= A \cap (E_1 \cup E_2 \cup ... \cup E_n)$$

$$= (A \cap E_1) \cup (A \cap E_2) \cup ... \cup A\ E_n)$$

ساتھ ہی $A \cap E_i$ اور $A \cap E_j$ بالترتیب E_i اور E_j کے ماتحت سیٹ ہیں۔ ہم جانتے ہیں کہ $i \neq j$ کے لیے E_i اور E_j مشترک ہیں، اس لیے، $A \cap E_i$ اور $A \cap E_j$ بھی تمام $i \neq j$ کے لیے n ,..., $i, j = 1, 2$,$i \neq j$ کے لیے مشترک ہیں۔

اس طرح، $P(A) = P[(A \cap E_i) \cup (A \cap E_2) \cup ... \cup (A \cap E_n)]$

$$= P(A \cap E_i) + P(A \cap E_2) + ... + P(A \cap E_n)$$

اب، احتمال کے ضربی اصول سے، ہمارے پاس ہے

$$P(A \cap E_i) = P(E_i)\ P(A|E_i) \text{ as } P(E_i) \neq 0\ \forall i = 1,2,..., n$$

اس لیے $P(A) = P(E_i)\ P(A|E_i) + P(E_2)\ P(A|E_2) + ... + P(E_n)P(A|E_n)$

یا $$P(A) = \sum_{j=1}^{n} P(E_j)\, P(A|E_j)$$

مثال 15: ایک آدمی نے ایک گھر بنانے کا کام لیا ہے۔ 0.65 احتمال ہے کہ ہڑتال ہوگی، 0.80 احتمال ہے کہ گھر بنانے کا کام وقت پر مکمل ہو جائے گا اگر کوئی ہڑتال نہیں ہوتی ہے، 0.32 احتمال ہے کہ گھر بنانے کا کام وقت پر مکمل ہو جائے گا اگر ہڑتال ہوتی ہے۔ وہ احتمال معلوم کیجیے کہ گھر بنانے کا کام وقت پر مکمل ہو جائے گا۔

حل: مان لیجیے کہ A وہ واقعہ ہے جس میں گھر بنانے کا کام وقت پر مکمل ہو جائے گا، اور B وہ واقعہ ہے جس میں ہڑتال ہوگی ہمیں P (A) معلوم کرنا ہے۔

ہمارے پاس ہے

P (B) = 0.65 (کوئی ہڑتال نہیں) = P(B′) = 1 - P(B) = 1 - 0.65 = 0.35

$$P(A|B) = 0.32,\ P(A|B') = 0.80$$

© NCERT not to be republished

کیونکہ واقعات B اور B′ سیمپل فضا کو تقسیم کرتے ہیں، اس لیے مکمل احتمال کے مسئلہ سے، ہمارے پاس ہے

$$P(A) = P(B)\,P(A|B) + P(B')\,P(A|B')$$

$$= 0.65 \times 0.32 + 0.35 \times 0.8$$

$$= 0.208 + 0.28 = 0.488$$

اس طرح، کام کے وقت پر مکمل ہونے کا احتمال 0.488 ہے۔

اب ہم بائیس مسئلہ کو بیان کریں گے اور اس کا ثبوت مکمل کریں گے۔

بائیس مسئلہ (Bayes' Theorem) اگر $E_1, E_2, ..., E_n$، n غیر خالی واقعات ہیں جو کہ سیمپل فضا کو تقسیم کرتے ہیں، یعنی $E_1, E_2, ..., E_n$ جوڑوں کے حساب سے غیر مشترک ہیں اور $E_1 \cup E_2 \cup ... \cup E_n = S$ اور A کوئی بھی غیر صفر احتمال کا وقوعہ ہے، تب

$$P(E_i|A) = \frac{P(E_i)\,P(A|E_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(E_j)\,P(A|E_j)}$$ کسی بھی $i = 1, 2, 3, ..., n$ کے لیے

ثبوت۔ مشروط احتمال کے ضابطے سے، ہم جانتے ہیں کہ

$$P(E_i|A) = \frac{P(A \cap E_i)}{P(A)}$$

$$= \frac{P(E_i)\,P(A|E_i)}{P(A)}$$ (احتمالی کے ضربی اصول سے)

$$= \frac{P(E_i)\,P(A|E_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(E_j)\,P(A|E_j)}$$ (مکمل احتمال کے مسئلہ کے نتیجے سے)

ریمارک (Remark): عام طور پر جب بائیس مسئلہ کو نافذ کیا جاتا ہے تو مندرجہ ذیل اصطلاحات کا استعمال کیا جاتا ہے۔

واقعات $E_1, E_2, ..., E_n$ کو مفروضہ (Hypotheses) کہا جاتا ہے۔

احتمال $P(E_i)$ کو مفروضہ E_i کا مقدم (Priori) احتمال کہا جاتا ہے۔

شرطیہ احتمال $P(E_i|A)$ کو مفروضہ E_i کو مؤخر (posteriori) احتمال کہا جاتا ہے۔

بائیس مسئلہ کو ’’وجوہات‘‘ کے لیے احتمال کا ضابطہ بھی کہا جاتا ہے۔ کیونکہ E_i سیمپل فضا کو تقسیم کرتے ہیں، ایک اور صرف

© NCERT not to be republished

ایک وقوعہ E_i وجود میں آتے ہیں (یعنی، وقوعات E_i میں سے صرف ایک وقوعہ واقع ہو اس لیے، مندرجہ بالا فارمولہ ایک مخصوص E_i کا احتمال دیتا ہے۔ (یعنی، ایک ''وجہ'')، جب کہ دیا ہوا ہے کہ وقوعہ A واقع ہو گیا ہے۔

بائیس کے مسئلہ کا استعمال بہت سے حالات میں ہوتا ہے، ان میں کچھ مندرجہ ذیل مثالوں میں سمجھائے گئے ہیں۔

مثال 16: تھیلہ نمبر I میں 3 لال اور 4 کالی گیندیں ہیں جبکہ دوسرے تھیلے II میں 5 لال اور 6 کالی گیندیں ہیں۔ ایک تھیلے میں سے ایک گیند بلامنصوبہ نکالی گئی اور پایا گیا ہے کہ یہ لال ہے۔ اس کا احتمال معلوم کیجیے کہ یہ تھیلے نمبر II سے نکالی گئی ہے۔

حل: مان لیجیے E_i وہ وقوعہ ہے جس میں تھیلہ نمبر I چنا گیا ہے، E_2 وہ وقوعہ ہے جس میں تھیلہ II چنا گیا ہے اور A وہ وقوعہ ہے جس میں لال گیند نکالی گئی ہے۔

تب $$P(E_i) = P(E_2) = \frac{1}{2}$$

ساتھ ہی $$P(A|E_i) = P(\text{تھیلہ I سے ایک لال گیند نکالنا}) = \frac{3}{7}$$

اور $$P(A|E_2) = P(\text{تھیلہ II سے ایک لال گیند نکالنا}) = \frac{5}{11}$$

اب تھیلہ II سے گیند نکالنے کی احتمالی، جبکہ یہ دیا ہوا ہے کہ یہ لال ہے، $P(E_2|A)$ ہے

بائیس مسئلہ کا استعمال کرکے، ہمارے پاس ہے

$$P(E_2|A) = \frac{P(E_2)P(A|E_2)}{P(E_1)P(A|E_1)+P(E_2)P(A|E_2)} = \frac{\frac{1}{2}\times\frac{5}{11}}{\frac{1}{2}\times\frac{3}{7}+\frac{1}{2}\times\frac{5}{11}} = \frac{35}{68}$$

مثال 17: تین ایک جیسے باکس I، II اور III دیے گئے ہیں، ہر ایک میں دو سکّے ہیں۔ باکس I میں، دونوں سکے سونے کے ہیں، باکس II میں، دونوں سکے چاندی کے ہیں، اور باکس III میں، ایک سکہ سونے کا اور ایک سکہ چاندی کا ہے۔ ایک انسان ایک باکس کا انتخاب کرتا ہے اور بلامنصوبہ ایک سکہ نکالتا ہے۔ اگر سکہ سونے کا ہے، اس کا کیا احتمال ہے کہ باکس میں دوسرا سکہ بھی سونے کا ہے؟

حل: مان لیجیے کہ باکس I، II اور III کے انتخاب کرنے کے وقوعات بالترتیب E_1، E_2 اور E_3 ہیں۔

تب $$P(E_1) = P(E_2) = P(E_3) =$$

ساتھ ہی، یہ مان لیجیے کہ 'نکالے گئے سونے کے سکّے' کا وقوعہ A ہے

تب $P(A|E_1) = P$ (بیگ I سے سونے کا ایک سکّہ) $= \frac{2}{2} = 1$

$P(A|E_2) = P$ (بیگ II سے سونے کا ایک سکّہ) $= 0$

$P(A|E_3) = P$ (بیگ III سے سونے کا ایک سکّہ) $= \frac{1}{2}$

اب، باکس میں دوسرا سکّہ سونے کا ہونے کا احتمال

= باکس I سے نکالے گئے سونے کے سکے کا احتمال

$= P(E_3|A)$

بائیس مسئلہ سے، ہم جانتے ہیں کہ

$$P(E_1|A) = \frac{P(E_1)P(A|E_1)}{P(E_1)P(A|E_1)+P(E_2)P(A|E_2)+P(E_3)P(A|E_3)}$$

$$= \frac{\frac{1}{3}\times 1}{\frac{1}{3}\times 1+\frac{1}{3}\times 0+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$$

مثال 18: مان لیجیے کہ ایک HIV ٹیسٹ پر خاص طور سے بھروسہ کیا گیا ہے جیسا کہ مندرجہ ذیل میں ہے:

جتنے لوگوں کو HIV ہے، ان میں سے 90 فی صد ٹیسٹ بیماری کا پتہ لگا لیتے ہیں، لیکن 10 فی صد پتہ نہیں لگا سکتے۔ جو لوگ HIV سے آزاد ہیں، 99 فی صد ٹیسٹ بتاتے ہیں کہ HIV منفی ive− ہے لیکن 1 فی صد بتاتے ہیں کہ HIV (+ive) مثبت ہے۔ ایک بہت بڑی آبادی سے جن میں صرف 0.1 فی صدی لوگوں کو HIV ہے، ایک انسان کو بغیر منصوبہ کے چنا گیا ہے، HIV ٹیسٹ کرنے کے لیے، اور اس کی پیتھولوجی رپورٹ کر ذریعے آدمی/عورت کے لیے کہ HIV مثبت +ive ہے۔ اس کا کیا احتمال ہے کہ اصلیت میں اس انسان کو HIV ہے؟

حل: مان لیجیے E اس وقوعہ کو ظاہر کرتا ہے کہ جس میں اس انسان کو حقیقت میں HIV ہے اور A وہ وقوعہ ہے کہ انسان کا HIV ٹیسٹ +ive آیا ہے۔ ہمیں P (E|A) معلوم کرنے کی ضرورت ہے۔ ساتھ ہی E' اس وقوعہ کو ظاہر کرتا ہے کہ اصلیت میں جو انسان چنا گیا ہے اسے HIV نہیں ہے۔

© NCERT not to be republished

صاف طور پر، آبادی میں تمام انسانوں کی سیمپل فضا کا (E,E′) ایک بٹوارہ ہے، ہمیں دیا گیا ہے کہ

$$P(E) = 0.1\% = \frac{0.1}{100} = 0.001$$

$$P(E') = 1 - P(E) = 0.999$$

$P(A|E) = P$ (جس انسان کا ہے، دیا گیا ہے کہ اس آدمی/عورت کو اصلیت میں HIV ہے۔

$$= 90\% = \frac{90}{100} = 0.9$$

$P = P(A|E')$ (جس انسان کا HIV ٹیسٹ +ive آیا ہے، دیا گیا ہے کہ اصلیت میں اس آدمی/عورت کو HIV نہیں ہے)

$$= 1\% = \frac{1}{100} = 0.01$$

اب، اس بائیس مسئلہ ہے

$$P(E|A) = \frac{P(E)P(A|E)}{P(E)P(A|E) + P(E')P(A|E')}$$

$$= \frac{0.001 \times 0.9}{0.001 \times 0.9 + 0.999 \times 0.01} = \frac{90}{1089}$$

$= 0.083$ (لگ بھگ)

اس طرح، ایک انسان کا احتمال جو کہ بلا منصوبہ چنا گیا ہے کہ اسے اصلیت میں اسے HIV ہے، جب کہ دیا گیا ہے کہ آدمی/عورت کی HIV + ive، 0.083 ہے۔

مثال 19: ایک کمپنی جو بولٹ تیار کرتی ہے، میں مشین A، B اور C بالترتیب 25%، 35% اور 40% بولٹ تیار کرتی ہیں۔ ان کی نکاسی میں بالترتیب 5، 4 اور 2 فی صد بولٹ خراب ہیں۔ تیار کیے گئے بولٹوں سے بلا منصوبہ ایک بولٹ نکالا گیا اور یہ پایا گیا کہ یہ بولٹ خراب ہے۔ اس کا کیا احتمال ہے کہ یہ بولٹ مشین B کے ذریعے تیار کیا گیا ہے؟

حل: مان لیجیے کہ واقعات B_1، B_2، B_3 مندرجہ ذیل ہیں:

B_1 : مشین A کے ذریعے تیار کیا گیا بولٹ

B_2 : مشین B کے ذریعے تیار کیا گیا بولٹ

B_3 : مشین C کے ذریعے تیار کیا گیا بولٹ

© NCERT not to be republished

صاف طور پر B_1، B_2، B_3 باہمی اخراجی ہیں اور ختم ہونے والے مکمل (Exhaustive) وقوعات ہیں اور اس لیے، وہ سیمپل فضا کی تقسیم کی نمائندگی کرتے ہیں۔

مان لیجیے E وہ وقوعہ ہے 'جس میں بولٹ خراب ہے'

وقوعہ E، B_1 کے ساتھ واقع ہوتا ہے یا B_2 کے ساتھ یا B_3 کے ساتھ۔ دیا گیا ہے کہ

$P(B_1) = 25\% = 0.25$، $P(B_2) = 0.35$ اور $P(B_3) = 0.40$

دوبارہ $P(E|B_1)$ = نکالے گئے بولٹ کی احتمالی کے یہ خراب ہے، جبکہ یہ دیا گیا ہے کہ یہ مشین A نے تیار کیا ہے۔

$= 5\% = 0.05$

اسی طرح، $P(E|B_2) = 0.04$، $P(E|B_3) = 0.02$

اس لیے، 'بائیس مسئلہ' سے، ہمارے پاس ہے

$$P(B_2|E) = \frac{P(B_2)P(E|B_2)}{P(B_1)P(E|B_1) + P(B_2)P(E|B_2) + P(B_3)P(E|B_3)}$$

$$= \frac{0.35 \times 0.04}{0.25 \times 0.05 + 0.35 \times 0.04 + 0.40 \times 0.02}$$

$$= \frac{0.0140}{0.0345} = \frac{28}{69}$$

مثال 20: ڈاکٹر کو ایک مریض کو دیکھنے جانا ہے۔ پچھلے تجربے سے، یہ صاف ہے کہ اس کے ریل، بس، اسکوٹر یا اور کسی بھی نقل وحمل کے ذرائع سے آنے جانے کا احتمالات بالترتیب $\frac{3}{10}$، $\frac{1}{5}$، $\frac{1}{10}$ اور $\frac{2}{5}$ ہیں۔ ریل، بس یا اسکوٹر سے دیر سے آنے کے احتمالات بالترتیب $\frac{1}{4}$، $\frac{1}{3}$ اور $\frac{1}{12}$ ہیں، لیکن اگر وہ کسی اور دوسرے ذرائع سے آتا ہے، تب وہ دیر سے نہیں آئے گا۔ وہ دیر سے ہے۔ اس کا کیا احتمال ہے کہ وہ ریل سے آیا ہے؟ وہ ریل سے آیا ہے؟

حل: مان لیجیے E وہ وقوعہ ہے کہ ڈاکٹر مریض کو دیر سے دیکھنے آتا ہے اور مان لیجیے کہ T_1، T_2، T_3، T_4 بالترتیب وہ وقوعات ہیں کہ ڈاکٹر ریل، بس، اسکوٹر یا اور کسی دوسرے نقل وحمل کے ذرائع سے آتا ہے۔

تب $P(T_1) = \frac{3}{10}$، $P(T_2) = \frac{1}{5}$، $P(T_3) = \frac{1}{10}$ اور $P(T_4) = \frac{2}{5}$ (دیا ہوا ہے)

© NCERT not to be republished

$P(E|T_1)$=وہ احتمال ہے کہ ڈاکٹر ریل سے دیر سے آتا ہے= $\frac{1}{4}$

اسی طرح، $P(E|T_2) = \frac{1}{3}$ ، $P(E|T_3) = \frac{1}{12}$ اور $P(E|T_4) = 0$ ہے، کیونکہ وہ دیر سے نہیں ہے اگر وہ کسی دوسرے آمدورفت کے ذرائع سے آتا ہے۔

اس لیے، بائیس مسئلہ سے، ہمارے پاس ہے

$P(T_1|E)$ = یہ احتمال کہ ڈاکٹر ریل سے دیر سے آرہا ہے

$$= \frac{P(T_1)P(E|T_1)}{P(T_1)P(E|T_1)+P(T_2)P(E|T_2)+P(T_3)P(E|T_3)+P(T_4)P(E|T_4)}$$

$$= \frac{\frac{3}{10}\times\frac{1}{4}}{\frac{3}{10}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{10}\times\frac{1}{12}+\frac{2}{5}\times 0} = \frac{3}{40}\times\frac{120}{18} = \frac{1}{2}$$

اس لیے، مطلوبہ احتمال $\frac{1}{2}$ ہے

مثال 21: ایک آدمی اس بات کے لیے جانا جاتا ہے کہ وہ چار بار میں سے تین بار سچ بولتا ہے وہ ایک پانسہ اچھالتا ہے اور یہ رپورٹ کرتا ہے کہ یہ چھ ہے۔ اس کا احتمال معلوم کیجیے کہ یہ حقیقت میں چھ ہے۔

حل: مان لیجیے کہ E وہ وقوعہ ہے جس میں آدمی رپورٹ کرتا ہے کہ پانسہ اچھالنے میں چھ آتا ہے مان لیجیے S_1 وہ وقوعہ ہے جس میں چھ آتا ہے اور S_2 وہ وقوعہ ہے جس میں '6' نہیں آتا۔

تب $P(S_1)$ = یہ احتمال ہے کہ چھ آتا ہے= $\frac{1}{6}$

$P(S_2)$ = یہ احتمال ہے جس میں چھ نہیں آتا= $\frac{5}{6}$

$P(E|S_1)$ = احتمال ہے جس میں آدمی رپورٹ کرتا ہے کہ چھ آ گیا ہے جبکہ چھ حقیقت میں آ گیا ہے

= آدمی کے سچ بولنے کی احتمال = $\frac{3}{4}$

$P(E|S_2)$ = یہ احتمال ہے جس میں آدمی رپورٹ کرتا ہے کہ چھ آ گیا ہے جبکہ چھ حقیقت میں نہیں آیا ہے

© NCERT not to be republished

= یہ احتمال کہ آدمی سچ نہیں بولتا = $1-\dfrac{3}{4}=\dfrac{1}{4}$

اس طرح، بائیس مسئلہ سے، ہمیں حاصل ہوتا ہے

$P(S_1|E)$ = یہ احتمال ہے کہ جس میں آدمی رپورٹ کرتا ہے چھ آ گیا ہے، حقیقت میں چھ ہے

$$=\frac{P(S_1)\,P(E\,|S_1)}{P(S_1)\,P(E|S_1)+P(S_2)\,P(E|S_2)}$$

$$=\frac{\frac{1}{6}\times\frac{3}{4}}{\frac{1}{6}\times\frac{3}{4}+\frac{5}{6}\times\frac{1}{4}}=\frac{1}{8}\times\frac{24}{8}=\frac{3}{8}$$

اس لیے، مطلوبہ احتمال $\frac{3}{8}$ ہے۔

مشق 13.3

1۔ ایک برتن میں 5 لال اور 5 کالی گیندیں ہیں۔ ایک گیند بلا منصوبہ نکالی گئی، اس کا رنگ نوٹ کیا گیا اور پھر برتن میں واپس ڈال دی گئی۔ اس کے علاوہ، برتن میں دو مزید گیندیں اسی رنگ کی ڈال دی گئیں جس رنگ کی گیند نکالی گئی تھی اور پھر بلا منصوبہ ایک گیند نکالی گئی۔ اس کا کیا احتمال ہے کہ دوسری گیند لال ہے؟

2۔ ایک بیگ میں 4 لال اور 4 کالی گیندیں ہیں، ایک دوسرے بیگ میں 2 لال اور 6 کالی گیندیں ہیں۔ دونوں میں سے بلا منصوبہ ایک بیگ چن لیا گیا اور بیگ سے ایک گیند نکالی گئی جو کہ لال رنگ کی پائی گئی ہے۔ اس کا احتمال معلوم کیجیے کہ گیند پہلے بیگ سے نکالی گئی ہے۔

3۔ ایک کالج کے طلبا میں سے یہ معلوم ہے کہ 60 فی صد طلبا ہاسٹل میں رہتے ہیں اور 40 فی صدی طلبا دن میں پڑھنے والے ہیں (یعنی ہاسٹل میں نہیں رہتے)۔ پچھلے سال کے سالانہ امتحان کے نتائج بتاتے ہیں کہ ہاسٹل میں رہنے والے 30 فی صدی طلبا کا A گریڈ آیا تھا اور جو طلبا ہاسٹل میں نہیں رہے ان میں سے 20 فی صدی کا A گریڈ آیا تھا۔ سال کے آخیر میں، کالج کا ایک لڑکا بلا منصوبہ چنا گیا اور اس کا A گریڈ ہے، اس کی کیا احتمال ہے کہ طلبا ہاسٹل میں رہنے والا ہے؟

4۔ ایک کثیر جوابی ٹیسٹ میں ایک سوال کا جواب دینے کے لیے، ایک طالب علم یا تو جواب جانتا ہے یا اندازہ لگاتا ہے۔ مان لیجیے اس کا جواب جاننے کا احتمال $\frac{3}{4}$ ہے اور اس کے اندازہ لگانے کا احتمال $\frac{1}{4}$ ہے۔ یہ مانتے ہوئے کہ

© NCERT not to be republished

جو طالب علم اندازہ لگاتا ہے کہ جواب صحیح ہے اس کا احتمال $\frac{1}{4}$ ہے۔ اس کا کیا احتمال ہے کہ طلب علم جانتا ہے کہ اس کا دیا ہوا جواب صحیح ہے؟

5۔ ایک تجربہ گاہ میں کچھ بیماریوں کو معلوم کرنے کے لیے خون کی جانچ 99 فی صدی کامیاب ہے، جبکہ حقیقت میں بیماری موجود ہے۔ حالانکہ، ٹیسٹ 0.5 فی صدی صحت مند آدمیوں کے لیے غلط مثبت نتیجہ بھی نکالتا ہے (یعنی اگر ایک صحت مند آدمی کا ٹیسٹ کیا گیا ہے تب 0.005 احتمال کے ساتھ، ٹیسٹ کا مطلب ہے کہ اسے بیماری ہے)۔ اگر حقیقت میں 0.1 فی صدی آبادی کو بیماری ہے، اس کا کیا احتمال ہے کہ آدمی کو بیماری ہے جب کہ دیا ہوا ہے کہ ٹیسٹ کا نتیجہ مثبت میں ہے؟

6۔ یہاں تین سکّے ہیں۔ ایک سکہ دو ہیڈ رکھتا ہے (یعنی سکّے کے دونوں طرف ہیڈ ہے) دوسرا سکہ جانب دار ہے کہ جس میں ہیڈ 75 فی صد آتا ہے اور تیسرا سکہ غیر جانب دار نہیں ہے۔ تینوں سکوں میں سے ایک سکہ بلا منصوبہ کے چنا گیا ہے اور اُچھالا گیا، یہ ہیڈ دکھاتا ہے، اس کا کیا احتمال ہے کہ یہ دو ہیڈ والا سکہ ہے؟

7۔ ایک بیمہ کمپنی 2000 اسکوٹر ڈرائیور کا بیمہ کرتی ہے، 4000 کار ڈرائیور کا اور 6000 ٹرک ڈرائیور کا۔ حادثہ ہونے کا احتمال بالترتیب 0.01، 0.03 اور 0.15 ہے۔ ایک بیمہ ہوئے آدمی کا حادثہ ہو جاتا ہے۔ اس کا کیا احتمال ہے کہ وہ ایک اسکوٹر ڈرائیور ہے؟

8۔ ایک فیکٹری کے پاس دو مشینیں A اور B ہیں۔ سابقہ ریکارڈ یہ بتاتا ہے کہ جتنا انھیں دیا جاتا ہے اس میں مشین A، 60 فی صدی مال تیار کرتی ہے اور مشین B، 40 فی صدی مال تیار کرتی ہے۔ اس کے علاوہ مشین A کے ذریعے تیار کی گئی 2 فی صدی اشیا خراب تھیں اور مشین B کے ذریعہ تیار کی گئی 1 فی صدی اشیا خراب تھیں۔ تمام اشیا کو ایک جگہ رکھا گیا اور پھر بلا منصوبہ اس میں سے ایک اشیا کو چنا گیا اور پایا گیا کہ یہ اشیا خراب ہے۔ اس کا کیا احتمال ہے کہ یہ اشیا مشین B کے ذریعے تیار کی گئی تھیں۔

9۔ دو گروپ ایک کارپوریشن کے بورڈ آف ڈائیریکٹر کی پوزیشن کے لیے مقابلہ کر رہے ہیں۔ پہلے اور دوسرے گروپ کے جیتنے کے احتمالات بالترتیب 0.6 اور 0.4 ہے۔ اس کے علاوہ اگر پہلا گروپ جیتا ہے تو نئی اشیا کے تعارف کرانے کے احتمال 0.7 ہے اور اسی کے مطابق دوسرے گروپ کے جیتنے پر نئی اشیا کو متعارف کرانے کا احتمال 0.3 ہے اس کا احتمال معلوم کیجیے کہ نئی اشیا کا تعارف دوسرے گروپ کے ذریعہ کرایا گیا تھا۔

10۔ مان لیجیے کہ ایک لڑکی ایک پانسہ پھینکتی ہے۔ اگر اسے 5 یا 6 حاصل ہوتا ہے، وہ ایک سکہ تین بار اچھالتی ہے اور ہیڈ کی تعداد نوٹ کرتی ہے۔ اگر اسے 1، 2، 3، یا 4 حاصل ہوتا ہے، وہ ایک سکہ کو ایک بار ٹاس کرتی ہے اور نوٹ کرتی ہے کہ کیا ایک ہیڈ یا ٹیل حاصل ہوا ہے۔ اگر اسے بالکل ایک ہیڈ حاصل ہوا ہے، اس کا کیا احتمال ہے کہ اس نے پانسہ کے ساتھ 1، 2، 3، یا 4 پھینکا تھا؟

11۔ ایک صنعت کار کے پاس تین مشین چلانے والے A، B اور C ہیں۔ پہلا مشین چلانے والا 'A' 1 فی صدی خراب اشیا بناتا ہے، جبکہ دوسرے مشین چلانے والے B اور C بالترتیب 5 اور 7 فی صدی خراب اشیا بناتے ہیں۔ A، 50 فی صد وقفہ کے لیے کام پر ہے، B، 30 فی صد وقفہ کے لیے کام پر ہے اور C، 20 فی صد وقفہ کے لیے کام پر ہے۔ ایک خراب اشیا تیار کی گئی ہے، اس کا کیا احتمال ہے کہ یہ 'A' کے ذریعہ تیار کی گئی ہے؟

12۔ 52 تاشوں کی ایک گڈی سے '1' تاش کھو گیا ہے۔ گڈی میں بچے ہوئے باقی تاشوں میں دو تاش نکالے گئے ہیں اور دونوں ہی اینٹ کے پتے پائے گئے ہیں۔ اس کا کیا احتمال ہے کہ کھویا ہوا تاش ایک اینٹ کا پتہ تھا۔

13۔ A کے سچ بولنے کا احتمال $\frac{4}{5}$ ہے۔ ایک سکہ اُچھالا گیا۔ A بتاتا ہے کہ ہیڈ نمودار ہوا ہے۔ اس کا احتمال کہ حقیقت میں وہ ہیڈ تھا ہے۔

(A) $\frac{4}{5}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{1}{5}$ (D) $\frac{2}{5}$

14۔ اگر A اور B دو واقعات ہیں تا کہ $A \subset B$ اور $P(B) \neq 0$ ہے، تب مندرجہ ذیل میں کون سا صحیح ہے؟

(A) $P(A|B) = \frac{P(B)}{P(A)}$ (B) $P(A|B) < P(A)$

(C) $P(A|B) \geq P(A)$ (D) ان میں سے کوئی بھی نہیں

13.6 بلامنصوبہ متغیر اور ان کا احتمالی بٹاؤ

(Random Variables and its Probability Distributions)

ہم پہلے ہی بلامنصوبہ تجربات اور سیمپل فضا کے بننے کے بارے میں پڑھ چکے ہیں۔ ان میں سے زیادہ تر تجربات میں، ہماری دلچسپی صرف خاص نتائج میں ہی نہیں تھی جو وقوع میں آتے ہیں بلکہ کچھ نمبروں میں بھی تھی جو نتائج کے ساتھ ملوث تھے جیسا کہ ذیل مثالوں یا تجربات میں دکھایا گیا ہے۔

© NCERT not to be republished

(i) دو پانسوں کوٹاس کرنے میں، ہماری دلچسپی دو پانسوں کے اعداد کے حاصل جمع میں ہوسکتی ہے۔

(ii) ایک سکّے کو 50 مرتبہ اُچھالنے پر، ہم حاصل ہونے والے ہیڈ کی تعداد جاننا چاہتے ہیں۔

(iii) 20 اشیا کے ایک لاٹ سے بلامنصوبہ چار اشیا کو نکالنے کے ایک تجربہ میں (ایک کے بعد ایک) جس میں 6 خراب ہیں، ہم چار اشیا کے نمونے میں خراب اشیا جاننا چاہتے ہیں نا کہ خراب اور غیر خراب اشیا کی خاص تواتر میں۔

اوپر کے تمام تجربات میں، ہمارے پاس ایک اصول ہے، جو کہ تجربہ کے نتیجے کو ایک اکیلا حقیقی عدد دیتا ہے۔ تجربہ کے مختلف نتائج کے ساتھ یہ اکیلا حقیقی عدد بدل بھی سکتا ہے۔ اس لیے یہ ایک متغیر ہے۔ ساتھ ہی اس کی قدر ایک بلامنصوبہ تجربہ کے نتیجے پر مبنی ہے، اور اس لیے، یہ بلامنصوبہ متغیر کہلاتا ہے۔ ایک بلامنصوبہ متغیر عام طور سے 'X' سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

اگر آپ کو ایک تفاعل کی تعریف یاد ہو، تو آپ یہ محسوس کریں گے کہ بلامنصوبہ متغیر X حقیقت میں ایک تفاعل ہے جس کا علاقہ ایک بلامنصوبہ تجربہ کے نتائج کا سیٹ ہے (یا سیمپل فضا)۔ ایک بلامنصوبہ متغیر کی کوئی بھی حقیقی قدر ہوسکتی ہے، اس لیے، اس کا ہم۔علاقہ حقیقی اعداد کا سیٹ ہے۔ اس لیے، ایک بلامنصوبہ متغیر کو ذیل طریقے کی طرح بیان کیا جاسکتا ہے:

تعریف 4: ایک بلامنصوبہ متغیر ایک حقیقی قدر تفاعل ہے جس کا علاقہ ایک بلامنصوبہ تجربہ سیمپل فضا ہے۔

مثال کے طور پر، ہم ایک تجربہ پر غور کرتے ہیں جس میں ایک سکہ لگاتار دو مرتبہ ٹاس کیا گیا ہے۔ تجربہ کی سیمپل فضا ہے

$$S = \{HH, HT, TH, TT\}$$

اگر X حاصل شدہ ہیڈ کی تعداد کو ظاہر کرتا ہے، تب X ایک بلامنصوبہ متغیر ہے اور ہر ایک نتیجے کے لیے، اس کی قدر ذیل کی طرح دی گئی ہے:

$$X(HH) = 2,\ X(HT) = 1,\ X(TH) = 1,\ X(TT) = 0$$

ایک سے زیادہ متغیر اسی سیمپل فضا پر بیان کیا جاسکتا ہے۔ مثال کے طور پر، مان لیجیے Y اوپر کی سیمپل فضا کے لیے ہیڈ اور ٹیل کے مقدار کے فرق کو تعداد کرتا ہے۔

تب $$Y(HH) = 2,\ Y(HT) = 0,\ Y(TH) = 0,\ Y(TT) = -2$$

اس طرح، X اور Y یکساں سیمپل فضا پر بیان کیے گئے دو مختلف بلامنصوبہ متغیر ہیں۔

مثال 22۔ ایک انسان ایک سکہ کو تین بار ٹاس اُچھالنے کا کھیل کھیلتا ہے۔ ہر ایک ہیڈ کے لیے، کھیل کھلانے والا 2 روپیے دیتا ہے اور ہر ایک ٹیل کیے لیے اس آدمی کو کھیل کھلانے والے کو 1.50 روپیے دینے پڑتے ہیں۔ مان لیجیے کہ اس آدمی کے ذریعہ

حاصل کی گئی یا کھوئی ہوئی رقم کو X سے ظاہر کیا گیا ہے۔ دکھایئے کہ X ایک بلامنصوبہ متغیر ہے اور اسے تجربہ کی سیمپل فضا پر ایک تفاعل کے طور پر دکھایئے۔

حل: X ایک عدد ہے جس کی قدریں ایک بلامنصوبہ تجربہ کے نتائج پر بیان کی گئی ہیں۔ اس لیے، X ایک بلامنصوبہ متغیر ہے۔

اب، تجربہ کی سیمپل فضا یہ ہے

$$S = \{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\}$$

تب

$$X(HHH) = Rs\ (2 \times 3) = Rs\ 6$$

$$X(HHT) = X(HTH) = X(THH) = Rs\ (2 \times 2 - 1 \times 1.50) = Rs\ 2.50$$

$$X(HTT) = X(THT) = (TTH) = Rs\ (1 \times 2) - (2 \times 1.50) = -Re\ 1$$

اور

$$X(TTT) = -Rs\ (3 \times 1.50) = -Rs\ 4.50$$

جہاں نفی کا نشان کھلاڑی کے نقصان کو ظاہر کرتا ہے۔ اس طرح، سیمپل فضا کے ہر ایک عنصر کے لیے، X کی ایک واحد قدر ہوتی ہے، اس لیے، سیمپل فضا پر X ایک تفاعل ہے جس کی وسعت یہ ہے

$$\{-1,\ 2.50,\ -4.50,\ 6\}$$

مثال 23: ایک تھیلے میں 2 سفید اور 1 لال گیندیں ہیں۔ بلامنصوبہ تھیلے میں سے ایک گیند نکالی گئی، اور اس کا رنگ نوٹ کرنے کے بعد ڈبے میں واپس رکھ دی گئی ہے۔ اس عمل کو دوبارہ دوہرایا گیا ہے۔ اگر 'X' دوسری بار میں نکالی گئی لال گیندوں کی تعداد کو ظاہر کرتا ہے، تو X بیان کیجیے۔

حل: مان لیجیے کہ تھیلے میں گیندوں کو w_1، w_2، r سے ظاہر کیا گیا ہے۔ تب سیمپل فضا ہے

$$S = \{w_1 w_1, w_1 w_2, w_2 w_2, w_2 w_1, w_1 r, w_2 r, r w_1, r w_2, r r\}$$

اب، $\omega \in S$ کے لیے

$X(\omega)$ = لال گیندوں کی تعداد

اس لیے

$$X(\{w_1 w_1\}) = X(\{w_1 w_2\}) = X(\{w_2 w_2\}) = X(\{w_2 w_1\}) = 0$$

$X(\{w_1 r\}) = X(\{w_2 r\}) = X(\{r w_1\}) = X(\{r w_2\}) = 1$ اور $X(\{r r\}) = 2$

© NCERT not to be republished

اس طرح، X ایک بلامنصوبہ متغیر ہے جس کی 0، 1 یا 2 قدریں ہوسکتی ہیں۔

13.6.1 ایک بلامنصوبہ متغیر کا احتمالی بٹاؤ (Probability distribution of a random variable)

ہمیں تجربہ پر غور کرنا چاہیے جس میں دس خاندانوں $f_1, f_2, ..., f_{10}$ میں سے ایک خاندان اس طرح انتخاب کیا گیا ہے کہ ہر خاندان کا انتخاب مساوی امکانی ہو۔ مان لیجیے $f_1, f_2, ..., f_{10}$ خاندانوں میں افراد کی تعداد بالترتیب 3,4,3,2,5,4,3,6,4,5 ہے۔

ہم ایک خاندان کا انتخاب کرتے ہیں اور اس میں افراد کی تعداد کو X سے ظاہر کرتے ہیں۔ صاف طور پر، X ایک بلا منصوبہ متغیر ہے جو کہ مندرجہ ذیل کی طرح بیان کیا گیا ہے:

$$X(f_1) = 3,\ X(f_2) = 4,\ X(f_3) = 3,\ X(f_4) = 2,\ X(f_5) = 5,$$

$$X(f_6) = 4,\ X(f_7) = 3,\ X(f_8) = 6,\ X(f_9) = 4,\ X(f_{10}) = 5$$

اس طرح، X کوئی بھی قدر 2، 3، 4، 5 یا 6 لے سکتا ہے، جو اس پر مبنی ہے کہ کون سا خاندان منتخب کیا گیا ہے۔

اب، X کی قدر 2 ہوگی جبکہ خاندان f_4 کا انتخاب کیا گیا ہے۔ X کی قدر 3 ہوسکتی ہے جبکہ f_1، f_2، f_3 میں سے کوئی سا بھی خاندان منتخب کیا گیا ہے۔

اسی طرح $X = 4$، جبکہ f_1، f_6 یا f_9 خاندان منتخب کیا گیا ہے۔

$X = 5$، جبکہ f_5، یا f_{10} خاندان منتخب کیا گیا ہے۔

اور $X = 6$، جبکہ f_8 خاندان منتخب کیا گیا ہے۔

کیوں کہ ہم نے یہ مانا ہے کہ منتخب کیے جانے کے لیے، ہر ایک خاندان مساوی امکانی ہے، خاندان f_4 کو منتخب کیے جانے کا احتمال $\frac{1}{10}$ ہے۔

اس طرح، X کی قدر 2 ہوسکتی ہے کے لیے احتمال $\frac{1}{10}$ ہے۔ ہم $P(X=2) = \frac{1}{10}$ لکھتے ہیں۔

ساتھ ہی، کسی بھی خاندان f_1، f_3 یا f_7 کے منتخب کیے جانے کا احتمال ہے۔

$$P(\{f_1, f_3, f_7\}) = \frac{3}{10}$$

اسی طرح، اس کا احتمال کہ X کی قدر 3 ہوسکتی ہے =

ہم لکھتے ہیں
$$P(X = 3) = \frac{3}{10}$$

اسی طرح، ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$P(X = 4) = P(\{f_2, f_6, f_9\}) =$$

$$P(X = 5) = P(\{f_5, f_{10}\}) =$$

اور
$$P(X = 6) = P(\{f_8\}) =$$

اس طرح کے بیانات جن میں بلامنصوبہ متغیر کی قدریں اسی کے مطابق احتمالات کے ساتھ دی جاتی ہیں، بلامنصوبہ متغیر X کا احتمالی بٹاؤ کہلاتا ہے۔

عام طور پر، ایک بلامنصوبہ متغیر X کا احتمالی بٹاؤ مندرجہ ذیل کی طرح بیان کیا گیا ہے:

تعریف 5 ایک بلامنصوبہ متغیر X کا احتمالی بٹاؤ اعداد کا نظام ہے

X	:	x_1	x_2	...	x_n
P(X)	:	p_1	p_2	...	p_n

جہاں،
$$p_i > 0, \quad \sum_{i=1}^{n} p_i = 1, \; i = 1, 2, ..., n$$

حقیقی اعداد $x_1, x_1, ... x_n$ ایک بلامنصوبہ متغیر X کی ممکن قدریں ہیں اور $pi \ (i = 1,2,..., n)$ بلامنصوبہ متغیر X کا احتمال ہے، جو کہ X_i کی قدر دیتا ہے، یعنی، $P(X = x_i) = pi$

نوٹ اگر x_i ایک بلامنصوبہ متغیر X کی ممکن قدریں ہیں، تب بیان $X = x_i$ سیمپل فضا کے لیے کچھ نقاط کے لیے درست ہے۔ اس لیے، اس کا احتمال کہ X، x_i قدریں لیتا ہے ہمیشہ غیرصفر ہے، یعنی، $P(X = x_i) \neq 0$۔

ساتھ ہی بلامنصوبہ X کی تمام ممکن قدروں کے لیے، سیمپل فضا کے تمام عناصر کو لے لیا گیا ہے۔ اس لیے، ایک احتمالی بٹاؤ میں تمام احتمالات کا حاصل جمع '1' ہونا چاہیے۔

مثال 24: ایک اچھی طرح پھینٹی گئی 52 تاشوں کی ایک گڈی میں سے دو تاش واپس رکھنے کے ساتھ کامیابی کے ساتھ کھینچے گئے

© NCERT not to be republished

ہیں۔ اکوں کی تعداد کا احتمالی بٹاؤ معلوم کیجیے۔

حل: اکوں کی تعداد ایک بلا منصوبہ متغیر ہے۔ مان لیجیے اسے X سے ظاہر کیا گیا ہے۔ صاف طور پر X کی کوئی بھی قدر 0، 1 یا 2 ہو سکتی ہے۔

اب، کیونکہ نکالے گئے پتوں کو واپس رکھا گیا ہے، اس لیے، دو بار نکالنا غیر تابع تجربات بناتا ہے۔

اس لیے،
$$P(X=0) = P(\text{بغیر اکّے کے اور بغیر اکّے کے})$$
$$= P(\text{اِکّے کے بغیر}) \times P(\text{اِکّے کے بغیر})$$
$$= \frac{48}{52}\times\frac{48}{52}=\frac{144}{169}$$
$$P(X=1) = P(\text{اِکّے کے بغیر یا اِکّے یا اِکّا اور اِکّے کے بغیر})$$
$$= P(\text{اِکّے کے بغیر اور اِکّا}) \times P(\text{اِکّا اور اِکّے کے بغیر})$$
$$= P(\text{یکہ کے بغیر})\, P(\text{یکہ}) + P(\text{یکہ})\, P(\text{یکہ کے بغیر})$$
$$= \frac{4}{52}\times\frac{48}{52}+\frac{48}{52}\times\frac{4}{52}=\frac{24}{169}$$

اور
$$P(X=2) = P(\text{اِکّا اور اِکّا})$$
$$= \frac{4}{52}\times\frac{4}{52}=\frac{1}{169}$$

اس طرح، مطلوبہ احتمالی بٹوارہ یہ ہے

X	0	1	2
P (X)	$\frac{144}{169}$	$\frac{24}{169}$	$\frac{1}{169}$

مثال 25: ایک پانسہ کے جوڑے کو تین بار اچھالنے میں ثنویت (doublet) کا احتمالی بٹاؤ معلوم کیجیے۔

حل: مان لیجیے X دوہری تعداد کو ظاہر کرتا ہے۔ ممکن دوگنے ہیں

(1,1) , (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)

صاف طور پر، X کی کوئی بھی قدر 0، 1، 2 اور 3 ہو سکتی ہے۔

ایک ڈبلیٹ حاصل کرنے کا احتمال $= \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

© NCERT not to be republished

ایک ڈبلیٹ حاصل نہ کرنے کا احتمال $= 1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$

اب $P(X=0) = P$ (کوئی ڈبلیٹ نہیں) $= \frac{5}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}=\frac{125}{216}$

$P(X=1) = P$ (ایک ڈبلیٹ اور دو غیر ڈبلیٹ)

$$=\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}+\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}+\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}$$

$$=3\left(\frac{1}{6}\times\frac{5^2}{6^2}\right)=\frac{75}{216}$$

$P(X=2) = P$ (دو ڈبلیٹ اور ایک غیر ڈبلیٹ)

$$=\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}+\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}+\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=3\left(\frac{1}{6^2}\times\frac{5}{6}\right)=\frac{15}{216}$$

اور $P(X=3) = P$ (تین دوہرے)

$$=\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{216}$$

اس طرح، مطلوبہ احتمالی بٹاؤ ہے

X	0	1	2	3
P (X)	$\frac{125}{216}$	$\frac{75}{216}$	$\frac{15}{216}$	$\frac{1}{216}$

تصدیق: احتمالات کا حاصل جمع

$$\sum_{i=1}^{n} p_i=\frac{125}{216}+\frac{75}{216}+\frac{15}{216}+\frac{1}{216}$$

$$=\frac{125+75+15+1}{216}=\frac{216}{216}=1$$

مثال 26: مان لیجیے ایک بلا منصوبہ انتخاب کیے گئے اسکول کے دن میں X ان گھنٹوں کی تعداد کو ظاہر کرتا ہے جو آپ مطالعہ کرتے ہیں۔ احتمال X جو کہ x قدریں لے سکتا ہے، مندرجہ ذیل شکل رکھتا ہے، جہاں k کوئی بھی انجان مستقل ہے۔

$$P(X=x)=\begin{cases}0.1, & x=0 \text{ اگر}\\ kx, & x=1 \text{ یا } 2 \text{ اگر}\\ k(5-x), & x=3 \text{ یا } 4 \text{ اگر}\\ 0, & \text{ورنہ}\end{cases}$$

© NCERT not to be republished

(a) k کی قدر معلوم کیجیے۔

(b) اس کا کیا احتمال ہے کہ آپ کم سے کم دو گھنٹے مطالعہ کرتے ہیں؟ بالکل صحیح 2 گھنٹے؟ زیادہ سے زیادہ 2 گھنٹے؟

حل: X کا احتمال بٹاؤ ہے

X	0	1	2	3	4
P (X)	0.1	k	$2k$	$2k$	k

(a) ہم جانتے ہیں کہ $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$

اس لیے $0.1 + k + 2k + 2k + k = 1$

یعنی، $k = 0.15$

(b) P (آپ کم سے کم دو گھنٹہ مطالعہ کرتے ہیں) $= P(X \geq 2)$

$= P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4)$

$= 2k + 2k + k = 5k = 5 \times 0.15 = 0.75$

P (آپ بالکل دو گھنٹہ مطالعہ کرتے ہیں) $= P(X = 2)$

$= 2k = 2 \times 0.15 = 0.3$

P (آپ زیادہ سے زیادہ دو گھنٹہ مطالعہ کرتے ہیں) $= P(X \leq 2)$

$= P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$

$= 0.1 + k + 2k = 0.1 + 3k = 0.1 + 3 \times 0.15$

$= 0.55$

13.6.2 ایک بلا منصوبہ متغیر کا درمیانہ (Mean of a random variable)

بہت سے مسئلوں، میں ایک اکیلے عدد کے ذریعے بلا منصوبہ متغیر کے کچھ تاثرات بیان کرنے کی خواہش ہے جس کا اس کی احتمالی بٹاؤ کے ذریعے حساب لگایا جاسکتا ہے۔ اس طرح کے کچھ اعداد درمیانہ، وسطانیہ اور (Mode) مق ہیں۔ اس سیکشن میں ہم صرف درمیانہ پر بحث کریں گے۔ درمیانہ جگہ تلاش کرنے کا ایک پیمانہ ہے یا مرکزی طرف ہے، اس نظریہ میں کہ عام طور پر منصوبہ متغیر کی درمیانی یا اوسط قدر تلاش کرتا ہے۔

© NCERT not to be republished

تعریف 6: مان لیجیے X ایک بلامنصوبہ متغیر ہے جس کی ممکن قدریں $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ بالترتیب $p_1, p_2, p_3,..., p_n$ احتمالات کے ساتھ واقع ہوتی ہیں۔ X کا درمیانہ، جو کہ μ سے ظاہر کیا گیا ہے، $\sum_{i=1}^{n} x_i p_i$ عدد ہے، یعنی، درمیانہ X، X کی تمام ممکن قدروں کا اوسط وزن ہے، ہر ایک قدر کا اپنی احتمالی سے وزن کیا گیا ہے جس کے ساتھ یہ واقع ہوتا ہے۔

ایک بلامنصوبہ متغیر X کا درمیانہ X کی امید (Expectation) بھی کہلاتا ہے، جس کو E(X) سے ظاہر کیا جاتا ہے

اس طرح،
$$E(X) = \mu = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = x_1 p_1 + x_2 p_2 + ... + x_n p_n$$

دوسرے الفاظ میں، ایک بلامنصوبہ متغیر X کی امید X کی تمام ممکن قدروں کے مطابق احتمال کے حاصل ضرب کا حاصل ہوتا ہے۔

مثال 27: مان لیجیے پانسہ کے ایک جوڑے کو اچھالا گیا اور بلامنصوبہ متغیر X ان اعداد کا حاصل جمع ہے جو کہ دونوں پانسوں پر ظاہر ہوتے ہیں۔ X کا درمیانہ یا امید معلوم کیجیے۔

حل: تجربہ کی سیمپل فضا میں 36 بنیادی واقعات مرتب جوڑوں (x_i, y_i) کی شکل میں ہوتے ہیں، جہاں $x_i = 1,2,3,4,5,6$ اور y_i اور $y_i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ ہیں۔

بلامنصوبہ متغیر X یعنی، دونوں سکوں پر اعداد کا حاصل جمع 2، 3، 4، 5، 6، 7، 8، 9، 10، 11 یا 12 قدریں لے گا۔

اب

$$P(X = 2) = P(\{(1,1)\}) = \frac{1}{36}$$

$$P(X = 3) = P(\{(1,2), (2,1)\}) = \frac{2}{36}$$

$$P(X = 4) = P(\{(1,3), (2,2), (3,1)\}) = \frac{3}{36}$$

$$P(X = 5) = P(\{(1,4), (2,3), (3,2), (4,1)\}) = \frac{4}{36}$$

$$P(X = 6) = P(\{(1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1)\}) = \frac{5}{36}$$

$$P(X = 7) = P(\{(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)\}) = \frac{6}{36}$$

$$P(X = 8) = P(\{(2,6), (3,5), (4,4), (5,3), (6,2)\}) = \frac{5}{36}$$

© NCERT not to be republished

$$P(X = 9) = P(\{(3,6), (4,5), (5,4), (6,3)\}) = \frac{4}{36}$$

$$P(X = 10) = P(\{(4,6), (5,5), (6,4)\}) = \frac{3}{36}$$

$$P(X = 11) = P(\{(5,6), (6,5)\}) = \frac{2}{36}$$

$$P(X = 12) = P(\{(6,6)\}) = \frac{1}{36}$$

X کا احتمالی بٹاؤ ہے

X or x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P(X) or p_i	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

اس لیے،

$$\mu = E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = 2\times\frac{1}{36} + 3\times\frac{2}{36} + 4\times\frac{3}{36} + 5\times\frac{4}{36}$$

$$+ 6\times\frac{5}{36} + 7\times\frac{6}{36} + 8\times\frac{5}{36} + 9\times\frac{4}{36} + 10\times\frac{3}{36} + 11\times\frac{2}{36} + 12\times\frac{1}{36}$$

$$= \frac{2+6+12+20+30+42+40+36+30+22+12}{36} = 7$$

اس طرح، دوصاف (اچھے) پانسوں کو اچھالنے پر ظاہر ہونے والے اعداد کا مجموعہ 7 ہے۔

13.6.3 ایک بلامنصوبہ متغیر کا تغیر (فرق) (Variance of a random variable)

ایک بلامنصوبہ متغیر کا درمیانہ ہمیں بلامنصوبہ متغیر کی اتار چڑھاؤ کی قدروں کی معلومات نہیں دیتا۔ حقیقت میں اگر تغیر چھوٹا ہے تب بلامنصوبہ متغیر کی قدریں درمیانہ کے نزدیک ہیں۔ ساتھ ہی بلامنصوبہ متغیر مختلف احتمالی بٹوارے کے ساتھ برابر درمیانہ رکھ سکتے ہیں، جیسا کہ X اور Y کے ذیل بٹوارے میں دکھایا گیا ہے۔

X	1	2	3	4
P (X)	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{2}{8}$

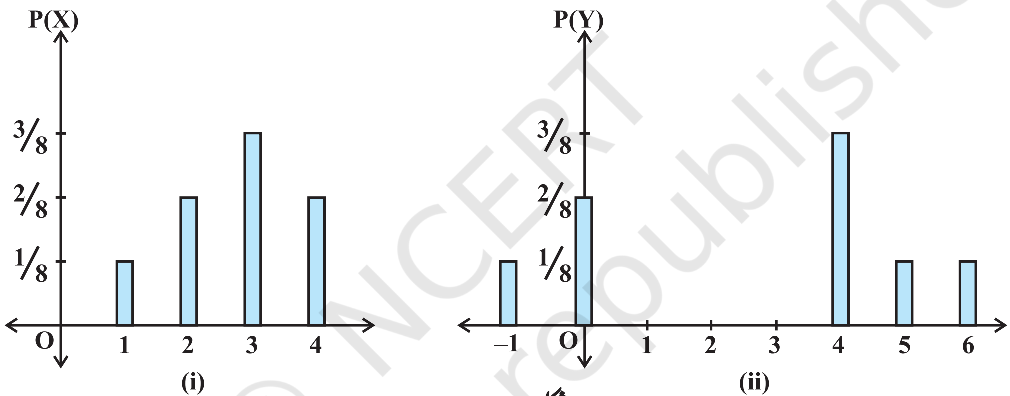
© NCERT not to be republished

Y	-1	0	4	5	6
P (Y)	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

صاف طور پر
$$E(X) = 1\times\frac{1}{8}+2\times\frac{2}{8}+3\times\frac{3}{8}+4\times\frac{2}{8}=\frac{22}{8}=2.75$$

اور
$$E(Y) = -1\times\frac{1}{8}+0\times\frac{2}{8}+4\times\frac{3}{8}+5\times\frac{1}{8}+6\times\frac{1}{8}=\frac{22}{8}=2.75$$

متغیر X اور Y مختلف ہیں، حالانکہ ان کے درمیان یکساں ہیں۔ان بٹاؤں کو تصویر کے ذریعے ظاہر کر کے ان کا آسانی سے مشاہدہ کیا جا سکتا ہے۔



شکل 13.5

X کا Y سے فرق کرنے کے لیے، ہمیں وسعت کی پیمائش کی ضرورت ہے جس کے لیے بلا منصوبہ متغیر کی قدریں پھیل جاتی ہیں۔علم شماریات (Statistics) میں، ہم نے پڑھا ہے کہ تغیر بکھرے ہوئے یا پھیلے ہوئے اعداد و شمار کا ایک پیمانہ ہے۔اسی طرح، ایک بلا منصوبہ متغیر کی قدروں کا پھیلنا یا متغیری کو تغیر کے ذریعہ پایا جا سکتا ہے۔

تعریف 7 مان لیجیے X ایک بلا منصوبہ متغیر ہے جس کی ممکن قدریں $x_1, x_2,...,x_n$ بالترتیب احتمالات $p(x_1), p(x_2),..., p(x_n)$ کے ساتھ واقع ہوتی ہیں۔

مان لیجیے $\mu = E(X)$، X کا درمیانہ ہے۔ X کا تغیر، جو کہ Var (X) یا σ_x^2 سے ظاہر کیا گیا ہے، اس طرح بیان کیا گیا ہے

$$\text{Var}(X)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\; p(x_i)$$

© NCERT not to be republished

یا برابری کے طور پر $\sigma_x^2 = E(X-\mu)^2$

غیر منفی عدد

$$\sigma_x = \sqrt{\text{Var}(X)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\, p(x_i)}$$

بلا منصوبہ متغیر X کا معیاری انحراف (Standard Deviation) کہلاتا ہے۔

ایک بلا منصوبہ متغیر کا تغیر معلوم کرنے کا ایک دوسرا فارمولہ۔ (Another formula to find the variance of a random variable) ہم جانتے ہیں کہ

$$\text{Var}(X) = \sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\, p(x_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(x_i^2+\mu^2-2\mu x_i)\, p(x_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}x_i^2\, p(x_i) + \sum_{i=1}^{n}\mu^2\, p(x_i) - \sum_{i=1}^{n}2\mu x_i p(x_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}x_i^2\, p(x_i) + \mu^2\sum_{i=1}^{n}p(x_i) - 2\mu\sum_{i=1}^{n}x_i p(x_i)$$

کیونکہ $\sum_{i=1}^{n}p(x_i)=1$ اور $\left[\mu = \sum_{i=1}^{n}x_i p(x_i)\right]$ $= \sum_{i=1}^{n}x_i^2\, p(x_i) + 2\mu^2 - 2\mu^2$

$$= \sum_{i=1}^{n}x_i^2\, p(x_i) - \mu^2$$

یا $$\text{Var}(X) = \sum_{i=1}^{n}x_i^2\, p(x_i) - \left(\sum_{i=1}^{n}x_i\, p(x_i)\right)^2$$

یا $\text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$ جہاں $E(X^2) = \sum_{i=1}^{n}x_i^2\, p(x_i)$ ہے

مثال 28: ایک غیر جانب دار پانسہ کو اچھالنے پر حاصل کیے گئے اعداد کا تغیر (Variance) معلوم کیجیے۔

حل: تجربہ کی سیمپل فضا $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ہے۔

مان لیجیے 'X' پانسہ کو اچھالنے پر حاصل ہوئے عدد کو ظاہر کرتا ہے۔ تب X ایک بلا منصوبہ متغیر ہے جس کی 1، 2، 3، 4، 5 یا 6 قدریں ہو سکتی ہیں۔

© NCERT not to be republished

ساتھ ہی $P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = P(6) = \frac{1}{6}$

اس لیے، X کا احتمالی بٹاؤ ہے

X	1	2	3	4	5	6
P (X)	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

اب
$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \, p(x_i)$$

$$= 1\times\frac{1}{6}+2\times\frac{1}{6}+3\times\frac{1}{6}+4\times\frac{1}{6}+5\times\frac{1}{6}+6\times\frac{1}{6}=\frac{21}{6}$$

ساتھ ہی
$$E(X^2) = 1^2\times\frac{1}{6}+2^2\times\frac{1}{6}+3^2\times\frac{1}{6}+4^2\times\frac{1}{6}+5^2\times\frac{1}{6}+6^2\times\frac{1}{6}=\frac{91}{6}$$

اس طرح،
$$\text{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$= \frac{91}{6} - \left(\frac{21}{6}\right)^2 = \frac{91}{6} - \frac{441}{36} = \frac{35}{12}$$

مثال 29: 52 پتوں کی ایک اچھی طرح پھینٹی گئی تاش کی گڈی سے 2 پتے ایک کے بعد ایک نکالے گئے (یا لگاتار بغیر دوبارہ واپس ڈالے ہوئے)۔ بادشاہوں کی تعداد کے لیے درمیانہ، تغیر اور معیاری انحراف (S .D) معلوم کیجیے۔

حل: مان لیجیے دو تاشوں کو نکالنے میں X بادشاہوں کی تعداد کو ظاہر کرتا ہے۔ X ایک بلا منصوبہ متغیر ہے جس کی 0، 1 یا 2 قدریں ہوسکتی ہیں۔

اب
$$P(X=0) = P(\text{کوئی بادشاہ نہیں}) = \frac{^{48}C_2}{^{52}C_2} = \frac{\frac{48!}{2!(48-2)!}}{\frac{52!}{2!(52-2)!}} = \frac{48\times47}{52\times51} = \frac{188}{221}$$

$$P(X=1) = P(\text{ایک بادشاہ اور ایک غیر-بادشاہ}) = \frac{^{4}C_1 \, ^{48}C_1}{^{52}C_2}$$

$$= \frac{4\times48\times2}{52\times51} = \frac{32}{221}$$

اور
$$P(X=2) = P(\text{دو بادشاہ}) = \frac{^{4}C_2}{^{52}C_2} = \frac{4\times3}{52\times51} = \frac{1}{221}$$

اس طرح، X کا احتمالی بٹاؤ ہے

X	0	1	2
P (X)	$\frac{188}{221}$	$\frac{32}{221}$	$\frac{1}{221}$

اب (X کا درمیانہ) Mean of $X = E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i\, p(x_i)$

$$= 0 \times \frac{188}{221} + 1 \times \frac{32}{221} + 2 \times \frac{1}{221} = \frac{34}{221}$$

ساتھ ہی $E(X^2) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2\, p(x_i)$

$$= 0^2 \times \frac{188}{221} + 1^2 \times \frac{32}{221} + 2^2 \times \frac{1}{221} = \frac{36}{221}$$

اب $\text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$

$$= \frac{36}{221} - \left(\frac{34}{221}\right)^2 = \frac{6800}{(221)^2}$$

اس لیے $\sigma_x = \sqrt{\text{Var}(X)} = \frac{\sqrt{6800}}{221} = 0.37$

مشق 13.4

1۔ بیان کیجیے کہ مندرجہ ذیل میں سے کون سے ایک بلا منصوبہ متغیر کے احتمالی بٹاؤ نہیں ہیں۔ اپنے جواب کی وجوہات بیان کیجیے۔

(i)

X	0	1	2
P (X)	0.4	0.4	0.2

(ii)

X	0	1	2	3	4
P (X)	0.1	0.5	0.2	-0.1	0.3

© NCERT not to be republished

(iii)

Y	-1	0	1
P (Y)	0.6	0.1	0.2

(iv)

Z	3	2	1	0	-1
P (Z)	0.3	0.2	0.4	0.1	0.05

2۔ ایک برتن میں 5 لال اور 2 کالی گیندیں ہیں۔ دو گیندیں بلا منصوبہ نکالی گئیں ہیں۔ مان لیجیے X کالی گیندوں کی تعداد کو ظاہر کرتا ہے۔ X کی ممکن قدریں کیا ہیں؟ کیا X ایک بلا منصوبہ متغیر ہے؟

3۔ مان لیجیے X ہیڈ اور ٹیل کی تعداد کے فرق کو ظاہر کرتا جو کہ ایک سکہ کو چھ بار ٹاس کرنے میں حاصل ہوئی ہیں۔ X کی ممکن قدریان کیا ہیں؟

4۔ مندرجہ ذیل کا احتمالی بٹاؤ معلوم کیجیے۔

(i) ایک سکّے کو دو بار اُچھالنے میں ہیڈ کی تعداد۔

(ii) تین سکوں کو لگا تار اُچھالنے میں ٹیل کی تعداد۔

(iii) ایک سکّے کو چار بار اُچھالنے میں ہیڈ کی تعداد۔

5۔ ایک پانسہ کو دوبارہ اُچھالنے میں احتمالی بٹاؤ کی کامیابیوں کی تعداد معلوم کیجیے جہاں کامیابی اس طرح بیان کی گئی ہے

(i) 4 سے بڑا عدد

(ii) کم سے کم ایک پانسہ پر چھ کا ظاہر ہونا

6۔ 30 بلب کے ایک ڈھیر سے جس میں 6 خراب شامل ہیں، 4 بلب کا ایک نمونہ واپس رکھنے کے ساتھ بلا منصوبہ نکالا گیا ہے۔ خراب بلبوں کی تعداد کا احتمالی بٹاؤ معلوم کیجیے۔

7۔ ایک سکہ جانب دار ہے اس میں ہیڈ، ٹیل کے مقابلہ میں 3 بار زیادہ واقع ہوتا ہے۔ اگر سکّے کو دوبارہ اُچھالا جائے، ٹیل کی تعداد کا احتمالی بٹاؤ معلوم کیجیے۔

8۔ ایک بلا منصوبہ متغیر X ذیل احتمالی بٹاؤ رکھتا ہے:

© NCERT not to be republished

X	0	1	2	3	4	5	6	7
P (X)	0	k	$2k$	$2k$	$3k$	k^2	$2k^2$	$7k^2+k$

معلوم کیجیے

(i) k (ii) $P(X < 3)$

(iii) $P(X > 6)$ (iv) $P(0 < X < 3)$

9۔ بلامنصوبہ متغیر X شکل کا P (X) احتمالی بٹاؤ رکھتا ہے، جہاں K کوئی عدد ہے:

$$P(X) = \begin{cases} k, & X=0 \text{ اگر} \\ 2k, & X=1 \text{ اگر} \\ 3k, & X=2 \text{ اگر} \\ 0, & \text{ورنہ} \end{cases}$$

(a) K کی قدر معلوم کیجیے۔

(b) $P(X < 2)$, $P(X \le 2)$, $P(X \ge 2)$ معلوم کیجیے۔

10۔ ایک صاف سکہ کی تین اُچھال میں ہیڈ کا درمیانہ عدد معلوم کیجیے۔

11۔ ایک کے بعد ایک دو پانسہ پھینکے گئے ہیں۔ اگر X چھکوں کی تعداد کو ظاہر کرتا ہے، X کی امید (Expectation) معلوم کیجیے۔

12۔ پہلے چھ مثبت صحیح اعداد سے دو اعداد بلامنصوبہ منتخب کیے گئے ہیں (بغیر واپس کیے ہوئے)۔ مان لیجیے X حاصل ہونے والے دو اعداد میں سے بڑے عدد کو ظاہر کرتا ہے۔ E (X) معلوم کیجیے۔

13۔ مان لیجیے X اعداد کے حاصل جمع کو ظاہر کرتا ہے جبکہ دو صاف پانسہ پھینکے گئے ہیں۔ X کا تغیر اور معیاری انحراف (S.D) معلوم کیجیے۔

14۔ ایک جماعت میں 15 طلبا ہیں جن کی عمریں بالترتیب 14، 17، 15، 14، 21، 17، 19، 20، 16، 18، 20، 17، 16، 19 اور 20 سال ہیں۔ ایک طلبع علم کا اس طرح انتخاب کیا گیا تا کہ ہر ایک کے منتخب ہو جانے کے برابر امکان ہیں اور منتخب ہوئے طالب علم کی عمر X ریکارڈ کی گئی ہے۔ بلامنصوبہ متغیر X کا احتمالی منصوبہ کیا ہے؟ X کا درمیانہ، تغیر اور معیاری انحراف (S.D) معلوم کیجیے۔

© NCERT not to be republished

15۔ ایک میٹنگ میں %70 ممبران کسی بھی تجویز کے حامی ہیں اور %30 ممبران مخالف ہیں۔ایک ممبر بلامنصوبہ چنا گیا ہے اور ہم X = 0 لیتے ہیں اگر وہ مخالفت کرتا ہے،اور X = 1 اگر وہ حامی ہے۔E (X) اور Var (X) معلوم کیجیے۔

ذیل میں سے ہرایک کے لیے صحیح جوابات کا انتخاب کیجیے۔

16۔ ایک پانسہ کو اچھالنے پر جس کے تین طرف '1' لکھا ہوا ہے دو طرف 2، اور ایک طرف 5 لکھا ہوا ہے، سے جو اعداد حاصل ہوئے ہیں ان کا درمیانہ ہے

(A) 1 (B) 2 (C) 5 (D) $\frac{8}{3}$

17۔ مان لیجیے ایک تاشوں کی گڈی سے دو تاش بلامنصوبہ نکالے گئے ہیں۔ مان لیجیے حاصل ہوئے اکّوں کی تعداد X ہے۔تب E (X) کی قدر ہے

(A) $\frac{37}{221}$ (B) $\frac{5}{13}$ (C) $\frac{1}{13}$ (D) $\frac{2}{13}$

13.7 برنولی کی کوشش اور دورکنی بٹاؤ (Bernoulli Trials and Binomial Distribution)

13.7.1 برنولی کی جانچ (Bernoulli trials)

بہت سے تجربات قدرتی طور پر صرف دو نتیجہ ہوتے ہیں۔مثال کے طور پر ایک ٹاس کیا گیا سکہ 'ہیڈ' یا 'ٹیل' دکھاتا ہے، ایک بنائی ہوئی اشیا 'خراب' بھی ہوسکتی ہے اور 'صحیح' بھی ہوسکتی ہے، کسی سوال کا جواب 'ہاں' بھی ہوسکتا ہے اور 'نہیں' بھی، ایک انڈے میں سے بچہ 'نکلا ہے' یا 'نہیں نکلا ہے' فیصلہ 'ہاں' یا 'نہیں' ہوسکتا ہے۔اس طرح کی معمولات میں، رسمی طور پر یہ کہنا کہ نتیجہ ایک 'کامیابی' ہے اور دوسرا 'کامیابی نہیں ہے' یا 'فیل ہوگیا ہے۔مثال کے طور پر، ایک سکہ کو اُچھالنے میں، اگر ہیڈ کا وقوع ہونا ایک کامیابی ہے، تب ٹیل کا وقوع ہونا ناکامیابی ہوتا ہے۔

ہم ہر مرتبہ سکہ کو ٹاس کرتے ہیں یا پانسہ کو اچھالتے ہیں یا کوئی بھی دوسرا تجربہ کرتے ہیں، ہم اسے ایک جانچ کہتے ہیں۔ مان لیجیے اگر ایک سکہ کو 4 بار ٹاس کیا گیا ہے، جانچ کی تعداد 4 ہے۔جس میں ہر ایک میں دو وقوع ہیں کامیابی یا فیل ہونا کسی بھی کوشش کا نتیجہ اور دوسرے کی کوشش کے نتیجے سے مبرّہ ہوتا ہے۔اس طرح کی ہر ایک کوشش میں، کامیابی یا غیر کامیابی کا احتمال مستقل رہتا ہے۔اس طرح کی غیر تابع کوشش جس میں دو طرح کے نتائج کا عام طور پر حوالہ دیا گیا ہے 'کامیابی' یا 'ناکامیابی' کو برنولی کی کوشش کہتے ہیں۔

تعریف 8: ایک بلامنصوبہ تجربہ کی کوشش کو برنولی کی کوشش کہتے ہیں، اگر وہ مندرجہ ذیل شرائط کو مطمئن کردیں

(i) کوشش کی تعداد محدود ہونی چاہیے۔

(ii) کوشش آزاد ہونی چاہئیں۔

(iii) ہر ایک کوشش میں بالکل دو نتائج ہوتے ہیں: کامیابی یا ناکامیابی۔

(iv) کامیابی کا احتمال ہر ایک کوشش میں یکساں رہتی ہے۔

مثال کے طور پر، ایک پانسہ کو 50 مرتبہ اچھالنا، 50 مرتبہ برنولی کی کوشش کا ایک کیس ہے، جس میں ہر ایک کوشش کا نتیجہ کامیابی ہے (مان لیجیے ایک جفت عدد) یا غیر کامیابی (ایک طاق عدد) اور کامیابی کا احتمال (P) تمام 50 بار پھینکنے کے لیے یکساں ہے۔ صاف طور پر، پانسہ کا لگاتار اچھالنا آزاد تجربات ہیں۔ اگر ایک پانسہ صحیح ہے اور چھ اعداد '1 تا 6' اس کی چھ طرف لکھے ہوئے ہیں، تب $P = \frac{1}{2}$ اور $q = 1 - P = \frac{1}{2}$ = فیل ہونے کا احتمال

مثال 30: چھ گیندیں ایک برتن میں سے جن میں 7 لعل اور 9 کالی گیندیں ہیں، لگاتار نکالی گئیں۔ بتایئے کہ کیا گیندوں کو نکالنے کی کوشش برنولی کوشش ہے یا نہیں جبکہ ہر بار گیند نکالنے کے بعد

(i) واپس رکھی گئی ہے (ii) برتن میں واپس نہیں رکھی گئی۔

حل:

(i) کوششوں کی تعداد محدود ہے۔ جبکہ گیند کو نکالنے کا کام واپس رکھنے کے ساتھ کیا گیا ہے، کامیابی کا احتمال (مان لیجیے، لال گیند کے لیے) $P = \frac{7}{16}$ ہے جو کہ تمام چھ جانچ کے لیے یکساں ہے (نکالنے کے لیے)۔ اس لیے، واپس رکھنے کے ساتھ گیندوں کو نکالنا برنولی کوشش ہے۔

(ii) جبکہ گیندوں کو بغیر واپس رکھے گئے نکالا ہے، کامیابی کا احتمال (یعنی، لال گیند کی) پہلی جانچ میں $\frac{7}{16}$ ہے، دوسری کوشش میں $\frac{6}{15}$ ہے، اگر نکالی گئی پہلی گیند لال ہے یا $\frac{7}{15}$ ہے اسی طرح نکالی گئی پہلی گیند کالی اور اسی طرح آگے۔

صاف طور پر، کامیابی کا احتمال تمام جانچوں کے لیے یکساں نہیں ہے، اس لیے کوشش برنولی کوشش نہیں ہے۔

13.7.2 دورکنی بٹاؤ (Binomial distribution)

ایک سکّے کے اُچھالنے کے تجربہ پر غور کیجیے جس میں ہر ایک کوشش کا نتیجہ ایک کامیابی ہے (مان لیجیے ہیڈ) یا ناکامیابی (ٹیل)۔

© NCERT not to be republished

مان لیجیے S اور F بالترتیب کامیابی اور نا کامیابی کو ہر کوشش میں ظاہر کرتے ہیں۔ مان لیجیے ہماری دلچسپی ان طریقوں کو معلوم کرنے میں ہے جس میں ہمیں چھ کوششوں میں ایک بار کامیابی ملتی ہے۔

صاف طور پر، وہاں چھ مختلف کیس ہیں جن کی ذیل میں فہرست بنائی گئی ہے:

SFFFFF, FSFFFF, FFSFFF, FFFSFF, FFFFSF, FFFFFS

اسی طرح، دو کامیابیاں اور 4 نا کامیابیاں میں $\frac{6!}{4! \times 2!}$ اجتماع رکھ سکتی ہے۔ ان طریقوں کی فہرست بنانا ایک لمبا کام ہے۔ اس لیے، کامیابی سے 0، 1، 2، ...، n اعداد کے احتمالات کا حساب لگانا ایک لمبا اور وقت برباد کرنے والا ہے۔ n برنولی کوشش میں احتمالات کے لیے کامیابیوں کی تعداد معلوم کرنے میں لمبا حساب لگانا اور تمام ممکن کیسوں کی فہرست بنانے سے بچنے کے لیے ایک ضابطہ معلوم کیا گیا ہے۔ اس کام کے لیے ہم ایک تجربہ کو لیتے ہیں جو کہ تین برنولی کوشش سے بنا ہوا ہے اور جس کی احتمالات ہر ایک کوشش میں بالترتیب کامیابی اور غیر کامیابی کے لیے P اور $q = 1 - P$ ہیں۔ تجربہ کی سیمپل فضا کے لیے سیٹ ہے

S = {SSS, SSF, SFS, FSS, SFF, FSF, FFS, FFF}

کامیابی کی تعداد ایک بلا منصوبہ متغیر X ہے اور جو 0، 1، 2 یا 3 قدریں لے سکتا ہے۔ کامیابیوں کی تعداد کا احتمالی بٹاؤ مندرجہ ذیل کی طرح ہے:

$$P(X = 0) = P(\text{کوئی کامیابی نہیں})$$

$$= P(\{FFF\}) = P(F)\, P(F)\, P(F)$$

$$= q \,.\, q \,.\, q = q^3 \quad (\text{کیونکہ جانچیں آزاد ہیں})$$

$$P(X = 1) = P(\text{ایک کامیابی})$$

$$= P(\{SFF, FSF, FFS\})$$

$$= P(\{SFF\}) + P(\{FSF\}) + P(\{FFS\})$$

$$= P(S)\, P(F)\, P(F) + P(F)\, P(S)\, P(F) + P(F)\, P(F)\, P(S)$$

$$= p.q.q + q.p.q + q.q.p = 3pq^2$$

$$P(X = 2) = P(\text{دو کامیابیاں})$$

© NCERT not to be republished

$P(X = 2) = P$ (دو کامیابیاں)

$= P(\{SSF, SFS, FSS\})$

$= P(\{SSF\}) + P(\{SFS\}) + P(\{FSS\})$

$= P(S)\,P(S)\,P(F) + P(S)\,P(F)\,P(S) + P(F)\,P(S)\,P(S)$

$= p.p.q. + p.q.p + q.p.p = 3p^2q$

اور $P(X = 3) =$ (تین کامیابیاں) $= P(\{SSS\})$

$= P(S)\,.\,P(S)\,.\,P(S) = p^3$

اس طرح، X کا احتمالی بٹاؤ ہے

X	0	1	2	3
P (X)	q^3	$3q^2p$	$3qp^2$	p^3

ساتھ ہی، $(q + p)^3$ کا دورکنی پھیلاؤ ہے

$$q^3 + 3q^2p + 3q^2 + p^3$$

یہ نوٹ کر لیجیے کہ 0، 1، 2 یا 3 کی کامیابیوں کا احتمال بالترتیب $(q + p)^3$ کے پھیلاؤ میں پہلا، دوسرا، تیسرا، اور چوتھا رکن ہیں۔

ساتھ ہی، کیونکہ $q + p = 1$ ہے، اس سے یہ حاصل ہوتا ہے کہ ان احتمالات کا حاصل جمع، جیسا کہ امید تھی '1' ہے۔

اس طرح، n- برنولی کی کوشش کے ایک تجربہ میں ہم یہ نتیجہ نکال سکتے ہیں کہ n $(q + p)$ کے پھیلاؤ میں، 0، 1، 2، n ... کی کامیابیوں کے احتمالات پہلے، دوسرے ...$(n + 1)$ ارکان ہیں۔ اس ادعا (نتیجہ) کو ثابت کرنے کے لیے، ہمیں n- برنولی کوشش میں x- کامیابیوں کا احتمال معلوم کرنا چاہیے۔

صاف طور پر، x کامیابیوں (S) کے کیس میں، $(n - x)$ ناکامیابیاں (F) ہوں گی۔

اب، x کامیابیاں (S) اور $(n - x)$ ناکامیابیاں (F)، $\frac{n!}{x!(n-x)!}$ طریقوں سے حاصل کی جا سکتی ہیں۔

ان میں سے ہر ایک طریقے میں، x کامیابیوں کے احتمالات اور $(n - x)$ ناکامیوں کے احتمالات ہیں۔

ناکامیابیاں $P(n - x)$ $= P$ (x کامیابیاں)

$$= \underbrace{P(S).P(S)...P(S)}_{x \text{ مرتبہ}} \quad \underbrace{P(F).P(F)...P(F)}_{(n-x) \text{ مرتبہ}} = p^x \; q^{n-x}$$

اس طرح، n – برنولی کوشش میں x کامیابیوں کے احتمال $\frac{n!}{x!(n-x)!} p^x \; q^{n-x}$ ہے یا $^nC_x p^x \; q^{n-x}$

اس طرح، $P(x \text{ کامیابیاں}) = {}^nC_x p^x q^{n-x} = , \quad x = 0, 1, 2, ..., n. \; (q = 1-p)$

صاف طور پر، P (کامیابیاں) یعنی $^nC_x p^x \; q^{n-x}$ دورکنی پھیلاؤ $(q+p)^n$ میں $(x+1)^{th}$ رکن ہے۔

اس طرح، ایک تجربہ میں جس میں n – برنولی کی کوشش شامل ہے کامیابیوں کی تعداد کے احتمالی بٹوارے کو $(q+p)^n$ کے دورکنی پھیلاؤ سے حاصل کیا جاسکتا ہے۔ اس لیے، X کامیابیوں کے بٹاؤ کی تعداد کو اس طرح لکھا جاسکتا ہے

X	0	1	2	...	x	...	n
P (X)	$^nC_0 \; q^n$	$^nC_1 \; q^{n-1} p^1$	$^nC_2 \; q^{n-2} p^2$		$^nC_x \; q^{n-x} p^x$		$^nC_n \; p^n$

مندرجہ بالا احتمالی بٹاؤ کو n اور p پیرامیٹر کے ساتھ دورکنی بٹاؤ کہا جاتا ہے، کیونکہ دی ہوئی قدروں n اور p کے لیے، ہم مکمل احتمالی بٹاؤ معلوم کرسکتے ہیں۔

x کامیابیوں کے احتمال $P(X = x)$، $P(x)$ سے بھی ظاہر کیے جاتے ہیں اور اس طرح دی گئی ہے

$$P(x) = {}^nC_x \, q^{n-x} p^x, \quad x = 0, 1, ..., n. \; (q = 1-p)$$

یہ $P(x)$ دورکنی بٹاؤ کا احتمالی تفاعل کہلاتا ہے

n – برنولی کوشش کے ساتھ اور ہر کوشش میں کامیابیوں کے احتمال P کی طرح ایک دورکنی بٹاؤ کو $B(n, P)$ سے ظاہر کیا گیا ہے۔

اب ہمیں کچھ مثالیں لینی چاہیے۔

مثال 31: اگر ایک صاف سکّے کو دس بار ٹاس کیا گیا ہے، تو احتمال معلوم کیجیے

(i) قطعی چھ ہیڈ کی

(ii) کم سے کم چھ ہیڈ کی

(iii) زیادہ سے زیادہ چھ ہیڈ کی

© NCERT not to be republished

حل: ایک سکّے کے دہرائے گئے ٹاس برنولی کوشش ہیں۔ مان لیجیے ایک تجربہ میں 10 جانچ کو X ہیڈ کی تعداد سے کو ظاہر کیا گیا ہے۔

صاف طور پر، X دو رکنی بٹاؤ رکھتا ہے، $n = 10$ اور $P = \frac{1}{2}$ کے ساتھ

اس لیے $P(X = x) = {}^nC_x q^{n-x} p^x, \; x = 0, 1, 2, \ldots, n$

یہاں $n = 10, \; p = \frac{1}{2}, \; q = 1 - p = \frac{1}{2}$

اس لیے $P(X = x) = {}^{10}C_x \left(\frac{1}{2}\right)^{10-x} \left(\frac{1}{2}\right)^{x} = {}^{10}C_x \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$

اب

(i) $P(X = 6) = {}^{10}C_6 \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{10!}{6! \times 4!} \frac{1}{2^{10}} = \frac{105}{512}$

(ii) P (کم سے کم چھ ہیڈ) $= (P(X \geq 6)$

$= P(X = 6) + P(X = 7) + P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10)$

$= {}^{10}C_6 \left(\frac{1}{2}\right) + {}^{10}C_7 \left(\frac{1}{2}\right) + {}^{10}C_8 \left(\frac{1}{2}\right) + {}^{10}C_9 \left(\frac{1}{2}\right) + {}^{10}C_{10} \left(\frac{1}{2}\right)$

$= \left[\left(\frac{10!}{6! \times 4!}\right) + \left(\frac{10!}{7! \times 3!}\right) + \left(\frac{10!}{8! \times 2!}\right) + \left(\frac{10!}{9! \times 1!}\right) + \left(\frac{10!}{10!}\right)\right] \frac{1}{2^{10}} = \frac{193}{512}$

(iii) P (زیادہ سے زیادہ چھ ہیڈ) $= P(X \leq 6)$

$= P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)$

$+ P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6)$

$= \left(\frac{1}{2}\right)^{10} + {}^{10}C_1 \left(\frac{1}{2}\right)^{10} + {}^{10}C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^{10} + {}^{10}C_3 \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$

$+ {}^{10}C_4 \left(\frac{1}{2}\right)^{10} + {}^{10}C_5 \left(\frac{1}{2}\right)^{10} + {}^{10}C_6 \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$

$= \frac{848}{1024} = \frac{53}{64}$

© NCERT not to be republished

مثال 32: ایک انڈوں کے ڈھیر سے جس میں 10% خراب انڈے ہیں دس انڈے کامیابی سے واپسی کے ساتھ نکالے گئے ہیں۔اس کی احتمالی معلوم کیجیے کہ نکالے گئے انڈوں میں کم سے کم ایک خراب انڈہ ہے۔

حل: مان لیجیے نکالے گئے 10 انڈوں میں خراب انڈوں کی تعداد X سے ظاہر کی گئی ہے۔ کیونکہ انڈوں کا نکالنا بدلاؤ کے ساتھ ہے،اس لیے کوشش برنولی کوشش ہے۔صاف طور پر، X دورکنی بٹاؤ ہے جس میں $n = 10$ اور $p = \frac{10}{100} = \frac{1}{10}$ ہے

اس لیے $q = 1 - p = \frac{9}{10}$

اب P (کم سے کم ایک انڈا خراب ہے) $= P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0)$

$$= 1 - {}^{10}C_0 \left(\frac{9}{10}\right)^{10} = 1 - \frac{9^{10}}{10^{10}}$$

مشق 13.5

1۔ ایک پانسہ کو 6 بار اچھالا گیا ہے۔ اگر ''ایک ناطق عدد حاصل کرنا'' ایک کامیابی ہے، تو بتایئے کہ مندرجہ ذیل کا کیا احتمال کیا ہے

(i) 5 کامیابیوں کی؟ (ii) کم سے کم 5 کامیابیوں کی؟

(iii) زیادہ سے زیادہ 5 کامیابیوں کی؟

2۔ پانسہ کا ایک جوڑا 4 بار اچھالا گیا ہے۔ اگر دوہرے اعداد (ڈبلیٹ) ملنے کو ایک کامیابی سمجھا جائے، تو دو کامیابیوں کا احتمال معلوم کیجیے۔

3۔ اشیا کے ایک بہت بڑے ڈھیر میں 5% اشیا خراب ہیں۔ اس کا کیا احتمال ہے کہ 10 نمونوں میں سے ایک سے زیادہ اشیا خراب نہ ہوں؟

4۔ 52 تاشوں کی ایک اچھی طرح پھینٹی گئی گڈی سے 5 تاش واپس رکھنے کے ساتھ کامیابی کے ساتھ نکالے گئے ہیں۔ اس کا کیا احتمال ہے کہ

(i) تمام پانچ پتے حکم کے ہیں؟

(ii) صرف تین پتے حکم کے ہیں؟

(iii) کوئی بھی حکم کا نہیں ہے؟

© NCERT not to be republished

5۔ ایک بلب جو کہ ایک فیکٹری کے ذریعے تیار کیا گیا ہے کا احتمال 0.05 ہے کہ 150 دن میں فیوز ہو جائے گا۔ اس کا احتمال معلوم کیجیے کہ اس طرح کے 5 بلبوں میں

(i) کوئی نہیں

(ii) ایک سے زیادہ نہیں

(iii) ایک سے زیادہ

(iv) کم سے کم ایک

استعمال کے 150 دن بعد فیوز (Fuse) ہو جائے گا۔

6۔ ایک تھیلے میں 10 گیندیں ہے اور ہر ایک پر 0 تا 9 ہندسہ بنا ہوا ہے۔ اگر تھیلے سے واپس رکھنے کے ساتھ چار گیندیں کامیابی سے نکالی گئی ہیں، اس کا کیا احتمال ہے کہ نکالی گئی گیندوں میں سے کسی پر بھی 0 کا ہندسہ نہیں بنا ہوا ہے؟

7۔ ایک امتحان میں، 20 سوالات صحیح۔غلط طرح کے معلوم کیے گئے ہیں۔ مان لیجیے ایک طلب علم اپنے ہر سوال کا جواب معلوم کرنے کے لیے ایک اچھے سکہ کو اُچھالتا ہے۔ اگر سکہ پر ہیڈ آتا ہے، وہ جواب صحیح کا دیتا ہے اگر اس پر ٹیل آتا ہے، وہ جواب غلط کا دیتا ہے۔ اس کا کیا احتمال ہے کہ وہ کم سے کم 12 سوالوں کے صحیح جواب دے گا؟

8۔ مان لیجیے X کا ایک دورکنی بٹاؤ $B\left(6, \frac{1}{2}\right)$ ہے۔ دکھائیے کہ $X = 3$ سب سے زیادہ ممکن نتیجہ ہے۔

(اشارہ: $P(X = 3)$ تمام $P(x_i), x_i = 0,1,2,3,4,5,6$ میں عظیم ہے)

9۔ ایک کثیر جوابی (Multiple choice) امتحان میں ہر ایک پانچ سوالوں کے لیے تین ممکن جوابات ہیں، اس کا کیا احتمال ہے کہ ایک طالب علم صرف اندازہ سے چار یا اس سے زیادہ صحیح جواب دے گا؟

10۔ ایک آدمی 50 لاٹریوں میں ایک لاٹری ٹکٹ خریدتا ہے، جن میں سے ہر ایک میں اس کا انعام جیتنے کا چانس ہے۔ اس کا کیا احتمال ہے کہ وہ انعام جیتے گا۔ (a) کم سے کم ایک مرتبہ (b) صرف ایک بار (c) کم سے کم دو مرتبہ

11۔ ایک پانسہ کو 7 بار اچھالنے میں بالکل دو بار 5 حاصل ہونے کا احتمال کیا ہے۔

12۔ ایک اکیلے پانسہ کو 6 مرتبہ اچھالنے میں زیادہ سے زیادہ 2 چھکے حاصل ہونے کا کیا احتمال ہے۔

13۔ یہ معلوم ہے کہ کچھ بنائی گئی اشیا میں 10 فی صد اشیا خراب ہیں۔ اس کا احتمال ہے کہ اس طرح کی 12 اشیا کہ بلا منصوبہ نمونوں میں، 9 خراب ہیں؟

ذیل ہر ایک میں، صحیح جواب کا انتخاب کیجیے۔

© NCERT not to be republished

14۔ ایک باکس جس میں 100 بلب ہیں، 10 خراب ہیں۔ اس کا کیا احتمال ہے کہ 5 بلبوں کے نمونے میں، کوئی بھی خراب نہیں ہے۔

(A) 10^{-1} (B) $\left(\frac{1}{2}\right)^5$ (C) $\left(\frac{9}{10}\right)^5$ (D) $\frac{9}{10}$

15۔ اس کا احتمال کہ ایک طالب علم تیراک نہیں ہے $\frac{1}{5}$ تب اس کا کیا احتمال کہ 5 طلبا میں سے، 4 تیراک یہ ہیں۔

(A) ${}^5C_4\left(\frac{4}{5}\right)^4\frac{1}{5}$ (B) $\left(\frac{4}{5}\right)^4\frac{1}{5}$

(C) ${}^5C_1\frac{1}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^4$ (D) ان میں کوئی بھی نہیں

متفرق مثالیں

مثال 33: جیسا کہ جدول میں دکھایا گیا ہے رنگین گیندیں چار ڈبوں میں بانٹی گئی ہیں:

ڈبہ	رنگ			
	کالا	سفید	لال	نیلا
I	3	4	5	6
II	2	2	2	2
III	1	2	3	1
IV	4	3	1	5

ایک ڈبہ کو بلا منصوبہ چنا گیا ہے اور تب چنے گئے ڈبے سے ایک گیند بلا منصوبہ نکالی گئی ہے۔ گیند کا رنگ کالا ہے، اس کا کیا احتمال ہے کہ نکالی گئی گیند ڈبہ III سے ہے۔

حل: مان لیجیے A، E_1، E_2، E_3 اور E_4 وقوعات ہیں جیسا کہ نیچے بیان کیا گیا ہے۔

A : ایک کالی گیند چنی گئی ہے
E_1 : ڈبہ I چنا گیا ہے
E_2 : ڈبہ II چنا گیا ہے
E_3 : ڈبہ III چنا گیا ہے
E_4 : ڈبہ IV چنا گیا ہے

کیونکہ ڈبہ بلا منصوبہ چنے گئے ہیں۔

© NCERT not to be republished

اس لیے $P(E_1) = P(E_2) = P(E_3) = P(E_4) = \frac{1}{4}$

ساتھ ہی $P(A|E_1) = \frac{3}{18}, \ P(A|E_2) = \frac{2}{8}, P(A|E_3) = \frac{1}{7}$ اور $P(A|E_4) = \frac{4}{13}$

$P(E_3|A) = P$ (ڈبہ III چنا گیا ہے، دیا گیا ہے کہ نکالی گئی گیند کالی ہے) $= P(E3|A)$، بائیس مسئلہ سے

$$P(E_3|A) = \frac{P(E_3)\cdot P(A|E_3)}{P(E_1)P(A|E_1)+P(E_2)P(A|E_2)+P(E_3)P(A|E_3)+P(E_4)P(A|E_4)}$$

$$= \frac{\frac{1}{4}\times\frac{1}{7}}{\frac{1}{4}\times\frac{3}{18}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{7}+\frac{1}{4}\times\frac{4}{13}} = 0.165$$

مثال 34: دو رکنی بٹاؤ $B\left(4, \frac{1}{3}\right)$ کا درمیانہ معلوم کیجیے۔

حل: مان لیجیے X بلامنصوبہ متغیر ہے جس کا احتمالی بٹاؤ $B\left(4, \frac{1}{3}\right)$ ہے۔

یہاں $n = 4, p = \frac{1}{3}$ اور $q = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

ہم جانتے ہیں کہ $P(X = x) = {}^4C_x\left(\frac{2}{3}\right)^{4-x}\left(\frac{1}{3}\right)^x, x = 0, 1, 2, 3, 4$

یعنی، X کا بٹاؤ ہے

x_i	$P(x_i)$	$x_iP(x_i)$
0	${}^4C_0\left(\frac{2}{3}\right)^4$	0
1	${}^4C_1\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)$	${}^4C_1\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)$
2	${}^4C_2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^2$	$2\left({}^4C_2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^2\right)$
3	$3\left({}^4C_3\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^3\right)$	$3\left({}^4C_3\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^3\right)$
4	${}^4C_4\left(\frac{1}{3}\right)^4$	$4\left({}^4C_4\left(\frac{1}{3}\right)^4\right)$

© NCERT not to be republished

اب درمیانہ (μ) $\sum_{i=1}^{4} x_i\, p(x_i) =$

$$= 0 + {}^4C_1\left(\frac{2}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right) + 2\cdot{}^4C_2\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 3\cdot{}^4C_3\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^3 + 4\cdot{}^4C_4\left(\frac{1}{3}\right)^4$$

$$= 4\times\frac{2^3}{3^4} + 2\times6\times\frac{2^2}{3^4} + 3\times4\times\frac{2}{3^4} + 4\times1\times\frac{1}{3^4}$$

$$= \frac{32+48+24+4}{3^4} = \frac{108}{81} = \frac{4}{3}$$

مثال 35: ایک گولی چلانے والے کا ایک نشانہ کو مارنے کا احتمال $\frac{3}{4}$ ہے۔ وہ (لڑکا) (لڑکی) کم سے کم کتنی مرتبہ گولی چلائے تا کہ نشانہ کو مارنے کا احتمال کم سے کم 0.99 سے ایک زیادہ ہو؟

حل: مان لیجیے گولی چلانے والا n مرتبہ گولی چلاتا ہے۔ صاف طور پر، n مرتبہ گولی چلانا n برنولی جانچ ہے۔ ہر ایک جانچ میں

p = نشانہ کو مارنے کا احتمال = $\frac{3}{4}$ اور q = نشانہ کو نہ مارنے کا احتمال = $\frac{1}{4}$

تب $P(X = x) = {}^nC_x\, q^{n-x}\, p^x = {}^nC_x\left(\frac{1}{4}\right)^{n-x}\left(\frac{3}{4}\right)^x = {}^nC_x\,\frac{3^x}{4^n}$

اب، دیا گیا ہے کہ،

P (کم سے کم ایک بار نشانہ کو مارنا) > 0. 99

یعنی، $P(x \ge 1) > 0.99$

اس لیے، $1 - P(x = 0) > 0.99$

یا $1 - {}^nC_0\,\frac{1}{4^n} > 0.99$

یا ${}^nC_0\,\frac{1}{4^n} < 0.01 \quad \text{i.e.}\ \frac{1}{4^n} < 0.01$

یا $4^n > \frac{1}{0.01} = 100 \qquad \ldots (1)$

n کی قلیل قدر جو نامساوات (1) کو مطمئن کرتی ہے 4 ہے۔

اس طرح، گولی چلانے والا کم سے کم 4 مرتبہ گولی چلائے

© NCERT not to be republished

مثال 36: A اور B ایک پانسہ کو باری باری سے اچھالتے ہیں جب تک ایک کو '6' حاصل نہیں ہو جاتا اور کھیل جیت جاتے ہیں۔ ان کے جیتنے کے اپنے اپنے احتمالات معلوم کیجیے اگر A پہلے شروع کرتا ہے۔

حل: مان لیجیے S کامیابی کو ظاہر کرتا ہے ('6' حاصل ہونے کی) اور F ناکامی کو ظاہر کرتا ہے۔ ('6' نہ حاصل ہونے کی)۔

اس طرح، $P(S) = \frac{1}{6}, P(F) = \frac{5}{6}$

$$P(\text{A پہلی بار اچھالنے میں جیتا ہے}) = P(S) = \frac{1}{6}$$

A کو تیسری بار اچھالنے کا موقعہ ملتا ہے، جبکہ A پہلی بار اچھالنے پر اور B دوسری بار اچھالنے پر ناکامیاب ہو جاتا ہے۔

اس لیے،
$$P(\text{A تیسری بار اچھالنے میں جیتتا ہے}) = P(FFS) = P(F)P(F)P(S) = \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{6}$$
$$= \left(\frac{5}{6}\right)^2 \times \frac{1}{6}$$

اور اس طرح آگے
$$P(\text{A پانچویں بار اچھالنے میں جیتتا ہے}) = P(FFFFS) = \left(\frac{5}{6}\right)^4 \left(\frac{1}{6}\right)$$

اس لیے،
$$P(\text{A جیتتا ہے}) = \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^2 \left(\frac{1}{6}\right) + \left(\frac{5}{6}\right)^4 \left(\frac{1}{6}\right) + \ldots$$
$$= \frac{\frac{1}{6}}{1 - \frac{25}{36}} = \frac{6}{11}$$

$$P(\text{B جیتتا ہے}) = 1 - P(\text{A جیتتا ہے}) = 1 - \frac{6}{11} = \frac{5}{11}$$

ریمارک (Remark) اگر $a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1} + \ldots,$ جہاں $|r| < 1$ ہے۔ تب اس لامحدود G.P کا مجموعہ سے دیا گیا ہے (گیارھویں کلاس کی کتاب کے A. 1. 3 کے حوالے سے)

مثال 37: اگر مشین کو صحیح طور پر سیٹ کیا گیا ہے، یہ 90% قابل قبول اشیا بناتی ہے۔ اگر اسے غلط طور پر سیٹ کیا گیا ہے تو یہ 40% قابل قبول اشیا بناتی ہے۔ پچھلا تجربہ یہ بتاتا ہے کہ 80% مشین کو صحیح سیٹ کیا جاتا رہا ہے۔ اگر کچھ سیٹ کرنے کے بعد، مشین 2 قابل قبول اشیا بناتی ہے، اس کا احتمال معلوم کیجیے کہ مشین کو صحیح طور پر سیٹ کیا گیا ہے۔

حل: مان لیجیے A وہ واقعہ ہے جس میں مشین 2 قابل قبول اشیا بناتی ہے۔

© NCERT not to be republished

ساتھ ہی مان لیجیے کہ B_1 صحیح سیٹ ہونے کا واقعہ ہے اور B_2 غلب سیٹ ہونے کا واقعہ ہے۔

اب $P(B_1) = 0.8, P(B_2) = 0.2$

$P(A|B_1) = 0.9 \times 0.9$ اور $P(A|B_2) = 0.4 \times 0.4$

اس لیے
$$P(B_1|A) = \frac{P(B_1)\,P(A|B_1)}{P(B_1)\,P(A|B_1) + P(B_2)\,P(A|B_2)}$$

$$= \frac{0.8 \times 0.9 \times 0.9}{0.8 \times 0.9 \times 0.9 + 0.2 \times 0.4 \times 0.4} = \frac{648}{680} = 0.95$$

باب 13 پر مبنی متفرق مشق

1۔ A اور B دو وقوعات ہیں جب کہ $P(A) \neq 0$۔ $P(B|A)$ معلوم کیجیے، اگر

(i) A، B کا ذیلی ٹیسٹ ہے (ii) $A \cap B = \phi$

2۔ ایک جوڑے کے دو بچے ہیں۔

(i) اس کا احتمال معلوم کیجیے کہ دونوں لڑکے ہیں، اگر یہ پہلے ہی سے معلوم ہے کہ ایک لڑکا ہے۔

(ii) اس کا احتمال معلوم کیجیے کہ دونوں لڑکیاں ہیں، اگر یہ پہلے ہی سے معلوم ہے کہ بڑا بچہ لڑکی ہے۔

3۔ یہ مان لیجیے کہ 5% مردوں اور 0.25% عورتوں کے بال سرمئی ہیں۔ ایک سرمئی بالوں والا انسان بلا منصوبہ چنا گیا ہے۔ اس کا کیا احتمال ہے کہ یہ انسان مرد ہے؟ یہ مان لیجیے کہ مرد اور عورتوں کی تعداد برابر ہے۔

4۔ یہ مان لیجیے کہ 90% انسان دائیں ہاتھ سے کام کرتے ہیں۔ اس کا کیا احتمال ہے کہ چنے گئے 10 انسانوں میں بلا منصوبہ چنے گئے 6 انسان دائیں ہاتھ سے کام کرتے ہیں؟

5۔ ایک برتن میں 25 گیندیں ہیں جن میں سے 10 گیندوں پر X کا نشان بنا ہوا ہے اور باقی 15 پر Y کا نشان بنا ہوا ہے۔ برتن میں سے ایک گیند بلا منصوبہ نکالی گئی، اس کا نشان نوٹ کر کے پھر اسے برتن میں واپس ڈال دیا گیا ہے۔ اگر اسی طرح 6 گیندیں نکالی گئی ہیں، تو اس کا احتمال معلوم کیجیے کہ

(i) تمام پر 'X' کا نشان ہوگا۔

(ii) دو سے زیادہ پر 'Y' کا نشان ہوگا۔

(iii) کم سے کم ایک گیند پر 'Y' کا نشان ہوگا۔

(iv) 'X' نشان اور 'Y' نشان والی گیندوں کی تعداد برابر ہوگی۔

© NCERT not to be republished

(iv) 'X' نشان اور 'Y' نشان والی گیندوں کی تعداد برا ہوگی۔

6۔ ایک رکاوٹی دوڑ میں، ایک کھلاڑی کو 10 رکاوٹیں کراس کرنی ہیں۔اس کا $\frac{5}{6}$ احتمال ہے کہ وہ ہر رکاوٹ کو پار کر لے گا اس کا کیا احتمال ہے کہ وہ دو سے کم رکاوٹوں کو گرادے گا؟

7۔ ایک پانسہ کو بار بار اچھالا گیا ہے جب تک تین چھکے حاصل نہیں ہوگئے۔اس کا احتمال معلوم کیجیے کہ تیسرا چھکہ پانسہ کو چھٹی مرتبہ اچھالنے میں حاصل ہوا ہے۔

8۔ اگر ایک لیپ کا سال بلا منصوبہ چنا گیا ہے۔اس کا کیا احتمال ہے کہ اس میں 53 منگل موجود ہیں۔

9۔ ایک تجربہ جتنی بار فیل ہوتا ہے اس سے دوگنی مرتبہ کامیاب ہوتا ہے۔اس کا کیا احتمال ہے کہ اسے اگلی چھ کوششوں میں، کم سے کم 4 مرتبہ کامیابی مل جائے گی۔

10۔ ایک غیر جانب دار سکہ کو ایک آدمی کتنی بار اُچھالے تاکہ کم سے کم ایک ہیڈ حاصل کرنے کا احتمال 90 فی صد سے زیادہ ہو؟

11۔ ایک کھیل میں، ایک آدمی چھ کے لیے ایک روپیہ جیتتا ہے اور کسی دوسرے عدد کے لیے ایک روپیہ کا نقصان اٹھاتا ہے جبکہ ایک غیر جانب دار پانسہ پھینکا گیا ہے۔آدمی یہ تہیہ کرتا ہے کہ وہ پانسہ کو تین مرتبہ اچھالے گا لیکن اسی وقت کھیل کو چھوڑ دے گا جب چھ آجائے گا۔اس کی جیتی ہوئی / ہاری ہوئی رقم کی قدر معلوم کیجیے۔

12۔ مان لیجیے ہمارے پاس چار باکس A، B، C اور D ہیں جن میں رنگین کنچے ہیں ہے جیسا کہ نیچے دیا گیا ہے۔

ڈبہ	سنگ مرمر کا رنگ		
	لال	سفید	کالا
A	1	6	3
B`	6	2	2
C	8	1	1
D	0	6	4

ایک باکس بلا منصوبہ چنا گیا ہے اور اس میں سے اکیلا کنچہ نکالا گیا ہے۔اس کا کیا احتمال ہے کہ یہ باکس A سے نکالا گیا ہے؟ باکس B سے؟ باکس C سے؟

13۔ مان لیجیے کہ ایک مریض کو دل کا دورا پڑنے کے امکانات 40% ہیں۔ یہ بھی مان لیا گیا ہے کہ مراقبہ (Meditation) اور یوگا کا کورس کرنے سے دل کا دورا پڑنے کا خطرہ 30% کم ہو جاتا ہے اور مختلف دواؤں کے استعمال سے یہ امکان 25% کم ہو جاتا ہے۔ بیک وقت مریض دونوں ممکنات میں سے ایک کو چن سکتا ہے۔ جن کا احتمال برابر ہے۔ یہ دیا ہوا ہے کہ دونوں میں سے ایک ممکنات کا استعمال بلا منصوبہ چن کر مریض کو دل کا دورہ پڑ گیا۔ اس کا کیا احتمال ہے کہ مریض نے مراقبہ (Meditation) اور یوگا کا کورس کیا ہوگا؟

14۔ اگر دوسرے درجہ کے مقطعہ کا ہر عنصر صفر یا ایک ہے، اس کا کیا احتمال ہے کہ مقطعہ کی قدر مثبت ہے؟ (یہ مان لیجیے کہ مقطعہ کے الگ اندراج آزادی سے چنے گئے ہیں، ہر ایک قدر $\frac{1}{2}$ احتمال کی مانی گئی ہے۔)

15۔ ایک الیکٹرونک اسمبلی کے مان لیجیے A اور B دو ماتحت نظام ہیں۔ پچھلی جانچ کے طریقوں سے، مان لیا گیا ہے کہ ذیل احتمالات پہلے ہی سے معلوم ہیں۔

P (A فیل ہو جاتا ہے) = 0.2

P (B اکیلا فیل ہو جاتا ہے) = 0.15

P (A اور B فیل ہو جاتے ہیں) = 0.15

ذیل احتمالات کی قدر معلوم کیجیے۔

(i) P (A اکیلا فیل ہو جاتا ہے) (ii) P (A فیل ہو جاتا ہے | B پہلے ہی فیل ہو چکا ہے)

16۔ بیگ I میں 3 لال اور 4 کالی گیندیں ہیں اور بیگ II میں 4 لال اور 5 کالی گیندیں ہیں۔ ایک گیند بیگ I سے بیگ II میں منتقل کی گئی ہے اور پھر ایک گیند بیگ II سے نکالی گئی ہے۔ نکالی گئی گیند لال رنگ کی پائی گئی ہے۔ اس کا احتمالات معلوم کیجیے۔ منتقل کی گئی گیند کالی ہے۔

ذیل ہر ایک میں صحیح جوابات کا انتخاب کیجیے۔

17۔ A اور B دو وقوعات ہیں تا کہ $P(A) \neq 0$ اور $P(B \mid A) = 1$ ہے، تب

(A) $A \subset B$ (B) $B \subset A$ (C) $B = \phi$ (D) $A = \phi$

18۔ اگر $P(A|B) > P(A)$ ہے، تب ذیل میں کون سا صحیح ہے۔

(A) $P(B|A) < P(B)$ (B) $P(A \cap B) < P(A) \cdot P(B)$

(C) $P(B|A) > P(B)$ (D) $P(B|A) = P(B)$

19۔ اگر A اور B دو وقوعات ہیں تا کہ $P(A) + P(B) - P(A \text{ and } B) = P(A)$ ہو، تب

(A) $P(B|A) = 1$ (B) $P(A|B) = 1$

(C) $P(B|A) = 0$ (D) $P(A|B) = 0$

خلاصہ

باب کے خاص مقاصد یہ ہیں —

- ایک وقوعہ E کا مشروط احتمال، جبکہ واقعہ F کی وقوع دی ہوئی ہے $P(E|F)$ سے دی گئی ہے۔

$$P(E|F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} \neq 0$$

- $0 \leq P(E|F) \leq 1, \quad P(E'|F) = 1 - P(E|F)$

$P((E \cup F)|G) = P(E|G) + P(F|G) - P((E \cap F)|G)$

- $P(E \cap F) = P(E)\, P(F|E),\ P(E) \neq 0$

$P(E \cap F) = P(F)\, P(E|F),\ P(F) \neq 0$

- اگر E اور F غیر تابع ہیں، تب

$P(E \cap F) = P(E)\, P(F)$

$P(E|F) = P(E),\ P(F) \neq 0$

$P(F|E) = P(F),\ P(E) \neq 0$

- **مکمل احتمال کا مسئلہ**

مان لیجیے کہ $\{E_1, E_2, ..., E_n\}$ سیمپل فضا کا بٹاؤ ہے اور مان لیجیے کہ ہر ایک غیر صفر احتمال رکھتا ہے۔ مان لیجیے A کوئی بھی S کے ساتھ جڑا ہوا وقوعہ ہے، تب

$P(A) = P(E_1)\, P(A|E_1) + P(E_2)\, P(A|E_2) + ... + P(E_n)\, P(A|E_n)$

- **بائیس کا مسئلہ** اگر $E_1, E_2, ..., E_n$ وقوعات ہیں جو کہ سیمپل فضا S کا بٹوارہ کرتے ہیں، یعنی $E_1, E_2, ..., E_n$

© NCERT not to be republished

جوڑوں کے حساب سے غیر مشترک ہیں اور $E_1 4, E_2 4, \ldots 4 E_n = S$ ہے اور A کوئی غیر صفر احتمالی کے ساتھ وقوعہ ہے، تب

$$P(E_i \mid A) = \frac{P(E_i)P(A|E_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(E_j)P(A|E_j)}$$

- ایک بلامنصوبہ متغیر ایک حقیقی قدر والا تفاعل ہے جس کا علاقہ ایک بلامنصوبہ تجربہ کی سیمپل فضا ہے۔
- ایک بلامنصوبہ متغیر X کا احتمالی بٹاؤ اعداد کا نظام ہے۔

$$X : \quad x_1 \quad x_2 \quad \ldots \quad x_n$$

$$P(X) : \quad p_n \quad p_n \quad \ldots \quad p_n$$

جہاں $p_i > 0, \ \sum_{i=1}^{n} p_i = 1, \ i = 1, 2, \ldots, n$

- مان لیجیے X ایک بلامنصوبہ متغیر ہے جس کی ممکن قدریں $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ بالترتیب احتمالات $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ کے ساتھ واقع ہوتی ہیں۔ X کا درمیانہ، جو کہ μ سے ظاہر کیا جاتا ہے $\sum_{i=1}^{n} x_i p_i$ عدد ہے۔

بلامنصوبہ متغیر X کا درمیانہ X کی امید (Expectation) بھی کہلاتا ہے، جسے E(x) سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

- مان لیجیے X ایک بلامنصوبہ متغیر ہے جس کی ممکن قدریں $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ بالترتیب احتمالیوں $p(x_1), p(x_2), \ldots, p(x_n)$ کے ساتھ واقع ہوتی ہیں۔

مان لیجیے X ایک بلامنصوبہ متغیر ہے جس کی ممکن قدریں $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ بالترتیب احتمالات $p(x_1), p(x_2), \ldots p(x_n)$ بیان کی گئی ہے۔

$$\sigma_x^2 \text{ یا } \mathrm{Var}(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 p(x_i)$$

اور برابری کے طور پر $\sigma_x^2 = E(X - \mu)^2$

غیر منفی عدد $\sigma_x = \sqrt{\mathrm{Var}(X)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 p(x_i)}$

بلامنصوبہ X کا معیاری انحراف (S.D) کہلاتا ہے۔

© NCERT not to be republished

- $\text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$
- ایک بلا منصوبہ تجربہ کی (کوشش) برنولی کی کوشش کہلاتی ہے، اگر وہ ذیل شرطوں کو مطمئن کرے۔
  (i) (کوشش) کی تعداد محدود ہونی چاہیے۔
  (ii) کوشش آزاد ہونی چاہیے۔
  (iii) ہر کوشش کے دو نتائج ہوتے ہیں: کامیابی یا ناکامیابی
  (iv) ہر ایک کوشش میں کامیابی کا احتمال یکساں رہتا ہے۔

دورکنی بٹاؤ کے لیے $B(n, p), P(X = x) = {}^nC_x\, q^{n-x} p^x, x = 0, 1, \ldots, n\ (q = 1 - p)$

تاریخ کے اوراق

پانسہ کے کھیل میں امیروں کو ناپنے کا شروعاتی اظہار 1477 میں ڈنٹے ڈیئون کے مزاحیہ بحث میں ظاہر ہوا۔ جوئے پر ایک مضمون جس کا نام لائیبر ڈی لیڈو والا سے ہے، جرونیمو کارڈن (Geronimo Carden) نے (1501-1576) میں شائع ہوا تھا جو کہ اپنے والد کے انتقال کے بعد 1663 میں پیدا ہوا تھا۔ اس مضمون میں ہر واقعہ کے لیے ان کے مطابق کیسوں کی تعداد دیتا ہے جب دو پانسہ اچھالے گئے ہوں۔

گلیلیو (1564-1642) نے تین پانسوں کے ایک کھیل میں عام ریمارک د جن کا واسطہ موقع کی صحیح قیمت کا اندازہ لگانا تھا۔ گلیلیو نے یہ نچوڑ نکالا کہ جب تین پانسہ پھینکے گئے ہیں، ان پانسوں پر ظاہر ہونے والے اعداد کا مجموعہ زیادہ امید ہے کہ 10 ہوگا بجائے مجموعہ 9 کے، کیونکہ 10 کی طرف داری کرنے والے کیسوں کی تعداد 9 کی طرف داری کرنے والے کیسوں کی تعداد سے زیادہ ہے۔

ان پہلی معلومات کے علاوہ، عام طور سے یہ مانا جاتا ہے کہ احتمال کی سائنس کی صحیح شروعات سترھویں صدی میں دو اعلیٰ آدمیوں پاسکل (Pascal) (1623-1662) اور پیرے ڈی فرمیٹ (Pierre de Fermat) کے درمیان خط و کتابت میں واقع ہے۔ فرانس کے ایک جواری چیویلر ڈی میٹرے (Chevalier de Metre) نے پاسکل سے دریافت کیا کہ اسے بتایا جائے کہ اس کی وجوہات کے نظریہ اور جوئے سے جمع کی گئی مشاہدات میں کچھ دکھائی دینے والا کیا مختلف ہے۔ 1654 کے ارد گرد لکھی گئی ہے خطوں کی ایک سلسلے میں پاسکل اور فرٹ نے احتمال کی سائنس کی پہلی

© NCERT not to be republished

بنیاد رکھی تھی۔ پاسکل نے مسئلوں کا حل الجبرا کے طریقے سے کیا جبکہ فرمیٹ نے اجتماعی طریقہ کا استعمال کیا تھا۔

ہولینڈ کے اعلیٰ سائنس داں ہوجنس (Huygens)(1629-1665) پاسکل اور فرمیٹ کے درمیان ہوئی مراسلات کے ذخیرے سے وابستہ ہوا اور احتمال پر پہلی کتاب "De Ratiociniis in Ludo Aleae" شائع کی جس میں بہت سے دلچسپ مسئلوں کے حل ہیں اس کے بجائے کہ کھیلوں میں مواقع کا احتمال مشکل مسئلوں کے لیے معلوم کیا جائے۔

اس کے بعد احتمال کے نظریہ پر اعلیٰ کام جیکب برنولی (1654-1705) Jacob Bernoulli کی ایک اعلیٰ کتاب "Ars Conjectendi" کی شکل میں 1713 میں ان کے مرنے کے بعد ان کے بھتیجے Nicholes Bernoulli نے شائع کرائی۔ ان ہی کے نام پر ایک بہت اہم احتمال کا بٹوارہ جسے ہم دور کی بٹوارہ کہتے بھی ہیں ابھی باقی ہے۔ اس کے آگے احتمال پر بہت اہم کام 1993 میں اے۔ این۔ کول گورو A. N. Kolmogorov (1903-1987) نے کیا جو کہ احتمال کے بعد ہی نظریہ کے ساتھ وقوع میں ہے اس کی کتاب، احتمال کی بنیاد 1993 (Foundations of probability) میں شائع ہوئی، جس نے احتمال کا ایک سیٹ فنکشن کے طور پر متعارف کرایا اور جسے 'پہلی قطار کا کام' سمجھا جاتا ہے۔