ষষ্ঠ অধ্যায়

বিচ্যুতি বা প্ৰসাৰৰ মাপ (Measures of Dispersion)

এই অধ্যায়ৰ অধ্যয়নে তোমাক জানিবলৈ দিব ঃ

- গড়ৰ সীমাবদ্ধতাসমূহ;
- প্ৰসাৰৰ মাপৰ প্ৰয়োজনীয়তা উপলব্ধি;
- প্ৰসাৰৰ বিভিন্ন মাপৰ বৰ্ণনা;
- মাপ বা জোখ নিৰূপণ কৰা আৰু তুলনা কৰা;
- সম্পূৰ্ণ বা পৰম (Absolute) আৰু আপেক্ষিক (Relative) জোখৰ পাৰ্থক্য নিৰ্দ্ধাৰণ।

1. সূচনা

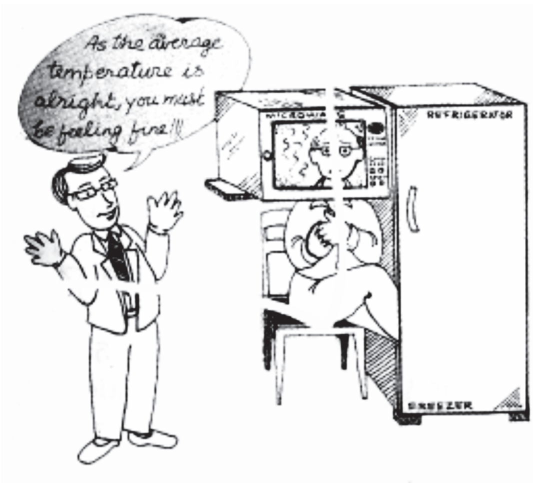
ইয়াৰ আগৰ অধ্যায়ত তোমালোকে এক নিৰ্দিষ্ট প্ৰতিনিধিত্বমূলক মানৰ দ্বাৰা কেনেকৈ তথ্যৰ সংক্ষিপ্তকৰণ কৰিব পাৰি সেই বিষয়ে অধ্যয়ন কৰিছা। যি কি নহওক, সেই মানটোৱে তথ্যৰাশিসমূহৰ মাজত থকা বিভিন্নতাৰ আভাস নিদিয়ে। এই অধ্যায়ত তোমালোকে তথ্য সমূহৰ বিভিন্নতাৰ পৰিমাণগত জোখৰ বিষয়ে শিকিবা। তিনিজন বন্ধু ৰাম, ৰহিম আৰু মাৰিয়াই চাহৰ কাপ হাতত লৈ আলাপ কৰি আছে। তেওঁলোকে কথা-বতৰা পাতি থাকোঁতে পৰিয়ালৰ আয়ৰ বিষয়ে আলোচনা আৰম্ভ কৰিলে। ৰামে ক'লে যে তেওঁলোকৰ চাৰিজনীয়া পৰিয়ালৰ গড় আয় হ'ল 15,000 টকা। ৰহিমে ক'লে যে তেওঁলোকৰ গড় আয় একে সমান যদিও পৰিয়ালৰ সদস্য সংখ্যা ছয়জন। মাৰিয়াই ক'লে যে তেওঁলোকৰ পৰিয়ালত পাঁচজন সদস্য, তাৰে ভিতৰত এজনে কাম নকৰে। তেওঁ গণনা কৰি ক'লে যে তেওঁলোকৰ পৰিয়ালৰ গড় আয়ো 15,000 টকা। এই কথা শুনি তেওঁলোক অলপ আচৰিত হ'ল কাৰণ তেওঁলোকে জানে যে মাৰিয়াৰ দেউতাকে যথেষ্ট টকা উপাৰ্জন কৰে। বিতংভাৱে অনুসন্ধান কৰি তেওঁলোকে তলত দিয়া তথ্যখিনি সংগ্ৰহ কৰিলে ঃ

পৰিয়ালৰ আয়

ক্ৰমিক নং	ৰাম	ৰহিম	মাৰিয়া
1.	12,000	7,000	0
2.	14,000	10,000	7,000
3.	16,000	14,000	8,000
4.	18,000	17,000	10,000
5.	–	20,000	50,000
6.	–	22,000	–
মুঠ আয়	60,000	90,000	75,000
গড় আয়	15,000	15,000	15,000

যদিও গড় আয় সমান, ব্যক্তিগত আয়ৰ মাজত যথেষ্ট পাৰ্থক্য থকাটো লক্ষ্য কৰিলানে? এইটো সহজেই বুজা যায় যে গড় বা মাধ্যই তথ্য বিতৰণৰ মাত্ৰ এটা দিশৰ কথাহে আমাক জনায়, সেইটো হৈছে প্ৰতিনিধিত্বমূলক মান। তথ্য বিতৰণ সম্পৰ্কে ভালকৈ জানিবলৈ তথ্যৰ প্ৰসাৰ জনাটোও আৱশ্যক।

ৰামৰ পৰিয়ালত আয়ৰ পাৰ্থক্য তুলনামূলকভাৱে কম। ৰহিমৰ পৰিয়ালত আয়ৰ পাৰ্থক্য বেছি আৰু মাৰিয়াৰ পৰিয়ালত আটাইতকৈ বেছি। কেৱল মাত্ৰ গড় বা মাধ্যৰ জ্ঞান পৰ্যাপ্ত নহয়।



তথ্য বিতৰণ সম্পৰ্কে তোমাৰ জ্ঞান বঢ়াব আন এটা মানে যিয়ে তথ্যৰ তাৰতম্যৰ পৰিমাণ প্ৰতিফলিত কৰে। উদাহৰণ স্বৰূপে, জনমূৰি আয়ে কেৱল গড় আয়হে দেখুৱায়। প্ৰসাৰৰ মাপে (measure of dispersion) আয়ৰ অসমতাৰ বিষয়ে জনায়। ইয়াৰ ফলত তোমাৰ সমাজৰ বিভিন্ন শ্ৰেণীয়ে উপভোগ কৰা আপেক্ষিক জীৱন ধাৰণৰ মানদণ্ডৰ জ্ঞান বৃদ্ধি পাব।

কোনো তথ্যৰ বিতৰণত তথ্যৰ মানসমূহ গড়ৰ পৰা কিমান দূৰত তাৰ জোখেই হৈছে প্ৰসাৰ বা বিচ্যুতি।

তথ্যৰ তাৰতম্যৰ পৰিমাণ জুখিবলৈ ব্যৱহাৰ কৰা কেইটামান জোখ হৈছেঃ

(i) পৰিসৰ বা বিস্তাৰ (Range)

(ii) চতুৰ্থক বিচলন (Quartile Deviation)

(iii) গড় বিচলন (Mean Deviation)

(iv) মানক বিচলন (Standard Deviation)

এই জোখসমূহে আগবঢ়োৱা সাংখ্যিক মানৰ উপৰিও লেখৰ সহায়তো প্ৰসাৰ বা বিচ্যুতিৰ মাপ নিৰূপণ কৰিব পাৰি।

পৰিসৰ আৰু চতুৰ্থক বিচলনে তথ্যৰাশিৰ মানসমূহ কিমান দূৰত্বৰ ভিতৰত বিস্তাৰিত হৈ আছে তাক গণনা কৰি প্ৰসাৰৰ মাপ লয়। গড় বিচলন আৰু মানক বিচলনে মাধ্য বা গড়ৰ পৰা তথ্যৰাশিসমূহৰ মানৰ কিমান পাৰ্থক্য সেইটো নিৰূপণ কৰে।

2. মানৰ প্ৰসাৰণৰ ওপৰত ভিত্তি কৰা জোখ

পৰিসৰ বা বিস্তাৰ (Range)

কোনো তথ্যৰাশিৰ আটাইতকৈ ডাঙৰ (L) আৰু সবাতোকৈ সৰু (S) মান দুটাৰ পাৰ্থক্যই হৈছে পৰিসৰ বা বিস্তাৰ (R)

গতিকে, $R = L - S$

পৰিসৰৰ উচ্চ মানে অধিক প্ৰসাৰ আৰু নিম্ন মানে কম প্ৰসাৰ বুজায়।

কাৰ্যাৱলী

তলত দিয়া মানসমূহ লক্ষ্য কৰা

20, 30, 40, 50, 200

- পৰিসৰ বা বিস্তাৰ নিৰূপণ কৰা।
- তথ্যৰ সংহতিত 200 নাথাকিলে পৰিসৰ কিমান হ'ব?
- 50 ৰ সলনি যদি 150 হয়, তেতিয়া পৰিসৰ কিমান হ'ব?

পৰিসৰ ঃ মন্তব্য

চৰম মানৰ দ্বাৰা পৰিসৰ অত্যাধিক প্ৰভাৱিত হয়। সকলো মানৰ ওপৰত ই নিৰ্ভৰ নকৰে। যেতিয়ালৈ তথ্যৰ সৰ্বোচ্চ আৰু সৰ্বনিম্ন মান অপৰিৱৰ্তনীয় হৈ থাকে, আন মানবোৰ সলনি হ'লেও পৰিসৰ প্ৰভাৱিত নহয়। মুক্ত শ্ৰেণী বিভাগ (open ended) থকা বাৰংবাৰতা বিভাজনৰ বাবে পৰিসৰ নিৰূপণ কৰিব নোৱাৰি।

কিছুমান সীমাবদ্ধতা থকা সত্বেও, পৰিসৰৰ সৰলতাৰ বাবে ইয়াক সহজে বুজি পোৱা যায় আৰু সঘনাই ব্যৱহাৰ কৰা হয়। উদাহৰণস্বৰূপে, দূৰদৰ্শনৰ পৰ্দাত (TV Screen) প্ৰতিদিনে বিভিন্ন মহানগৰৰ সৰ্বোচ্চ আৰু সৰ্বনিম্ন তাপমাত্ৰা দেখা পাও আৰু তাৰ পৰাই তাপমাত্ৰাৰ তাৰতম্যৰ বিষয়ে সিদ্ধান্ত ল'ব পাৰোঁ।

যি বিভাজনত নিম্ন শ্ৰেণীবিভাগৰ নিম্নসীমা বা উচ্চ শ্ৰেণী বিভাগৰ উচ্চসীমা বা দুয়োটাই নিশ্চিত (Specified) নহয় তেনে বিভাজনক মুক্ত বিভাজন (Open-ended) বোলা হয়।

কাৰ্যাৱলী

- এখন বাতৰি কাকতৰ পৰা প্ৰায় ৫২ সপ্তাহৰ উচ্চ / নিম্ন ১০টা অংশ (share)ৰ তথ্য সংগ্ৰহ কৰা। অংশৰ দাম (share price)ৰ পৰিসৰ নিৰূপণ কৰা। কোন কোম্পানীৰ অংশ (stock) আটাইতকৈ অস্থিৰ আৰু কাৰ আটাইতকৈ সুস্থিৰ?

চতুৰ্থক বিচলন (Quartile Deviation)

তথ্য বিভাজনত থকা এটা মাত্ৰ অত্যাধিক ডাঙৰ বা সৰু মানে প্ৰসাৰৰ মাপ হিচাপে পৰিসৰৰ উপযোগিতা হ্ৰাস কৰে। গতিকে দূৰত থকা মানৰ (outliers) দ্বাৰা অত্যধিকভাৱে প্ৰভাৱিত নোহোৱা জোখৰ আৱশ্যক হ'ব।

এনে পৰিস্থিতিত গোটেই তথ্যৰাশিক যদি 25% ভাগ তথ্য থকাকৈ চাৰিটা সমান ভাগত ভগোৱা হয় তেতিয়া আমি চতুৰ্থক আৰু মধ্যমাৰ মান পাওঁ। (পঞ্চম অধ্যায়ত এই বিষয়ে পঢ়িছা)

উচ্চ আৰু নিম্ন চতুৰ্থক (যথাক্ৰমে Q_3 আৰু Q_1) আন্তঃচতুৰ্থক পৰিসৰ (Inter Quartile Range) অৰ্থাৎ $Q_3 - Q_1$ নিৰূপণ কৰিবলৈ ব্যৱহাৰ কৰা হয়।

আন্তঃ চতুৰ্থক পৰিসৰ তথ্যৰাশিৰ মাজৰ 50% মানৰ ওপৰত নিৰ্ভৰ কৰে আৰু সেয়েহে চৰম মানৰ দ্বাৰা প্ৰভাৱিত নহয়। আন্তঃ চতুৰ্থক পৰিসৰৰ আধাক (half) চতুৰ্থক বিচলন বুলি কোৱা হয়। গতিকে, চতুৰ্থক বিচলন

$$(Q.D.) = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$$

চতুৰ্থক বিচলনক (Q.D.) সেয়েহে অৰ্ধআন্তঃ চতুৰ্থক পৰিসৰ বুলিও কোৱা হয়।

অসমূহিত (Ungrouped) তথ্যৰ বাবে পৰিসৰ আৰু চতুৰ্থক বিচলন নিৰূপণ

উদাহৰণ 1

তলত দিয়া তথ্যৰাশিৰ পৰা পৰিসৰ আৰু চতুৰ্থক বিচলন নিৰূপণ কৰা ঃ

20, 25, 29, 30, 35, 39, 41, 48, 51, 60 আৰু 70

পৰিসৰ = 70-20 = 50

চতুৰ্থক বিচলন নিৰূপণ কৰিবলৈ আমি Q_3 আৰু Q_1 উলিয়াব লাগিব।

Q_1 হ'ল $\frac{n+1}{4}$ তম ৰাশিৰ মান।

যিহেতু $n=11$, Q_1 তৃতীয় ৰাশিৰ মান হ'ব।
ইতিমধ্যে তথ্যসমূহ উৰ্দ্ধমুখী ক্ৰমত থকা বাবে Q_1 হ'ব 29।
[তথ্যসমূহ যদি ক্ৰমত নাথাকে তুমি কি কৰিবা?]

একেদৰে Q_3 হ'ল $\frac{3(n+1)}{4}$ তম ৰাশিৰ মান। অৰ্থাৎ নৱম তথ্যৰ মান যিটো হ'ব 51। গতিকে $Q_3 = 51$।

চতুৰ্থক বিচলন (Q.D.) $= \frac{Q_3 - Q_1}{2} = \frac{51-29}{2} = 11$

চতুৰ্থক বিচলন যে চতুৰ্থাংশকৰ (Quartiles) মধ্যমাৰ পৰা লোৱা গড় পাৰ্থক্য সেইটো লক্ষ্য কৰিলানে?

কাৰ্যাৱলী

- মধ্যমা নিৰূপণ কৰি ওপৰৰ কথাখিনি সত্য হয় নে নহয় পৰীক্ষা কৰা।

বাৰংবাৰতা বিভাজনৰ বাবে পৰিসৰ আৰু চতুৰ্থক বিচলন নিৰূপণ

উদাহৰণ 2

তলত দিয়া কোনো এটা শ্ৰেণীৰ 40 জন ছাত্ৰ-ছাত্ৰীয়ে লাভ কৰা নম্বৰৰ তালিকাৰ পৰা পৰিসৰ আৰু চতুৰ্থক বিচলন নিৰূপণ কৰা।

তালিকা 6.1

শ্ৰেণী বিভাগ C.I.	ছাত্ৰ-ছাত্ৰীৰ সংখ্যা (f)
0-10	5
10-20	8
20-40	16
40-60	7
60-90	4
	40

পৰিসৰ হ'ল আটাইতকৈ উচ্চ শ্ৰেণী বিভাগৰ উচ্চসীমা আৰু সবাতোকৈ নিম্ন শ্ৰেণী বিভাগৰ নিম্নসীমাৰ পাৰ্থক্য। এতেকে, পৰিসৰ হ'ব 90-0 = 90। চতুৰ্থক বিচলন নিৰূপণ কৰিবলৈ প্ৰথমতে তলত দেখুওৱাৰ দৰে সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতা নিৰ্ণয় কৰিব লাগিব ঃ

শ্ৰেণী বিভাগ C.I.	বাৰংবাৰতা f	সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতা c.f.
0-10	5	05
10-20	8	13
20-40	16	29
40-60	7	36
60-90	4	40
	n= 40	

অবিচ্ছিন্ন শ্ৰেণীত Q_1 হ'ব $\frac{n}{4}$ তম ৰাশিৰ মান। সেয়েহে ই 10তম ৰাশিৰ মান হ'ব। 10তম মান থকা শ্ৰেণী বিভাগটো 10-20। গতিকে Q_1, 10-20 শ্ৰেণী বিভাগত থাকিব। এতিয়া Q_1 নিৰূপণ কৰিবলৈ তলত দিয়া সূত্ৰটো ব্যৱহাৰ কৰা হয় ঃ

$$Q_1 = L + \frac{\frac{n}{4} - c.f.}{f} \times i$$

য'ত $L = 10$ (চতুৰ্থক থকা শ্ৰেণীৰ নিম্ন সীমা)
$c.f = 5$ (চতুৰ্থক থকা শ্ৰেণীৰ পূৰ্বৰ শ্ৰেণীৰ সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতা)
$i = 10$ (চতুৰ্থক শ্ৰেণীৰ অন্তৰাল)
$f = 8$ (চতুৰ্থক শ্ৰেণীৰ বাৰংবাৰতা)

গতিকে, $Q_1 = 10 + \frac{10-5}{8} \times 10 = 16.25$

একেদৰে Q_3 হ'ব $\frac{3n}{4}$ তম ৰাশিৰ মান অৰ্থাৎ 30তম ৰাশিৰ মান যিটো 40-60 শ্ৰেণী বিভাগত থাকিব। এতিয়া Q_3 নিৰূপণ কৰিবলৈ তলত দিয়া সূত্ৰটো ব্যৱহাৰ কৰা হ'ব ঃ

$$Q_3 = L + \frac{\frac{3n}{4} - c.f.}{f} \times i$$

$$Q_3 = 40 + \frac{30-29}{7} \times 20$$

$$Q_3 = 42.87$$

$$Q.D. = \frac{42.87\text{-}16.25}{2} = 13.31$$

বিশিষ্ট বা স্বকীয় আৰু বিচ্ছিন্ন শ্ৰেণীৰ ক্ষেত্ৰত Q_1 হ'ব $\frac{n+1}{4}$ তম ৰাশিৰ মান, কিন্তু অবিচ্ছিন্ন শ্ৰেণীৰ ক্ষেত্ৰত Q_1 হ'ব $\frac{n}{4}$ তম ৰাশিৰ মান। একেদৰে, Q_3 আৰু মধ্যমা নিৰূপণ কৰিবলৈও, (n+1)ৰ সলনি n ব্যৱহাৰ কৰা হয়।

গোটেই সমষ্টিটো যদি দুটা সমান অংশত ভাগ কৰা হয় আৰু প্ৰতিটো অংশৰ পৰা মধ্যমা নিৰূপণ কৰা হয়, তেতিয়া বেছি ভাল আৰু দুৰ্বল ছাত্ৰ-ছাত্ৰীৰ মধ্যমা পোৱা যাব। এই মধ্যমা দুটা গোটেই সমষ্টিটোৰ মধ্যমাতকৈ গড় হিচাপে 13.31 কৈ বেলেগ হ'ব। একেদৰে, ধৰি লোৱা হ'ল, এখন নগৰৰ জনসাধাৰণৰ আয়ৰ তথ্য তোমাৰ আছে। সকলো মানুহৰ আয়ৰ মধ্যমা নিৰূপণ কৰিব পৰা যাব। এতিয়া সকলোখিনি মানুহক যদি দুটা সমান ভাগত ধনী আৰু দুখীয়া হিচাপে ভগোৱা হয়, দুয়োটা ভাগৰ বাবে মধ্যমা নিৰূপণ কৰিব পৰা যাব। ধনী আৰু দুখীয়া দুয়োটা ভাগৰ মধ্যমা আৰু সকলোখিনি মানুহৰ মধ্যমাৰ পাৰ্থক্যৰ গড় চতুৰ্থক বিচলনে দিব।

চতুৰ্থক বিচলন সাধাৰণতে মুক্ত শ্ৰেণী-বিভাজনৰ বাবে নিৰূপণ কৰিব পৰা যায় আৰু চৰম মানৰ দ্বাৰা ই অত্যধিকভাৱে প্ৰভাৱিত নহয়।

3. গড়ৰ পৰা লোৱা বিচলনৰ জোখ

মনত পেলাবলৈ চেষ্টা কৰা যে বিচলন হৈছে তথ্যৰাশিৰ মানসমূহ আৰু গড় বা মাধ্যৰ পাৰ্থক্য। গড় বা মাধ্যৰ পৰা মানসমূহৰ দূৰত্বৰ পৰিসৰ আৰু চতুৰ্থক বিচলনে নিৰূপণ কৰিব নিবিচাৰে। তথাপিও মানসমূহৰ প্ৰসাৰতা নিৰ্ণয় কৰি এই দুয়োটা জোখে বিচলন সম্পৰ্কে এটা ভাল আভাস দিয়ে। গড় বিচলন আৰু মানক বিচলন তথ্যৰাশিসমূহৰ মাধ্যৰ পৰা নিৰূপণ কৰা বিচলনৰ ভিত্তিত প্ৰতিষ্ঠিত।

যিহেতু গড় বা মাধ্য এটা কেন্দ্ৰীয় মান, কিছুমান বিচলন যোগাত্মক আৰু কিছুমান ঋণাত্মক হয়। এইবোৰ যদি সাধাৰণভাৱে যোগ কৰা হয় এই যোগফলে কোনো কথা প্ৰকট (reveal) নকৰিব। দৰাচলতে, গড়ৰ পৰা লোৱা বিচলনৰ যোগফল সদায় শূন্য হ'ব। তলত দিয়া তথ্যৰ সংহতি দুটা লক্ষ্য কৰা।

সংহতি A : 5, 9, 16

সংহতি B : 1, 9, 20

ওপৰৰ তথ্যখিনিৰ পৰা দেখা যায় যে B সংহতিৰ মানবোৰ গড় বা মাধ্যৰ পৰা অধিক দূৰত বাবে A সংহতিৰ মানতকৈ বেছি বিস্তাৰিত। গাণিতিক মাধ্যৰ পৰা তথ্যসমূহৰ বিচলন নিৰূপণ কৰি যোগফল উলিওৱা। কি লক্ষ্য কৰিছা? মধ্যমাৰ সৈতে একে প্ৰক্ৰিয়াৰ পুনৰাবৃত্তি কৰা। নিৰূপণ কৰা মানৰ পৰা তাৰতম্যৰ পৰিমাণৰ ওপৰত মন্তব্য আগবঢ়াব পাৰিবানে?

সকলো বিচলনকে যোগাত্মক বুলি ধৰি লৈ (ঋণাত্মক বিচলন আওকাণ কৰি) গড় বিচলনে (Mean Deviation) এই সমস্যা আঁতৰাব বিচাৰিছে। মানক বিচলনৰ (Standard Deviation) ক্ষেত্ৰত প্ৰথমে বিচলনসমূহ বৰ্গীকৰণ কৰি তাৰ গড় নিৰ্ণয় কৰা হয়। তাৰ পিছত এই গড়ৰ বৰ্গমূল নিৰূপণ কৰা হয়। আমি এতিয়া পৃথকভাৱে ইয়াৰ বিতং আলোচনা আগবঢ়াম।

গড় বিচলন (Mean Deviation)

ধৰি লোৱা হ'ল এটা পথত একাদিক্ৰমে থকা পাঁচখন নগৰ A, B, C, D আৰু E ৰ ছাত্ৰ-ছাত্ৰীসমূহৰ বাবে এখন মহাবিদ্যালয় স্থাপন কৰিব বিচৰা হৈছে। তলত A নগৰৰ পৰা আন কেইখন নগৰলৈ দূৰত্ব (কিলোমিটাৰত) আৰু নগৰকেইখনৰ ছাত্ৰ-ছাত্ৰীৰ সংখ্যা দিয়া হৈছে।

নগৰ	A নগৰৰ পৰা দূৰত্ব	ছাত্ৰ-ছাত্ৰীৰ সংখ্যা
A	0	90
B	2	150
C	6	100
D	14	200
E	18	80
		620

এতিয়া, মহাবিদ্যালয়খন যদি A নগৰত স্থাপন কৰা হয়, B নগৰৰ 150 জন ছাত্ৰী-ছাত্ৰীয়ে প্ৰত্যেকে 2 কিলোমিটাৰকৈ (মুঠ 300 কিঃমিঃ) অতিক্ৰম কৰিহে মহাবিদ্যালয় পাব। এনে এটা স্থান নিৰ্বাচন কৰিব লাগিব যাতে ছাত্ৰ-ছাত্ৰীসকলে অতি কম দূৰত্ব অতিক্ৰম কৰি মহাবিদ্যালয় পাব পাৰে।

তোমালোকে হয়তো উপলব্ধি কৰিব পাৰিছা যে মহাবিদ্যালয়খন যদি A বা E নগৰত স্থাপন কৰা হয় গড় হিচাপে ছাত্ৰ-ছাত্ৰীসকলে বেছি দূৰত্ব অতিক্ৰম কৰিব লাগিব। আনহাতে, মহাবিদ্যালয়খন যদি কোনো মধ্যম স্থানত স্থাপন কৰা হয় তেওঁলোকে হয়তো কম দূৰত্ব অতিক্ৰম কৰিব লাগিব। অতিক্ৰম কৰা গড় দূৰত্ব গড় বিচলনৰ দ্বাৰা নিৰূপণ কৰা হয়। গড় বিচলন হৈছে তথ্যৰ মানসমূহৰ গড়ৰ পৰা উলিওৱা পাৰ্থক্যৰ গাণিতিক মাধ্য। গড় মান গাণিতিক মাধ্য বা মধ্যমাও হ'ব পাৰে।

(যিহেতু বহুলক সুস্থিৰ গড় (average) নহয়, সেয়েহে গড় বিচলন নিৰূপণ কৰোঁতে ইয়াক ব্যৱহাৰ কৰা নহয়।)

কাৰ্যাৱলী

- মহাবিদ্যালয়খন যদি A বা C বা E নগৰত অৱস্থিত হয়, তেতিয়া ছাত্ৰ-ছাত্ৰীসকলে অতিক্ৰম কৰিব লগীয়া মুঠ দূৰত্ব নিৰূপণ কৰা। ই যদি A আৰু E নগৰৰ একেবাৰে মাজত অৱস্থিত হয়, তেতিয়া দূৰত্ব কিমান হ'ব?
- যদি প্ৰতিখন নগৰত এজন ছাত্ৰ/ছাত্ৰী থাকে তেতিয়া তোমাৰ মতে মহাবিদ্যালয়খন ক'ত স্থাপন কৰা উচিত হ'ব। এইক্ষেত্ৰত তোমাৰ উত্তৰ সলনি হ'বনে?

অসমূহিত তথ্যৰ বাবে গাণিতিক মাধ্যৰ পৰা নিৰূপণ কৰা গড় বিচলন

প্ৰত্যক্ষ পদ্ধতি

স্তৰসমূহ ঃ

(i) তথ্যৰ মানসমূহৰ গাণিতিক মাধ্য নিৰূপণ কৰা হয়।

(ii) প্ৰতিটো তথ্যৰ মান আৰু গাণিতিক মাধ্যৰ মাজৰ পাৰ্থক্য নিৰূপণ কৰা হয়।
সকলো পাৰ্থক্য যোগাত্মক বুলি ধৰা হয়। ইয়াক |d| ৰে চিহ্নিত কৰা হয়।

(iii) এই পাৰ্থক্যসমূহৰ (বিচলন বোলা হয়) গাণিতিক মাধ্যই হৈছে গড় বিচলন।

অৰ্থাৎ গড় বিচলন, $M.D = \frac{\Sigma |d|}{n}$

উদাহৰণ 3

তলত দিয়া তথ্যসমূহৰ গড় বিচলন নিৰূপণ কৰা 2, 4, 7, 8 আৰু 9

গাণিতিক মাধ্য (A.M.) $= \frac{\Sigma X}{n} = 6$

X	|d|
2	4
4	2
7	1
8	2
9	3
	12

গড় বিচলন $M.D._{(\bar{X})} = \frac{12}{5} = 2.4$

অনুমিত গড় পদ্ধতি

অনুমিত গড়ৰ পৰা বিচলন উলিয়াই লৈও গড় বিচলন নিৰূপণ কৰিব পাৰি। প্ৰকৃত গড় যদি ভগ্নাংশ হয় তেতিয়া বিশেষভাৱে এই পদ্ধতি ব্যৱহাৰ কৰা হয়। (সাৱধান হ'ব লাগিব যাতে অনুমিত গড় প্ৰকৃত গড়ৰ নিকট হয়)।

ধৰি লোৱা হ'ল যে উদাহৰণ 3ত দিয়া মানসমূহৰ পৰা অনুমিত গড় হিচাপে 7 লোৱা হৈছে। তেতিয়া তলত দিয়া ধৰণে গড় বিচলন নিৰূপণ কৰিব লাগিব ঃ

উদাহৰণ 4

x	|d|
2	5
4	3
7	0
8	1
9	2
	11

এনে ক্ষেত্ৰত তলত দিয়া সূত্ৰ প্ৰয়োগ কৰা হয়।

গড় বিচলন

$$M.D._{(\bar{X})} = \frac{\sum|d| + (\bar{X} - A_{\bar{X}})(\sum f_B - \sum f_A)}{n}$$

য'ত, $\Sigma |d|$ হ'ল অনুমিত গড়ৰ পৰা লোৱা সম্পূৰ্ণ বা পৰম (absolute) বিচলনৰ সমষ্টি বা যোগফল।

$\bar{X}$ হ'ল প্ৰকৃত গড়।

$A\bar{X}$ হ'ল বিচলন নিৰূপণ কৰিবলৈ ব্যৱহাৰ কৰা অনুমিত গড়।

Σf_B প্ৰকৃত গড়কে ধৰি ইয়াৰ তলত থকা মানসমূহৰ সংখ্যা।

Σf_A প্ৰকৃত গড়ৰ ওপৰত থকা মানসমূহৰ সংখ্যা।

এই মানসমূহ ওপৰৰ সূত্ৰত প্ৰতিস্থাপন কৰিলে আমি পাম ঃ

গড় বিচলন

$$M.D._{(\bar{X})} = \frac{11 + (6 - 7)(2 - 3)}{5}$$

$$= \frac{2}{3} = 2.4$$

অসমূহিত তথ্যৰ বাবে মধ্যমাৰ পৰা নিৰূপণ কৰা গড় বিচলন

প্ৰত্যক্ষ পদ্ধতি (Direct Method)

উদাহৰণ 3 ত দিয়া তথ্যৰ মানসমূহ ব্যৱহাৰ কৰি মধ্যমাৰ পৰা তলত দিয়া ধৰণে গাণিতিক মাধ্য নিৰূপম কৰিব পাৰি।

(i) মধ্যমা গণনা কৰি উলিয়া ব লাগিব, যাৰ মান হ'ব 7।

(ii) মধ্যমাৰ পৰা প্ৰকৃত বিচলন (বা পৰম বিচলন) নিৰূপণ কৰা আৰু তাক |d| ৰে চিহ্নিত কৰা।

(iii) পৰম বা প্ৰকৃত বা সম্পূৰ্ণ বিচলনৰ গড় মান নিৰ্ণয় কৰা। এইটোৱেই গড় বিচলন।

উদাহৰণ 5

[x- মধ্যমা]

x	|d|
2	5
4	3
7	0
8	1
9	2
	11

মধ্যমাৰ পৰা নিৰূপণ কৰা গাণিতিক মাধ্য হ'ব,

গাণিতিক মাধ্য $M.D._{(\text{মধ্যমা})} = \frac{\sum|d|}{n} = \frac{11}{5} = 2.2$

সংক্ষিপ্ত পদ্ধতি (Short-cut method)

সংক্ষিপ্ত পদ্ধতিৰে গড় বিচলন নিৰূপণ কৰিবলৈ বিচলনসমূহৰ বাবে এটা মান (A) ব্যৱহাৰ কৰা হয় আৰু তলত দিয়া সূত্ৰটো প্ৰয়োগ কৰা হয়।

গড় বিচলন

$$M.D._{(\text{মধ্যমা})} = \frac{\sum|d| + (\text{মধ্যমা} - A)(\sum f_B - \sum f_A)}{n}$$

য'ত, A = ধ্ৰুৱক (constant) যাৰ পৰা বিচলনসমূহ গণনা কৰা হয়।

আন সাংকেতিক চিহ্নসমূহ অনুমিত গড় পদ্ধতিত দিয়াৰ দৰে একে।

অবিচ্ছিন্ন বিভাজনৰ বাবে গড় বা মাধ্যৰ পৰা নিৰূপণ কৰা গড় বিচলন

তালিকা 6.2

কোম্পানীৰ লাভ (লাখ টকাৰ হিচাপত) শ্ৰেণী বিভাজন	কোম্পানীৰ সংখ্যা বাৰংবাৰতা
10-20	5
20-30	8
30-50	16
50-70	8
70-80	3
	40

স্তৰসমূহ ঃ

(i) বিভাজনৰ গড় বা মাধ্য নিৰ্ণয় কৰা।

(ii) গাণিতিক মাধ্যৰ পৰা শ্ৰেণীসমূহৰ মধ্যবিন্দুৰ সম্পূৰ্ণ বা পৰম বিচলন |d | নিৰূপণ কৰা।

(iii) f |d | পাবলৈ প্ৰতিটো |d | ৰ মানক তদনুৰূপ (corresponding) বাৰংবাৰতাৰে পূৰণ কৰা। $\sum f|d|$ পাবলৈ গোটেইবোৰ মান যোগ কৰা।

(iv) তলত দিয়া সূত্ৰ প্ৰয়োগ কৰা,

$$\text{গড় বিচলন } M.D._{(\bar{X})} = \frac{\sum f|d|}{\sum f}$$

6.2 নং তালিকাত দিয়া বিভাজনৰ গড় বিচলন তলত দিয়া ধৰণে নিৰূপণ কৰিব পাৰি ঃ

উদাহৰণ 6

শ্ৰেণী বিভাগ C.I.	বাৰংবাৰতা f	মধ্যবিন্দু m.p.	|d|	f|d|
10-20	5	15	25.5	127.5
20-30	8	25	15.5	124.0
30-50	16	40	0.5	8.0
50-70	8	60	19.5	156.0
70-80	3	75	34.5	103.5
	40			519.0

গড় বিচলন

$$M.D._{(\overline{X})} = \frac{\sum f|d|}{\sum f} = \frac{519}{40} = 12.975$$

মধ্যমাৰ পৰা নিৰূপণ কৰা গড় বিচলন

তালিকা 6.3

শ্ৰেণী বিভাগ	বাৰংবাৰতা
20-30	5
30-40	10
40-60	20
60-80	9
80-90	6
	50

গড় বা মাধ্যৰ পৰা গড় বিচলন যি পদ্ধতিৰে নিৰূপণ কৰা হয় সেই একে পদ্ধতিৰে মধ্যমাৰ পৰাও কৰা হয়। ইয়াত তলত দিয়াৰ দৰে মধ্যমাৰ পৰা বিচলনসমূহ উলিওৱা হয়ঃ

উদাহৰণ 7

শ্ৰেণী বিভাগ C.I.	বাৰংবাৰতা f	মধ্যবিন্দু m.p.	|d|	f|d|
20-30	5	25	25	125
30-40	10	35	15	150
40-60	20	50	0	0
60-80	9	70	20	180
80-90	6	85	35	210
	50			665

গড় বিচলন $M.D._{(\text{মধ্যমা})} = \frac{\sum f|d|}{\sum f}$

$$= \frac{665}{50} = 13.3$$

গড় বিচলন ঃ মন্তব্য

গড় বিচলন তথ্যৰ সকলো মানৰ ওপৰত নিৰ্ভৰশীল। মাত্ৰ এটা মান সলনি হ'লেও ই প্ৰভাৱিত হ'ব। মধ্যমাৰ পৰা নিৰূপণ কৰা গড় বিচলন ক্ষুদ্ৰতম হয় অৰ্থাৎ গড় বা মাধ্যৰ পৰা উলিয়ালে ইয়াৰ মান বেছি হয়। যি কি নহওক গড় বিচলনে বীজগণিতীয় ± চিহ্নসমূহ আওকাণ কৰে আৰু মুক্ত শ্ৰেণী বিভাজনৰ বাবে ইয়াক নিৰূপণ কৰিব নোৱাৰি।

মানক বা প্ৰামাণিক বিচলন (Standard Deviation)

মানক বিচলন হৈছে মাধ্যৰ পৰা নিৰূপণ কৰা চলকৰ মানৰ বিচলনৰ বৰ্গফলৰ গাণিতিক গড়ৰ যোগাত্মক বৰ্গমূল। যদি X_1, X_2, X_3, X_4 আৰু X_5 চলকৰ পাঁচটা মান হয়, প্ৰথমতে ইয়াৰ গড় বা মাধ্য গণনা কৰা হয়। তাৰ পিছত মাধ্যৰ পৰা এই মানসমূহৰ বিচলন উলিওৱা হয়। এই বিচলনসমূহৰ বৰ্গফল নিৰ্ণয় কৰা হয়। বিচলনৰ বৰ্গফলৰ গড়েই হ'ল প্ৰসৰণ (variance)। প্ৰসৰণৰ যোগাত্মক বৰ্গমূলেই হ'ল মানক বা প্ৰামাণিক বিচলন।

(মানক বিচলন কেৱল গাণিতিক মাধ্যৰ ভিত্তিতহে গণনা কৰা হয়)।

অসমূহিত তথ্যৰ বাবে মানক বিচলন নিৰূপণ

বিশিষ্ট বা স্বকীয় (individual) মানৰ বাবে মানক বিচলন নিৰূপণ কৰাৰ চাৰিটা বিভিন্ন পদ্ধতি আছে। সকলো পদ্ধতিৰে মানক বিচলনৰ একে মানেই পোৱা যায়। এই পদ্ধতিবোৰ হ'ল—

(i) প্ৰকৃত গড় পদ্ধতি (Actual Mean Method)

(ii) অনুমিত গড় পদ্ধতি (Assumed Mean Method)

(iii) প্ৰত্যক্ষ পদ্ধতি (Direct Method)

(iv) উপ-বিচলন পদ্ধতি (Step-Deviation Method)

প্ৰকৃত গড় পদ্ধতি ঃ

ধৰা হ'ল তলত দিয়া ৰাশিসমূহৰ মানক বিচলন নিৰূপণ কৰিব লাগে ঃ

5, 10, 25, 30, 50

উদাহৰণ 8

x	d	d^2
5	- 19	361
10	- 14	196
25	+ 1	1
30	+ 6	36
50	+ 26	676
	0	1270

তলত দিয়া সূত্ৰটো ব্যৱহাৰ কৰা হৈছে ঃ

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum d^2}{n}}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{1270}{5}} = \sqrt{254} = 15.937$$

ওপৰৰ উদাহৰণটোত কি মানৰ পৰা বিচলনসমূহ নিৰূপণ কৰা হৈছে লক্ষ্য কৰিছানে? এইটোৱেই প্ৰকৃত গড় হয়নে?

অনুমিত গড় পদ্ধতি

ওপৰৰ উদাহৰণত দিয়া মানসমূহৰ বাবে বিচলন যিকোনো যাদৃচ্ছিক (arbitrary) মান ($A_{\overline{X}}$) ৰ পৰা উলিয়াব পাৰি যাতে $d = X - A_{\overline{X}}$ হয়। $A_{\overline{X}} = 25$ ধৰি লৈ মানক বিচলন নিৰূপণ কৰা পদ্ধতি তলত দিয়া হৈছে ঃ

উদাহৰণ 9

x	d	d^2
5	-20	400
10	-15	225
25	0	0
30	+5	25
50	+25	625
	-5	1275

মানক বিচলনৰ বাবে সূত্ৰটো হ'ল

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum d^2}{n} - \left(\frac{\sum d}{n}\right)^2}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{1275}{5} - \left(\frac{-5}{5}\right)^2} = \sqrt{254} = 15.937$$

> প্ৰকৃত গড় বা মাধ্যৰ বাহিৰে আন কোনো মানৰ পৰা লোৱা বিচলনৰ যোগফল শূন্য নহয়।

প্ৰত্যক্ষ পদ্ধতি

তলত দেখুৱা ধৰণে প্ৰত্যক্ষভাৱে তথ্যৰ মানসমূহৰ পৰাও বিচলন নিৰ্ণয় নকৰাকৈ মানক বিচলন নিৰূপণ কৰিব পৰা যায়।

উদাহৰণ 10

x	x^2
5	25
10	100
25	625
30	900
50	2500
120	4150

(ইয়াত শূন্যৰ পৰা বিচলন ওলোৱাৰ নিচিনা হৈছে)

তলত দিয়া সূত্ৰটো ব্যৱহাৰ কৰা হৈছে।

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum X^2}{n} - (\overline{X})^2}$$

$$or\ \sigma = \sqrt{\frac{4150}{5} - (24)^2}$$

$$or\ \sigma = \sqrt{254} = 15.937$$

যিটো ধ্ৰুৱকৰ (constant) মানৰ পৰা বিচলন গণনা কৰা হয় তাৰ দ্বাৰা মানক বিচলন প্ৰভাৱিত নহয়। মানক বিচলনৰ সূত্ৰত ধ্ৰুৱকৰ মানে গুৰুত্ব নাপায়। গতিকে মানক বিচলন মূল বিন্দুৰ পৰিৱৰ্তনৰ ওপৰত নিৰ্ভৰশীল নহয় (Independent of origin)।

উপ-বিচলন পদ্ধতি

তথ্যৰ মানসমূহক যদি কোনো এটা সাধাৰণ উপাদানেৰে হৰণ কৰিব পাৰি, তেতিয়া হৰণ কৰিব লাগে। এইক্ষেত্ৰত তলত দিয়া ধৰণে মানক বিচলন নিৰূপণ কৰিব পাৰি ঃ

উদাহৰণ 11

উদাহৰণ 10 ত দিয়া মানসমূহ যিহেতু এটা সাধাৰণ উপাদান 5ৰে বিভাজ্য, আমি 5 ৰে হৰণ কৰি তলত দিয়া মানসমূহ পাম ঃ

x	x'	d	d^2
5	1	-3.8	14.44
10	2	-2.8	7.84
25	5	+0.2	0.04
30	6	+1.2	1.44
50	10	+5.2	27.04
		0	50.80

(গণনা কৰা পদ্ধতি প্ৰকৃত গড় বা মাধ্য পদ্ধতিৰ দৰে একেই)।

তলত দিয়া সূত্ৰটো মানক বিচলন নিৰূপণ কৰোতে ব্যৱহাৰ কৰা হৈছে ঃ

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum d^2}{n}} \times c$$

$$x' = \frac{x}{c}$$

c = সাধাৰণ উৎপাদক

ওপৰৰ মানসমূহ সূত্ৰত প্ৰতিস্থাপন কৰিলে পাম,

$$\sigma = \sqrt{\frac{50.80}{5}} \times 5$$

$$\sigma = \sqrt{10.16} \times 5$$

$$\sigma = 15.937$$

তথ্যৰ মানসমূহক সাধাৰণ উপাদানেৰে হৰণ কৰাৰ বিকল্প হিচাপে বিচলনসমূহকো সাধাৰণ উপাদানেৰে হৰণ কৰিব পাৰি। মানক বিচলন তলত দিয়া ধৰণে নিৰূপণ কৰিব পৰা যায়।

উদাহৰণ 12

x	d	d′	d'^2
5	-20	-4	16
10	-15	-3	9
25	0	0	0
30	+5	+1	1
50	+25	+5	25
		-1	51

এটা যাদৃচ্ছিক মান 25ৰ পৰা বিচলসমূহ নিৰূপণ কৰা হৈছে। বিচলনসমূহক সাধাৰণ উপাদান 5ৰে হৰণ কৰা হৈছে।

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum d'^2}{n} - \left(\frac{\sum d'}{n}\right)^2} \times c$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{51}{5} - \left(\frac{-1}{5}\right)^2} \times 5$$

$$\sigma = \sqrt{10.16} \times 5 = 15.937$$

মানক বিচলন জোখৰ পৰিৱৰ্তনৰ ওপৰত নিৰ্ভৰশীল (not independent of scale)। যদি মানসমূহক বা বিচলনসমূহক এটা সাধাৰণ উপাদানেৰে হৰণ কৰা হয়, তেতিয়া মানক বিচলন নিৰ্ণয় কৰা সূত্ৰত সাধাৰণ উপাদানটো ব্যৱহাৰ কৰা হয়।

অবিচ্ছিন্ন বাৰংবাৰতা বিভাজনৰ বাবে মানক বিচলন

অসমূহিত তথ্যৰ দৰে, সমূহিত তথ্যৰ মানক বিচলনো তলত দিয়া পদ্ধতিৰে নিৰূপণ কৰিব পৰা যায় ঃ

(i) প্ৰকৃত গড় বা মাধ্য পদ্ধতি

(ii) অনুমিত গড় পদ্ধতি

(iii) উপ-বিচলন পদ্ধতি

প্ৰকৃত গড় পদ্ধতি

6.2 নং তালিকাত দিয়া মানসমূহৰ বাবে তলত দিয়া ধৰণে মানক বিচলন নিৰূপণ কৰিব পাৰি ঃ

উদাহৰণ 13

(1) শ্ৰেণী বিভাগ	(2) f	(3) m	(4) fm	(5) d	(6) fd	(7) fd^2
10-20	5	15	75	-25.5	-127.5	3251.25
20-30	8	25	200	-15.5	-124.0	1922.00
30-50	16	40	640	-0.5	-8.0	4.00
50-70	8	60	480	+19.5	+156.0	3042.00
70-80	3	75	225	+34.5	+103.5	3570.75
	40		1620		0	11790.00

তলত দিয়া স্তৰসমূহ আৱশ্যকীয় ঃ

1. তথ্য বিভাজনৰ পৰা গাণিতিক মাধ্য নিৰ্ণয় কৰিব লাগিব।

$$\bar{X} = \frac{\Sigma fm}{\Sigma f} = \frac{1620}{40} = 40.5$$

2. গাণিতিক মাধ্যৰ পৰা মধ্যবিন্দুসমূহৰ বিচলন উলিয়াব লাগিব যাতে $d = m - \bar{x}$ (স্তম্ভ নং 5)
3. বিচলনসমূহক তদনুৰূপ বাৰংবাৰতাৰে পূৰণ কৰিব লাগিব fd পাবলৈ (স্তম্ভ নং 6) [মন কৰা যে $\Sigma fd = 0$]
4. 'fd' ক 'd' ৰে পূৰণ কৰি 'fd^2'ৰ মানসমূহ উলিওৱা (স্তম্ভ নং 7)। Σfd^2 পাবলৈ এই সকলোবোৰ মান যোগ কৰা।
5. তলত দিয়া ধৰণে সূত্ৰ প্ৰয়োগ কৰা ঃ

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma fd^2}{n}} = \sqrt{\frac{11790}{40}} = 17.168$$

অনুমিত গড় পদ্ধতি

উদাহৰণ 13 ত দিয়া মানসমূহৰ বাবে অনুমিত গড়ৰ (ধৰা 40) পৰা বিচলন উলিয়াই তলত দিয়া ধৰণে মানক বিচলন নিৰূপণ কৰিব পাৰি;

উদাহৰণ 14

(1) C.I	(2) f	(3) m	(4) d	(5) fd	(6) fd^2
10-20	5	15	-25	-125	3125
20-30	8	25	-15	-120	1800
30-50	16	40	0	0	0
50-70	8	60	+20	160	3200
70-80	3	75	+35	105	3675
	40			+20	11800

তলত দিয়া স্তৰসমূহ আৱশ্যকীয় ঃ

1. শ্ৰেণী সমূহৰ মধ্যবিন্দু উলিয়াই লোৱা (স্তম্ভ নং 3)
2. এটা অনুমিত গড়ৰ পৰা মধ্যবিন্দুসমূহৰ বিচলন নিৰ্ণয় কৰিব লাগিব যাতে $d = m - A\bar{x}$ (স্তম্ভ নং 4)। অনুমিত গড় = 40
3. 'fd' পাবলৈ 'd'ক তদনুৰূপ বাৰংবাতাৰে পূৰণ কৰিব লাগিব (স্তম্ভ নং 5)। (যিহেতু বিচলনসমূহ অনুমিত গড়ৰ পৰাহে লোৱা হৈছে সেয়েহে এই স্তম্ভটোৰ যোগফল শূন্য নহয়)।
4. 'fd'ক (স্তম্ভ নং 5) 'd' ৰে (স্তম্ভ নং 4) পূৰণ কৰিব লাগিব 'fd^2' পাবলৈ (স্তম্ভ নং 6)। Σfd^2 উলিয়াই লোৱা।
5. তলত দিয়া সূত্ৰেৰে মানক হিচলন নিৰূপণ কৰিব পৰা যাব।

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma fd^2}{n} - \left(\frac{\Sigma fd}{n}\right)^2}$$

$$\text{or } \sigma = \sqrt{\frac{11800}{40} - \left(\frac{20}{40}\right)^2}$$

$$\text{or } \sigma = \sqrt{294.75} = 17.168$$

উপ-বিচলন পদ্ধতি

যদি বিচলনৰ মানসমূহ এটা সাধাৰণ উপাদানেৰে বিভাগ্য হয়, (তেতিয়া তলত দিয়াৰ দৰে উপ-বিচলন পদ্ধতিৰে গণনা প্ৰক্ৰিয়া সহজ কৰিব পাৰি।

উদাহৰণ 15

(1) CI	(2) f	(3) m	(4) d	(5) d'	(6) fd'	(7) fd'^2
10-20	5	15	-25	-5	-25	125
20-30	8	25	-15	-3	-24	72
30-50	16	40	0	0	0	0
50-70	8	60	+20	+4	+32	128
70-80	3	75	+35	+7	+21	147
	40				+4	472

প্ৰয়োজনীয় স্তৰসমূহ ঃ

1. অনুমিত গড় পদ্ধতিৰ দৰে এটা যাদৃচ্ছিক মানৰ পৰা শ্ৰেণীসমূহৰ মধ্য বিন্দু (স্তম্ভ নং 3) আৰু বিচলনসমূহ উলিয়াই ল'ব লাগিব। এই উদাহৰণটোত 40 ৰ পৰা বিচলনসমূহ নিৰ্ণয় কৰা হৈছে (স্তম্ভ নং 4)।
2. এটা সাধাৰণ উপাদান 'c' ৰে বিচলনসমূহ হৰণ কৰা। ওপৰৰ উদাহৰণত c=5। এইদৰে নিৰ্ণয় কৰা মানসমূহক 'd'ৰে (স্তম্ভ নং 5) বুজোৱা হৈছে।
3. 'd'ৰ মানসমূহক তদনুৰূপ 'f'ৰ (স্তম্ভ নং 2) মানেৰে পূৰণ কৰিব লাগিব 'fd' পাবলৈ (স্তম্ভ নং 6)।
4. 'fd'^2' (স্তম্ভ নং 7) নিৰ্ণয় কৰিবলৈ 'fd''ৰ মানসমূহক 'd'' ৰে পূৰণ কৰিব লাগিব।
5. $\Sigma fd'$ আৰু $\Sigma fd'^2$ ৰ মানসমূহ পাবলৈ স্তম্ভ নং 6 আৰু 7ৰ মানসমূহ যোগ কৰিব লাগিব।
6. তলত দিয়া সূত্ৰটো প্ৰয়োগ কৰা।

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma fd^2}{\Sigma f} - \left(\frac{\Sigma fd'}{\Sigma f}\right)^2} \times c$$

$$\text{or } \sigma = \sqrt{\frac{472}{40} - \left(\frac{4}{40}\right)^2} \times 5$$

$$\text{or } \sigma = \sqrt{11.8 - 0.1} \times 5$$

$$\text{or } \sigma = \sqrt{11.79} \times 5$$

$$\text{or } \sigma = 17.168$$

মানক বিচলন ঃ মন্তব্য

মানক বিচলন, যি আটাইতকৈ বেছি ব্যৱহৃত বিচলন, সকলো মানৰ ওপৰত নিৰ্ভৰশীল। সেয়েহে এটা মান সলনি হ'লেও মানক বিচলনক ই প্ৰভাৱিত কৰে। ই মূলবিন্দুৰ ওপৰত নিৰ্ভৰশীল নহয় কিন্তু জোখৰ ওপৰত নিৰ্ভৰশীল। ই অধিক পৰিসাংখ্যিক বিশ্লেষণৰ বাবেও উপযোগী।

5. সম্পূৰ্ণ বা পৰম (Absoulte) আৰু আপেক্ষিক (Relative) বিচলনৰ মাপ

ওপৰত বৰ্ণনা কৰা আটাইবোৰ জোখেই সম্পূৰ্ণ বা পৰম বিচলনৰ মাপ। এইবোৰ মাপে এনে এটা মান নিৰূপণ কৰে, যাৰ অৰ্থ সময়ত ব্যাখ্যা কৰাটো সমস্যা হৈ পৰে। উদাহৰণস্বৰূপে, তলত দিয়া তথ্যৰ সংহতি দুটা বিবেচনা কৰা ঃ

সংহতি A	500	700	1000
সংহতি B	100000	120000	130000

ধৰা হ'ল A সংহতিৰ মানসমূহে কোনো এজন আইচক্ৰীম বিক্ৰেটাৰ দৈনিক বিক্ৰীৰ পৰিমাণ আৰু B সংহতিৰ মানসমূহে এখন ডাঙৰ বিভাগীয় দোকানৰ (Departmental store) দৈনিক বিক্ৰী বুজাইছে। A সংহতিৰ মানসমূহৰ পৰিসৰ 500, আনহাতে B সংহতিৰ মানসমূহৰ পৰিসৰ 30,000। বিভাগীয় দোকানখনৰ বিক্ৰীৰ তাৰতম্য বেছি বুলি ক'ব পাৰিবানে? দেখা যায় যে A সংহতিৰ উচ্চতম মানটো নিম্নতম মানৰ দুগুণ। আনহাতে, B সংহতিৰ ক্ষেত্ৰত ই মাত্ৰ 30% বেছি। যেতিয়া গড় বা মাধ্যমসমূহৰ পাৰ্থক্য যথেষ্ট হয় তেতিয়া পৰম বা সম্পূৰ্ণ মাপে তাৰতম্য সম্পৰ্কে ভুল ধাৰণা দিব পাৰে।

সম্পূৰ্ণ বা পৰম মাপৰ আন এটা দুৰ্বলতা হৈছে ইয়াত উত্তৰসমূহ মূল মাপৰ এককতেই প্ৰকাশ কৰা হয়। গতিকে মানসমূহ যদি কিলোমিটাৰত প্ৰকাশ কৰা হয়, প্ৰসাৰো কিলোমিটাৰতেই দিয়া হ'ব। আকৌ একেখিনি মানেই যদি মিটাৰত প্ৰকাশ কৰা হয় তেতিয়া সম্পূৰ্ণ বা পৰম মাপে উত্তৰ মিটাৰতেই দিব আৰু প্ৰসাৰৰ পৰিমাণ 1000 গুণ দেখা যাব।

এই সমস্যাসমূহ এৰাই চলিবলৈ আপেক্ষিক প্ৰসাৰৰ মাপ ব্যৱহাৰ কৰিব পাৰি। প্ৰতিটো সম্পূৰ্ণ মাপৰ এটা আপেক্ষিক প্ৰতিলিপি (counterpart) আছে। এতেকে, পৰিসৰৰ বাবে পৰিসৰৰ সহগ (co-efficient) আছে যাক তলত দিয়া ধৰণে নিৰূপণ কৰা হয় ঃ

$$\text{পৰিসৰৰ সহগ} = \frac{L-S}{L+S}$$

য'ত $L =$ উচ্চতম ৰাশিৰ বা চলকৰ মান

$S =$ নিম্নতম ৰাশিৰ বা চলকৰ মান

একেদৰে চতুৰ্থক বিচলনৰ বাবে চতুৰ্থক বিচলন সহগ আছে যাক তলত দিয়া ধৰণে নিৰূপণ কৰিব পাৰি ঃ

$$\text{চতুৰ্থক বিচলন সহগ} = \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}$$

য'ত, $Q_3 =$ উচ্চতম বা তৃতীয় চতুৰ্থাংশক (3rd Quartile)

$Q_1 =$ নিম্নতম বা প্ৰথম চতুৰ্থাংশক (1st Quartile)

গড় বিচলনৰ বাবে গড় বিচলন সহগ হ'ব

$$\text{গড় বিচলন সহগ} = \frac{\text{গড় বিচলন } (\overline{X}]}{X} \text{ বা } \frac{\text{গড় বিচলন (মধ্যমা)}}{\text{মধ্যমা}}$$

গড় বিচলন যদি গাণিতিক মাধ্যৰ ভিত্তিত গণনা কৰা হয় তেতিয়া ইয়াক গাণিতিক মাধ্যৰে হৰণ কৰা হয়। যদি গড় বিচলন উলিয়াবলৈ মধ্যমা ব্যৱহাৰ কৰা হয় ইয়াক মধ্যমাৰে হৰণ কৰা হয়।

মানক বিচলনৰ আপেক্ষিক জোখ হৈছে বিচৰণ সহগ (coefficient of variation)। ইয়াক উলিয়াবলৈ তলত দিয়া সূত্ৰ ব্যৱহাৰ কৰা হয় ঃ

$$\text{বিচৰণ সহগ} = \frac{\text{মানক বিচলন}}{\text{গাণিতিক মাধ্য}} \times 100$$

ইয়াক সাধাৰণতে শতাংশ হিচাপে প্ৰকাশ কৰা হয় আৰু ই আটাইতকৈ বেছি ব্যৱহাৰ হোৱা প্ৰসাৰৰ মাপ। যিহেতু আপেক্ষিক মাপ মানসমূহৰ জোখৰ এককৰ পৰা মুক্ত, সেয়েহে ই বিভিন্ন জোখৰ এককৰ সমষ্টিক তুলনা কৰিব পাৰে।

7. ল'ৰেঞ্জ ৰেখা (LORENZ CURVE)

এতিয়ালৈ আলোচনা কৰা বিচলনৰ মাপসমূহে প্ৰসাৰৰ সাংখ্যিক (numerical) মানহে দিয়ে। লেখৰ দ্বাৰা প্ৰসাৰ বা বিচ্যুতি নিৰূপণ কৰা পদ্ধতিটো হৈছে ল'ৰেঞ্জ ৰেখা। তোমালোকে এনেকুৱা বিবৃতি বোধ হয় শুনিছা 'এখন দেশৰ শীৰ্ষৰ 10% লোকে ৰাষ্ট্ৰীয় আয়ৰ 50% উপাৰ্জন কৰে, আনহাতে শীৰ্ষৰ 20% ভাগে উপাৰ্জন কৰে 80%। ' আয়ৰ অসমতাৰ কিছু আভাস এই তথ্যবোৰে দিয়ে। তাৰতম্যৰ মাত্ৰা বুজাবলৈ ল'ৰেঞ্জ ৰেখাই এই তথ্যসমূহ ব্যৱহাৰ কৰি সঞ্চয়ী ৰূপত প্ৰকাশ কৰে। দুটা বা ততোধিক বিভাজনৰ তাৰতম্যৰ তুলনা কৰিবলৈ ই বিশেষভাৱে উপযোগী হয়।

তলত এটা কোম্পানীৰ কৰ্মচাৰীৰ মাহেকীয়া আয় দেখুৱা হৈছে।

তালিকা 6.4

আয়	কৰ্মচাৰীৰ সংখ্যা
0-5,000	5
5,000-10,000	10
10,000-20,000	18
20,000-40,000	10
40,000-50,000	7

উদাহৰণ 16

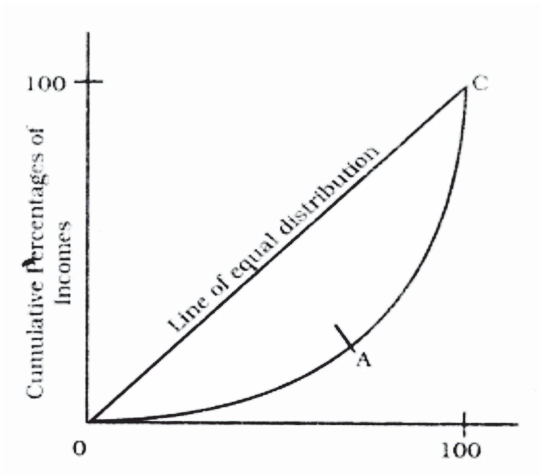
আয়ৰ সীমা (1)	মধ্য বিন্দু (2)	সঞ্চয়ী মধ্যবিন্দু (3)	সঞ্চয়ী মধ্যবিন্দু শতাংশ হিচাপে (4)	কৰ্মচাৰীৰ সংখ্যা বাৰংবাৰতা (5)	সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতা (6)	সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতা শতাংশ হিচাপে (7)
0-5000	2500	2500	2.5	5	5	10
5000-10000	7500	10000	10.0	10	15	30
10000-20000	15000	25000	25.0	18	33	66
20000-40000	30000	55000	55.0	10	43	86
40000-50000	45000	100000	100.0	7	50	100

ল'ৰেঞ্জ ৰেখা অংকন

তলত দিয়া স্তৰসমূহ প্ৰয়োজনীয়ঃ

1. ওপৰৰ উদাহৰণ 16ৰ স্তম্ভ নং 3ত দিয়াৰ দৰে শ্ৰেণীসমূহৰ মধ্যবিন্দু নিৰ্ণয় কৰিব লাগিব।
2. স্তম্ভ নং 6ত দিয়াৰ দৰে সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতা গণনা কৰিব লাগিব।
3. স্তম্ভ নং 3 আৰু 6ত দিয়া যোগফলক 100 হিচাপে প্ৰকাশ কৰিব লাগিব। এই স্তম্ভ দুটাৰ সঞ্চয়ী বাৰংবাৰতাক স্তম্ভ নং 4 আৰু 7ত দিয়াৰ দৰে শতাংশলৈ ৰূপান্তৰিত কৰিব লাগিব।
4. এতিয়া 6.1 নং চিত্ৰত দেখুৱাৰ দৰে লেখ কাগজৰ Y অক্ষত চলকৰ (আয়ৰ) সঞ্চয়ী শতাংশ আৰু X অক্ষত বাৰংবাৰতা (কৰ্মচাৰীৰ সংখ্যা) সঞ্চয়ী শতাংশ ল'ব লাগিব। প্ৰতিটো অক্ষত '0'ৰ পৰা '100' লৈকে মান থাকিব।
5. (0,0) আৰু (100,100) স্থানাংক সংযোগ কৰি এডাল ৰেখা অংকন কৰা। 6.1 চিত্ৰত দেখুৱা এই OC ৰেখাডালেই হ'ল সমবিতৰণ ৰেখা।

6. চলকৰ সঞ্চয়ী শতাংশক তদনুৰূপ বাৰংবাৰতা সঞ্চয়ী শতাংশৰ সৈতে উপস্থাপন কৰা। বিন্দুসমূহ সংযোগ কৰিলে OAC বক্ৰৰেখাডাল পাবা।



সঞ্চয়ী শতাংশ কৰ্মচাৰীৰ সংখ্যা
চিত্ৰ 6.1

ল'ৰেঞ্জ ৰেখাৰ অধ্যয়ন

OC ৰেখাডালক সম বিতৰণ ৰেখা বোলা হয়। কাৰণ ই এনে এটা পৰিস্থিতিৰ নিৰ্দেশ কৰে য'ত শীৰ্ষৰ 20% মানুহে মুঠ আয়ৰ 20% উপাৰ্জন কৰে আৰু শীৰ্ষৰ 60% মানুহে মুঠ আয়ৰ 60% উপাৰ্জন কৰে। OAC বক্ৰৰেখাডাল যিমানেই সম বিতৰণ ৰেখাৰ পৰা আঁতৰত হয় সিমানেই আয় বিতৰণত অধিক তাৰতম্য হয়। যদি দুডাল বা অধিক বক্ৰৰেখা থাকে, যিডাল OC ৰেখাৰ পৰা বেছি আঁতৰত হয় সেইডালেই অধিক প্ৰসাৰ বা বিচ্যুতি দেখুৱায়।

8. সামৰণি

যদিও পৰিসৰ সহজে বুজা যায় আৰু ইয়াক গণনা কৰা সহজ, চৰম (extreme) মানৰ দ্বাৰা ই অতি বেছিকৈ প্ৰভাৱিত হয়। চতুৰ্থক বিচলন চৰম মানৰ দ্বাৰা প্ৰভাৱিত নহয় কাৰণ ই মাত্ৰ 50% তথ্যৰ ওপৰতহে নিৰ্ভৰ কৰে। যি কি নহওক, গড় বিচলন আৰু মানক বিচলনৰ অৰ্থ বুজি পোৱাটো কিছু টান হয়। এই দুই প্ৰকাৰৰ জোখ মানসমূহৰ গড়ৰ পৰা লোৱা বিচলনৰ ওপৰত নিৰ্ভৰ কৰে। গড় বিচলনে গাণিতিক মাধ্যৰ পৰা লোৱা বিচলনৰ গড় গণনা কৰে। কিন্তু বিচলনসমূহৰ চিহ্ন ($\pm$) উপেক্ষা কৰে বাবে ইয়াক অগাণিতিক যেন লাগে। মানক বিচলনে গাণিতিক মাধ্যৰ পৰা লোৱা বিচলনৰ গড় গণনা কৰে। গড় বিচলনৰ দৰে ই সকলো তথ্যৰ ওপৰত নিৰ্ভৰশীল আৰু ইয়াক অধিক পৰিসাংখ্যিক বিশ্লেষণৰ বাবে ব্যৱহাৰ কৰা হয়। ই আটাইতকৈ বেছি ব্যৱহাৰ হোৱা প্ৰসাৰৰ মাপ।

পুনৰুক্তি

- প্ৰসাৰৰ মাপে অৰ্থনৈতিক চলকৰ আচৰণ সম্বন্ধে আমাৰ জ্ঞান বৃদ্ধি কৰে।
- পৰিসৰ আৰু চতুৰ্থক বিচলন মানসমূহৰ প্ৰসাৰৰ ওপৰত নিৰ্ভৰ কৰে।
- গড় বিচলন আৰু মানক বিচলন মানসমূহৰ গাণিতিক মাধ্যৰ পৰা লোৱা বিচলনৰ ওপৰত নিৰ্ভৰশীল।
- প্ৰসাৰৰ মাপ সম্পূৰ্ণ বা পৰম আৰু আপেক্ষিক হ'ব পাৰে।
- সম্পূৰ্ণ বা পৰম মাপে তথ্যসমূহ যি এককত প্ৰকাশ কৰা হয় সেই এককতেই উত্তৰ দিয়ে।
- আপেক্ষিক মাপসমূহ জোখৰ এককৰ পৰা মুক্ত হয় আৰু সেয়েহে বিভিন্ন চলকৰ তুলনা কৰাত ব্যৱহৃত হয়।
- এটা লৈখিক (graphic) পদ্ধতি, যিয়ে বক্ৰৰেখাৰ আকৃতিৰ পৰা প্ৰসাৰ বা বিচ্যুতি নিৰূপণ কৰে সেই পদ্ধতিকে ল'ৰেঞ্জ ৰেখা বোলে।

অনুশীলনী

1. বাৰংবাৰতা বিভাজন বুজিবলৈ প্ৰসাৰৰ মাপ কেন্দ্ৰীয় মানৰ এটা অতি ভাল পৰিপূৰক। মন্তব্য আগবঢ়োৱা।
2. প্ৰসাৰৰ কোনবিধ জোখ আটাইতকৈ ভাল আৰু কিয়?
3. কিছুমান প্ৰসাৰৰ মাপে মানসমূহৰ বিস্তাৰৰ ওপৰত নিৰ্ভৰ কৰে আনহাতে কিছুমানে কেন্দ্ৰীয় মানৰ পৰা আন মানসমূহৰ তাৰতম্য নিৰ্ণয় কৰে। এই বিষয়ত তুমি একমতনে?
4. এখন নগৰত 25% মানুহে 45,000 টকাতকৈ বেছি উপাৰ্জন কৰে আনহাতে 75% মানুহে 18,000 টকাতকৈ বেছি উপাৰ্জন কৰে। প্ৰসাৰৰ সম্পূৰ্ণ বা পৰম আৰু আপেক্ষিক মান নিৰ্ণয় কৰা।
5. তলত এখন ৰাজ্যৰ 10 খন জিলাৰ প্ৰতি একৰত ঘেঁহু আৰু ধানৰ উৎপাদন দেখুৱা হৈছে ঃ

জিলা	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ঘেঁহু	12	10	15	19	21	16	18	9	25	10
ধান	22	29	12	23	18	15	12	34	18	12

শস্য প্ৰতিবিধৰ বাবে নিৰ্ণয় কৰা

(i) পৰিসৰ

(ii) চতুৰ্থক বিচলন

(iii) মাধ্যৰ পৰা লোৱা গড় বিচলন

(iv) মধ্যমাৰ পৰা লোৱা গড় বিচলন

(v) মানক বিচলন

(vi) কোনবিধ শস্যৰ বিচৰণ (variation) বেছি?

(vii) প্ৰতিটো শস্যৰ বিভিন্ন মাপৰ মানসমূহৰ তুলনা কৰা।

6. ওপৰৰ প্ৰশ্নটোৰ বাবে বিচৰণৰ আপেক্ষিক জোখ নিৰ্ণয় কৰা আৰু তোমাৰ মতে কোনটো মান বেছি নিৰ্ভৰযোগ্য উল্লেখ কৰা।
7. এটা ক্ৰিকেট দলৰ বাবে এজন বেটচমেন (batsman) নিৰ্বাচন কৰিব লাগে। X আৰু Y ৰ মাজৰ পৰা তেওঁলোকৰ পূৰ্বৰ পাঁচটা স্ক'ৰ (score)ৰ ভিত্তিত নিৰ্বাচনটো হ'ব লাগিব।

X	25	85	40	80	120
Y	50	70	65	45	80

কোনজন বেটচমেনক (batsman) নিৰ্বাচন কৰিব লাগিব যদিহে আমি বিচাৰো,

(i) বেছি ৰাণ (run) কৰোঁতা,

বা (ii) দলৰ এজন নিৰ্ভৰযোগ্য বেটচমেন?

8. দুটা ব্ৰেণ্ডৰ (brand) লাইটৰ বাল্বৰ গুণ পৰীক্ষা কৰিবলৈ, প্ৰতি ব্ৰেণ্ডৰ 100 টাকৈ বালবৰ (bulb) জ্বলি থকাৰ ঘণ্টা হিচাপত কাৰ্যক্ষমতা জুখি ওলোৱা হৈছে।

কাৰ্যক্ষমতা (ঘণ্টা হিচাপত)	বালবৰ সংখ্যা ব্ৰেণ্ড A	ব্ৰেণ্ড B
0-50	15	2
50-100	20	8
100-150	18	60
150-200	25	25
200-250	22	5
	100	100

(i) বেছি কাৰ্যক্ষমতা কোনটো ব্ৰেণ্ডে দিয়ে?

(ii) কোনটো ব্ৰেণ্ড বেছি নিৰ্ভৰযোগ্য?

9. এটা কাৰখানাৰ 50 জন শ্ৰমিকৰ দৈনিক গড় মজুৰি আছিল 200 টকা আৰু মানক বিচলন 40 টকা। প্ৰতিজন শ্ৰমিকক 20 টকা বেছিকৈ দিয়া হ'ল। নতুন দৈনিক গড় মজুৰি আৰু মানক বিচলন কিমান হ'ব। মজুৰি কম বেছি পৰিমাণে এক মানবিশিষ্ট হৈছে নে?

10. পূৰ্বৰ প্ৰশ্নটোত যদি প্ৰতিজন শ্ৰমিকৰ মজুৰি 10% বঢ়াই দিয়া হয়, তেতিয়া গড় আৰু মানক বিচলনৰ মান কেনেকৈ প্ৰভাৱিত হ'ব?

11. মাধ্য বা গড়ৰ পৰা লোৱা গড় বিচলন আৰু মানক বিচলন তলত দিয়া বিভাজনৰ পৰা নিৰ্ণয় কৰা।

শ্ৰেণী	বাৰংবাৰতা
20-40	3
40-80	6
80-100	20
100-120	12
120-140	9
	50

12. 10 টা মানৰ যোগফল 100 আৰু মানসমূহৰ বৰ্গৰ যোগফল 1090। বিচৰণ সহগ (Coefficient of variation) নিৰ্ণয় কৰা।