अध्याय

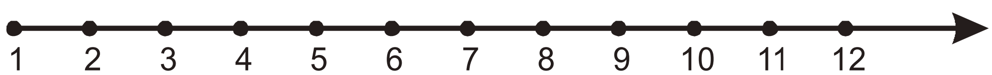
2

संख्या पद्धति
(Number System)

2.01 परिमेय संख्याओं का संख्या रेखा पर पुनरावलोकन:

दैनिक जीवन में संख्याओं का बहुत महत्त्व है। हम प्राकृत संख्याओं की शुरूआत से परिमेय संख्या तक अध्ययन कर चुके हैं। यहाँ हम इनकी पुनरावृत्ति संख्या रेखा पर करेंगे।

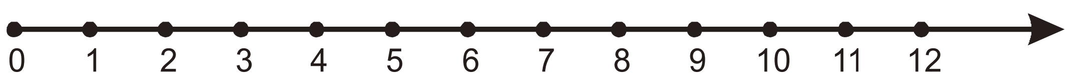
(i) प्राकृत संख्याएँ



चित्र 2.01

यह रेखा 1 से दांई तरफ अपरिमित रूप से बढ़ती है।

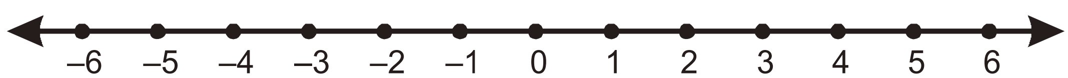
(ii) पूर्ण संख्या



चित्र 2.02

यह रेखा 0 से दाई तरफ अपरिमित रूप से बढ़ती है।

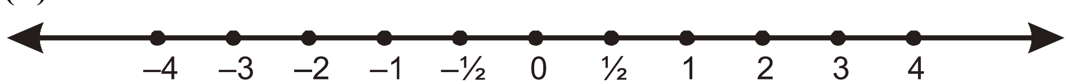
(iii) पूर्णांक संख्या



चित्र 2.03

यह रेखा शून्य के दोनों तरफ अपरिमित रुप से बढ़ती है।

(iv) परिमेय संख्या



चित्र 2.04

यह रेखा दोनो तरफ अपरिमित रूप से बढ़ती है।

लेकिन यहाँ हम $-1, 0; 0, 1$ इत्यादि के बीच भी संख्या पाते है। दो परिमेय संख्या के बीच में

परिमेय संख्या ज्ञात करने के लिए माध्य की अवधारणा का उपयोग कर सकते है। दो परिमेय संख्याओं के मध्य अपरिमित संख्याएँ होती है।

समय के साथ–साथ संख्याओं का विकास हुआ। सर्वप्रथम प्राकृत संख्या का प्रचलन हुआ। दो प्राकृत संख्याओं का योग व दो प्राकृत संख्याओं का गुणा भी प्राकृत संख्या होती है। जिन्हें हम N से प्रकट करते हैं।

$$N = 1, 2, 3 \dots$$

अगर समीकरण

$$x + 7 = 7$$

का हल किया जाये तो x का मान शून्य होगा। अतः हम इस समीकरण का प्राकृत संख्या से हल प्राप्त नहीं कर सकते इसलिए प्राकृत संख्या के समूह में शून्य को सम्मलित कर पूर्ण संख्या नया नाम दिया जिसे हम W से प्रदर्शित करते है।

$$W = 0, 1, 2, 3, \dots$$

यदि समीकरण $x + 15 = 6$ का हल लिया जाये और x का मान ज्ञात करें तो हमें $x = -9$ संख्या की आववश्यकता होती है जो पूर्ण संख्या में नहीं है। संख्या रेखा के बांई और चलने पर हम ऋणात्मक संख्या का समूह प्राप्त होगा जो पूर्णांको (धनात्मक एवं ऋणात्मक) को दर्शाता है जिसे हम Z से निरूपित करते हैं।

$$Z = -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$$

अब हम देखते है कि दो पूर्णांको के मध्य कुछ संख्या प्रतीत होती है जो किसी पूर्णांक को पूर्णांक से भाग देने पर प्राप्त होती हैं। जैसे $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \dots$ संख्यायें प्राप्त होती है। इन संख्याओं को परिमेय संख्या (rational number) समुह Q से प्रकट किया जाता है।

जैसे कि आप परिमेय संख्या की परिभाषा से परिचित होंगे।

ऐसी संख्या परिमेय संख्या कहलाती है जिसे $\frac{p}{q}$ के रूप में लिखा जा सकता हो जहाँ p और q पूर्णांक हैं तथा $q \neq 0$ है तथा p को q से विभाजित करने पर भाग पूरा–पूरा जाता है अथवा दशमलव प्राप्त होता है। परिमेय संख्याओं में प्राकृत संख्या, पूर्ण संख्याओं और पूर्णांक संख्याओं का समावेश होता है।

किन्हीं दो दी हुई परिमेय संख्याओं के बीच अपरिमित रूप से अनेक परिमेय संख्याएँ होती है।

2.02 अपरिमेय संख्या

हम संख्या रेखा को पुनः देखे तो इस रेखा पर स्थित सभी संख्याओं का समावेश हो गया है या नहीं, अभी भी संख्याएं शेष है। अब हम उन संख्याओं पर चर्चा करेंगे जो परिमेय संख्याएँ नहीं होती है उन संख्याओं को औपचारिक तौर पर अपरिमेय संख्याएँ (irrational number) कहा जाता है। यदि इसे $\frac{p}{q}$ के रूप में न लिखा जा सकता हो जहाँ p और q पूर्णांक हैं और $q \neq 0$ है। जैसा कि आप जानते है कि अपरिमित रूप से अनेक परिमेय संख्याएँ होती है। इसी प्रकार, अपरिमेय संख्याएँ भी अपरिमित रूप से अनेक होती है जिसके कुछ उदाहरण हैं।

$\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}, \pi,\ 0.15150015000150000....$

जैसा कि आपको याद होगा कि जब कभी हम प्रतीक "$\sqrt{\ }$" का प्रयोग करते है तब हम यह मानकर चलते हैं कि वह संख्या का धनात्मक वर्गमूल है। अतः $\sqrt{25}=5$ है, यद्यपि 5 और –5 दोनों ही संख्या 25 का वर्गमूल हैं।

अतः संख्या रेखा पर एक साथ ली गई सभी परिमेय संख्याओं और अपरिमेय संख्याओं के समूह को वास्तविक संख्याओं (real number) का नाम दिया जाता है जिसे R द्वारा प्रदर्शित किया जाता है।

2.03 वास्तविक संख्या और उनके दशमलव प्रसार

अब हम वास्तविक संख्या के दशमलव प्रसार पर विचार इस प्रश्न के साथ करेंगे कि क्या परिमेय और अपरिमेय संख्याओं में भेद करने के लिए इनके दशमलव प्रसारों का प्रयोग कर सकते हैं? वास्तविक संख्याओं के दशमलव प्रसार का प्रयोग करके किस प्रकार संख्या रेखा पर संख्या रेखा पर इन संख्याओं को संख्या रेखा पर प्रदर्शित किया जा सकता है।

यहाँ इनके तीन उदाहरण ले $\frac{3}{8}, \frac{8}{9}, \frac{6}{7}$

$$\frac{3}{8}=0.375$$

$$\frac{8}{9}=0.88888...$$

$$\frac{6}{7}=0.857142857142...$$

उपर्युक्त उदाहरणों में $\frac{p}{q},\ (q\neq 0)$ सभी में परिमेय संख्या पर लागू है तो q का p में भाग देने से प्राप्त विभिन्न स्थितियाँ जिसमें

प्रथम स्थिति : शेष शून्य हो जाता है।

$\frac{3}{8}$ वाले उदाहरण से देखते हैं कि कुछ चरणों के बाद शेष शून्य हो जाता है। $\frac{3}{8}$ का दशमलव प्रसार 0.375 है। इसी तरह अन्य उदाहरण हो सकते हैं $\frac{1}{4}=0.25,\ \frac{456}{125}=3.648$ है।

इन सभी स्थितियों में परिमित चरणों के बाद दशमलव प्रसार समाप्त हो जाता है। ऐसी संख्याओं के दशमलव प्रसार को **सांत (terminating)** दशमलव कहते हैं।

दूसरी स्थिति : शेष कभी भी शून्य नहीं होता परन्तु हमें भागफल में अंको का एक पुनरावृति खण्ड प्राप्त होता है। उदाहरण के लिए $\frac{8}{9}=0.888888...$ और $\frac{6}{7}=0.857142857142...$ हैं।

यह दशमलव प्रसार **असांत आवृर्ती या अनवसानी आवर्ती (non-terminating recurring)** है।

$\frac{8}{9}$ के भागफल में 8 की पुनरावृति होती है हम इसे $0.\bar{8}$ के रूप में लिखते है। इसी प्रकार $\frac{6}{7}$ में 857142 की पुरावृति होती है इसलिये हम $\frac{6}{7}$ को $0.\overline{857142}$ के रूप में लिखते हैं। जहाँ अंकों के ऊपर लगाया गया दण्ड अंको के उस खण्ड को प्रकट करता है जिसकी पुनरावृति होती है। साथ ही 2.67474 . . . को $2.6\overline{74}$ के रूप में लिखा जा सकता है। इन सभी उदाहरणों से अनवसानी आवर्त (पुनरावृति) दशमलव प्रसार प्राप्त होते हैं। इस प्रकार हमने पाया कि परिमेय संख्याओं के दशमलव प्रसार की केवल दो स्थितियाँ होती है या तो वे सांत होते है या अनवसानी (असांत) आवर्ती होते है।

उदाहरण 1 : दिखाईए कि 2.152786 एक परिमेय संख्या है या 2.152786 को $\frac{p}{q}$ के रूप में व्यक्त कीजिए जहाँ p और q पूर्णांक हैं और $q \neq 0$ है।

हल : यहाँ $2.152786 = \frac{2152786}{1000000}$ है। अतः यह एक परिमेय संख्या है।

उदाहरण 2 : दिखाईए कि 0.8888 . . . = $0.\bar{8}$ को $\frac{p}{q}$ के रूप में व्यक्त किया जा सकता है। जहाँ p और q पूर्णांक है और $q \neq 0$ है।

हल : माना कि $x = 0.\bar{8}$

$$x = 0.8888 \quad \ldots \text{(i)}$$

दोनों और 10 से गुणा करने पर

$$10x = 10 \times (.8888....) = 8.888$$

$$10x = 8.888... \quad \ldots \text{(ii)}$$

समीकरण (i) को (ii) से घटाने पर

$$9x = 8$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{8}{9}$$

उदाहरण 3 : दिखाईए कि $0.\overline{47} = 0.474747\ldots$ को $\frac{p}{q}$ के रूप में व्यक्त किया जा सकता है। जहाँ p और q पूर्णांक हैं और $q \neq 0$ है।

हल : माना कि $x = 0.4747...$ . . . (i)

यहाँ दो अंको की पुरावृति है, इसलिए दोनो और 100 से गुणा करने पर

$$100x = 47.474747... \quad \ldots \text{(ii)}$$

समीकरण (i) को (ii) से घटाने पर

$$99x = 47$$

$$\therefore \quad x = \frac{47}{99}$$

उदाहरण 4 : दिखाईए कि 0.123 = 0.123333 . . . को $\frac{p}{q}$ के रूप में व्यक्त किया जा सकता है, जहाँ p और q पूर्णांक है, और $q \neq 0$ है।

हल : माना कि

$$x = 0.12333 \qquad \ldots (i)$$

समीकरण (i) को दोनो और 100 से गुणा करने पर

$$100x = 12.333 \qquad \ldots (ii)$$

समीकरण (ii) को दोनो और 10 से गुणा करने पर

$$1000x = 123.333 \qquad \ldots (iii)$$

समीकरण (ii) को (iii) से घटाने पर

$$900x = 111.000$$

$$x = \frac{111}{900} = \frac{37}{300}$$

अतः अनवसानी आवर्ती दशमलव प्रसार वाली प्रत्येक संख्या को $\frac{p}{q}(q \neq 0)$ के रूप में व्यक्त किया जा सकता हैं।

एक परिमेय संख्या का दशमलव प्रसार या तो सांत होता है या अनवसानी आवर्ती होता है। साथ ही वह संख्या, जिसका दशमलव प्रसार सांत या अनवसानी आवर्ती है, एक परिमेय संख्या होती है। अब हम $x = 0.150150015000150000\ldots$ जैसी संख्या पर विचार करते हैं तो हम देखते हैं कि इस संख्या को हम किसी भी प्रकार से $\frac{p}{q}$ (जहाँ p व q पूर्णांक तथा $q \neq 0$) रूप में परिवर्तिति नहीं करसकते है, अतः इस प्रकार की संख्या के इस विशेष गुण के कारण इन्हें हम अपरिमेय संख्या कहते है। अतः जिन संख्याओं का दशमलव प्रसार अनवसानी अनावर्ती (non-terminating non-recurring) होता है उन्हें अपरिमेय संख्या कहते है।

x के समरूप अपरिमित रूप से अनेक अपरिमेय संख्याएँ जनित कर सकते हैं।

कुछ अपरिमेय संख्याओं $\sqrt{2}, \sqrt{3}$ का दशमलव प्रसार दिये गये हैं:

$$\sqrt{2} = 1.41421356237\ldots$$

$$\sqrt{3} = 1.73205080756\ldots$$

वर्षों से गणितज्ञों ने अपरिमेय संख्याओं के दशमलव प्रसार में अधिक से अधिक अंको को उत्पन्न करने की विभिन्न तकनीकें विकसित की है। जैसा कि विभाजन विधि (division method) से $\sqrt{2}$ के

दशमलव प्रसार से अंको को ज्ञात करना। सुल्ब सूत्रों (जीवा–नियमों) में, जो वैदिक युग (500 ई.पू. – 800 ई.पू.) के गणितीय ग्रंथ है से सन्निकट मान प्राप्त होते है। इसी तरह π के दशमलव प्रसार में अधिक से अधिक अंक प्राप्त करने का इतिहास काफी रोचक रहा है। यूनान का प्रसिद्ध वैज्ञानिक आर्कमिडीज जिसने π के दशमलव प्रसार में अंकों को अभिकलतित किया था उसने यह दिखाया कि $3.140845 < \pi < 3.142857$ आर्यभट्ट (476 ई – 505 ई) ने जो एक महान भारतीय गणितज्ञ और खगोलविद थे, चार दशमलव स्थानों तक π का शुद्ध मान $\pi = 3.1416 \ldots$ ज्ञात किया था। उच्च चाल कम्पयूटरों (संगकणकों) से और उन्नत कलन विधियों (algorithms) का प्रयोग करके अधिक से अधिक दशमलव स्थानों तक π का मान अभिकलित किया जा चुका है।

उदाहरण 5 : 1 / 7 और 2 / 7 में बीच की एक अपरिमेय संख्या ज्ञात कीजिए।

हल : हम सरलता से परिकलित कर सकते हैं कि

$$\frac{1}{7} = 0.142857142857\ldots = 0.\overline{142857}$$

$$\frac{2}{7} = 0.2857142857142\ldots = 0.\overline{2857142}$$

अब $\frac{1}{7}$ और $\frac{2}{7}$ के बीच की एक अपरिमेय संख्या ज्ञात करने के लिए, हम एक ऐसी संख्या ज्ञात करते हैं जो इन दोनों के बीच स्थित अनवसानी अनावर्ती होती है। इस प्रकार अपरिमित रूप से अनेक संख्याएँ ज्ञात कर सकते हैं। इस प्रकार की संख्या का एक उदाहरण $0.150150015000150000 \ldots$ है।

प्रश्नमाला 2.1

1. बताइए कि निम्नलिखित संख्याओं में कौन–कौन संख्याएँ परिमेय और कौन–कौन संख्याएँ अपरिमेय हैः

   (i) $\sqrt{23}$ (ii) $\sqrt{225}$ (iii) 0.3797 (iv) 7.4784478 . . .

   (v) 1.101001000100001 . . .

2. ऐसी तीन संख्याएँ लिखिए जिनके दशमलव प्रसार अनवसानी अनावर्ती हैं।

3. निम्नलिखित भिन्नों को दशमलव रूप में लिखिए और बताइए कि प्रत्येक का दशमलव प्रसार किस प्रकार का है।

   (i) $\frac{36}{100}$ (ii) $\frac{1}{11}$ (iii) $4\frac{1}{8}$ (iv) $\frac{3}{13}$

   (v) $\frac{2}{11}$ (vi) $\frac{329}{400}$

4. निम्नलिखित को $\frac{p}{q}$ के रूप में व्यक्त कीजिए जहाँ p और q पूर्णांक हैं तथा $q \neq 0$ है।

   (i) 0.3 (ii) $0.\overline{47}$ (iii) $1.\overline{27}$ (iv) $1.2\overline{35}$

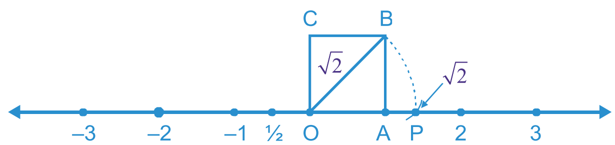
5. परिमेय संख्याओं $\frac{5}{7}$ और $\frac{9}{11}$ के बीच तीन अलग–अलग अपरिमेय संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

संख्या रेखा पर अपरिमेय संख्याओं का निरूपण

जैसा कि वास्तविक संख्या या तो परिमेय या अपरिमेय हो सकती। अतः हम यह कह सकते हैं कि प्रत्येक वास्तविक संख्या को संख्या रेखा के एक अद्वितीय बिन्दु से निरूपित किया जाता है साथ ही संख्या रेखा का प्रत्येक बिन्दु एक अद्वितीय वास्तविक संख्या को निरूपित करता है। यही कारण है कि संख्या रेखा को वास्तविक संख्या रेखा (real number line) कहा जाता है। निम्न उदाहरणों से संख्या रेखा पर हम कुछ अपरिमेय संख्याओं का स्थान निर्धारण करने की विधि का अध्ययन करेंगे।

उदाहरण 6 : संख्या रेखा पर $\sqrt{2}$ का स्थान निरूपित कीजिए।

हल : यह सरलता से देखा जा सकता है। एकक (मात्रक) लम्बाई की भुजा वाला वर्ग OABC लीजिए (देखिए आकृति)

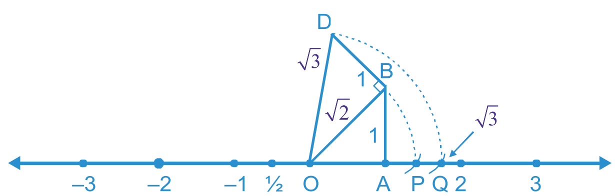


चित्र 2.05

तब आप बौधायन प्रमेय लागू करके यह देख सकते है कि $OB = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ है। आकृति में $OB = \sqrt{2}$ एक परकार की सहायता से O को केन्द्र और OB को त्रिज्या मानकर एक चाप (arc) खींचिए जो संख्या रेखा को बिन्दु P पर काटता है। तब बिन्दु P संख्या रेखा पर $\sqrt{2}$ से संगत होता है।

उदाहरण 7 : वास्तविक संख्या रेखा पर $\sqrt{3}$ का स्थान निर्धारण कीजिए।

हल : हम चित्र 2.06 को पुनः ले



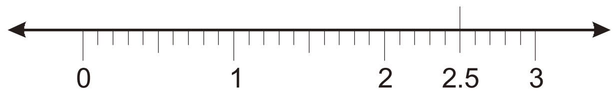
चित्र 2.06

OB पर एकक लम्बाई वाले लंब BD की रचना कीजिए (जैसा चित्र 2.06 में दिखाया गया है।) तब बौधायन प्रमेय लागू करने पर हमें $OD = \sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{3}$ प्राप्त होता है। एक परकार की सहायता से O को केन्द्र और OD को त्रिज्या मानकर एक चाप खींचिए जो संख्या रेखा को बिन्दु Q पर काटता है। तब Q, $\sqrt{3}$ के संगत है।

इसी प्रकार $\sqrt{n-1}$ का स्थान निर्धारण हो जाने के बाद आप $\sqrt{n}$ का स्थान निर्धारण कर सकते हैं, जहाँ n एक धनात्मक पूर्णांक है।

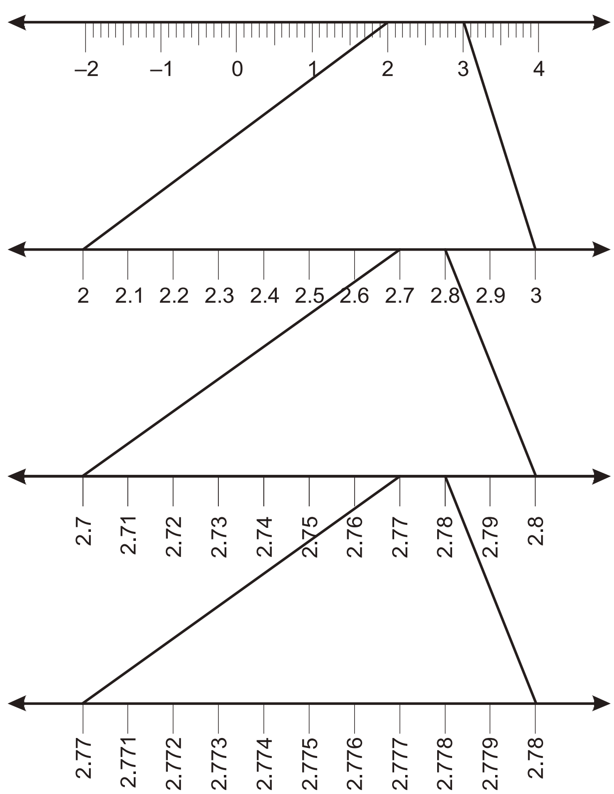
उत्तरोत्तर आवर्धन प्रक्रम

पिछले अनुच्छेद में आपने यह देखा कि प्रत्येक वास्तविक संख्या का एक दशमलव प्रसार होता है। इन की सहायता से हम इस संख्या को संख्या रेखा पर निरूपित कर सकते हैं। जिस प्रकार हम स्केल पर देखते है उसी प्रकार हम संख्या रेखा पर 2.5 लें तो



चित्र 2.07

उदाहरण के तोर पर हम संख्या रेखा पर 2.775 का स्थान निर्धारण करना चाहते हैं तो हम नीचे दी गई आकृति पर ध्यान दें कि दी गई संख्या 2 और 3 के बीच की स्थित संख्या है। 2 और 3 के बीच संख्या रेखा को हम 10 बराबर भागों में बाँट देते हैं। फिर 2.7 और 2.8 को पुनः दस बराबर भागों में बांटते हैं।



चित्र 2.08

पुनः 2.77 और 2.78 के बीच स्थित स्थान को 10 बराबर भागो में बाँटते हैं। अगला चिह्न 2.775 इस विभाजन का पाँचवा चिह्न है। ऊपर दिये गये संख्या रेखा पर संख्याओं को देखने से इस प्रक्रम को

उत्तरोत्तर आवर्धन प्रक्रम (process of successive magnification) कहा जाता है। इस तरह हमने यह देखा है कि पर्याप्त रूप से उत्तरोतर आवर्धन द्वारा सांत दशमलव वाले प्रसार वाली वास्तविक संख्या की संख्या रेखा पर स्थिति (या निरूपण) को स्पष्ट रूप से देखा जा सकता है।

इसी प्रकार संख्या रेखा पर अनवसानी आवर्ती दशमलव प्रसार वाली एक वास्तविक संख्या की स्थिति को उत्तरोतर आवर्धन करके संख्या रेखा पर संख्या की स्थिति देख सकते हैं।

इसी प्रक्रिया को संख्या रेखा पर अनवसानी अनावर्ती दशमलव प्रसार वाली वास्तविक संख्या को देखने में भी लागू किया जा सकता है।

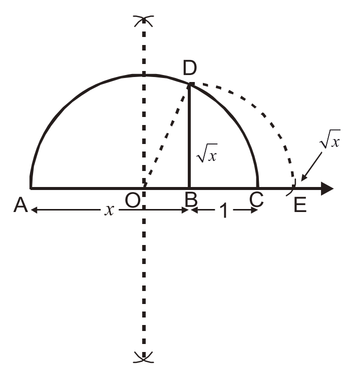
ऊपर दिये गये उदाहरणों से उत्तरोतर आवर्धनों की कल्पना के आधार पर हम पुनः कह सकते हैं कि प्रत्येक वास्तविक संख्या को संख्या रेखा पर एक अद्वितीय बिन्दु से निरूपति किया जा सकता है। साथ ही संख्या रेखा का प्रत्येक बिन्दु एक और केवल एक वास्तविक संख्या को निरूपित करता है।

2.04 वास्तविक संख्या का ज्यामितीय रूप से निरूपण

यदि a एक प्राकृत संख्या है, तब $\sqrt{a}=b$ का अर्थ है $b^2=a$ और $b>0$. यही परिभाषा धनात्मक वास्तविक संख्याओं पर भी लागू की जा सकती है। मान लीजिए $a>0$ एक वास्तविक संख्या है तब $\sqrt{a}=b$ का अर्थ है $b^2=a$ और $b>0$ है।

अब हम दिखाएँगे कि किस प्रकार $\sqrt{x}$ को, जहाँ x एक दी हुई धनात्मक वास्तविक संख्या है ज्यामितीय रूप से ज्ञात किया जाता है।

$\sqrt{x}$ का मान ज्ञात करने के लिए जहाँ x एक धनात्मक वास्तविक संख्या है, एक दी हुई रेखा पर एक स्थिर बिन्दु A से x दूरी पर चिह्न लगाने पर एक ऐसा बिन्दु B लेते है जिससे कि AB $=x$ हो जैसा कि आकृति में दिखाया गया है। एक बिन्दु C मान लीजिए जिससे BC $=1$ है।



चित्र 2.09

आकृति में Δ OBD एक समकोण त्रिभुज है।

अतः $$OC=OD=OA=\frac{AB+BC}{2}=\frac{x+1}{2} \text{ एकक}$$

$$OB=AB-OA=x-\left(\frac{x+1}{2}\right)=\frac{x-1}{2} \text{ एकक}$$

अतः बौधायन प्रमेय लागू करने पर यह प्राप्त होता है।

$$BD^2 = OD^2 - OB^2 = \left(\frac{x+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{x-1}{2}\right)^2 = \frac{4x}{4} = x$$

$\Rightarrow \qquad BD^2 = x$

$\Rightarrow \qquad BD = \sqrt{x}$ है।

इस रचना से यह दर्शाने की एक चित्रीय और ज्यामितीय विधि प्राप्त हो जाती है कि सभी वास्तविक संख्याओं $x > 0$ के लिए $\sqrt{x}$ का अस्तित्व है। यदि हम संख्या रेखा पर $\sqrt{x}$ की स्थिति जानना चाहते हैं, तो आइए हम संख्या रेखा पर B को शून्य मान लें और C को 1 मान लें, B को केन्द्र और BD को त्रिज्या मानकर एक चाप जो संख्या रेखा को E पर काटता है। आकृति से तब E, $\sqrt{x}$ निरूपित करता है। (देखिए चित्र क्रमांक 2.9)

व्यापक रूप से घनमूलों, चतुर्थमूलों और अधिक से अधिक n वें मूलों जहाँ n एक धनात्मक पूर्णांक है से विस्तार किया जा सकता है। जैसा कि पिछली कक्षाओं में वर्गमूलों एवं घनमूलो का अध्ययन कर चुके हैं।

$\sqrt[3]{27}$ क्या है? हम जानते है कि $\sqrt[3]{27} = 3$ है। $\sqrt[5]{243}$ का मान ज्ञात करे $b = \sqrt[5]{243}$ हो $b^5 = 243$, $b^5 = (3)^5 \Rightarrow b = 3$ है अतः $\sqrt[5]{243} = 3$ है। इस प्रकार $\sqrt[n]{a}$ को परिभाषित कर सकते है। जहाँ $a > 0$ वास्तविक संख्या है और n एक धनात्मक पूर्णांक है। $a > 0$ एक वास्तविक संख्या है और n एक धनात्मक पूर्णांक तब $\sqrt[n]{a} = b$ जबकि $b^n = a$ और $b > 0$.

प्रतीक "$\sqrt[n]{\ }$" को करणी चिन्ह (radical sign) n वें मूलो, जहाँ n एक धनात्मक पूर्णांक है। $\sqrt[n]{a}$ को $a^{1/n}$ को रूप में लिखा जाता है।

2.05 वास्तविक संख्याओं पर संक्रियाएँ

जैसा कि पिछली कक्षाओं में परिमेय संख्याओं का अध्ययन किया जिसमें परिमेय संख्याएं योग और गुणन के क्रम विनिमेय (commutative), साहचर्य (associative) और बंटन (distributive) नियमों को संतुष्ट करती है और हम यह भी पढ़ चुके हैं कि यदि हम दो परिमेय संख्याओं को जोड़े, घटाएँ, गुणा करें तब भी हमें एक परिमेय संख्या प्राप्त होती है (अर्थात् जोड़, घटाना, गुणा के सापेक्ष परिमेय संख्याएँ संवृत closed होती हैं)। यहाँ हम यह भी देखते है कि अपरिमेय संख्याएँ भी योग और गुणन के क्रम विनिमेय, साहचार्य और बंटन–नियमों को संतुष्ट करती हैं। परन्तु, अपरिमेय संख्याओं के योग, अंतर, भागफल और गुणनफल सदा अपरिमेय नहीं होते हैं। उदाहरण $\left(\sqrt{5}\right) - \left(\sqrt{5}\right)$, $\left(\sqrt{7}\right) \cdot \left(\sqrt{7}\right)$ और $\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{13}}$ परिमेय संख्याएँ है।

इसी प्रकार हम देखते हैं कि जब एक परिमेय संख्या में अपरिमेय संख्या जोडते है और एक परिमेय संख्या को एक अपरिमेय संख्या से गुणा करते है, तो क्या होता है?

उदाहरण के लिए $\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है, तब $2+\sqrt{5}$ और $2\sqrt{5}$ को कौनसी संख्या मानेंगे? निःसन्देह ये अपरिमेय संख्याएं है क्योंकि इन संख्याओं का भी अनवसानी अनावर्ती दशमलव प्रसार प्राप्त होता है। इसी प्रकार $2+\sqrt{3}$ और $2\sqrt{3}$ भी अपरिमेय संख्या है।

अनवसानी अनावर्ती दशमलव प्रसार वाली अपरिमेय संख्याओं को निम्न उदाहरणों से और समझा जा सकता है।

उदाहरण 8 : जाँच कीजिए कि $7\sqrt{5}, \frac{7}{\sqrt{5}}, \sqrt{2}, \sqrt{2}+24, \pi-3$ अपरिमेय संख्याएँ हैं या नहीं।

हल : $\sqrt{5}=2.236..., \sqrt{2}=1.4142..., \pi=3.1415$ है।

तब $7\sqrt{5}=15.652..., \frac{7}{\sqrt{5}}=\frac{7\sqrt{5}}{\sqrt{5}\sqrt{5}}=\frac{7\sqrt{5}}{5}=3.1304...$ है।

$\sqrt{2}+24=25.4142.... \ \pi-3=0.1415$

ये सभी अनवसानी अनावर्ती दशमलव है। ये सभी अपरिमेय संख्याएँ हैं।

उदाहरण 9 : $2\sqrt{3}+3\sqrt{5}$ और $\sqrt{3}-\sqrt{5}$ का योग कीजिए।

हल : $\left(2\sqrt{3}+3\sqrt{5}\right)+\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)$

$=\left(2\sqrt{3}+\sqrt{3}\right)+\left(3\sqrt{5}-\sqrt{5}\right)$

$=(2+1)\sqrt{3}+(3-1)\sqrt{5}$

$=3\sqrt{3}+2\sqrt{5}$

उदाहरण 10 : $6\sqrt{7}$ को $2\sqrt{7}$ से गुणा कीजिए।

हल : $6\sqrt{7}\times2\sqrt{7}=6\times2\times\sqrt{7}\times\sqrt{7}$

$=12\times7=84$

उदाहरण 11 : $8\sqrt{15}$ में $2\sqrt{5}$ से भाग दीजिए।

हल : $8\sqrt{15}\div2\sqrt{5}=\frac{8\sqrt{3\times5}}{2\sqrt{5}}=\frac{8\sqrt{3}\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}=4\sqrt{3}$

इन उदाहरणों से हम निम्नलिखित निष्कर्ष निकाल सकते है

(i) एक परिमेय संख्या और एक अपरिमेय संख्या का जोड या घटाने पर एक अपरिमेय संख्या प्राप्त होती है।

(ii) एक अपरिमेय संख्या के साथ एक शून्येतर (nonzero) परिमेय संख्या का गुणनफल या भागफल से एक अपरिमेय संख्या प्राप्त होता है।

(iii) यदि हम दो अपरिमेय संख्याओं को जोड़े, घटाये, गुणा करें या एक अपरिमेय संख्या में दूसरी अपरिमेय संख्या का भाग दे तो परिणाम परिमेय या अपरिमेय कुछ भी हो सकता है।

अब यहाँ वर्ग मूलों से संबंधित कुछ सर्वसमिकाएँ (identities) दे रहे हैं, जो परिमेयकरण के लिये उपयोगी होंगी।

मान लीजिए a और b धनात्मक वास्तविक संख्याएँ हैं तब

(i) $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ (ii) $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

(iii) $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right) = a-b$

(iv) $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{c}-\sqrt{d}\right) = \sqrt{ac}-\sqrt{ad}+\sqrt{bc}-\sqrt{bd}$

(v) $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2 = a+2\sqrt{ab}+b$

(vi) $\frac{1}{a+\sqrt{b}} = \frac{a-\sqrt{b}}{a^2-b}$

(vii) $\frac{1}{a+b\sqrt{x}} = \frac{a-b\sqrt{x}}{a^2-b^2x}$ जहाँ x एक प्राकृत संख्या है

(viii) $\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x-y}$ जहाँ x तथा y प्राकृत संख्या है।

ऊपर दी गई सर्वसमिकाओं का उपयोग हर की परिमेयकरण (rationalise) में निम्न उदाहरणों में किया जायेगा। जब एक व्यंजक के हर में वर्गमूल वाला एक पद होता है या कोई संख्या करणी चिह्न अन्दर हो तब इसे ऐसे तुल्य व्यंजक में हर को परिमेय संख्या में परिवर्तित करने की क्रिया विधि को हर का परिमेय करण कहा जाता है।

उदाहरण 12 : $\frac{1}{\sqrt{2}}$ के हर का परिमेयकरण कीजिए।

हल : हम जानते है कि $\sqrt{2}\cdot\sqrt{2} = 2$ परिमेय है। $\sqrt{x}$

$\frac{1}{\sqrt{2}}$ को $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ से गुणा करने पर

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\frac{1}{\sqrt{2}}$ का संख्या रेखा पर स्थान निर्धारण सरल हो जाता है। यह 0 और $\sqrt{2}$ के मध्य स्थित है।

उदाहरण 13 : $\frac{1}{2+\sqrt{3}}$ के हर का परिमेयकरण कीजिए।

हल : ऊपर दी गई सर्वसमिका (VI) का प्रयोग करते है

$\frac{1}{2+\sqrt{3}}$ को $\left(2-\sqrt{3}\right)$ से गुणा करने और भाग देने पर

$$\frac{1}{2+\sqrt{3}}=\frac{1}{\left(2+\sqrt{3}\right)}\times\frac{\left(2-\sqrt{3}\right)}{\left(2-\sqrt{3}\right)}=\frac{2-\sqrt{3}}{4-3}=2-\sqrt{3}$$

उदाहरण 14 : $\frac{5}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}$ के हर का परिमेयकरण कीजिए।

हल : ऊपर दी गई सर्वसमिका (iii) का प्रयोग करते है।

अतः $$\frac{5}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}=\frac{5}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}\times\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}=\frac{5\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)}{3-5}=\left(-\frac{5}{2}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)$$

उदाहरण 15 : $\frac{1}{7+3\sqrt{2}}$ के हर का परिमेयकरण कीजिए।

हल : $$\frac{1}{7+3\sqrt{2}}=\frac{1}{7+3\sqrt{2}}\times\left(\frac{7-3\sqrt{2}}{7-3\sqrt{2}}\right)=\frac{7-3\sqrt{2}}{49-18}=\frac{7-3\sqrt{2}}{31}$$

प्रश्नमाला 2.2

1. निम्नलिखित संख्याओं में से परिमेय और अपरिमेय संख्याएं बताइए।

(i) $2-\sqrt{5}$ (ii) $\left(3+\sqrt{23}\right)-\sqrt{23}$

(iii) $\frac{2\sqrt{11}}{7\sqrt{11}}$ (iv) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

(v) 5π

2. निम्नलिखित के हरों का परिमेयकरण कीजिए

(i) $\frac{1}{5+3\sqrt{7}}$ (ii) $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ (iii) $\frac{1}{\sqrt{7}-2}$

3. यदि $\frac{3+2\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}}=a+b\sqrt{2}$ जहाँ a और b परिमेय है तब a और b का मान ज्ञात कीजिए।

2.06 वास्तविक संख्याओ के लिए घातांक–नियम

जैसा कि आपने घातांक–नियमों का प्रयोग पिछली कक्षाओं में किया होगा कि a को आधार (base) और m और n को घातांक (exponents) कहा जाता है।

यहाँ a, n और m प्राकृत संख्याएं हैं।

(i) $a^m a^n = a^{m+n}$ (ii) $\left(a^m\right)^n = a^{mn}$

(iii) $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, m > n$ (iv) $a^m b^m = \left(ab\right)^m$

$\left(a\right)^{\circ}$ क्या है? इसका मान 1 है। $\left(a\right)^{\circ} = 1$

$\dfrac{1}{a^n} = a^{-n}$ प्राप्त करते हैं। अब हम इन नियमों को ऋणात्मक घातांकों पर भी लागू कर सकते हैं जैसे

(i) $7^2 \cdot 7^{-5} = 7^{2-5} = 7^{-3} = \dfrac{1}{7^3}$

(ii) $\left(5^3\right)^{-7} = 5^{-21}$

(iii) $\dfrac{23^{-15}}{23^7} = 23^{-15-7} = 23^{-22}$

(iv) $\left(6\right)^{-3}\left(7\right)^{-3} = \left(42\right)^{-3}$

घातांक–नियम जिनका हम अध्ययन कर चुके हैं। हम उस स्थिति में भी लागू कर सकते है जबकि आधार धनात्मक वास्तविक संख्या और घातांक परिमेय संख्या हो। पिछले अनुच्छेद में हमने $\sqrt[n]{a}$ को इस प्रकार परिभाषित किया है जहाँ $a > 0$ एक वास्तविक संख्या है

$$x^n = a \Rightarrow x = a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$$

$$4^{3/2} = \left(4^{1/2}\right)^3 = 2^3 = 8$$

$$4^{3/2} = \left(4^3\right)^{1/2} = \left(64\right)^{1/2} = \left(8^2\right)^{1/2} = 8$$

मान लीजिए $a > 0$ एक वास्तविक संख्या है तथा m और n ऐसे पूर्णांक हैं कि 1 के अतिरिक्त इनका कोई अन्य उभयनिष्ठ गुणनखण्ड नहीं है और $n > 0$ है। तब

(i) $a^{m/n} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$ (ii) $\sqrt[n]{a} = \sqrt[n\times p]{a^p}$

मान लीजिए $a > 0$ एक वास्तविक संख्या है और p और q परिमेय संख्याएँ है, तब

(i) $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$ (ii) $\left(a^p\right)^q = a^{pq}$

(iii) $\dfrac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$ (iv) $a^p b^p = \left(ab\right)^p$

सरल कीजिए

(i) $4^{2/3} \cdot 4^{1/3} = 4^{2/3+1/3} = 4^{3/3} = 4^1 = 4$ (ii) $\left(3^{1/5}\right)^8 = 3^{8/5}$

(iii) $\dfrac{9^{1/5}}{9^{1/3}} = 9^{1/5-1/3} = 9^{(3-5)/15} = 9^{-2/15}$

प्रश्नमाला 2.3

1. ज्ञात कीजिए :

(i) $81^{1/2}$ (ii) $64^{1/6}$ (iii) $(125)^{1/3}$

2. ज्ञात कीजिए :

(i) $4^{3/2}$ (ii) $32^{2/5}$ (iii) $16^{3/4}$

3. सरल कीजिए :

(i) $2^{2/3} \cdot 2^{1/7}$ (ii) $\left(\dfrac{1}{3^3}\right)^7$

4. x का मान ज्ञात कीजिए :

$$\left(\frac{3}{5}\right)^x \left(\frac{5}{3}\right)^{2x} = \frac{125}{27}$$

उत्तरमाला

प्रश्नमाला 2.1

1. (i), (iv) और (v) अपरिमेय ;

(ii) और

(iii) परिमेय है।

2. 0.01001000100001 . . .; 0.202002000200002 . . ., 0.00300030000 . . .

3. (i) 0.36 सांत ;

(ii) $0.\overline{09}$ अनवसानी पुनरावर्ती ;

(iii) 4.125 सांत ;

(iv) $0.\overline{230769}$ अनवसानी पुनरावर्ती

(v) $0.1\overline{18}$ अनवसानी पुनरावर्ती ;

(vi) 0.8225 सांत

4. (i) $\frac{1}{3}$ (ii) $\frac{47}{99}$ (iii) $\frac{14}{11}$ (iv) $\frac{233}{990}$

5. 0.7507500750007500075 . . .

0.767076700767000767 . . .

0.808008000800008 . . .

प्रश्नमाला 2.2

1. (i) अपरिमेय ; (ii) परिमेय ; (iii) परिमेय; (iv) अपरिमेय ; (v) अपरिमेय

2. (i) $-\frac{1}{38}\left(5-3\sqrt{7}\right)$; (ii) $-\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)$; (iii) $\frac{1}{3}\left(\sqrt{7}+2\right)$

3. $a=\frac{13}{7}, b=\frac{9}{7}$

प्रश्नमाला 2.3

1. (i) 9 ; (ii) 2 ; (iii) 5

2. (i) 8 ; (ii) 4 ; (iii) 8

3. (i) $2^{\frac{2}{21}}$; (ii) 3^{-21}

4. $x=3$