अध्याय **5**

समानुपात से राशियों की तुलना
(COMPARING QUANTITIES USING PROPORTIONS)

SCERT TELANGANA

5.1 परिचय

अपने दैनिक जीवन के कार्य करने समय हमें कई राशियों की तुलना करने की आवश्यकता होती है। हमने अनुपात और प्रतिशत का उपयोग राशियों की तुलना के लिये किया है। निम्न उदाहरण पर ध्यान दीजिये।

40 विद्यार्थी की एक कक्षा के नेता के लिये मतदान का आयोजनः स्निग्धा 24 मतों से कथा की पहली नेता बनी और सिरी 16 मतों से दूसरी नेता बनी। इसलिए स्निग्धा तथा सिरी के मतों का अनुपात 24:16 रहा। इसको न्यूनतम रूप में लिखने पर अनुपात क्या होगा? 3:2 होगा। सिरी और स्निग्धी का विलोमानुपात 2:3 होगा। अनुपात को आप क्या कहते हैं ?

दो राशियों की क्रमबद्ध तुलना अनुपात कहलाता है।

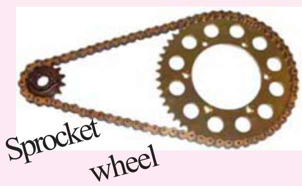
प्रयत्न करें :

1. आपकी साइकल के गेयर का अनुपात ज्ञात करो।

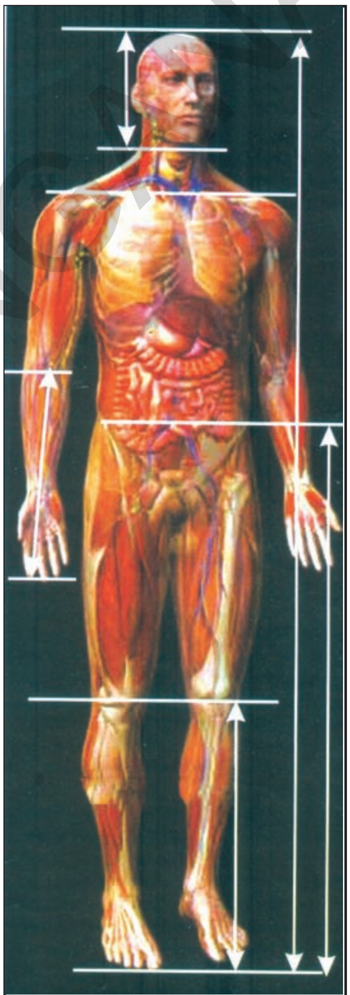
   पैडल पर के दाँतों की गिनती कीजिये और पीछे के पहिये के दाँतों की संख्या की गिनती कीजिये।

   चेन के पहिये के दाँतों की संख्या : *पीछे के पहिये के दाँतों की संख्या*

   इसे गेर की अनुपात कहते हैं। चेन पहिये के प्रत्येक घूर्णन में छोटे पहिये के घूमाव की संख्या नोट कीजिए ।



2. समाचार पत्रों से प्रतिशत से सम्बंधित पाँच स्थितियों के उदाहरण काट लीजिये।



मानव शरीर का सुनहरा अनुपात

इस सुनहरे अनुपात से मनुष्य नहीं बच सका अर्थात अपना शरीर इस दैविक समानुपात का सबसे उचित उदाहरण है।

निम्न पर ध्यान दे:

- ऊँचाई: नाभि और पैर के बीच की लम्बाई।
- भुजाओं की लम्बाई : सिर की लम्बाई
- उँगली तथा कोहनी के बीच की लम्बाई: कलाई और कोहनी के बीच लम्बाई।
- नाभि तथा पैर और के बीच लम्बाई : घुटने और पैर के बीच लम्बाई।

1.615:1 is Golden ratio.

गुणित समानुपात (Compound Proportion)

कभी-कभी हमें दो अनुपातों को एक अनुपात के रूप में प्रस्तुत करना पड़ता है, क्यों? इसे समझने के लिए हम निम्न उदाहरण को समझने की ओर ध्यान देंगे?

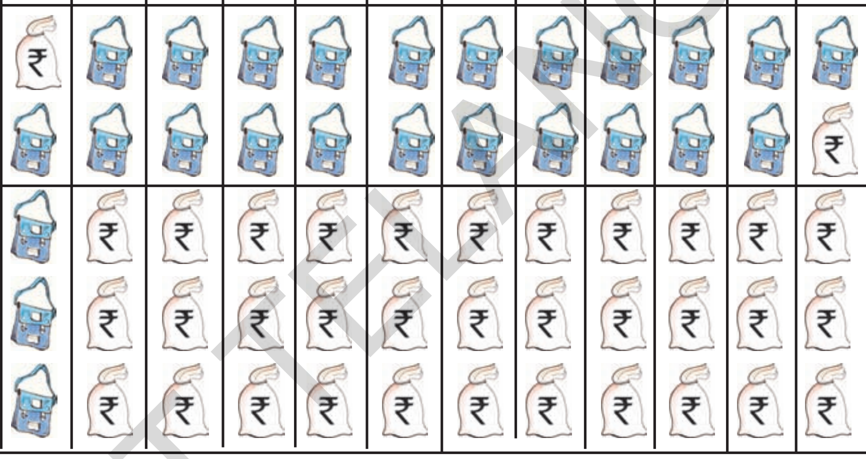
रामय्या और गोहपालम ने ₹ 2000 और ₹ 3000 की मूल राशि से एक व्यापार आरम्भ किया। वर्ष के अंत में वे दोनों अपना वार्षिक लाभ किस अनुपात में विभाजित करेंगे?

मूल राशि का अनुपात = 2000: 3000

= 2: 3

वार्षिक मूल राशि नीचे दी गयी है।

मास	जनवरी	फरवरी	मार्च	अप्रैल	मई	जून	जुलाई	अगस्त	सितंबर	अक्टूबर	नवंबर	दिसंबर	कु.यो
रामय्या का भाग													24
गोपालम का भाग													36



भागों का अनुपात = 24: 36

= 2: 3 और समय का अनुपात = 1:1

आप क्या निरीक्षण करेंगे? मूल राशि का अनुपात, भागों के अनुपात के समान है, जब समय समान हो। इसलिए वे दोनों अपना वार्षिक लाभ उनके भागों के अनुपात में विभाजित करेंगे, जो 2:3 है।

ऊपर्युक्त उदाहरण में

पहली स्थिति : रामय्या और गोपालम ने समान राशि ₹5000 से व्यापार आरम्भ किया। रामय्या एक वर्ष के लिये परन्तु गोपाल ने 9 माह के लिए। वे अपना लाभ कैसे विभाजित करेंगें? क्या आप चाहेंगे कि उन्होंने समान राशि से व्यापार आरंभ किया था, इसलिए उनका लाभ भी समान होना चाहिए?

मूलराशि का अनुपात = 5000: 5000 = 1:1

SCERT TELANGANA

मास	जनवरी	फरवरी	मार्च	अप्रैल	मई	जून	जुलाई	अगस्त	सितंबर	अक्टूबर	नवंबर	दिसंबर	कुल भाग
राशिया का भाग	₹	₹	₹	₹	₹	₹	₹	₹	₹	₹	₹	₹	12
गोपालम का भाग	₹	₹	₹	₹	₹	₹	₹	₹	₹	-	-	-	9

भागों का अनुपात = 12: 9 = 4:3 और समय का अनुपात = 12: 9 = 4: 3

उनकी मूल राशि समान है। अत: वे लाभ भी बराबर भागों में बाँट लेंगे अर्थात समय के अनुपात में

दूसरी स्थिति : मान लीजिए रामय्या ने 12 माह के लिए ₹ 2000 की मूल राशि लगाई और गोपालम ने 9 माह के लिए ₹ 3000 की राशि लगाई तो वार्षिक लाभ को वे किस अनुपात में विभाजित करेंगे? क्या वह मूल राशि का अनुपात होगा या समय का अनुपात होगा? रामय्या ने ज्यादा समय के लिए कम मूल राशि लगाई लेकिन गोपालम ने कम समय के लिए अधिक लगाई। यहाँ पर हमें दोनों के समय तथा मूल राशियों पर ध्यान देना आवश्यक है। यह हम कैसे करेंगे?

मूल राशि का अनुपात = 2000: 3000 = 2:3

समय का अनुपात = 12: 9 = 4:3

मास	जनवरी	फरवरी	मार्च	अप्रैल	मई	जून	जुलाई	अगस्त	सितंबर	अक्टूबर	नवंबर	दिसंबर	कुल भाग
रामय्या का भाग	₹ ₹	₹ ₹	₹ ₹	₹ ₹	₹ ₹	₹ ₹	₹ ₹	₹ ₹	₹ ₹	₹ ₹	₹ ₹	₹ ₹	24
गोपालम का भाग	₹ ₹ ₹	₹ ₹ ₹	₹ ₹ ₹	₹ ₹ ₹	₹ ₹ ₹	₹ ₹ ₹	₹ ₹ ₹	₹ ₹ ₹	₹ ₹ ₹	-	-	-	27

भागों का अनुपात = 24 : 27 = 8 : 9

= (2 × 12) : (3 × 9) = 8 : 9 (उपर्युक्त तालिका देखिए)

यहाँ पर मूल राशि का अनुपात 2:3 है और समय का अनुपात 4 : 3 है। इसलिए भागों का अनुपात (2 × 12) : (3 × 9) = 8 : 9. इसलिए यह उनका वार्षिक लाभ 8 : 9 के अनुपात में कोई संबंध है?

SCERT TELANGANA

भागों का अनुपात इस तरह लिखा जा सकता है 8 : 9 = 2 : 3 और 4 : 3

2 : 3 और 4 : 3.

बाह्य पदों का गुणनफल   मध्य पदों का गुणनफल

दो सामान्य अनुपातों को एक अनुपात में व्यक्त किया जा सकता है।

बाह्य पदों का गुणनफल = मध्य पदों का गुणनफल। इसको गुणित अनुपात कहते हैं। यह अनुपातों को उनके भिन्नों से गुणित करने पर प्राप्त होता है। और इसको इस तरह लिखा जाता है।

यदि a : b और c : d ये भिन्न अनुपात हैं तो उनका गुणित अनुपात $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ अर्थात ac: bd.

प्रयत्न कीजिए।

1. निम्न के गुणित अनुपात ज्ञात कीजिए :

   (a) 3 : 4 और 2 : 3   (b) 4 : 5 और 4 : 5   (c) 5 : 7 और 2 : 9

2. गुणित अनुपात के दैनिक जीवन में आने वाले उदाहरण दीजिए।

प्रतिशत (Percentage) :

निम्न उदाहरण पर ध्यान दीजिए।

एम.के. नगर के उन्नत पाठशाला के छात्रों ने एक चारिटी शो के टिकट बेचने का निर्णय लिया। आठवीं कक्षा के छात्र 300 टिकट और सातवीं कक्षा के छात्र 250 टिकट थे। शो के एक घंटे पहले आठवीं कक्षा ने 225 टिकट और सातवीं कक्षा ने 200 टिकट बेचे।

किस कक्षा के छात्र अपना निश्चित काम पूर्ण करने के अधिक निकट हैं?

यह मालूम करने के लिए आप उनके अनुपातों की तुलना कर सकते हैं। जैसे 225:300 और 200:250. आठवीं कक्षा के लिए 3:4 और सातवीं कक्षा के लिए 4:5 है। क्या आप तुलना करके बता सकते हैं? यह कठिन है क्योंकि इसका सही अर्थ नहीं निकलता और हम इसे सीधा-सीधा नहीं बना सकते हैं। हमें उन दोनों के समान अनुपातों की आवश्यकता होती है।

राशियों की तुलना करने की एक पद्धति है उनको प्रतिशत में बदलना। प्रतिशत एक संख्या को 100 से तुलना करता है। प्रतिशत का अर्थ है- सौ में से क्या प्रति सैकड़ा 100% = $\frac{100}{100}$. यह एक भिन्न है जिसका हर हमेशा 100 रहता है।

आठवीं कक्षा के छात्रों द्वारा बेचे गये टिकट का प्रतिशत $\frac{3}{4} \times \frac{100}{100} = \frac{75}{100} = 75\%$

सातवीं कक्षा के छात्रों द्वारा बेचे गये टिकट का प्रतिशत = $\frac{4}{5} \times \frac{100}{100} = \frac{80}{100} = 80\%$

इससे हम यह समझते हैं कि सातवीं कक्षा अपने निश्चित उद्देश्य को पूरा करने के अधिक निकट हैं। 100 से संख्याओं का भाग, प्रतिशत कहलाता है। इसलिए उसका हर 100 बन जाता है जिसके लिए

SCERT TELANGANA

हम दोनों (अंश और हर) को 100 से गुणा करते हैं।

हम प्रतिशत को एक सामान्य माप की तरह उपयोग कर सकते हैं।

आरंभ के भाग में, हमने स्निग्धा और सिरी के मतों की तुलना अनुपात द्वारा की थी। इसी को हम

स्निग्धा को मिले मतो की संख्या
40 में से 24 या 5 में से 3 है।

इसलिए मतों का प्रतिशत

$\frac{3}{5}\times 100\% = 60\%$

दूसरी विधि से

40 मतों में से स्निग्धा के मत 24 हैं।

इसलिए 100 मतों में से स्निग्धा के मत = $\frac{24}{40}\times 100 = 60$

100 मतों में से स्निग्धा के मत 60 हैं।

इसलिए उसके मतों का प्रतिशत = 60%

क्योंकि सभी छात्रों ने मतदान किया है,

स्निग्धा के मतों का प्रतिशत + सिरी के मतों का प्रतिशत = 100%

60% + सिरी के मतों का प्रतिशत = 100%

इसलिए सिरी के मतों का प्रतिशत = 100% – 60% = 40%

5.2 अधिकतम और न्यूनतम प्रतिशत ज्ञान करना :

निम्न स्थिति पर ध्यान दीजिए।

- कया का परिमाण 10% अधिक हुआ।
- घरों के मूल्य में 12% गिरावट आई है।
- वर्ष 2020 तक CO_2 के निष्कासन में 25% की कमी आनी चाहिए।

राशियों के अंतर को अक्सर मूल राशि के प्रतिशत में व्यक्त किया जाता है।

प्रतिशत के बढ़त और खपत के प्रश्नों को हल करने के लिए दो विभिन्न पद्धतियों का उपयोग किया जाता है।

यह समझने के लिये निम्न उदाहरण को समझने का प्रयत्न करेंगे।

(1) एक व्यापारी ने अपने व्यक्ति को पिछले माह की बिक्री की तुलना में 35% बिक्री बढ़ाने के लिए कहा। यदि पिछले माह की बिक्री ₹ 98,700 हो तो उसने वर्तमान महीने के लिए कितनी बिक्री करने

पिछले माह की बिक्री = ₹ 98,700.

98,700 का 35% = $\frac{35}{100}\times 98,700$

= ₹ 34545

वर्तमान माह की बिक्री का लक्ष्य

= ₹ 98,700 + 34,545

= ₹1, 33, 245.

इकाई पद्धति

35% की बढ़त का अर्थ है,

₹ 100 से ₹135 तक

तो ₹ 98,700 में कतने की वृद्धि होगी?

वर्तमान की बिक्री का लक्ष्य = ₹ $\frac{135}{100}\times 98,700$

= ₹ 1,33,245.

SCERT TELANGANA

(2) जूतों का अंकित मूल्य ₹ 550 है। यदि वे 10% कटौती करके बेचे जाते हैं तो उनका नया विक्रय मूल्य क्या है?

जूतों का मूल्य = ₹ 550.

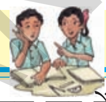
कटौती = ₹ 550 का 10%

$$= \frac{10}{100} \times 550 = ₹55.$$

क्या मूल्य = अंकित मूल्य - कटौती

= ₹550 – ₹55 = ₹ 495.

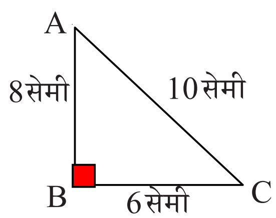
सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए।



1. एक संख्या का दोगुना उसको 100% बढ़ा देता है। यदि हम उस संख्या में आधा कम कर दें तो कितने प्रतिशत की कमी आएगी?
2. ₹ 2400 से ₹ 2000 कितना प्रतिशत कम है? क्या वह उतना ही प्रतिशत कम है जितना कि ₹ 2000 से ₹ 2400 अधिक है?

अभ्यास - 5.1

1. निम्न का अनुपात ज्ञात कीजिए।
   (i) एक कार्यालय में स्मिता 6 घंटे कार्य करती है और काजल 8 घंटे काम करती है। उनके कार्य के समय का अनुपात ज्ञात कीजिए।
   (ii) एक बर्तन में 8 लीटर दूध है जबकि दूसरे में 750 मि.ली.
   (iii) साइकल की गति 15 किमी/घंटा है और स्कूटर की गति 30 कि.मी./घंटा है।
2. यदि 5:8 और 3:7 का गुणिन अनुपात 45 : x है तो x का मूल्य ज्ञात कीजिए।
3. यदि 7:5 और 8:x का गुणित अनुपात 84 : 60 है तो x को ज्ञात कीजिए।
4. यदि 3:4 और 4:5 का गुणित अनुपात 45:x हो तो x ज्ञात कीजिए।
5. एक प्राथमिक पाठशाला में 60 छात्रों के लिए 3 अध्यापक रहेंगे। यदि 400 छात्र हैं तो कितने अध्यापक होने चाहिए?
6. दिये चित्र में ABC एक त्रिभुज है। इसकी भुजाओं की जोड़ियों के नापों से सभी संभव अनुपात लिखिए।



SCERT TELANGANA

7. 24 में से 9 छात्रों ने एक परीक्षा में 75% से कम अंक प्राप्त किये। 75% अंक से कम तथा 75% से अधिक प्राप्त करने वाले छात्रों का अनुपात ज्ञात कीजिए।

8. 'MISSISSIPPI' शब्द में स्वर और व्यंजन के अनुपात का सरल रूप लिखिए।

9. राजेन्द्र और रेहाना एक व्यापार के मालिक हैं। प्रतिमाह रेहाना को लाभ का 25% प्राप्त होता है। यदि रेहाना को रु.2080 प्राप्त हुए तो उसका कुल लाभ कितना होगा?

10. एक त्रिभुज ABC, में AB = 2.2 से.मी., BC = 1.5 से.मी. और AC = 2.3 से.मी. है। त्रिभुज XYZ, में XY = 4.4 से.मी., YZ = 3 से.मी. और XZ = 4.6 से.मी., AB : XY, BC : YZ, AC : XZ का अनुपात ज्ञात कीजिए। क्या ΔABC और ΔXYZ की संगत भुजाएँ समानुपात में हैं?
[संकेतः दो त्रिभुज समानुपात में हैं यदि उनकी संगत भुजाएँ उसी अनुपात में हों।]

11. माधुरी एक सूपर-मार्केट में गई। वहाँ पर मूल्यों में अंतर इस प्रकार है। चावल का मूल्य 5% कम है। अमरूद और फल का दाम 8% कम है और तेल तथा दाल का दाम 10% अधिक है। परिवर्तित दाम को जानने में माधुरी की मदद कीजिए।

वस्तु	अंकित मूल्य	परिवर्तित मूल्य
चावल	रु. 30	
जॉम	रु.100	
सेब	रु.280	
तेल	रु.120	
दाल	रु. 80	

12. पिछले वर्ष 2075 लोगों ने एक क्लब के सदस्य बने। इस वर्ष उसमें 4% गिरावट आई।
(a) कितनी संख्या कम हुई।
(b) इस वर्ष और कितने लोग क्लब के सदस्य बने?

13. पिछले वर्ष एक किसान के खेत में 1720 थैले रुई की उपज़ हुई। इस वर्ष उसे अपनी उपज में 20% की बढ़त होने की आशंका है। इस वर्ष उसे कितने अधिक थैले प्राप्त होंगे?

14. **P और Q एक रेखाखण्ड AB पर हैं। P बिन्दु AB को 2 : 3 अनुपात में विभाजित करता है और Q बिन्दु को 3 : 4 अनुपात में। यदि PQ = 2, तो AB की लम्बाई ज्ञात कीजिये ?**

5.3 कटौती को पहचानना (Discounts)

हम बड़े दुकानों तथा सूपर-मार्केटों में वस्तुओं पर उनका मूल्य छपा हुआ देखते हैं। क्या आप जानते हैं कि उन्हें क्या कहते हैं? यह **(M.R.P.)** कहा जाता है। वस्तुओं के कारखाने से निकलते समय ही इनपर एम.आर.पी. अंकित कर दिया जाता है।

SCERT TELANGANA

रवि एक पुस्तक खरीदने दुकान गया। उस पुस्तक पर एम.आर.पी. ₹ 80 है। लेकिन दुकानदार ने उस पर 15% की छूट दी। रवि ने उस पुस्तक की कितनी कीमत दी?

दैनिक जीवन में हम ऐसी कई परिस्थितियों का सामना करते हैं जहाँ वस्तुओं के मूल्यों पर कटौती दी जाती है।

कटौती को रिबेट भी कहते हैं। यह अंकित मूल्य पर दिया जाता है इसे सूची मूल्य भी कहते हैं।

अब उपर्युक्त उदाहरण में रवि को 15% छूट दी गई थी। यदि एम.आर.पी. ₹ 80 है तो फिर कटौती

$\frac{15}{100} \times 80 =$ ₹ 12. होगी। इसलिए रवि रु.80 – ₹ 12 = ₹ 68 देगा।

हम कुछ और उदाहरण देखेंगे।

उदाहरण:1 एक साइकल का अंकित मूल्य ₹ 3600 है और वह ₹ 3312 में बेची गई। कटौती और कटौती % ज्ञात कीजिए।

हल: कटौती = अंकित मूल्य - विक्रय मूल्य

= ₹ 3600 – ₹ 3312 = ₹ 288

क्योंकि कटौती अंकित मूल्य पर की जाती है, इसलिए जब कटौती का प्रतिशत ज्ञात किया जाता है तब अंकित मूल्य को आधार की तरह उपयोग कहते हैं।

₹ 3600 अंकित मूल्य पर ₹ 288 कटौती है

₹100 अंकित मूल्य पर कितनी कटौती होगी?

कटौती प्रतिशत $= \frac{288}{3600} \times 100 = 8\%$

हम, कटौती प्रतिशत देने पर कटौती ज्ञात कर सकते हैं।

उदाहरण:2 एक सीलिंग पंखा का एम.आर.पी. ₹ 1600 है और दुकानदार उस पर 6% कटौती देता है। वह पंखा कितने में बिकेगा?

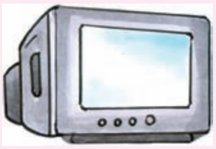
हल:

राजू ने इस तरह हल किया	लता ने इसको इस तरह हल किया
कटौती = ₹ 100 का 6% $= \frac{6}{100} \times 1600 =$ ₹96 विक्रय मूल्य = अंकित मूल्य - कटौती = ₹ 1600 – ₹ 96 = ₹1504.	6% की कटौती का अर्थ है ₹ 100 से 6 की कमी अर्थात ₹ 94 तो ₹ 1600 में 6% की कमी विक्रय मूल्य $= \frac{94}{100} \times 1600 =$ ₹1504

SCERT TELANGANA

प्रयत्न कीजिए।

1. विक्रय मूल्य को रिक्त स्थान में भरिए :

वस्तु	अंकित मूल्य (₹)	कटौती %	विक्रय मूल्य (₹)
	450	7%	
	560	9%	
	250	5%	
	15000	15%	

उदाहरण: 3 नीलिमा ने एक दुकान से फ्राक खरीदा। उस ड्रेस का मूल्य ₹ 1000 है। दुकानदार ने उस पर पहले 20% छूट दे रखा था। उसने नीलिमा के पूछने पर और 5% छूट दिया। दिया। प्रत्येक छूट के बाद का मूल्य ज्ञात कीजिए।

हल: वस्तु का अंकित मूल्य = ₹1000.

पहली कटौती का प्रतिशत = 20%

पहली कटौती = 1000 का 20%

$= \frac{20}{100} \times 1000 =$ ₹ 200

पहली कटौती के बाद मूल्य = ₹ 1000 – ₹ 200

= ₹ 800.

दूसरी कटौती का प्रतिशत= 5%

दूसरी कटौती = ₹ 800 का 5%

$= \frac{5}{100} \times 800 =$ ₹ 40

दूसरी कटौती के बाद मूल्य = ₹ 800 – ₹ 40 = ₹ 760.

विक्रय मूल्य = ₹ 760.

> 20% कटौती का अर्थ है ₹ 100 को कम कर ₹ 80 करना
>
> 5% कटौती का अर्थ है ₹ 100 को ₹ 95 तक कम किया गया।
>
> ∴ विक्रय मूल्य
>
> $= 1000 \times \frac{80}{100} \times \frac{95}{100}$
>
> = ₹ 760

SCERT TELANGANA

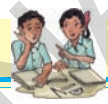
दी गई कटौती की राशि = ₹1000 – ₹ 760 = ₹ 240.

₹ 1000 के लिए कटौती की राशि ₹ 240 है।

कटौती का प्रतिशत जो दिया गया है = ₹ 240 × $\frac{24\cancel{0}}{1\cancel{0}\,\cancel{00}} \times \cancel{100} = 24\%$

आपने क्या निरीक्षण किया? क्या दी गई कटौती का प्रतिशत अगले दो कटौतियों के समान होगी ?

सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए।



प्रति अपने लिए कपड़े खरीदने दूकान पर गई। एक सूट का एम.आर.पी. ₹ 2500 है। दुकानदार ने उस पर 5% की छूट दे रखी थी। उसने फिर से कुछ और छूट देने को कहा तो दुकानदार ने फिर 3% कटौती दी। अंततः उसे कुल कितने प्रतिशत छूट मिला? क्या छूट 8% के समान है?

5.4 प्रतिशत में निर्धारण :

एक सामान का दाम ₹ 477.80 है। दुकानदार ने उस पर 15% छूट दी। आप कैसे जानेंगे कि आपको दुकानदार को कितने रुपये देने हैं?

सामान के दाम को निकटतम विधि द्वारा ₹ 477.80 से ₹ 480 बना दीजिए। फिर उस पर 10% कटौती ज्ञात कीजिए। आपको ₹ 48 प्राप्त होंगे। इसका आधा लीजिये। यह ₹ 24 दाम का 5% होगा। इसलिए कटौती की राशि ₹ 48 + ₹ 24 = ₹ 72 होगी। अनुमानित राशि जो देनी है वह लगभग ₹ 410 के होगा।

प्रयत्न कीजिए।

(i) ₹ 357.30 का 20% ज्ञात कीजिए। (ii) ₹ 375.50 का 15% ज्ञात कीजिए।

5.5 लाभ और हानि (Profit and Loss) :

बेचने और खरीदने के संबंधित मूल्य (लाभ और हानि)

निम्न स्थितियों का निरीक्षण कीजिए।

- सीता ने एक कुर्सी ₹ 750 में खरीद कर उसे ₹ 900 में बेची।
- पिछले वर्ष मेरी ने ₹ 25000 में 10 ग्राम सोना खरीदा और उसे इस वर्ष ₹ 30,000 में बेचा।
- रहीम ने ₹ 1600 में एक साइकिल खरीदा और अगले वर्ष उसे ₹ 1400 में बेचा।
- अनीता ने ₹ 4.8 लाख में एक कार खरीदी और 2 वर्ष के पश्चात उसे ₹ 4.1 लाख में बेची।
- हरि ने एक घर ₹ 9 लाख में खरीदकर उस पर और ₹ 1 लाख की मरम्मत कराई। फिर उसे ₹ 10.7 लाख में बेच दिया।

SCERT TELANGANA

प्रथम चार उदाहरणों में लागत मूल्य और विक्रय मूल्य के व्यवकलन से लाभ या हानि ज्ञात की जा सकती है।

लेकिन अंतिम उदाहरण में हरि का लाभ क्या है? क्या वह ₹ 1.7 लाख है? बिलकुल नहीं। उसने कार बेचने से पहले कुछ रुपये उसप खर्च किये। इस प्रकार के खर्च को क्या कहते हैं?

कभी-कभी दुकानदार को वस्तु के मूल्य के अतिरिक्त कुछ अन्य खर्च भी उठाने पड़ते हैं, जैसे यातायात, देखभाल का खर्च, मज़दूरी, मरम्मत, कमीशन, गोदाम का किराया आदि पर खर्च करना पड़ता है। ऐसे खर्च अ़तिरिक्त खर्च कहलाते हैं। और ये लागत मूल्य में जोड़ दिये जाते हैं। लाभ या हानि हमेशा अंतिम लागत मूल्य पर गणना की जाती है।

सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए।

लागत मूल्य, विक्रय मूल्य के बराबर होने पर क्या होता है। क्या आपको अपने दैनिक जीवन में ऐसी परिस्थितियाँ मिलती हैं? उपर्युक्त परिस्थितयाँ में लाभ % या हानि % ज्ञात करना सरल है। यदि वह प्रतिशत में हो तो वह अधिक अच्छी तरह समझ में आयेगा। लागत मूल्य का अधिक प्रतिशत, लाभ % का एक उदाहरण है और लागत मूल्य का कम प्रतिशत, हानि % का एक उदाहरण है।

आइए हम कुछ उदाहरण देखें

उदाहरण:4 राधिका का पुराने-सामान का व्यापार है। उसने ₹ 5000 में एक पुराना फ्रिज खरीदा। उसने उसके यातायात पर ₹ 100 और मरममत पर ₹ 500 खर्च किया। अब वह उसे ₹ 7000 में बेचती है।

ज्ञात कीजिए (i) कुल लागत मूल्य (ii) लाभ या हानि प्रतिशत

हल: (i) कुल लागत मूल्य = लागत मूल्य + यातायात - खर्च + मरम्मत खर्च

= ₹ (5000 + 100 + 500) = ₹ 5600

इसलिए कुल लागत मूल्य ₹ 5600.

(ii) विक्रय मूल्य ₹ 7000 है। यहाँ विक्रय मूल्य > लागत मूल्य है, इसलिए यहाँ लाभ है।

लाभ = विक्रय मूल्य - लागत मूल्य = ₹ 7000 – ₹ 5600 = ₹1400

₹ 5600 के लागत मूल्य पर ₹1400 लाभ है।

यदि लागत मूल्य ₹100 है तो लाभ क्या होगा?

लाभ प्रतिशत $= \frac{1400}{5600} \times 100 = 25\%$

उदाहरण:5 विनय ने एक फ्लैट ₹ 4,50,000 में खरीदा। उसकी मरम्मत कराने तथा रंगवाने में उसने ₹10,000 खर्च किये। तत्पश्चात उसने उसे ₹ 4,25,500 में बेचा। लाभ या हानि ज्ञात कीजिए और साथ ही उसका प्रतिशत भी ज्ञात कीजिए।

हल: कुल लागत मूल्य = लागत मूल्य + मरम्मत खर्च

= ₹ (4,50,000 + 10,000) = ₹ 4,60,000.

SCERT TELANGANA

विक्रय मूल्य ₹ 4,25,500 है। हम यहाँ देखते हैं कि विक्रय मूल्य < लागत मूल्य। इसलिए यहाँ हानि है।

हानि = लागत मूल्य - विक्रय मूल्य

$= ₹\ 4,60,000 - ₹\ 4,25,500 = ₹\ 34,500.$

₹ 4, 60, 000 के लागत मूल्य पर ₹ 34,500 हानि है। यदि उसका लागत मूल्य ₹100 है तो हानि कितनी होगी।

हानि प्रतिशत $= \frac{34,500}{4,60,000} \times 100 = 7.5\%$

उदाहरण:6 वेंकन्ना ने 50 दर्जन केले ₹ 1250 में खरीदे। उसने यातायात पर ₹ 250 खर्च किये। केले खराब होने के कारण वह 5 दर्जन केले नहीं बेच सका। सब केले उसने ₹ 35 दर्जन की दर से बेचे। उसे लाभ होगी या हानि? उसका प्रतिशत ज्ञात कीजिए।

हल: कुल लागत मूल्य = केले का लागत मूल्य + यातायात खर्च

$= ₹\ 1250 + ₹\ 250 = ₹1500.$

बेचे गये केले (दर्जन) = खरीदे गये केले (दर्जन) - बचे हुए केले (दर्जन)

$= 50 - 5 = 45$

विक्रय मूल्य $= ₹\ 35 \times 45 = ₹1575$

स्पष्ट है कि कि विक्रय मूल्य > लागत मूल्य, इसलिए लाभ है।

लाभ = विक्रय मूल्य - लागत मूल्य $= ₹\ 1575 - ₹\ 1500 = ₹\ 75$

₹1500 के लागत मूल्य पर ₹ 75 लाभ है।

₹100 के लागत मूल्य पर कितना लाभ होगा?

लाभ % $= \frac{75}{1500} \times 100 = 5\%$

उदाहरण:7 मलिक ने ₹ 3000 से दो मेज़ें खरीदीं। एक मेज़ पर उसको 20% लाभ, और दूसरे पर 20% हानि हुई। कुल लेन-देन पर लाभ या हानि का % ज्ञात कीजिए।

SCERT TELANGANA

पहली तालिका के लिए	दूसरी तालिका के लिए
विक्रय मूल्य = ₹ 3000	विक्रय मूल्य = ₹ 3000
लाभ प्रतिशत = 20%	हानि प्रतिशत = 20%
लाभ % का अर्थ है लागत मूल्य पर बढ़ाया गया प्रतिशत	हानि % का अर्थ है लागन मूल्य पर कम किया गया प्रतिशत
विक्रय मूल्य ₹ 120 है जब लागत मूल्य ₹100 हो	विक्रय मूल्य ₹ 80 है जब लागत मूल्य ₹100 हो।
जब विक्रय मूल्य ₹ 3000 है तो लागत मूल्य क्या होगा?	जब विक्रय मूल्य ₹3000 है तब लागत मूल्य क्या होगा?
लागत मूल्य = ₹ 100 $\times \frac{3000}{120}$ = ₹ 2500	लागत मूल्य = ₹100 $\times \frac{3000}{80}$ = ₹3750

हल: दो मेजों पर कुल लागत मूल्य = ₹ 2500 + ₹ 3750 = ₹ 6250

दो मेजों पर कुल विक्रय मूल्य = ₹ 3000 + ₹ 3000 = ₹ 6000.

क्योंकि लागत मूल्य > विक्रय मूल्य, यहाँ हानि है।

हानि = लागत मूल्य - विक्रय मूल्य = ₹ 6250 – ₹ 6000 = ₹ 250₹

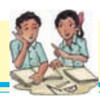
6250 के लागत मूल्य पर ₹ 250 हानि है

₹ 100 के लागन मूल्य पर हानि क्या होगी?

$$\text{हानि } \% = 250 \times \frac{100}{6250} = 4\%$$

इसलिए पूरे विक्रय व्यवहार पर 4% हानि है।

सोचो, विचार करो, लिखो :



एक दुकानदार ने ₹ 9, 900 में दो टी.वी. बेचे। एक पर उसे 10% का लाभ हुआ और दूसरे पर 10% की हानि। कुल मिलाकर उसे कितना लाभ या हानि हुई? उसका प्रतिशत क्या है?

5.6 बिक्री-कर / मूल्यांकित कर (Sales Tax / Value - Added Tax) :

सरकार हर बिक्री पर बिक्री कर वसूल करती है। इसे सेल टैक्स कहते हैं। दुकानदार यह कर ग्राहक से लेकर सरकार को देता है। सरकार ऐसे कर क्यों लगाती है? क्या आप जानते हैं? जमा कर (टैक्स) से सरकार कई कल्याण-कार्य करती है।

SCERT TELANGANA

वे वस्तुएँ जो एक स्थान से दूसरे स्थान पर ले जाते है। उन पर बिक्री-कर लगाया जाता है। सेल टैक्स सिर्फ वस्तुओं पर लगाया जाता है उनके कार्यों पर नहीं, इसलिए इसने बिक्री-कर का स्थान ले लिया है। विभिन्न वस्तुओं पर यह मूल्यांकित कर भिन्न होता है। सामान्यत: यह आवश्यक सामग्री पर नहीं होता है, लेकिन यह मूल्यांकित कर बहुमूल्य वस्तुओं और नगीनों पर 1% तथा व्यवसाई निविष्ट और पूँजी साधन और अधिक उपभोगताओं की वस्तुओं पर 5% और अन्य वस्तुओं पर14.5%.

मूल्यांकित-कर वस्तु के विक्रय मूल्य पर लगाया जाता है और उसे मूल्य में जोड़ दिया जाता है। बढ़ा हुआ विक्रय-मूल्य मूल्यांकित कर कहलाता है। निम्न दिये गये बिल का निरीक्षण करें जिसमें मूल्यांकित कर जोड़ दिया गया है।

अपनी माताजी की दवाई लेने के लिये गणपति दवाई की दुकान पर गया। दुकानदार ने निम्न बिल दिया। बिल की कुल राशि ₹ 372.18. इसमें 5% मूल्यांकित कर बिना हुआ है।

(i) मूल्यांकित कर लगने से पहले बिल का मूल्य कितना था?

Tax Invoice No. : 2012?301549007214 Date : 15-09-2012 20:48:31

Name : Ganpathi Age : 35 Gender : male Do.Reg. No. :

Cus.ID:20121301549000617 Add: Sainathpura)

S.	Product	Mfgr	Sch	Batch	Exp.	MRP.	Rate	Qty	Amount
1	BETATROP TAB	SUN	H	BSK4198	12-14	5.9	5.9	60	318.60
2.	ECOSPRIN 150 MG TAB	USV	H	04004652	05-14	0.4242857	0.38	42	16.04
3.	LASIX 40 MG TAB	AVENTIS	H	0212016	03-16	0.44733334	0.40	15	6.04
4.	ELDERVIT PLUS CAD	ELDER	C	SE0022008	08-13	2.3333333	2.10	15	31.5

बचन राशि : 41.35 मूल्यांकित कर ₹ 354.45 @ 5% = 17.72 कुल : 372.18

कुल राशि : 372.00

बिल कॉपी से साफ अर्थ है कि बिल राशि = ₹ 354.45 ,Vat @ 5% = रु.17.72

उदाहरण:8 एक जोड़ी जूतों का मूल्य ₹ 450 है। उस पर बिक्री-कर 6% है। बिल की राशि ज्ञात करो?

हल: ₹ 100 पर बिक्री-कर ₹ 6 है

₹ 450 पर कितना कर होगा?

दिया गया बिक्री कर = ₹ $\frac{6}{100} \times 450 \quad = $ ₹ 27

बिल की राशि = वस्तु का लागत मूल्य + बिक्री-कर = ₹ 450 + ₹ 27 = ₹ 477.

5.7 Goods and Service Tax (GST) वस्तु तथा सेवा कर :

वस्तु तथा सेवा की आपुर्ती पर यह एक एकल अप्रत्येक्ष कर है । इसे जुलाई **2017** मे लागु किया गया है । इसे अनेक प्रकार के करों को हटाकर जैसे विक्री कर राज्य कर जो कि, भारत में प्रचलित ये जीएसटी के अंतरगत वस्तु तथा सेवा के स्तर पर मुल्य वृध्दी के आधार पर कर लगाया जाता है । इनकी विभिन्न दरें इस प्रकार है । 3%, 5%, 12%, 18% तथा 28% पुरे देश में इन में से 50% केंद्र सरकार को तथा 50% राज्य सरकार को दिया जाता है।

SCERT TELANGANA

उदाहरण:9 विगनेश एक किराणा दुकान पर अपने परिवार के लिए साबुन खरिदने जाता है । दुकान दार ने उसे एक बिल दिया जो की, इस प्रकार है । बिल का मुल्य ₹ 2200 है जिसमें 18% GST होगा.
GST से पहले बिल का मुल्य क्या होगा तथा CGST ओर SGST को ज्ञान किजीए ?

वस्तु का नाम	**परिमाण**	**रुपये प्रति**	**मुल्य**
चावल	10 kg	100	1000
सर्फ पाकेट	3 kg	100	300
दाले	6 kg	150	900
कु ल			**2200**

हल:

GST सहीत बिल का मुल्य = ₹ 2200

बिल की रक्कम में GST का मुल्य = 18%

$= 2200 \times \frac{18}{100} = ₹\ 396$

GST से पहले बिल की रकम = 2200 − ₹ 396 = ₹ 1804

GST मे CGST का प्रतिशत = 50%

GST मे SGST का प्रतिशत = 50%

GST में CGST मुल्य $= 396 \times \frac{50}{100} = ₹\ 198$

उसी प्रकार GST में SGST का मुल्य $= 396 \times \frac{50}{100} = ₹\ 198$

उदाहरण:10 एक जोडी जुते का मुल्य ₹1000 है उस पर **5 %** GST लगाया गया है। उस बिल की रकम ज्ञात किजीए।

हल : ₹ 100 पर GST ₹ 5 देने होगे ।

₹ 1000 पर GST कर $= ₹\frac{5}{100} \times 1000 = ₹\ 50$

बिल की रकम = वस्तु की दर + GST = ₹1000 + ₹50 = ₹ 1050.

अभ्यास 5.2

1. वर्ष 2012 में विश्व भर में 36.4 करोड़ इंटरनेट उपभोक्ता रहे। अगले 10 वर्ष में यह संख्या 125% तक बढ़ने की संभावना है। वर्ष 2022 तक अंतरजाल उपभोक्ताओं की संख्या निर्धारित कीजिए।
2. एक मकान मालिक हर साल अपने मकान का किराया 5% बढ़ाता है। यदि अब उसका किराया ₹ 2500 प्रतिमाह है तो अगले दो वर्ष के बाद वह किराया कितना होगा ?
3. सोमवार को एक कंपनी के शेयर के मूल्य ₹ 7.50 थे। मंगलवार को उसका मूल्य 6% अधिक हुआ और बुधवार को 1.5% कम हुआ और गुरुवार को 2% कम हुआ। शुक्रवार को जब शेयर बाजार खुला तो प्रत्येक शेयर के मूल्य क्या होगा ?
4. आजकल ज़ेराक्स की मशीन में किसी भी ओरिजिनल को बड़ा या छोटा करने के लिए सिर्फ उसमें अनुकूल प्रतिशत को दर्ज करने से काम बन जाता है। रेशमा 2 सेमी चौडे और 4 सेमी चित्र को

SCERT TELANGANA

बड़ा करना चाहती है। उसने मशीन को 150% बढ़ाया और फिर वह चित्र बनाया। उसके द्वारा बनाए गए चित्र की चौड़ाई और लंबाई क्या होगी?

5. किताब पर छपा हुआ मूल्य ₹150 है और कटौती प्रतिशत 15% है। कटौती के बाद का मूल्य ज्ञात कीजिए।
6. एक उपहार का अंकित मूल्य ₹ 176 है। उसने उसे ₹ 165 में बेचा तो छूट प्रतिशत ज्ञात कीजिए।
7. एक दुकानदार ने ₹ 10 प्रति बल्ब के हिसाब से 200 बल्ब खरीदे। लेकिन 5 बल्ब के फ्यूज़ उड़ गए और रद्दी में चले गये। शेष बल्प प्रत्येक ₹ 12 में बेचे गये। लाभ या हानि प्रतिशत ज्ञात करो?
8. निम्न तालिका उचित सूचनाओं में भरिए। (जहाँ आवश्यक हो)

क्र.सं	ला.मू	खर्च	विक्रय मूल्य	लाभ	हानि	लाभ %	हानि %
1	₹ 750	₹ 50		₹80			
2	₹ 4500	₹ 500			₹1,000		
3	₹ 46,000	₹ 4000	₹60,000				
4	₹ 300	₹ 50				12%	
5	₹ 330	₹ 20					10%

9. एक मेज़ पर 5% लाभ लेते हुए उसे ₹ 2,142 में बेचा गया। 10% लाभ उठाने के लिए उसे कितने में बेचना होगा?
10. गोपी ने इब्राहिम को एक घड़ी 12% लाभ से बेची। इब्राहिम ने उसे जॉन को 5% हानि से बेची। यदि जॉन ने ₹1,330 दिए तो गोपी का मूल्य ज्ञात कीजिए।
11. मधु और कविता ने एक नया घर ₹ 3,20,000 में खरीदा। कुछ आर्थिक कमी के कारण उन्होंने उस घर को ₹ 2, 80,000 में बेच दिये। इन्हें ज्ञात कीजिए।
    (a) उठायी गई हानि (b) लाभ प्रतिशत
12. एक पुन:विक्रेता ने कार के मालिक से एक पुरानी-कार ₹ 1,50,000 में खरीदी। उसकी मरम्मत तथा रंगवाने में उसने ₹ 20,000 खर्च किये और ₹ 2,00,000 में बेच दिया। उसकी लाभ या हानि ज्ञात कीजिए। उसका प्रतिशत भी ज्ञात कीजिए।
13. ललिता ने अपना जन्मदिन पर होटल से एक पार्सल लिया। उसका बिल 5% मूल्यांकित-कर सहित ₹ 1,450 था। ललिता ने होटल वाले से कुछ छूट माँगी और उसने 8% छूट दी। अब यह मालूम कीजिए कि होटल के मालिक को ललिता ने कितनी राशि दी।
14. यदि निम्नमूल्य GST सहित हैं तो प्रत्येक का वास्तविक-मूल्य ज्ञात कीजिए।

क्र.सं	वस्तु	GST %	बिल का मूल्य (₹)	वास्तविक मूल्य (₹)
(i)	हीरा	3%	₹ 10,300	
(ii)	प्रेशर-कुकर	12%	₹ 3,360	
(iii)	फेस-पाउडर	28%	₹ 256	

SCERT TELANGANA

15. एक सेलफोन कंपनी ने सेलफोन का दर 4050 निश्चित किया है एक डिलर 12% अतिरिक्त GST देकर सेलफोन खरीदता है। डिलर ने कितना GST चुकाया है? और सेलफोन का क्रम मुल्य क्या होगा?'n'

16. एक सुपर मार्केट में प्रत्येक वस्तु कर दर इस प्रकार लगाया गया है की, जिससे 4% विक्रय कर जोडने पर उसे किसी भी प्रकार से रुपये या पैसे में परिवर्तन की आवश्यकता नही है। क्योंकी उसका परिणाम 'n' रुपये होगा जहाँ 'n' एक घनात्मक पुर्णांक है। 'n' का सबसे छोटा मुल्य ज्ञात किजीए?

5.7 चक्रवृद्धि ब्याज (Compound Interest) :

ब्याज वह राशि है जो बैंक या डाक-घर दिये गये ऋण पर लेता है या जमा राशि पर देता है।

ब्याज वह अतिरिक्त राशि है जो मूल धन पर एक वर्ष के लिए गणना की जाती है।

लेकिन इस ब्याज की गणना हम कैसे करेंगे? हम उस ब्याज की गणना को क्या कहेंगे जो ब्याज मूलधन पर पूरे समय के लिए हो, वह साधारण या सरल ब्याज कहलाता है। वह मूलधन पर बढ़ाया गया प्रतिशत है। हम यह समझने के लिए एक उदाहरण देखेंगे।

उदाहरण:11 ₹ 2500 पर 12% वार्षिक ब्याज से 3 वर्षों के लिए कर्ज ली गई। साधारण ब्याज ज्ञात कीजिए और बताइए कि 3 वर्षों के अंत में कितना मिश्रधन प्राप्त होगा?

हल : 12% वार्षिक ब्याज की दर का अर्थ है, ₹100 पर, 1 वर्ष के लिए ₹12

इसलिए ₹ 2500 पर, एक वर्ष के लिए ब्याज होगा?

1 वर्ष के लिए ब्याज $= ₹\ \frac{12}{100} \times 2500 = ₹300$

3 वर्ष के लिये ब्याज $= ₹\ 3 \times \frac{12}{100} \times 2500 = ₹\ 900.$

$$I = \frac{T \times R \times P}{100} = \frac{PTR}{100}$$

I = ब्याज P = मूल धन = ₹ 2500

T = वर्षों में समय = 3, R = ब्याज की दर = 12

3 वर्ष के अंत में मिश्रधन = मूलधन + ब्याज

= ₹ 2500 + ₹ 900 = ₹ 3400.

मिश्रधन = मूलधन + ब्याज $= P + \frac{P \times T \times R}{100} = P\left(1 + \frac{T \times R}{100}\right)$

जब $t = 1$ वर्ष, मिश्रधन $A = P\left(1 + \frac{R}{100}\right)$

SCERT TELANGANA

प्रयत्न कीजिए।

तालीका पुर्ण किजिए।

क्र.सं	मूलधन (P) ₹ में	समय (T) वर्ष में	ब्याज की दर प्रति वर्ष (R) % में	ब्याज (I) = $\frac{P \times T \times R}{100}$ ₹ में
1	3000	3	6	
2		2	5	50
3	1875		12	675
4	1080	2.5		90

रमेश ने श्रीनू से 10% वार्षिक दर से ₹100 का कर्ज लिया। दो वर्ष के पश्चात वह श्रीनू के पास कर्ज वापस करने के लिए गया। रमेश ने श्रीनू को ₹ 120 दिये और कहा कि उसे ₹1 लौटाने हैं। इन दोनों ने अपनी गणना के अंतर को निम्न प्रकार से एक कागज़ पर किया।

रमेश की पद्धति			श्रीनू की पद्धति		
पहला वर्ष	मूल धन ब्याज @ 10% कुल राशी	₹ 100 ₹ 10 ₹ 110	पहला वर्ष	मूल धन ब्याज @ 10% कुल राशी	₹ 100 ₹ 10 ₹ 110
दूसरा वर्ष	मूल धन ब्याज @ 10% दूसरे वर्ष के अंत में मिश्र धन	₹ 100 ₹ 10 = मूलधन + ब्याज - एक वर्ष का + ब्याज दूसरे वर्ष का = 100+10+10 = ₹120	दूसरा वर्ष	Principal Interest @ 10% दूसरे वर्ष के अंत में देनी राशी	₹ 110 ₹ 11 = ₹121

दोनों पद्धतियों का अंतर ₹1 है। दोनों पद्धतियों में अंतर क्यों है? आप आसानी से देख सकते हैं कि दूसरे वर्ष के ब्याज की गणना करते समय रमेश ने ₹ 100 मूलधन लिया, जबकि श्रीनू ने ₹110 लिया। रमेश द्वारा किया गया ब्याज साधारण ब्याज कहा जाता है। क्या आप जानते हैं कि श्रीनू द्वारा किये गये ब्याज को क्या कहते हैं? यह चक्रवृद्धि ब्याज कहलाता है। इसलिए चक्रवृद्धि ब्याज आपको ब्याज के ऊपर ब्याज़ लेना बताता है। आप कब और कौन-सा ब्याज पसन्द करते हैं?

SCERT TELANGANA

5.8 चक्रवृद्धि ब्याज के लिए सूत्र निर्माण :

उपर्युक्त उदाहरण में हमने देखा कि श्रीनू ने चक्रवृद्धि ब्याज की गणना की। एक या दो वर्ष के लिए इस तरह की गणना तो ठीक है, लेकिन यदि दो वर्ष से अधिक हो तो क्या इसी तरह गणना करना चाहिए? चक्रवृद्धि ब्याज की गणना करने के लिए क्या कोई संक्षिप्त विधि है? एक उदाहरण के द्वारा हम ज्ञात करेंगे।

जब $t = 1$वर्ष, मिश्रधन (A) $= P\left(1+\frac{R}{100}\right)$साधारण ब्याज से

मानलो P_1= ₹10,000 और $R = 12\%$ प्रति वर्ष

श्रीनू की पद्धति			उसी पद्धति की सामान्य पद्धति		
1^{st} वर्ष	मूलधन P_1	₹ 10,000		मूलधन	P_1
	मिश्रधन A_1	$10000\left(1+\frac{12}{100}\right)$	1^{st} वर्ष	मिश्रधन A_1	$A_1 = P_1\left(1+\frac{R}{100}\right)$
		$=10000\left(\frac{112}{100}\right)$			
		= ₹ 11,200			
2^{nd} वर्ष	मूलधन P_2	₹ 11,200	2^{nd} वर्ष	मूलधन P_2	$= P_1\left(1+\frac{R}{100}\right)$
	मिश्रधन A_2	$11200\left(1+\frac{12}{100}\right)$		मिश्रधन A_2	$A_2 = P_2\left(1+\frac{R}{100}\right)$
		$=11200\left(\frac{112}{100}\right)$			$= P_1\left(1+\frac{R}{100}\right)\left(1+\frac{R}{100}\right)$
		= ₹ 12,544			$= P_1\left(1+\frac{R}{100}\right)^2$

$$A_n = P_1\left(1+\frac{R}{100}\right)^n$$

सामान्यत: हम कह सकते है कि $A = P\left(1+\frac{R}{100}\right)^n$

लेकिन इस तरह करने से हमको सिर्फ 'n' वर्ष के अंत का मिश्रधन प्राप्त होगा। चक्रवृद्धि ब्याज कैसे प्राप्त होगा? हाँ! यह तो बहुत ही सरल है। अंतिम राशि से मूलधन को घटाने पर चक्रवृद्धि ब्याज प्राप्त होगा।

$$\therefore C.I = P\left(1+\frac{R}{100}\right)^n - P$$

SCERT TELANGANA

इस तरह साधारण ब्याज तथा चक्रवृद्धि ब्याज में क्या अंतर है? साधारण ब्याज प्रतिवर्ष समान होता है। लेकिन चक्रवृद्धि ब्याज समय पर बढ़ता रहता है।

उदाहरण:12 5000 को 8% प्रति वर्ष की दर से 2 वर्ष के लिए चक्रवृद्धि ब्याज तथा मिश्रधन मालूम कीजिए।

हल : P = ₹5000; R = 8% और n = 2 वर्ष

$$A = P\left(1+\frac{R}{100}\right)^n$$

$$= 5000\left(1+\frac{8}{100}\right)^2$$

$$= 5000 \times \frac{108}{100} \times \frac{108}{100} = ₹\ 5832.$$

अर्जित ब्याज = मिश्रधन - मूलधन

= ₹ 5832 – ₹ 5000

= ₹ 832

यह कीजिए

1. 6 वर्ष के लिए 5% प्रतिवर्ष की दर से ₹ 20,000 पर कितना चक्रवृद्धि ब्याज अर्जित किया जायेगा?
2. ₹ 12600 पर 10% प्रति वर्ष दर से 2 वर्षों के लिऐ चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात कीजिए।

5.9 वार्षिक तथा अर्धवार्षिक चक्रवृद्धि ब्याज का संयोजन

पिछले सवालों में आपने देखा है कि हमने वार्षिक संयोजन ब्याज का उपयोग किया है। हम ब्याज की दर को अर्धवार्षिक या त्रैमासिक भी संयोजन कर सकते हैं।

जब ब्याज का वार्षिक संयोजन नहीं होता है तो उस समयांतर को क्या कहते हैं जिसके बाद ब्याज, मूलधन में जोड़ा जाता है। यह समपरिवर्तन काल कहलाता है। जब ब्याज का अर्धवार्षिक संयोजन हो तब प्रत्येक 6 माह के दो समपरिवर्तन काल होते हैं। ऐसी स्थिति में ब्याज वार्षिक दर का आधा होगा और ब्याज का संयोजन वर्ष की संख्या का दुगना होगा।

उदाहरण:13 यदि ब्याज का संयोजन अर्धवार्षिक हो तो ₹ 1000 पर 10% दर से 1 वर्ष के चक्रवृद्धि ब्याज की गणना कीजिए।

हल: यहाँ ब्याज का अर्धवार्षिक संयोजन है, इसलिए एक वर्ष में दो समपरिवर्तन काल होंगे।

इसलिए n = 2

SCERT TELANGANA

6 महीने के लिए ब्याज की दर = $\frac{1}{2} \times 10\% = 5\%$

$$A = P\left(1 + \frac{R}{100}\right)^n$$

$$A = 1000\left(1 + \frac{5}{100}\right)^2$$

$$= 1000\left(\frac{105}{100}\right)^2$$

= ₹ 1102.50

चक्रवृद्धि ब्याज = A – P = 1102.50 – 1000 = ₹102.50

इसे कीजिए।

कितने समपरिवर्तन काल के लिए ब्याज का संयोजन हुआ है। प्रत्येक में दर भी ज्ञात कीजिए।

1. एक राशि $1\frac{1}{2}$ वर्ष के लिए 8% प्रति वर्ष की दर से अर्धवार्षिक संयोजन
2. एक राशि 2 वर्ष के लिए 4% प्रति वर्ष की दर से अर्धवार्षिक संयोजन

सोचिए, चर्चा कीजिए और लिखिए।

यदि ब्याज का त्रैमासिक संयोजन हो तो क्या होगा? उसमें कितने समपरिवर्तन काल होंगे? त्रैमासिक की दर क्या होगी? वह वार्षिक दर का कितना भाग होगा? आपके मित्रों से चर्चा कीजिए।

उदाहरण :14 यदि ब्याज का अर्धवार्षिक संयोजन हो तो ₹ 12000 का $1\frac{1}{2}$ वर्ष के लिए 10% की दर से कितना मिश्रधन देना होगा?

हल: ब्याज का संयोजन अर्धवार्षिक होने के कारण, $1\frac{1}{2}$ वर्ष में 3 समांतर काल होंगे।

इसलिए $n = 3$,

दर = $\frac{1}{2} \times 10\% = 5\%$

$$A = P\left(1 + \frac{R}{100}\right)^n$$

$$A = 12000\left(1 + \frac{5}{100}\right)^3$$

SCERT TELANGANA

$$= 12000\left(\frac{105}{100}\right)^3$$

$$= ₹\ 13891.50$$

चक्रवृद्धि ब्याज $= A - P$

$$= 13891.50 - 12000$$

$$= ₹\ 1891.50$$

उदाहरण:15 यादय्या ने अपनी परिवार की आवश्यकता के लिए ₹ 5120 का $12\frac{1}{2}$% प्रति वर्ष की दर से वार्षिक संयोजन किया। दो वर्ष नौ माह के पश्चात उसे कितना मिश्रधन और कुल ब्याज देना होगा।

हल : रेशमा ने इस समस्या को इस तरह हल करने का प्रयास किया। सबसे पहले उसने समय को वर्षों में बदला

2 वर्ष 9 माह $= 2\frac{9}{12}$ वर्ष $= 2\frac{3}{4}$ वर्ष

उसने इसे सूत्र में लिखने का प्रयत्न किया जो उसे पता है $A = 5120\left(1+\frac{25}{200}\right)^{2\frac{3}{4}}$

अब वह अटक गई। उसने अपने अध्यापक से पूछा कि भिन्न के रूप के घातांक को कैसे ज्ञात किया जाय?

अध्यापक ने एक संकेत दिया। पहले पूर्ण संख्या का मिश्रधन ज्ञात करो। उसके पश्चात इस राशि को मूलधन के रूप में उपयोग करते हुए $\frac{3}{4}$ वर्ष के लिए सरल ब्याज ज्ञात करो।

इसलिए $A = P\left(1+\frac{R}{100}\right)^n$

$$A = 5120\left(1+\frac{25}{200}\right)^2$$

$$= 5120\left(\frac{225}{200}\right)^2$$

= रु.6480

शेष 9 माह का ब्याज $= 6480 \times \frac{25}{2} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{100} =$ ₹ 607.50.

इसलिए 2 वर्ष 9 माह के पश्चात यादय्या को देना होगा

$= 6480 + 607.50 =$ ₹ 7087.50

SCERT TELANGANA

इसलिए कुल चक्रवृद्धि ब्याज $= 7087.50 - 5120 =$ ₹ 1967.50

5.10 चक्रवृद्धि ब्याज के सूत्र का उपयोग

हम चक्रवृद्धि ब्याज का सूत्र कहाँ उपयोग करते हैं? ब्याज की गणना करने के अतिरिक्त यह सूत्र भिन्न परिस्थितियों में उपयोग किया जा सकता है। जैसे-

- जनसंख्या में वृद्धि या कमी।
- यदि वृद्धि की दर ज्ञात हो तो जीवाणुओं की वृद्धि।
- एक वस्तु का मूल्य, यदि उसका मूल्य आगामी वर्षों में बढ़ता था।

उदाहरण :16 एक गाँव की जनसंख्या 6250 है। ज्ञात हुआ है कि प्रति वर्ष जनसंख्या में 8% प्रति वर्ष की दर से वृद्धि होती है। अगले 2 वर्ष के पश्चात की जनसंख्या ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ $P = 6250$ $R = 8\%$ $T = 2$ वर्ष

दो वर्ष के बाद जनसंख्या $A = P\left(1+\frac{R}{100}\right)^n$

$$A = 6250\left(1+\frac{8}{100}\right)^2 = 6250\left(\frac{108}{100}\right)^2 = 7290$$

उदाहरण :17 एक रबर की गेंद कुछ ऊँचाई से गिराई गई। पता चला कि वह छोड़ी गई ऊँचाई के सिर्फ 90% उछली। यदि वह गेंद 25 मी. ऊँची इमारत से गिराई गई हो तो भूमि पर दो बार उछलने के बाद वह कितनी ऊँचाई तक उठेगी?

हल: पहली बार वह 90% होगा। इसलिए हर बार वह अपनी ऊँचाई से 10% कम उछलती है।

इसलिए $R = -10\%$ लेते हुये यह समस्या हल की जा सकती है।

$P = 25$ मी. और $n = 2$

दो बार भूमि पर उछलने के पश्चात, गेंद की ऊँचाई

$$A = P\left(1+\frac{R}{100}\right)^n \qquad A = 25\left(1-\frac{10}{100}\right)^2$$

$$= 25\left(\frac{90}{100}\right)^2 = 20.25 \text{ मी.}$$

SCERT TELANGANA

अभ्यास - 5.3

1. सुधाकर ने अपन घर को नया बनाने के लिए बैंक से ₹ 15 000 ऋण लिये। उसने इस राशि को 9% प्रतिवर्ष की दर पर 8 वर्ष के लिए साधारण ब्याज पर उधार लिया। इसका मासिक किश्त क्या होगा ?
2. ₹ 21000 में एक टी.वी. खरीदी गई। एक वर्ष के बाद टी.वी. के मूल्य में 5% गिरावट आई। एक वर्ष के बाद उस टी.वी. का मूल्य ज्ञात करो।
3. ₹ 8000 को 5% प्रति वर्ष की दर से 2 वर्षों के लिए चक्रवृद्धि ब्याज तथा मिश्रधन वार्षिक संयोजन से ज्ञात कीजिए।
4. ₹ 6500 को 2 वर्ष के लिए वार्षिक संयोजन से चक्रवृद्धि ब्याज और मिश्रधन ज्ञात कीजिए। पहले वर्ष में ब्याज की दर 5% प्र.व. तथा दूसरे वर्ष में 6% प्रति वर्ष है।
5. एक वित्त कम्पनी से प्रतिभा ने ₹ 47000 ऋण 17% की दर से साधारण ब्याज पर 5 वर्ष के लिए लिया और कार खरीदी।
   (a) वित्त कंपनी को प्रतिभा को कितना मिश्रधन देना पड़ेगा ?
   (b) उसका मासिक किश्त क्या होगा ?
6. वर्ष 2011 में हैदराबाद की जनसंख्या 68,09,000 थी। यदि वह 4.7% प्रति वर्ष की दर से बढ़ती है तो वर्ष 2015 के अंत तक उसकी जनसंख्या क्या होगी ?
7. चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात कीजिए जब ₹ 10000 की राशि $8\frac{1}{2}$% प्रति वर्ष की दर से 1 साल 3 माह के लिए वार्षिक संयोजन किया गया है ?
8. आरिफ ने एक बैंक से ₹ 80,000 कर्ज लिया। यदि ब्याज की दर 10% प्रति वर्ष और समय $1\frac{1}{2}$ वर्ष हो तो उसके मिश्रधन में अंतर ज्ञात किजिए जब
   (i) वार्षिक संयोजन हो (ii) अर्धवार्षिक संयोजन हो।
9. मैंने प्रसाद से ₹ 12000, 2 वर्ष के लिए, 6% प्रति वर्ष ब्याज की दर से उधार लिया। यदि मैंने यह राशि 6% प्रतिवर्ष की दर पर वार्षिक संयोजन से लिया होता तो मुझे कितनी अधिक राशि देनी होती ?
10. एक प्रयोगशाला के एक प्रयोग में जीवाणु की वृद्धि 2.5% प्रति घंटा है। दो घंटे के अंत में जीवाणुओं की संख्या ज्ञात कीजिए यदि आरंभिक संख्या 5, 06,000 हो।
11. वार्षिक संयोजन के हिसाब से कमला ने बैंक से ₹ 26400, 15% प्रतिवर्ष की दर से कर्ज लिया। कर्ज चुकाने के लिए उसे 2 वर्ष 4 माह के अंत में कितना मिश्रधन देना होगा ?
12. भारती ने ₹ 12500, 12% प्रति वर्ष की दर से 3 वर्ष के लिए साधारण-ब्याज पर उधार लिया और माधुरी ने वही राशि, समान समय के लिए 10% प्रति वर्ष के लिए वार्षिक संयोजन पर लिया। कौन कितना अधिक ब्याज देगा ?

SCERT TELANGANA

13. ₹ 10000 की मशीनरी के मूल्य में 5% गिरावट आई। 1 वर्ष के पश्चात उसका मूल्य का होगा ?

14.. एक शहर की जनसंख्या 2 वर्ष के पश्चात ज्ञात कीजिए जो अब 12 लाख है और उसमें प्रतिवर्ष 4% की दर से वृद्धि होती हो।

15. यदि त्रैमासिक चक्रवृदि्ध ब्याज हो तो ₹ 1000, 1 वर्ष के लिए, 10% प्रति वर्ष से चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात कीजिए।

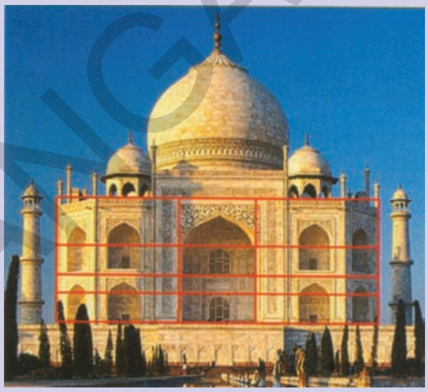
मुख्यांश

1. दो साधारण अनुपात को एक अनुपात में बताना, जैसे- बाह्य पदों का गुणनफल, मध्य पदों के गुणनफल के समान होगा। इसे हम गुणिन अनुपात कहते हैं। जो दिये गये दो अनुपातों का गुणित अनुपात होता है। यदि a : b और c : d दिए गए दो अनुपात हैं तो उसका गुणित अनुपात $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ अर्थात ac : bd
2. प्रतिशत (%) एक संख्या को 100 से तुलना करता है। प्रतिशत शब्द का अर्थ है सौ में सौ या प्रत्येक 100 में $100\% = \frac{100}{100}$ & यह एक भिन्न है जिसका हर हमेशा 100 होता है।
3. कटौती, अंकित मूल्य का कम किया हुआ प्रतिशत है। मूल्य में कमी को कटौती कहते हैं। यह अंकित मूल्य पर या सूचित मूल्य पर किया जाता है।
4. लाभ या हानि हमेशा लागत मूल्य पर ज्ञात किया जाता है। लाभ बढ़े हुए लागत मूल्य का एक उदाहरण है और हानि कम किये मूल्य का उदाहरण है।
5. VAT, विक्रय मूल्य पर लगाया जाता है और बिल में जोड़ दिया जाता है।
6. साधारण-ब्याज, मूलधन का बढ़ा हुआ प्रतिशत है।
7. साधारण-ब्याज $I = \frac{P \times T \times R}{100}$ जहाँ P = मूलधन, T = समय वर्ष में, R = ब्याज की दर
8. मिश्रधन = मूलधन + ब्याज $= P + \frac{P \times T \times R}{100} = P\left(1 + \frac{T \times R}{100}\right)$
9. चक्रवृद्धि ब्याज आपको ब्याज पर ब्याज अर्जित करने की अनुमति देता है।
10. 'n' वर्ष के अंत में चक्रवृद्धि का मिश्रधन $A = P\left(1 + \frac{R}{100}\right)^n$
11. वह समय जिसके बाद ब्याज, मूलधन में जोड़ दिया जाता है वह समपरिवर्तन काल कहलाता है। जब ब्याज का अर्धवार्षिक संयोजन हो तो एक वर्ष में 6 महीने के दो समपरिवर्तन काल होते हैं। ऐसी स्थिति में अर्धवार्षिक दर, वार्षिक दर का आधा होगा।

SCERT TELANGANA

क्या आप जानते हैं?

पूर्वकाल में ग्रीस में वास्तुकार तथा कलाकार ने समझा कि कोई ऐसा आकार है जो आयत के रूप में होता है और बहुत सुन्दर दिखाई देता है। आयत के लिए उसकी लम्बी भुजा और छोटी भुजा का अनुपात लगभग **1.615 : 1**



जाँच कीजिए कि यह अनुपात उसके बहुत निकट है जो सुनहरा अनुपात कहलाता है। पार्थेनन नामक ग्रीक मंदिर ईसा पूर्व पाँचवी शताब्दी में, सफेद मार्बल से इसी सुनहरे अनुपात के अनुसार बनाया गया था। भारत का ताजमहल भी इस सुनहरे अनुपात का एक उदाहरण है।

समान अनुपातों का योग

1. $\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{6}+\frac{4}{8}+.....+\frac{100}{200}$ का योग क्या होगा?

   क्या हम इन्हें इस प्रकार जोड़ सकते हैं?

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{6}+\frac{4}{8}+.....+\frac{100}{200} = \frac{1+2+3+4+.....+100}{2+4+6+8+.....+200}$$
$$= \frac{5050}{2\times 5050} = \frac{1}{2}$$

यदि $\frac{p_1}{q_1}=\frac{p_2}{q_2}=\frac{p_3}{q_3}=.....=\frac{p_n}{q_n}$

तो $\frac{p_1}{q_1}+\frac{p_2}{q_2}+\frac{p_3}{q_3}+.....+\frac{p_n}{q_n}=\frac{p_1+p_2+p_3+....+p_n}{q_1+q_2+q_3+.....+q_n}=\frac{p_1}{q_1}$

2. $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ यद्यैव (iff) $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$ $(b,d>0)$

   $\frac{1}{2}=\frac{3}{6}$ यद्यैव $\frac{1+2}{2}=\frac{3+6}{6}$

   $\frac{3}{2}=\frac{9}{6}$ इसे फिर से इस प्रकार भी लिखा जा सकता है- $\frac{5}{2}=\frac{15}{6}$......