

अध्याय-12

समीकरण

EQUATION



पिछली कक्षा में आप निम्न प्रकार के समीकरणों को हल कर चुके हैं। आइये, कुछ और सरल समीकरणों को हल करें।

क्र.सं.	समीकरण	समीकरण का हल
1.	$3x + 9 = 12$	$x = 1$
2.	$3x + 5 = 8$	-----
3.	$5x + 9 = 2x + 12$	-----
4.	$6x + 18 = 24$	-----
5.	$x + 3 = 4$	-----

ऊपर के समीकरणों को हल करते हुए शैली ने अनु से कहा कि सभी समीकरणों के हल $x = 1$ प्राप्त हो रहे हैं। समीकरण तो अनेक हैं, लेकिन सभी समीकरणों के हल एक ही है, ऐसा क्यों?

इन समीकरणों को ध्यान से देखिए। आप पाते हैं कि पहले समीकरण से ही दूसरा समीकरण बना है, पहले समीकरण के दोनों पक्षों में 4 घटाने पर दूसरा समीकरण प्राप्त हुआ है। अतः दोनों समीकरणों का हल एक ही है। इसी प्रकार, पहले समीकरण के दोनों पक्षों में $2x$ जोड़ने पर तीसरा समीकरण प्राप्त हुआ।

पहले समीकरण में 2 का गुणा तथा 3 का भाग देने पर क्रमशः चौथा और पाँचवाँ समीकरण प्राप्त हुआ है। तभी रहीम ने कहा – चूँकि प्रत्येक बार समान संख्या से एक ही प्रकार की संक्रिया दोनों पक्षों में की जा रही है, इसलिए उसका हल नहीं बदल रहा है।

अतः

- (i) किसी भी समीकरण के दोनों पक्षों में समान संख्या जोड़ने या घटाने पर,
- (ii) किसी भी समीकरण के दोनों पक्षों में समान शून्येत्तर (जो शून्य न हो) संख्या का गुणा या भाग करने पर, समीकरण के हल में कोई अन्तर नहीं आता।

किसी समीकरण के दोनों पक्षों में शून्य से गुणा करने अथवा शून्य से भाग देने पर क्या होगा? सोचिए, अपने साथियों एवं अध्यापक से चर्चा कीजिए।

क्रियाकलाप-1.

अब आप भी नीचे दी गई सारणी में निर्देशानुसार नया समीकरण बनाइये।

सारणी 12.1

क्र.सं.	समीकरण	दोनों पक्षों में की जाने वाली संक्रियाएं	नया समीकरण
1.	$5x + 6 = 11$	5 जोड़ने पर	$5x + 11 = 16$
2.	$17x - 8 = 22$	$4x$ घटाने पर	-----
3.	$4x - 5 = 2x + 9$	6 जोड़ने पर	-----
4.	$3x + 2 = 5$	2 गुणा करने पर	-----
5.	$6x + 15 = 9$	3 से भाग देने पर	-----
6.	$2x - 7 = 11$	$3x$ जोड़ने पर	-----

आप पिछली कक्षा में निम्न प्रकार के समीकरण भी हल कर चुके हैं –

जैसे, $\frac{x}{7} = 3$ को हल करने के लिए बाएँ पक्ष के हर से 7 हटाना होगा, इस हेतु समीकरण के दोनों पक्षों में 7 का गुणा करते हैं—

$$\text{अर्थात् } \frac{x}{7} \times 7 = 3 \times 7$$

$$\Rightarrow x = 21$$

अब यदि समीकरण $\frac{7}{x} = 1$ हो, तो आप इसे कैसे हल करेंगे?

यहाँ भी समीकरण के हर से x हटाने के लिए समीकरण के दोनों पक्षों में x का गुणा करना होगा।

इस प्रकार, बीजीय हर वाली समीकरण से हर को विलोपित किया जाता है।

नीचे सारणी में दिए गए निर्देशों के अनुसार समीकरणों को हल कीजिए—

सारणी 12.2

क्र.सं.	समीकरण	समीकरण के एक पक्ष को अंश/हर के रूप में लिखने पर	दोनों पक्षों में हर को गुणा करने पर	समीकरण को रेखिय रूप में लिखने पर	चर एवं अचर का पक्षान्तर करने पर	हल
1.	$\frac{8x+5}{2x+7} - 3 = 0$	$\frac{8x+5}{2x+7} = 3$	$\frac{(8x+5)(2x+7)}{2x+7} = 3(2x+7)$	$8x + 5 = 6x + 21$	$8x - 6x = 21 - 5$	$x = 8$
2.	$\frac{9x}{x+5} = 4$					
3.	$\frac{2y+9}{3y+10} - 3 = 0$					
4.	$\frac{3(x-3)}{x+4} = 2$					

वास्तव में इस प्रकार के प्रश्न $\frac{ax+b}{cx+d} = k$ के रूप में हैं। जहाँ a, b, c, d एवं k पूर्णांक हैं एवं x चर राशि है तथा $cx + d \neq 0$

$\frac{ax+b}{cx+d} = k$ प्रकार के समीकरणों का हल—

समीकरण $\frac{6x+2}{4x+1} = 2$ भी एकचरीय समीकरण है। इस समीकरण के हर में भी चर राशि है। व्यापक समीकरण $\frac{ax+b}{cx+d} = k$ से तुलना करने पर $a = 6, b = 2, c = 4, d = 1$ एवं $k = 2$ है।

इस प्रकार के समीकरणों को हल करना आप सीख चुके हैं। आइए, कुछ और समीकरणों को हल करें —

उदाहरण 1. समीकरण $\frac{2x+5}{3x+1} = \frac{3}{11}$ को हल कीजिए।

हल: दिये गये समीकरण $\frac{2x+5}{3x+1} = \frac{3}{11}$

समीकरण के दोनों पक्षों में $(3x+1)$ से गुणा करने पर,

$$\frac{2x+5}{3x+1} \times (3x+1) = \frac{3}{11} \times (3x+1)$$

$$\Rightarrow 2x + 5 = \frac{3}{11}(3x+1) \quad (\text{चरण 1})$$

दायें पक्ष के हर से 11 विलोपित करने हेतु समीकरण के दोनों पक्षों में 11 का गुणा करने पर,

$$11 \times (2x + 5) = \frac{3}{11}(3x+1) \times 11$$

$$\Rightarrow 11(2x + 5) = 3(3x + 1) \quad (\text{चरण 2})$$

$$\Rightarrow 22x + 55 = 9x + 3 \quad (\text{कोष्ठक हल करने पर})$$

$$\Rightarrow 22x - 9x = 3 - 55$$

$$\Rightarrow 13x = -52$$

$$\Rightarrow x = \frac{-52}{13}$$

$$\Rightarrow x = -4$$

$$\begin{aligned}
 \text{जाँच: बायाँ पक्ष} &= \frac{2x+5}{3x+1} \\
 &= \frac{2(-4)+5}{3(-4)+1} \\
 &= \frac{-8+5}{-12+1} \\
 &= \frac{-3}{-11} \\
 &= \frac{3}{11} \\
 &= \text{दायाँ पक्ष}
 \end{aligned}$$

अतः प्राप्त हल $x = -4$ ही दिये गये समीकरण का अभीष्ट हल है।

उपरोक्त उदाहरण में आप देख रहे हैं कि बाएँ पक्ष का हर $(3x+1)$ चरण, (1) में वहाँ से विलोपित होकर दाएँ पक्ष के अंश से गुणा हो जाता है। इसी प्रकार, दाएँ पक्ष का हर 11 चरण, (2) से विलोपित होकर बाएँ पक्ष के अंश से गुणा हो जाता है। इस प्रकार के परिवर्तन को वज्रगुणन कहते हैं।

इस प्रकार के प्रश्नों को वज्रगुणन या तिर्यक गुणन का उपयोग करके भी हल किया जा सकता है।

उदाहरण 2. समीकरण $\frac{5-7y}{2+4y} = \frac{-8}{7}$ को हल कीजिए।

हल: दिये गये समीकरण—

$$\frac{5-7y}{2+4y} = \frac{-8}{7}$$

वज्र गुणा या तिर्यक गुणा करने पर,

$$7 \times (5-7y) = -8 \times (2+4y)$$

$$\text{या } 35 - 49y = -16 - 32y$$

$$\text{या } -49y + 32y = -16 - 35 \quad (\text{पक्षान्तर करने पर})$$

$$\text{या } -17y = -51$$

$$\text{या } y = \frac{-51}{-17}$$

$$y = 3$$

उत्तर की जाँच आप स्वयं कीजिए।

$$\frac{5-7y}{2+4y} \times \frac{7}{7} = \frac{-8}{7} \times \frac{2+4y}{2+4y}$$

(वज्र गुणन या तिर्यक गुणा)

उदाहरण 3. समीकरण $\frac{y - (7 - 8y)}{9y - (3 + 4y)} = \frac{11}{7}$ को हल कीजिए।

हल: दिये गये समीकरण

$$\frac{y - (7 - 8y)}{9y - (3 + 4y)} = \frac{11}{7}$$

या $\frac{y - 7 + 8y}{9y - 3 - 4y} = \frac{11}{7}$ (कोष्ठक हल करने पर)

या $\frac{9y - 7}{5y - 3} = \frac{11}{7}$

$\frac{9y - 7}{5y - 3} \times = \frac{11}{7}$ (वज्रगुणन करने पर)

या $7 \times (9y - 7) = 11 \times (5y - 3)$
 $63y - 49 = 55y - 33$ (कोष्ठक हल करने पर)

या $63y - 55y = -33 + 49$ (पक्षान्तर करने पर)

या $8y = 16$

या $y = \frac{16}{8}$

$\Rightarrow y = 2$

उत्तर की जाँच आप स्वयं कीजिए।

उदाहरण 4. समीकरण—

$$\frac{x + 0.5}{0.3x} = 20 \text{ हल कीजिए।}$$

हल: दिये गए समीकरण—

$$\frac{x + 0.5}{0.3x} = \frac{20}{1}$$

$\frac{x + 0.5}{0.3x} \times = \frac{20}{1}$

वज्र गुणन करने पर

$$1 \times (x + 0.5) = 20 \times 0.3x$$

या $x + 0.5 = 6x$

$$\text{या } 6x = x + 0.5$$

$$\text{या } 6x - x = 0.5 \quad (\text{पक्षान्तर करने पर})$$

$$\text{या } 5x = 0.5$$

$$5x = \frac{5}{10}$$

$$\text{या } x = \frac{5}{10} \times \frac{1}{5} \quad (\text{गुणा 5 का पक्षान्तरण करने पर})$$

$$\text{या } x = \frac{1}{10}$$

$$\text{या } x = 0.1$$

अतः दिये गये समीकरण का अभीष्ट हल $x = 0.1$ है।

प्रश्नावली 12.1

निम्नलिखित समीकरणों को हल कीजिए और अपने उत्तर की जाँच कीजिए।

$$(1) \quad \frac{4x+18}{5x} = 2$$

$$(2) \quad \frac{5x+2}{2x+3} = \frac{7}{5}$$

$$(3) \quad \frac{7m+6}{4m+2} = 2$$

$$(4) \quad \frac{x-3}{x+2} = \frac{-3}{7}$$

$$(5) \quad \frac{2y-5}{3y+1} = \frac{3}{13}$$

$$(6) \quad \frac{8-3y}{5y+2} = \frac{1}{6}$$

$$(7) \quad \frac{17-2k}{k-5} = -3$$

$$(8) \quad \frac{4x-(x+7)}{3x-(5x-9)} = \frac{2}{3}$$

$$(9) \quad \frac{1.5x+0.3}{3x} = \frac{3}{10}$$

दैनिक जीवन में समीकरण के अनुप्रयोग

हमारे दैनिक जीवन में भी कई समस्याएं आती हैं। इन समस्याओं में ज्ञात, अज्ञात राशि या संख्याओं में कुछ सम्बन्ध होते हैं। इन सम्बन्धों को समीकरण बनाकर आसानी से हल कर सकते हैं। समीकरण हल करने के महत्वपूर्ण चरण निम्न हैं :-

1. प्रश्न को ध्यान से पढ़कर ज्ञात एवं अज्ञात राशि की पहचान करते हैं।
2. अज्ञात राशियों को x, y, z आदि अक्षरों से निरूपित करते हैं।
3. शाब्दिक समस्या के कथनों को गणितीय कथन में परिवर्तित कर समीकरण बनाते हैं।
4. समीकरण को हल करके अज्ञात राशि का मान ज्ञात करते हैं।
आइये, उपरोक्त प्रक्रिया को उदाहरणों से समझें।

उदाहरण 5. दो संख्याओं का योग 35 है एवं दोनों संख्याओं का अनुपात 1 : 4 है। वे संख्याएं ज्ञात कीजिए।

हल: माना कि पहली संख्या x है।

प्रथम शर्तानुसार,

चूँकि दोनों संख्याओं का योग = 35

$$\Rightarrow x + \text{दूसरी संख्या} = 35$$

$$\Rightarrow \text{दूसरी संख्या} = 35 - x$$

द्वितीय शर्तानुसार,

संख्याओं का अनुपात = 1 : 4

$$\text{या } \frac{x}{35-x} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{x}{35-x} \times \frac{4}{4} = \frac{1}{4}$$

(तिर्यक गुणन)

$$\text{या } 4x = 35 - x$$

$$\text{या } 4x + x = 35$$

(x का पक्षान्तर करने पर)

$$\text{या } 5x = 35$$

$$\text{या } x = \frac{35}{5}$$

(5 का पक्षान्तर करने पर)

$$\text{या } x = 7$$

अतः एक संख्या = 7

एवं दूसरी संख्या = $35 - 7 = 28$

जाँच :

$$1. \text{ दोनों संख्याओं का योग } = 7 + 28 = 35$$

$$2. \text{ दोनों संख्याओं का अनुपात } = \frac{7}{28} = \frac{1}{4}$$

अतः हमारा हल सही है।

उदाहरण 6.

एक परिमेय संख्या का हर उसके अंश से 4 अधिक है। अंश में 6 जोड़ने एवं हर में 3 घटाने पर संख्या $\frac{3}{2}$ हो जाती है। वह परिमेय संख्या ज्ञात कीजिए।

हल: माना कि अंश x है

तो हर = $x + 4$

$$\text{अतः परिमेय संख्या} = \frac{\text{अंश}}{\text{हर}} = \frac{x}{x+4}$$

अंश में 6 जोड़ने पर $= x + 6$

हर में 3 घटाने पर $= (x + 4) - 3 = x + 1$

$$\therefore \text{नई परिमेय संख्या} = \frac{x+6}{x+1}$$

शर्तानुसार, नई संख्या $\frac{3}{2}$ हो जाती है।

$$\frac{x+6}{x+1} = \frac{3}{2}$$

तिर्यक गुणा करने पर

$$\frac{x+6}{x+1} \times \frac{2}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\begin{array}{lcl} \text{या} & 2(x+6) & = 3(x+1) \\ & 2x+12 & = 3x+3 \\ \text{या} & 2x-3x & = 3-12 \\ & -x & = -9 \\ & x & = 9 \end{array}$$

$$\text{अतः अभीष्ट परिमेय संख्या} = \frac{x}{x+4} = \frac{9}{9+4} = \frac{9}{13}$$

जाँच

1. $13 - 9 = 4$ अर्थात् हर, उसके अंश से 4 अधिक है।
2. 6 जोड़ने पर अंश $= 9 + 6 = 15$
3 घटाने पर हर $= 13 - 3 = 10$

$$\text{नई संख्या} = \frac{15}{10} = \frac{3}{2}$$

अतः हमारा हल सही है।

उदाहरण 7. दो अंकीय संख्या के दोनों अंकों का योग 12 है। अंकों को उलटने से प्राप्त नवीन संख्या मूल संख्या से 18 अधिक हो जाती है, तो मूल संख्या ज्ञात कीजिए।

हल : माना कि इकाई का अंक x है,

तो प्रश्नानुसार, इकाई अंक + दहाई अंक $= 12$

$$\Rightarrow x + \text{दहाई का अंक} = 12$$

$$\Rightarrow \text{दहाई का अंक} = 12 - x$$

$$\begin{aligned} \text{अतः मूल संख्या} &= 10 \times (\text{दहाई का अंक}) + \text{इकाई का अंक} \\ &= 10 \times (12 - x) + x && [\text{स्थानीयमान के अनुसार}] \\ &= 120 - 10x + x \\ &= 120 - 9x \end{aligned}$$

अब अंकों को उलटने पर इकाई अंक, दहाई एवं दहाई अंक, इकाई अंक बन जायेगा।

अतः इकाई अंक = $12 - x$

एवं दहाई अंक = x

$$\begin{aligned}\text{तब नवीन संख्या} &= 10 \times x + (12 - x) \\ &= 10x + 12 - x \\ &= 9x + 12\end{aligned}$$

शर्तानुसार, नवीन संख्या मूल संख्या से 18 अधिक हो जाती है।

अर्थात् नवीन संख्या = मूल संख्या + 18

$$9x + 12 = 120 - 9x + 18$$

$$9x + 12 = 138 - 9x$$

$$9x + 9x = 138 - 12 \quad (\text{पक्षान्तर करने पर})$$

$$18x = 126$$

$$x = \frac{126}{18} \text{ या } x = 7$$

$$\begin{aligned}\text{अतः मूल संख्या} &= 120 - 9x \\ &= 120 - 9 \times 7 \\ &= 120 - 63 = 57\end{aligned}$$

जाँच: स्वयं करके देखिए।

उदाहरण 8. दो संख्याओं में 3 : 5 का अनुपात है। प्रत्येक में से 4 घटाने पर यह अनुपात 5 : 9 हो जाता है। संख्याएं ज्ञात कीजिए।

हल: माना कि पहली संख्या = $3x$

एवं दूसरी संख्या = $5x$

पहली संख्या में से 4 घटाने पर = $3x - 4$ एवं

दूसरी संख्या में से 4 घटाने पर = $5x - 4$

शर्तानुसार, प्रत्येक संख्या में से 4 घटाने पर उनका अनुपात = $\frac{5}{9}$

$$\Rightarrow \frac{3x-4}{5x-4} = \frac{5}{9}$$

$$\frac{3x-4}{5x-4} \times \frac{9}{9} = \frac{5}{9} \quad (\text{वज्र गुणा करने पर})$$

$$9 \times (3x - 4) = 5(5x - 4)$$

$$\Rightarrow 27x - 36 = 25x - 20 \quad (\text{कोष्ठक हल करने पर})$$

$$\Rightarrow 27x - 25x = -20 + 36 \quad (\text{पक्षान्तर करने पर})$$

$$\Rightarrow 2x = 16$$

$$\Rightarrow x = \frac{16}{2} \text{ या } x = 8$$

$$\text{अतः पहली संख्या} = 3 \times 8 = 24$$

$$\text{एवं दूसरी संख्या} = 5 \times 8 = 40$$

$$\text{जाँच : 1. दोनों संख्याओं का अनुपात} = \frac{24}{40} = \frac{3}{5}$$

$$2. \text{ प्रत्येक में से 4 घटाने पर अनुपात} = \frac{24-4}{40-4} = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}$$

अतः हमारा हल सही है।

उदाहरण 9. पिता की वर्तमान आयु, पुत्र की आयु से 20 वर्ष अधिक है। 3 वर्ष बाद पुत्र तथा पिता की आयु का अनुपात 19 : 39 हो जायेगा। पुत्र की वर्तमान आयु ज्ञात कीजिए।

हल: माना कि पुत्र की वर्तमान आयु = x वर्ष

तो पिता की वर्तमान आयु = $(x + 20)$ वर्ष

3 वर्ष बाद पुत्र की आयु = $(x + 3)$ वर्ष

3 वर्ष बाद पिता की आयु = $x + 20 + 3 = (x + 23)$ वर्ष

प्रश्नानुसार, 3 वर्ष बाद पुत्र तथा पिता की आयु का अनुपात = 19 : 39

$$\Rightarrow (x + 3) : (x + 23) = 19 : 39$$

$$\Rightarrow \frac{x+3}{x+23} \times = \frac{19}{39} \quad (\text{तिर्यक गुणा करने पर})$$

$$\Rightarrow 39(x + 3) = 19(x + 23)$$

$$\Rightarrow 39x + 117 = 19x + 437 \quad (\text{कोष्ठक हटाने पर})$$

$$\Rightarrow 39x - 19x = 437 - 117 \quad (\text{पक्षान्तर करने पर})$$

$$\Rightarrow 20x = 320$$

$$\Rightarrow x = \frac{320}{20} \quad (\text{दोनों पक्षों में 20 से भाग देने पर})$$

$$x = 16$$

अतः पुत्र की वर्तमान आयु = 16 वर्ष

एवं पिता की आयु = $x + 20$

$$= 16 + 20 = 36 \text{ वर्ष}$$

जाँच :

3 वर्ष बाद पुत्र की आयु = $16 + 3 = 19$ वर्ष

तथा 3 वर्ष बाद पिता की आयु = $36 + 3 = 39$ वर्ष

3 वर्ष बाद पुत्र और पिता की आयु का अनुपात = 19 : 39

अतः हमारा उत्तर सही है।



प्रश्नावली 12.2

1. दो संख्याओं का योग 42 है एवं यदि दूसरी संख्या पहली की दुगुनी हो तो संख्याएं ज्ञात कीजिए।
2. नीरज के पास मयंक से 3 गुने आम थे। यदि मयंक को 8 आम एवं नीरज को 6 आम और दिए जाए, तो मयंक और नीरज के आम का अनुपात 1 : 2 हो जाता है। बताइए दोनों के पास कितने-कितने आम थे।
3. दो समबाहु त्रिभुजों में से पहले त्रिभुज की भुजा, दूसरे त्रिभुज की भुजा से 3 सेमी अधिक है एवं दोनों त्रिभुजों के परिमापों का अनुपात 5 : 2 है, तो त्रिभुजों की भुजाएं ज्ञात कीजिए।
4. दो अंकीय संख्या के दहाई का अंक इकाई के अंक का तीन गुना है। यदि अंकों को उलट दिया जाए, तो नई संख्या मूल संख्या से 36 कम हो जाती है। संख्या ज्ञात कीजिए।
5. दो अंकीय संख्या के दोनों अंकों का योग 7 है। अंकों को उलटने पर नई संख्या, मूल संख्या से 9 अधिक हो जाती है। संख्या ज्ञात कीजिए।
6. एक परिमेय संख्या का हर उसके अंश से 2 अधिक है, यदि अंश 4 गुना कर दिया जाये और हर में 8 जोड़ दिया जाये तो नवीन संख्या $\frac{4}{3}$ हो जाती है। मूल संख्या ज्ञात कीजिए।
7. अनुराग और आकांक्षा की आयु का अनुपात 7 : 5 है। 6 वर्ष बाद उनकी आयु 5 : 4 के अनुपात में हो जाती है, तो दोनों की वर्तमान आयु ज्ञात कीजिए।
8. मनीषा की मां की आयु, मनीषा की आयु की तिगुनी है। चार वर्ष बाद माँ की आयु मनीषा की आयु से ढाई गुनी हो जाती है। दोनों की वर्तमान आयु ज्ञात कीजिए।

हमने सीखा

1. समीकरण के मान में कोई अन्तर नहीं आता, यदि समीकरण के दोनों पक्षों में –
 - (i) समान संख्या जोड़ दें।
 - (ii) समान संख्या घटा दें।
 - (iii) समान शून्येत्तर संख्या का गुणा कर दें।
 - (iv) समान शून्येत्तर संख्या का भाग दें।
2. $\frac{ax+b}{cx+d} = k$ जहाँ समीकरण में a, b, c, d एवं k पूर्णांक तथा $cx + d \neq 0$ हो, तो समीकरण एक चरीय समीकरण होता है।
3. $\frac{ax+b}{cx+d} = k$ जैसी समीकरणों को हल करने में वज्रगुणन विधि उपयोगी रहती है।
4. किसी शाब्दिक समस्या को हल करने के लिए अज्ञात राशि को किसी चर से व्यक्त करते हैं एवं प्रश्नानुसार इसे बीजीय समीकरण में बदलकर समीकरण हल करते हैं।



अध्याय—13

प्रतिशतता के अनुप्रयोग

APPLICATION OF PERCENTAGE

भूमिका

हमने देखा था कि ब्याज की गणना करने में हमें यह पता होना चाहिए कि ब्याज की दर क्या है। सामान्यतः यह दर एक वर्ष में कुल राशि 100 रु. पर लगने वाले ब्याज के बराबर मानी जाती है। पूर्व में ब्याज दर व प्रतिशत पर हमने कई सवाल किए थे। हमने लाभ—हानि को भी ज्ञात किया था और क्रय मूल्य एवं विक्रय मूल्य में इसकी (दर की) गणना भी की थी। जितनी ज्यादा दर उतना अधिक लाभ/हानि अथवा ब्याज।

इन सबको दोहराने के लिए चलिए कुछ सवाल हल कर लें और कुछ बातें पुनः याद कर लें। इन सवालों को हल करके देखिए —

1. एक विद्यार्थी के 600 में से 396 अंक आए। बताईए उसे कितने प्रतिशत अंक मिले।
2. एक स्कूल में वर्ष 2004 में 80% छात्र उत्तीर्ण हुए। यदि 12 छात्र अनुत्तीर्ण हुए तो कुल छात्रों की संख्या बताइए।
3. रजनी ने 3500 रुपये में 8 कैलकुलेटर बेचे यदि उसे 500 रुपये का लाभ हुआ है तो प्रति कैलकुलेटर उसका लाभ प्रतिशत बताएं।
यह भी बताएँ कि उसका प्रति कैलकुलेटर क्रय मूल्य क्या था।
4. जमीला ने 50 कार्ड शीट 400 रु. की खरीदी। उसने 100 रु. के रंग, ब्रश आदि भी खरीद कर कार्ड शीट पर चित्र बनाए। इनमें से प्रत्येक कार्ड शीट से उसने 12 कार्ड बनाएं और उन्हें 2-2 रु. में बेचा। उसे कितना लाभ हुआ। लाभ प्रतिशत भी निकालें।
सलमा बोली— जमीला को लाभ नहीं हानि हुई है आप इसे कैसे समझाएंगे कि वास्तव में सही क्या है?
5. एक व्यापारी ने 50 किलो धान 1000 रु. में खरीदा और उसे साफ करवा कर एक—एक किलोग्राम की थैलियाँ बनवाई। इसमें उसको 200 रु. का खर्च हुआ। बाज़ार में बड़ी मात्रा में धान आने से दाम कम हो गए और उसके पैकेट 21 रु. किलो में ही बिक पाए। उसे लाभ हुआ या हानि, दर भी निकालें।
6. मोहन ने दो वर्ष बाद उधार धन लौटाते समय 500 रु. ब्याज दिया। यदि साधारण ब्याज की दर 10% वार्षिक है तो उसने कितना धन उधार लिया था।
7. रीता ने 5000 रु. उधार दिए। दो वर्ष बाद 12% वार्षिक दर से ब्याज मिलने पर उसे कुल कितनी राशि मिलेगी।

8. मोहन ने किसी सेठ को 4 वर्ष बाद 3024 रु. लौटाए। यदि ब्याज की दर 11% वार्षिक है तो बताइए कि उसने कितनी राशि उधार ली थी।

कक्षा छठवीं और सातवीं में हमने इस प्रकार की कई समस्याओं का हल ढूँढ़ा है। आइए, ऐसी ही एक नई समस्या का हल ढूँढ़ने का प्रयास करें।

चक्रवृद्धि ब्याज (Compound Interest)

अखिलेश ने घर के किसी उत्सव के लिए 10,000 रु. बैंक से उधार लिए। उसे 10% वार्षिक दर से उस पर ब्याज देना था। उस साल उसकी आय कम हुई तो वह बैंक गया। उसने कहा— मैं इस वर्ष 11,000 रु. देने के बदले अगले वर्ष 12,000 रु. लौटा दूंगा। इस पर उसे बताया गया कि उसे 12,100 रु. लौटाने होंगे। अखिलेश ने कहा, ये 100 रु. अतिरिक्त क्यों ले रहे हैं, 12000 रुपये ही लीजिए।

इस पर बैंक अधिकारी ने बताया हम आपसे कोई अतिरिक्त रुपये नहीं ले रहे हैं। यह तो इस साल नहीं चुकाए गए ब्याज पर ब्याज है। अर्थात् 10,000 रु. पर एक साल में ब्याज हुआ 1000 रु.। चूंकि आपने ब्याज नहीं चुकाया तो अगले साल का कुल मूलधन 10,000 + 1000 याने 11,000 रु. हो गया। दूसरे वर्ष में हम 11,000 रु. पर ब्याज निकालेंगे। अखिलेश बोला और अगर मैं इस साल भी नहीं दे पाया तो फिर क्या ब्याज 12,100 रुपये पर निकालेंगे। पर यह कुछ अलग ही तरीका है। उसे बैंक वालों ने समझाया कि सामान्य तौर पर हम साधारण ब्याज की बात करते हैं जिसमें ब्याज मूलधन में नहीं जुड़ता, किन्तु स्वाभाविक तौर पर उधार देने वाला हमेशा ब्याज पर भी ब्याज लेता है। इसे चक्रवृद्धि ब्याज कहते हैं।

अखिलेश को कितनी रकम देनी पड़ेगी उसके लिए यह तालिका देखें और इसी प्रकार दो अन्य मूलधनों के लिए तालिका की पूर्ति करें।

तालिका 13.1



क्रमांक	मूलधन	दर	पहले वर्ष		दूसरा वर्ष		तीसरा वर्ष	
			ब्याज	मिश्रधन	ब्याज	मिश्रधन	ब्याज	मिश्रधन
1.	10,000	10%	1000	11000	1100	12100	1210	13310
2.	80,000	5%						
3.	5,000	10%						

स्पष्ट है कि चक्रवृद्धि ब्याज साधारण ब्याज से अधिक होता है।

आइये, अब कुछ सवाल करें।

उदाहरण 1. 1500 रु. पर 2 वर्ष के लिए 6% वार्षिक ब्याज की दर से चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात कीजिए। मिश्रधन भी ज्ञात कीजिए।

प्रश्नानुसार पहले वर्ष के लिए $P = 1500$ रु.
 $R = 6\%$
 $T = 1$ वर्ष

पहले वर्ष का ब्याज
$$= \frac{P \times R \times T}{100}$$

$$= \frac{1500 \times 6 \times 1}{100}$$

$$= 90 \text{ रु.}$$

प्रथम वर्ष के अन्त में मिश्रधन = मूलधन + ब्याज

$$= 1500 + 90$$

$$= 1590 \text{ रु.}$$

प्रथम वर्ष के अन्त में मिश्रधन ही दूसरे वर्ष के लिए मूलधन होता है।

अतः दूसरे वर्ष के लिए मूलधन $P = 1590$ रु.
 $R = 6\%$
 $T = 1$ वर्ष

दूसरे वर्ष के लिए ब्याज
$$= \frac{P \times R \times T}{100}$$

$$= \frac{1590 \times 6 \times 1}{100}$$

$$= \frac{159 \times 6}{10} = 95.40 \text{ रु.}$$

चक्रवृद्धि ब्याज = पहले वर्ष का ब्याज + दूसरे वर्ष का ब्याज

$$= 90.00 + 95.40$$

$$= 185.40 \text{ रु.}$$

मिश्रधन = मूलधन + चक्र. ब्याज

$$= 1500 + 185.40 \text{ रु.}$$

$$= 1685.40 \text{ रु.}$$

इस प्रकार चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात करने के लिए प्रत्येक वर्ष ब्याज की गणना करनी पड़ती है।

उदाहरण 2. 4000 रु. पर दो वर्ष के लिए 8% वार्षिक चक्रवृद्धि ब्याज की दर से मिश्रधन ज्ञात कीजिए।

हल: यहाँ मूलधन $(P) = 4000$ रु.

दर $(R) = 8\%$ या $\frac{8}{100}$

समय (T) = 2 वर्ष

पहले एक वर्ष का ब्याज ज्ञात करना है।

$$\begin{aligned}\text{पहले वर्ष का ब्याज} &= \frac{P \times R \times T}{100} \\ &= \frac{4000 \times 8 \times 1}{100} = 320 \text{ रु.}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{प्रथम वर्ष के अन्त में मिश्रधन} &= \text{मूलधन} + \text{ब्याज} \\ &= 4000 + 320 \\ &= 4320 \text{ रु.}\end{aligned}$$

यही दूसरे वर्ष के लिए मूलधन होगा।

$$\begin{aligned}\text{दूसरे वर्ष का ब्याज} &= \frac{P \times R \times T}{100} \\ &= \frac{4320 \times 8 \times 1}{100} = 345.60 \text{ रु.}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{दूसरे वर्ष के अन्त में मिश्रधन} &= \text{दूसरे वर्ष का मूलधन} + \text{ब्याज} \\ &= 4320 + 345.60 \text{ रु.} \\ &= 4665.60 \text{ रु.}\end{aligned}$$

प्रश्नावली 13.1

प्र.1. चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात कीजिए।

- (i) 4000 रु. पर 2 वर्ष के लिए 5 प्रतिशत वार्षिक ब्याज की दर से।
- (ii) 6000 रु. पर 3 वर्ष के लिए 10 प्रतिशत वार्षिक ब्याज की दर से।
- (iii) 6250 रु. पर 2 वर्ष के लिए 8 प्रतिशत वार्षिक ब्याज की दर से।

प्र.2. मिश्रधन ज्ञात कीजिए जबकि ब्याज की गणना प्रतिवर्ष की जाती है।

- (i) 7500 रु. पर 2 वर्ष के लिए 6 प्रतिशत वार्षिक ब्याज की दर से।
- (ii) 2500 रु. पर 2 वर्ष के लिए 8 प्रतिशत वार्षिक ब्याज की दर से।
- (iii) 5120 रु. पर 2 वर्ष के लिए $12\frac{1}{2}$ प्रतिशत वार्षिक ब्याज की दर से।

प्र.3. एक किसान डीजल पंप लेने के लिए ग्रामीण बैंक से 5500 रु. 4% वार्षिक, चक्रवृद्धि ब्याज की दर से कर्ज लिया। वार्षिक गणना पर ज्ञात कीजिए कि 2 वर्ष पश्चात् किसान, बैंक को कितना रुपया देगा?

4. अनुराधा ने किसी संस्था में 5% वार्षिक चक्रवृद्धि ब्याज की दर से 8000 रु. जमा किए 3 वर्षों के बाद उसको मिलने वाला मिश्रधन ज्ञात कीजिए।

तिमाही एवं छःमाही गणना पर चक्रवृद्धि ब्याज

बैंकों में और कई अन्य कार्यों में ब्याज की गणना वार्षिक न होकर छः माही और कभी-कभी तिमाही होती है। इसका मतलब हुआ कि हर छः अथवा तीन माह में मूलधन बदलता जाता है। आइए इसे एक उदाहरण द्वारा समझें —

उदाहरण 3. सकीना ने 4000 रु. बैंक में जमा करवाए। बैंक 5% वार्षिक दर से ब्याज देता है और ब्याज की गणना हर 6 माह में करता है। तो एक साल बाद उसके खाते में कितना पैसा होगा?

हल: यदि इस सवाल में ब्याज की गणना वार्षिक की जाए तो सकीना को साल भर में $\frac{4000 \times 5 \times 1}{100}$ अर्थात् 200 रु. ब्याज मिलता और उसके खाते में 4200 रु. हो जाते।

चूंकि ब्याज की गणना 6 महीने में होती है इसलिए हमें 6 महीने तक का ब्याज निकाल कर मूलधन में जोड़ना होगा।

$$6 \text{ महीने का ब्याज} = \frac{4000 \times 5}{100} \times \frac{6}{12} = 100 \text{ रु. [6 महीने को } \frac{6}{12} \text{ वर्ष भी लिख सकते हैं।]}$$

अतः 6 महीने के बाद के लिए मूलधन 4100 रु.

$$6 \text{ महीने से 12 महीने तक के लिए ब्याज} = \frac{4100 \times 5}{100} \times \frac{6}{12} = 102.50 \text{ रु.}$$

$$\text{अर्थात् साल भर बाद खाते में राशि} = 4000 + 100 + 102.50$$

$$\text{या } 4100 + 102.50 = 4202.50$$

जाहिर है कि 6 माह में गणना से 2 रु. 50 पैसा अतिरिक्त ब्याज मिला।

ब्याज की गणना जितने कम समय में होगी उतनी जल्दी ब्याज पर ब्याज लगना शुरू होगा और बकाया अथवा जमा राशि बढ़ती जाएगी।

प्रश्नावली 13.2

- प्र.1. एक बैंक घरेलू बचत खाते पर 5% वार्षिक चक्रवृद्धि ब्याज देता है यदि ब्याज प्रत्येक 6 माह में मूलधन में जोड़ दिया जाता है तो नरेश को बैंक में 1600 रु. जमा करने पर एक वर्ष पश्चात् कितना ब्याज मिलेगा?
- प्र.2. अनामिका किसी वित्त कम्पनी में 24000 रु. 10% वार्षिक चक्रवृद्धि ब्याज की दर से $1\frac{1}{2}$ वर्ष के लिए जमा कराता है। यदि ब्याज की गणना प्रति छः माही हो, तो परिपक्वता पर उसे

कल कितनी राशि प्राप्त होगी?

- प्र.3. 7500 रु. की राशि पर 8% वार्षिक दर से 1 वर्ष का चक्रवृद्धि ब्याज तथा साधारण ब्याज का अन्तर ज्ञात कीजिए, जबकि चक्रवृद्धि ब्याज की गणना प्रत्येक छः महीने में होती है।
- प्र.4. 8000 रु. की राशि पर 5% वार्षिक दर से एक वर्ष का चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात कीजिए जबकि ब्याज की गणना प्रति छः माही की जाती है।

चक्रवृद्धि ब्याज का सूत्र

जाहिर है कि जैसे-जैसे वर्ष बढ़ते जाएंगे चक्रवृद्धि ब्याज निकालने के लिए गणना लम्बी होती जाएगी। हम कोशिश करते हैं कि इसके लिए एक सूत्र बना लें।

हम मूलधन के लिए P_1 (Principal amount) लिखते हैं। प्रतिमाह ब्याज की दर के लिए R (Rate) और समय के लिए T (Time) लिखते हैं।

अगर ब्याज की गणना वार्षिक होता है तो दूसरे वर्ष का मूलधन P_2 , प्रथम वर्ष के मूलधन P_1 और प्रथम वर्ष के ब्याज (I_1) का योग होगा।

अर्थात् दूसरे वर्ष के लिए मूलधन $P_2 = P_1 + I_1$

साथ ही पहले वर्ष का ब्याज $I_1 = \frac{P_1 \times R}{100}$ (यहाँ समय $T = 1$ वर्ष है)

इसका मतलब हुआ कि $P_2 = P_1 + I_1 = P_1 + \frac{P_1 \times R}{100} = P_1 \left(1 + \frac{R}{100} \right)$

$$\begin{aligned} \text{दूसरे वर्ष का ब्याज } I_2 &= \frac{P_2 \times R \times T}{100} \\ &= \frac{P_2 \times R}{100} \quad (\text{यहाँ समय } T = 1 \text{ वर्ष है।}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{तीसरे वर्ष का मूलधन} = P_2 + I_2 &= P_1 \left(1 + \frac{R}{100} \right) + P_2 \frac{R}{100} \\ &= P_1 \left(1 + \frac{R}{100} \right) + P_1 \left(1 + \frac{R}{100} \right) \frac{R}{100} \\ &= P_1 \left(1 + \frac{R}{100} \right) \left(1 + \frac{R}{100} \right) = P_1 \left(1 + \frac{R}{100} \right)^2 \end{aligned}$$

इसी तरह आगे बढ़ने पर हम आगे के वर्षों के लिए मूलधन और ब्याज निकाल सकते हैं।

अतः तीसरे वर्ष के अन्त में मिश्रधन = चौथे वर्ष का मूलधन (P_4) = $P_1 \left(1 + \frac{R}{100} \right)^3$

चौथे वर्ष के अन्त में मिश्रधन = $P_1 \left(1 + \frac{R}{100} \right)^4$

और इसी तरह से आगे।

इसका अर्थ यह हुआ कि यदि 't' वर्ष के बाद का मिश्रधन (Amount) मालूम करना है तो

वह होगा $P_1 \left(1 + \frac{R}{100}\right)^t$ जहाँ शुरु का मूलधन P_1 है,

अतः 't' वर्षों में अर्जित कुल ब्याज = t वर्ष के बाद का मिश्रधन - प्रारम्भिक मूलधन

$$= P_1 \left(1 + \frac{R}{100}\right)^t - P_1$$

$$'t' \text{ वर्ष में चक्रवृद्धि ब्याज (C.I.)} = P_1 \left[\left(1 + \frac{R}{100}\right)^t - 1 \right]$$

उदाहरण 4. 800 रु. का 10% वार्षिक दर से 2 वर्ष का चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात कीजिए।

हल: प्रश्नानुसार, मूलधन (P) = 800 रु.

दर (R) = 10% वार्षिक

समय (t) = 2 वर्ष

यहाँ ब्याज की गणना वार्षिक है।

$$\begin{aligned} \text{अतः चक्रवृद्धि ब्याज C.I.} &= P \left[\left(1 + \frac{R}{100}\right)^t - 1 \right] \\ &= 800 \times \left[\left(1 + \frac{10}{100}\right)^2 - 1 \right] = 800 \times \left[\left(1 + \frac{1}{10}\right)^2 - 1 \right] \\ &= 800 \times \left[\left(\frac{11}{10}\right)^2 - 1 \right] = 800 \times \left[\frac{121}{100} - 1 \right] \\ &= 800 \times \frac{21}{100} = 168 \text{ रु.} \end{aligned}$$

उदाहरण 5. यदि ऋतु विश्वास ने मकान बनवाने के लिए 80000 रु. की राशि 15% वार्षिक चक्रवृद्धि ब्याज की दर से किसी भवन निर्माण सहकारी समिति से उधार ली, तो 3 वर्ष बाद उसे कुल कितनी राशि लौटानी होगी? यह भी बताइये कि वह ब्याज की कितनी राशि देगी ?

हल: प्रश्नानुसार, मूलधन (P) = 80000 रु.

दर (R) = 15% वार्षिक

समय (t) = 3 वर्ष

$$\begin{aligned}
\text{अतः चक्रवृद्धि मिश्रधन } A &= P \left(1 + \frac{R}{100} \right)^t \\
&= 80000 \times \left(1 + \frac{15}{100} \right)^3 \\
&= 80000 \times \left(1 + \frac{3}{20} \right)^3 = 80000 \times \left(\frac{23}{20} \right)^3 \\
&= 80000 \times \frac{23}{20} \times \frac{23}{20} \times \frac{23}{20} = 80000 \times \frac{12167}{8000} \\
&= 121670 \text{ रु.}
\end{aligned}$$

ऋतु को 3 वर्ष बाद 121670 रु. लौटाने होंगे।

$$\begin{aligned}
\text{अब चक्रवृद्धि ब्याज} &= \text{मिश्रधन (A)} - \text{मूलधन (P)} \\
&= 121670 - 80000 \\
&= 41670 \text{ रु.}
\end{aligned}$$

उपरोक्त उदाहरणों में चक्रवृद्धि ब्याज की गणना वार्षिक आधार पर की गई है, किन्तु यह आवश्यक नहीं है कि सदैव चक्रवृद्धि ब्याज की गणना वर्षवार की जाए। प्रायः सभी बैंक ब्याज की गणना वर्ष में दो बार अर्थात् प्रति छः माही करते हैं। कुछ बैंकिंग संस्थाएँ ब्याज की गणना तिमाही भी करती हैं और उसे मूलधन में शामिल करती रहती हैं। स्मरणीय तथ्य यह है कि जब दर से समयावधि का कोई उल्लेख नहीं हो तो उसे वार्षिक ही समझा जाता है।

अतः यदि ब्याज प्रति छः माही लगाया जाता है तो समय को दुगुना तथा दर को आधा करके सूत्र की सहायता से चक्रवृद्धि ब्याज एवं चक्रवृद्धि मिश्रधन की गणना की जाती है।

आइए, उदाहरण द्वारा इसे समझें –

उदाहरण 6. उर्वशी ने 2000 रु. 20% वार्षिक ब्याज की दर से उधार लिए। यदि ब्याज की गणना प्रति छः माही की जाती हो तो $1\frac{1}{2}$ वर्ष बाद उसे कितनी रकम चुकानी होगी? ब्याज की राशि भी बताइये?

$$\begin{aligned}
\text{हल: प्रश्नानुसार मूलधन (P)} &= 2000 \text{ रु.} \\
\text{दर (R)} &= 20\% \text{ वार्षिक} = 10\% \text{ छः माही} \\
\text{समय (t)} &= 1\frac{1}{2} \text{ वर्ष} = 3 \text{ छः माही}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{अतः चक्रवृद्धि ब्याज से मिश्रधन } A &= p \left(1 + \frac{R}{100} \right)^t \\
 &= 2000 \times \left(1 + \frac{10}{100} \right)^3 = 2000 \times \left(1 + \frac{1}{10} \right)^3 \\
 &= 2000 \times \left(\frac{11}{10} \right)^3 = 2000 \times \frac{1331}{1000} \\
 &= 2662 \text{ रु.}
 \end{aligned}$$

$$\text{ब्याज की राशि} = 2662 - 2000 = 662 \text{ रु.}$$

उदाहरण 7. वह धन ज्ञात कीजिए जो 10% वार्षिक चक्रवृद्धि ब्याज की दर से 3 वर्षों में 13310 रुपये हो जाता है।

हल: प्रश्नानुसार $A = 13310$ रु.

$$R = 10\%$$

$$T = 3 \text{ वर्ष}$$

$$A = P \times \left(1 + \frac{R}{100} \right)^T$$

$$13310 = P \times \left(1 + \frac{10}{100} \right)^3$$

$$\text{या } 13310 = P \times \left(\frac{11}{10} \right)^3$$

$$\text{या } 13310 = P \times \frac{11 \times 11 \times 11}{10 \times 10 \times 10}$$

$$\text{या } P = \frac{13310 \times 10 \times 10 \times 10}{11 \times 11 \times 11} = 10000 \text{ रु.}$$

अतः वह धन 10,000 रुपये है।



प्रश्नावली 13.3

प्र.1. चक्रवृद्धि ब्याज और मिश्रधन ज्ञात कीजिए।

(i) मूलधन = 6000 रु., समय = 3 वर्ष, दर = 10% वार्षिक

- (ii) मूलधन = 1600 रु., समय = 2 वर्ष, दर = 5% वार्षिक
 (iii) मूलधन = 8500 रु., समय = 2 वर्ष, दर = 15% वार्षिक
 (iv) मूलधन = 20000 रु., समय = 3 वर्ष, दर = 5% वार्षिक
- प्र.2. सलमा ने महिला समिति से 625 रु. सिलाई मशीन खरीदने के लिए उधार लिए। यदि ब्याज की दर 8% वार्षिक हो एवं वार्षिक गणना की जाए तो 2 वर्ष बाद सलमा समिति को कितनी रकम वापस करेगी?
- प्र.3. वह धन ज्ञात कीजिए जो 8% वार्षिक चक्रवृद्धि ब्याज की दर से 2 वर्षों में 5832 रु. हो जाता है।
- प्र.4. कितने प्रतिशत वार्षिक ब्याज की दर से 4000 रु. 2 वर्ष में 5290 रु. हो जाता है।
- प्र.5. किस दर से 1800 रु. का चक्रवृद्धि ब्याज 2 वर्ष में 378 रु. हो जाता है यदि ब्याज वार्षिक लगाया जाता है।
- प्र.6. 3200 रु. पर 12% वार्षिक ब्याज की दर से 2 वर्ष के लिए साधारण ब्याज एवं चक्रवृद्धि ब्याज का अन्तर ज्ञात कीजिए।

प्रतिशतता का एक और अनुप्रयोग, बट्टा (Discount)

रेहाना अपनी माँ के साथ अपना कम्पास बॉक्स खरीदने गई। उसने कम्पास बॉक्स देख लिया तो माँ ने पूछा कितने का है। दुकानदार ने कहा 50 रु. का है। आपसे 46 रु. ही लूंगा। माँ ने कहा थोड़ी और ज्यादा छूट दो। थोड़ी देर बातचीत करने पर 42 रु. में कम्पास बॉक्स रेहाना को मिल गया।

रेहाना को तो बॉक्स मिल गया किन्तु क्या आपको छूट या बट्टा समझ में आया? छूट या बट्टा वस्तु के निर्धारित मूल्य (अंकित मूल्य) पर होता है और इसे देकर वस्तु को निर्धारित मूल्य से कम पर बेचना होता है।

$$\text{बट्टा अथवा छूट} = \text{अंकित मूल्य} - \text{विक्रय मूल्य}$$

कई बार तो दुकानदार बड़ी खरीदी करने पर काफी बट्टा देते हैं। कई बार वह एक निर्धारित दर से बट्टा देते हैं। बट्टे की दर प्रतिशत सदैव अंकित मूल्य पर ही ज्ञात की जाती है।

उदाहरण 8. एक पुस्तक का अंकित मूल्य 40 रु. है तथा वह 12% छूट पर उपलब्ध है। पुस्तक पर बट्टा एवं विक्रय मूल्य ज्ञात कीजिए।

हल : अंकित मूल्य = 40 रुपये, बट्टे (छूट) की दर = 12%
 चूँकि 100 रु. अंकित मूल्य पर बट्टा है = 12 रु.

$$\therefore 1 \text{ रु. अंकित मूल्य पर बट्टा होगा} = \frac{12}{100} \text{ रु.}$$

$$\therefore 40 \text{ रु. अंकित मूल्य पर बट्टा होगा} = \frac{12}{100} \times 400 = \frac{48}{10} \text{ रु.}$$

$$\therefore \text{बट्टा} = 4.80 \text{ रु.}$$

$$\begin{aligned} \text{विक्रय मूल्य} &= 40.00 \text{ रु.} - 4.80 \text{ रु.} \\ &= 35.20 \text{ रु.} \end{aligned}$$

उदाहरण 9. एक मेज का अंकित मूल्य 1250 रु. है, उसे एक ग्राहक को 1100 रु. में बेचा गया। मेज़ पर दिये गये बट्टे का प्रतिशत ज्ञात कीजिए।

हल :

$$\text{अंकित मूल्य} = 1250 \text{ रु.}$$

$$\text{विक्रय मूल्य} = 1100 \text{ रु.}$$

$$\text{बट्टा} = 1250 - 1100 = 150 \text{ रु.}$$

$$1250 \text{ रु. पर बट्टा है} = 150 \text{ रु.}$$

$$1 \text{ रु. पर बट्टा होगा} = \frac{150}{1250}$$

$$100 \text{ रु. पर बट्टा} = \frac{150 \times 100}{1250} = \frac{1500}{125} = \frac{1500 \div 125}{125 \div 125} = \frac{12}{1} = 12\%$$

$$\text{बट्टा प्रतिशत} = 12\%$$

उदाहरण 10. अंकित मूल्य पर 15% बट्टा देने के बाद एक कमीज़ 442 रु. में बेची गई। कमीज़ का अंकित मूल्य ज्ञात कीजिए।

हल :

$$\text{मान लीजिए अंकित मूल्य} = x \text{ रु.}$$

$$\text{बट्टा} = x \text{ रु. का } 15\% = x \times \frac{15}{100} \text{ रु.} = \frac{3x}{20} \text{ रु.}$$

$$\text{विक्रय मूल्य} = \text{अंकित मूल्य} - \text{बट्टा}$$

$$442 = x - \frac{3x}{20}$$

$$442 = \frac{20x - 3x}{20}$$

$$442 = \frac{17x}{20}$$

$$\frac{442 \times 20}{17} = x$$

$$x = 520$$

कमीज़ का अंकित मूल्य = 520 रु.



क्रियाकलाप 1

अब नीचे की तालिका देखिए और उसके रिक्त स्थान भरिये :

तालिका 3

क्र. सं.	छात्र का नाम	खरीदी गयी पुस्तक का नाम	अंकित मूल्य	बट्टा	विक्रय मूल्य	बट्टे की दर %
1.	रोहित	शब्द कोश	50 रु.	10 रु.	40 रु.	$\frac{10 \times 100}{50} = 20\%$
2.	अल्पना	अंक गणित के खेल	60 रु.	-----	45 रु.	$\frac{--- \times 100}{60} = 25\%$
3.	अबीदा	बच्चों के लिए गीत	45 रु.	30 रु.	-----	-----
4.	हेलेन	शीघ्र गणित	60 रु.	12 रु.	48 रु.	-----
5.	महेश	कहानी की किताब	-----	7.20 रु.	-----	----- = 5%
6.	अहमद	रामानुजन	72 रु.	-----	-----	----- = 10%
7.	-----	-----	-----	-----	-----	-----
8.	-----	-----	-----	-----	-----	-----

उदाहरण 11. एक दुकानदार अपने ग्राहकों को गर्मी के दिनों में स्वेटर पर ऑफ सीजन 10% छूट (Discount) देता है, फिर भी उसे 12.5% लाभ होता है। दुकानदार ने स्वेटर को कितने रु. में खरीदा होगा जिसका अंकित मूल्य 500 रु. है।

हल :

अंकित मूल्य = 500 रु.

बट्टे की दर = 10%

दिया गया बट्टा = $\frac{500 \times 10}{100} = 50$ रु.

स्वेटर का विक्रय मूल्य = (500 - 50) रु. = 450 रु.

दुकानदार का लाभ % = 12.5 रु.

क्रयमूल्य = $\frac{450 \times 100}{100 + 12.5} = \frac{450 \times 100}{112.5} = 400$ रु. $\left[\because \text{क्रयमूल्य} = \frac{\text{विक्रयमूल्य} \times 100}{100 + \text{लाभ \%}} \right]$

स्वेटर का क्रय मूल्य = 400 रु.

कर (Tax)

कर के बारे में आपने जरूर पढ़ा होगा, सुना होगा। कर कई तरह के होते हैं आयकर, बिक्री कर, कृषि राजस्व कर, मनोरंजन कर आदि। कुछ कर केन्द्र सरकार इकट्ठा करती है और कुछ राज्य सरकारें इकट्ठा करती हैं। कुछ कर की राशि नगर पालिका अथवा ग्राम पंचायत को भी जाती है। कर क्यों लगाया जाता है, इस एकत्रित राशि का क्या-क्या उपयोग होता है, यह सब हम सामाजिक अध्ययन में पढ़ेंगे।

उदाहरण 12. किसान रामदीन के पास 25 एकड़ खेत है। यदि भूमि कर की दर प्रति एकड़ 15 रु. वार्षिक है तो रामदीन प्रति वर्ष कितना भूमि कर देगा?

हल: एक एकड़ खेत पर 15 रु. कर लगता है।

$$\begin{aligned}\text{अतः 25 एकड़ खेत पर} &= 25 \times 15 \text{ रु.} \\ &= 375 \text{ रु.}\end{aligned}$$

रामदीन प्रतिवर्ष 375 रुपये भूमिकर देगा।

उदाहरण 13. एक मोटर साइकिल का मूल्य 42000 रुपया है इस पर 4% वेट (VAT) (Value added Tax) (मूल्य वर्द्धित कर) लगता है, उस मोटर साइकिल पर कितने रुपये वेट लगेगा?

हल:

चूंकि 100 रु. पर 4 रुपये वेट लगता है।

$$\begin{aligned}\therefore 1 \text{ रु. पर} &= \frac{4}{100} \text{ रु.} \\ \therefore 42000 \text{ रुपये पर} &= \frac{4}{100} \times 42000 \text{ रु.} \\ &= 1680 \text{ रु. वेट लगेगा।}\end{aligned}$$

उस मोटर साइकिल पर 1680 रुपये वेट लगेगा।

उदाहरण 14. एक शहर में 5242 मकान हैं यदि प्रति मकान 2 रु. मकान कर तथा 20 रु. जल कर प्रतिवर्ष जमा होता है तो कर के रूप में उस शहर में जमा होने वाला धन ज्ञात कीजिए।

हल: प्रश्नानुसार, मकान कर = 2 रु. प्रति मकान प्रति वर्ष, जलकर = 20 रु. प्रति मकान प्रति वर्ष

$$\begin{aligned}\text{कुल मकान कर} &= \text{कुल मकान} \times \text{प्रति मकान कर} \\ &= 5242 \times 2 \text{ रु.} \\ &= 10484 \text{ रु.}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{तथा जलकर} &= \text{कुल मकान} \times \text{प्रति मकान जल कर} \\ &= 5242 \times 20 \text{ रु.} \\ &= 104840 \text{ रु.}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{कुल जमा धन} &= 10484 + 104840 \text{ रु.} \\ &= 115324 \text{ रु.}\end{aligned}$$

उदाहरण 15. एक दुकानदार ने 6 महीने की बिक्री के बाद 4500 रु. वेट के रूप में जमा किया। यदि वेट की दर 4% हो तो यह बताइए कि उसने कितनी मूल राशि का सामान बेचा।

हल: प्रश्नानुसार, वेट की दर = 4%

जब 4 रु. वेट है तो सामान की मूल राशि = 100 रु.

$$\therefore 1 \text{ रु. वेट होने पर सामान की मूल राशि} = \frac{100}{4} \text{ रु.}$$

$$4500 \text{ रु. वेट होने पर सामान की मूल राशि} = \frac{100}{4} \times 4500 = 1,12,500 \text{ रु.}$$

उदाहरण 16. रजिया दवाई खरीदने गई। उसने 625 रु. के अंकित मूल्य की दवाई खरीदी और उस पर 12 रु. 50 पैसे अतिरिक्त कर दिया। अतिरिक्त कर की दर प्रतिशत क्या थी?

हल: 625 रु. पर लगने वाला अतिरिक्त कर = 12.50 रु.

$$\therefore 1 \text{ रु. पर लगने वाला अतिरिक्त कर} = \frac{12.50}{625}$$

$$\begin{aligned} 100 \text{ रु. पर लगने वाला अतिरिक्त कर} &= \frac{12.50}{625} \times \frac{100}{1} \\ &= \frac{1250}{625} \times \frac{100}{100} \\ &= 2\% \end{aligned}$$

उदाहरण 17.

सुरेश ने कुछ सामान खरीदा। उसने दुकानदार को 4% कर सहित 780 रु. दिए। तो खरीदे गए सामान का मूल दाम बताओ।

हल: यहाँ माना सामान का मूल दाम = 100 रुपये

तथा कर की दर = 4%

अतः दुकानदार को दिया गया मूल्य = 100 + 4 = 104 रु.

104 रु. दिए तो मूल दाम = 100

$$\begin{aligned} 780 \text{ रु. दिए तो मूल दाम} &= \frac{780 \times 100}{104} \\ &= 750 \text{ रु.} \end{aligned}$$

अब तो आपने देख लिया होगा कि ये सवाल भी ऐकिक नियम और प्रतिशतता के अनुप्रयोग ही हैं। ध्यान सिर्फ यह रखना है कि मूल राशि कितनी है, कर की मात्रा और दर कितनी—कितनी हैं और इनमें से कौन—सी सवाल में दी गई है और कौन सी मालूम करनी है। उदाहरण 13 में मूल दाम और वेट कर की दर दी हुई है, इसमें कर पता करना है। उदाहरण 15 में कर की दी गई राशि और दर दी गई है हमें मूल राशि पता करनी है और उदाहरण 16 में अंकित मूल्य और कर दिया गया है हमें कर की दर निकालनी है।

प्रश्नावली 13.4

- प्र.1. सर्जियस ने एक साइकल खरीदी जिसका मूल्य 1750 रु. है। यदि सायकल पर बिक्री कर की दर 4% है तो सर्जियस को साइकल के लिए कितने रुपये देने पड़ेंगे?
- प्र.2. महानदी किनारे स्थित ग्राम पंचायत गिधपुरी रेत निकासी के लिए 20 रु. प्रति घन मीटर टैक्स लेती है। यदि एक ट्रैक्टर में 5 घन मीटर रेत आती है तो नदी से 12 ट्रैक्टर रेत निकालने पर पंचायत को कितना टैक्स मिलेगा?
- प्र.3. अंजली ने एक दुकान से 500 रु. मूल्य के इत्र तथा 800 रु. मूल्य के गहने खरीदे। यदि इत्र पर बिक्री कर 16% तथा गहनों पर बिक्री कर 8% है तो अंजली कुल कितने रुपये दुकानदार को अदा करेगी?
- प्र.4. किसान 4 रु. प्रति एकड़ भू-राजस्व सरकार को देता है। यदि रामदीन के पास 85 एकड़ कृषि भूमि है, तो वह भू-राजस्व के रूप में कितने रुपये अदा करेगा?
- प्र.5. नगर निगम सुन्दरपुर ने आवासीय भूखण्डों के लिए विकास शुल्क 8 रु. प्रति वर्ग फुट तय किया। यदि भानुप्रकाश के भूखण्ड की माप 50 फीट × 30 फीट हो तो उसे कितना विकास शुल्क देना होगा?
- प्र.6. दिनेश ट्रक से 37500 रु. का अनाज बाहर से मंगाता है। यदि अनाज के मूल्य पर 2.5% प्रवेश कर लगता है तो दिनेश कुल कितना प्रवेश कर अदा करेगा?
- प्र.7. यदि ग्राम पंचायत अड़सेना प्रति मकान 25 रु. गृह कर लगाती है और पंचायत के अन्तर्गत 216 मकान हैं तो गृहकर से पंचायत को कितनी आय होगी?
- प्र.8. भारत सरकार ट्रैक्टरों पर लागत मूल्य का 11% उत्पाद कर लगाती है। यदि कारखाने में 1 ट्रैक्टर की उत्पादन लागत 120000 रु. है तो प्रति ट्रैक्टर उत्पाद कर की राशि ज्ञात कीजिए।

हमने सीखा

1. जब किसी निश्चित अवधि के बाद ब्याज को मूलधन में जोड़कर फिर ब्याज की गणना की जाती है तो ऐसे ब्याज को चक्रवृद्धि ब्याज कहते हैं।

2. चक्रवृद्धि ब्याज $C.I. = P \left[\left(1 + \frac{R}{100} \right)^T - 1 \right]$

3. चक्रवृद्धि मिश्रधन $A = P \times \left(1 + \frac{R}{100} \right)^T$



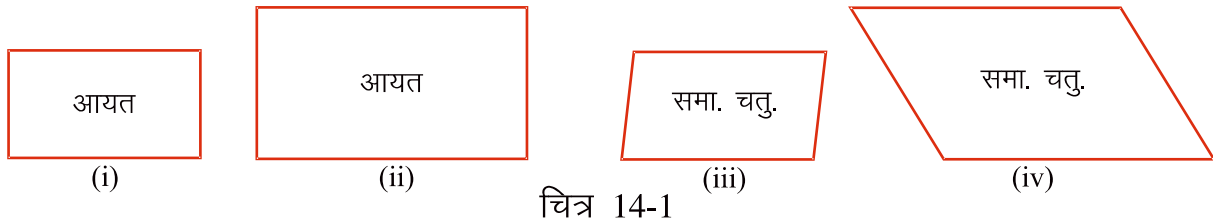
4. जब ब्याज की गणना अर्द्धवार्षिक हो तो समय वार्षिक समय का दुगुना तथा दर वार्षिक दर की आधी हो जाती है।
5. बट्टे की गणना अंकित मूल्य पर की जाती है।
6. किसी वस्तु की बिक्री पर लगने वाला कर बिक्री कर कहलाता है।
7. यदि विक्रय मूल्य एवं लाभ अथवा हानि प्रतिशत ज्ञात हो तो

$$\text{क्रय मूल्य} = \frac{\text{विक्रय मूल्य} \times 100}{100 + \text{लाभ \%}} = \frac{\text{विक्रय मूल्य} \times 100}{100 - \text{हानि \%}}$$

अध्याय-14
क्षेत्रमिति-1
MENSURATION-1

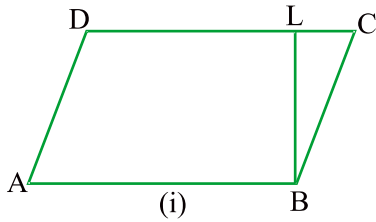


आकांक्षा और रानु ने मोटे कागज को काटकर विभिन्न मापों के आयत व समान्तर चतुर्भुज बना लिये जो नीचे दिये अनुसार थे—

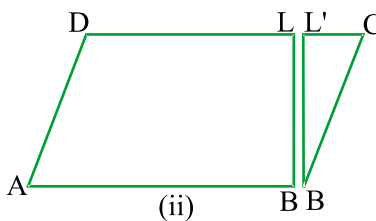


रानु ने आकांक्षा से इनका क्षेत्रफल निकालने के लिए कहा, आकांक्षा ने आयताकार टुकड़ों की लम्बाई तथा चौड़ाई का गुणा करके क्षेत्रफल निकाल लिया। (आयत का क्षेत्रफल = लं. $\times$ चौ.) लेकिन वह समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल नहीं निकाल पाई, क्योंकि वह समान्तर चतुर्भुज की लम्बाई और चौड़ाई के बारे में निश्चय नहीं कर सकी। रानु ने कहा— यदि हम इन समान्तर चतुर्भुज वाली आकृति को काटकर आयत में बदल लें, तो इनका क्षेत्रफल निकाला जा सकता है।

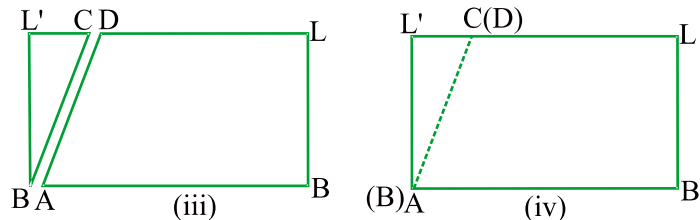
इसके लिए उन्होंने निम्न क्रियाकलाप किया—



एक समान्तर चतुर्भुज वाली आकृति को लेकर ABCD से नामांकित किया एवं भुजा AB को आधार मानकर एक शीर्ष लंब BL खींचा। त्रिभुजाकार टुकड़े BLC को काटकर अलग किया। (चित्र 14.2(ii)) त्रिभुजाकार आकृति को उठाकर रानू ने उसी आकृति से जोड़ने का प्रयास किया, तो चित्र-14.2(iii) के अनुसार आकृति प्राप्त हुई।



उसके पश्चात् आकांक्षा ने पूरी तरह जोड़कर आकृति-14.3(iv) को प्राप्त किया।



इस तरह आयत का चित्र प्राप्त हुआ। आकांक्षा ने कहा— आकृति-14.2(i) तथा आकृति-14.2(iv)

का क्षेत्रफल बराबर होगा, क्योंकि आकृति-14.2(iv) आकृति-14.2(i) का परिवर्तित रूप है।

आयत ABLL' का क्षेत्रफल = $AB \times BL$ = समान्तर चतुर्भुज ABCD का आधार $\times$ ऊँचाई

अतः समान्तर चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल = आधार $\times$ ऊँचाई, प्राप्त हुआ। इस तरह उन्होंने समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कर लिया।

अतः

$$(1) \text{ समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल} = \text{आधार} \times \text{ऊँचाई}$$

$$(2) \text{ समान्तर चतुर्भुज का आधार} = \frac{\text{क्षेत्रफल}}{\text{ऊँचाई}}$$

$$(3) \text{ समान्तर चतुर्भुज का ऊँचाई} = \frac{\text{क्षेत्रफल}}{\text{आधार}}$$

उदाहरण 1. आधार 15 सेमी तथा ऊँचाई 5 सेमी वाले समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

$$\begin{aligned} \text{हल: आधार} &= 15 \text{ सेमी तथा ऊँचाई} &&= 5 \text{ सेमी} \\ \text{समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल} &&&= \text{आधार} \times \text{ऊँचाई} \\ &&&= 15 \text{ सेमी} \times 5 \text{ सेमी} \\ &&&= 75 \text{ वर्ग सेमी} \end{aligned}$$

उदाहरण 2. उस समान्तर चतुर्भुज का आधार ज्ञात कीजिए जिसका क्षेत्रफल 240 वर्ग सेमी तथा ऊँचाई 8 सेमी है।

$$\text{हल: हम जानते हैं कि समान्तर चतुर्भुज का आधार} = \frac{\text{क्षेत्रफल}}{\text{ऊँचाई}}$$

$$\text{क्षेत्रफल} = 240 \text{ वर्ग सेमी, ऊँचाई} = 8 \text{ सेमी}$$

$$\begin{aligned} \text{अतः आधार} &= \frac{240}{8} \frac{\text{सेमी}^2}{\text{सेमी}} \\ &= 30 \text{ सेमी} \end{aligned}$$

प्रश्नावली 14.1

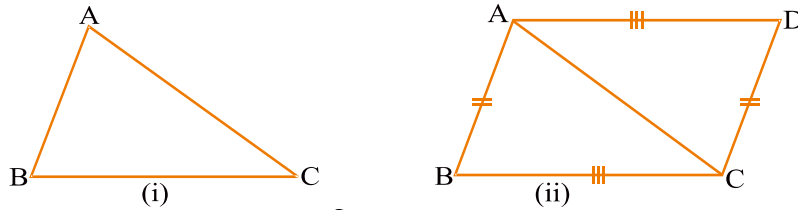
प्र.1 उस समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके आधार और शीर्षलंब निम्नलिखित हैं।

$$(i) \text{ आधार} = 15 \text{ सेमी.}, \text{ शीर्ष लंब} = 10 \text{ सेमी}$$

- (ii) आधार = 90 सेमी, शीर्ष लंब = 8 सेमी
 (iii) आधार = 120 सेमी, शीर्ष लंब = 15 सेमी
- प्र.2 उस समान्तर चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जिसका आधार 26.5 सेमी तथा शीर्ष लंब 7 सेमी है।
- प्र.3 उस समान्तर चतुर्भुज का आधार ज्ञात कीजिए, जिसका क्षेत्रफल 390 वर्ग सेमी तथा शीर्ष लंब 26 सेमी हो।
- प्र.4 उस समान्तर चतुर्भुज का शीर्ष लंब ज्ञात कीजिए, जिसका क्षेत्रफल 1200 वर्ग मीटर और आधार 60 मीटर है।

आइए, अब निम्न क्रियाकलाप करते हैं—

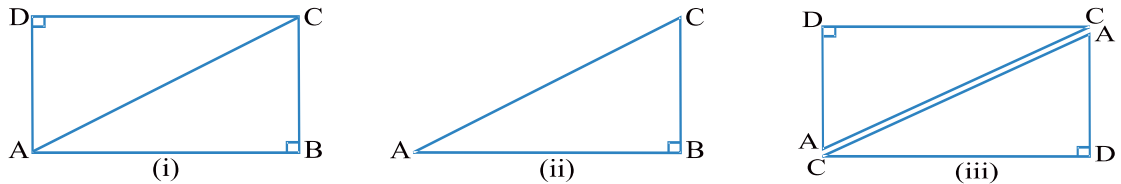
1. ABC एक त्रिभुज बनाइए तथा बिन्दु A से BC लम्बाई का तथा बिन्दु C से AB लम्बाई का चाप B के विपरीत ओर काटिए एवं दोनों चापों के कटान बिन्दु से A व C को मिलाइए तथा D से नामांकित कीजिए। इस प्रकार ABCD एक समान्तर चतुर्भुज प्राप्त होती है क्योंकि $AB=DC$ तथा $AD=BC$ है।



चित्र-14.3

क्रियाकलाप

एक मोटे आयताकार कागज ABCD को विकर्ण AC पर कैंची से काटिए।



चित्र -14.4

इस तरह, दो $\triangle ABC$ और $\triangle ADC$ बन गए। $\triangle ABC$ और $\triangle ADC$ को एक-दूसरे पर रखिए। क्या वे एक-दूसरे को पूरी तरह ढँक लेते हैं? आप पायेंगे कि दोनों त्रिभुज सर्वांगसम हैं और उनके क्षेत्रफल भी बराबर हैं।

$\therefore \triangle ABC$ का क्षे. + $\triangle ADC$ का क्षे. = आयत ABCD का क्षे.

$\Rightarrow \Delta ABC$ का क्षेत्र. + ΔABC का क्षेत्र. = आयत ABCD का क्षेत्र.

$\Rightarrow 2 \Delta ABC$ का क्षेत्र. = आयत ABCD का क्षेत्र. [$\because \Delta ABC$ का क्षेत्र. = ΔADC का क्षेत्र.]

$\Rightarrow 2 (\Delta ABC \text{ का क्षेत्र.}) = AB \times BC$

$$\Delta ABC \text{ का क्षेत्र.} = \frac{1}{2} \times AB \times BC$$

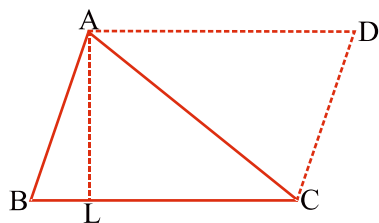
अभ्यास

गत्ते पर एक समांतर चतुर्भुज बनाइए। उसे काटकर अलग कीजिए। एक विकर्ण पर उसे फिर काटिए। तब दो त्रिभुज मिलेंगे। क्या उन दोनों त्रिभुजों के क्षेत्रफल बराबर हैं? एक-दूसरे पर रखकर देखिए।

त्रिभुज का क्षेत्रफल

हम समान माप के दो त्रिभुजों को आपस में जोड़कर समान्तर चतुर्भुज की रचना कर सकते हैं। एक विकर्ण खींचने पर समान्तर चतुर्भुज में समान माप के दो त्रिभुज प्राप्त होते हैं। समांतर चतुर्भुज ABCD में विकर्ण AC खींचने पर प्राप्त ΔABC और ΔADC सर्वांगसम हैं। उनके क्षेत्रफल भी बराबर हैं।

अतः समान्तर चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल = ΔABC का क्षेत्रफल + ΔADC का क्षेत्रफल



चित्र-14.5

$$= 2 (\Delta ABC \text{ का क्षेत्रफल})$$

$$\therefore \Delta ABC \text{ का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} \text{ समान्तर चतुर्भुज ABCD का क्षेत्रफल}$$

$$= \frac{1}{2} \times \text{आधार} \times \text{ऊँचाई} = \frac{1}{2} \times BC \times AL$$

$$\text{अतः} \quad \boxed{\text{त्रिभुज का क्षेत्रफल } A = \frac{1}{2} \times b \times h}$$

जहाँ b = त्रिभुज का आधार और h = त्रिभुज की ऊँचाई

याद रखें- दो समान्तर रेखाओं के बीच स्थित त्रिभुज का क्षेत्रफल उसी आधार व ऊँचाई के समान्तर चतुर्भुज के क्षेत्रफल का आधा होता है।

उदाहरण 3. आधार 28 सेमी तथा ऊँचाई 6 सेमी वाले त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल: प्रश्नानुसार त्रिभुज का आधार $b = 28$ सेमी.

एवं ऊँचाई $h = 6$ सेमी

$$\begin{aligned}
 \text{अतः त्रिभुज का क्षेत्रफल } A &= \frac{1}{2} \times b \times h \\
 &= \frac{1}{2} \times 28 \times 6 \\
 &= 84 \text{ सेमी}^2
 \end{aligned}$$

उदाहरण 4. 80 सेमी आधार और 0.08 वर्गमीटर क्षेत्रफल वाले त्रिभुज की उंचाई ज्ञात कीजिए।

हल: प्रश्नानुसार, त्रिभुज का आधार $b = 80$ सेमी. एवं क्षेत्रफल $= 0.08$ मी²

यहाँ आधार सेमी. में दिया है अतः क्षेत्रफल को सेमी. में बदलने पर

$$\begin{aligned}
 1 \text{ मीटर}^2 &= 1 \text{ मीटर} \times 1 \text{ मीटर} \\
 &= 100 \text{ सेमी} \times 100 \text{ सेमी} \quad (\because 1 \text{ मीटर} = 100 \text{ सेमी}) \\
 &= 10000 \text{ सेमी}^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{अतः } 0.08 \text{ मीटर}^2 &= 0.08 \times 10000 \text{ सेमी}^2 \\
 &= 800 \text{ सेमी}^2
 \end{aligned}$$

$$\text{अब त्रिभुज का क्षेत्रफल } A = \frac{1}{2} \times b \times h \text{ से}$$

$$\begin{aligned}
 \text{त्रिभुज की उंचाई} &= h = \frac{2A}{b} = \frac{2 \times 800}{80} \\
 \Rightarrow h &= 20 \text{ सेमी}
 \end{aligned}$$

प्रश्नावली-14.2

- प्र.1 आधार 12 सेमी और संगत ऊँचाई 7 सेमी वाले त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
- प्र.2 आधार 25 सेमी और शीर्ष लम्ब 1.5 सेमी वाले त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
- प्र.3 आधार 6.5 सेमी और क्षेत्रफल 26 सेमी² वाले त्रिभुज का शीर्ष लंब ज्ञात कीजिए।
- प्र.4 आधार 120 डेमी और ऊँचाई 75 डेमी वाले त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

समचतुर्भुज का क्षेत्रफल

समचतुर्भुज समान्तर चतुर्भुज का ही एक रूप है अतः यदि उसका आधार तथा ऊँचाई ज्ञात हो तो क्षेत्रफल ज्ञात किया जा सकता है।

यदि आधार b तथा ऊँचाई h हो तो

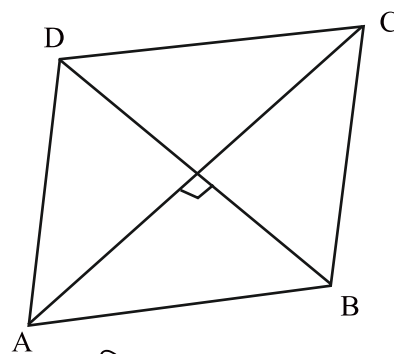
$$\text{क्षेत्रफल } A = b \times h$$

$ABCD$ एक समचतुर्भुज है d_1 तथा d_2 इसके विकर्ण हैं चूँकि ये एक-दूसरे को समकोण पर समद्विभाजित करते हैं अतः प्राप्त चार समकोण त्रिभुजों की लंबवत् भुजाएँ $\frac{d_1}{2}$ तथा $\frac{d_2}{2}$ होंगी।

समचतुर्भुज का क्षेत्रफल = $4 \times$ एक समकोण त्रिभुज क्षेत्रफल

$$= 4 \times \frac{1}{2} \times \text{आधार} \times \text{ऊँचाई}$$

$$= 4 \times \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} d_1 \right) \times \left(\frac{1}{2} d_2 \right)$$

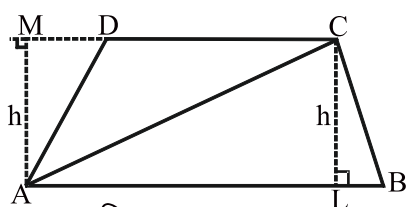


चित्र-14.7

अतः **समचतुर्भुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2} d_1 d_2$ सेमी²**

समचतुर्भुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2} \times$ पहला विकर्ण $\times$ दूसरा विकर्ण

समलंब चतुर्भुज का क्षेत्रफल



चित्र-14.8

एक ऐसा चतुर्भुज जिसकी दो सम्मुख भुजाएँ एक-दूसरे के समान्तर होती हैं। चित्र-14.8 में $ABCD$ एक समलंब चतुर्भुज दिखाया गया है। भुजा AB भुजा DC के समान्तर है। दो समान्तर भुजाओं की लम्बवत् दूरी को AM तथा CL से दर्शाया गया है।

यदि हम इस त्रिभुज का विकर्ण AC खींचे इससे समलंब चतुर्भुज दो त्रिभुज ABC तथा ACD प्राप्त होते हैं।

अतः समलंब चतुर्भुज $ABCD$ का क्षेत्रफल = ΔABC का क्षेत्रफल + ΔACD का क्षेत्रफल

$$\text{समलंब चतुर्भुज } ABCD \text{ का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} AB \times CL + \frac{1}{2} DC \times AM$$

चूँकि CL तथा AM समलंब चतुर्भुज की ऊँचाई है अतः यह बराबर होगी। माना कि यह h के बराबर है।

$$\text{समलंब चतुर्भुज का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} AB \times h + \frac{1}{2} DC \times h$$

यदि $AB = b_1$ एवं $DC = b_2$ है तो

$$\text{समलंब चतुर्भुज का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} b_1 \times h + \frac{1}{2} b_2 \times h$$

$$= \frac{1}{2} (b_1 + b_2) \times h$$

$$= \frac{1}{2} \times (\text{समांतर भुजाओं का योग}) \times \text{उनके बीच की दूरी}$$

$$\text{समलंब चतुर्भुज का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} \times (\text{समांतर भुजाओं का योग}) \times \text{ऊँचाई}$$

या

$$\text{समलंब चतुर्भुज का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} \times (b_1 + b_2) \times h$$

उदाहरण 6. एक समचतुर्भुज की एक भुजा 7 सेमी तथा ऊँचाई 3.2 सेमी है इसका क्षेत्रफल ज्ञात करो।

हल: प्रश्नानुसार आधार = 7 सेमी, ऊँचाई = 3.2 सेमी

$$\text{समचतुर्भुज का क्षेत्रफल} = \text{आधार} \times \text{ऊँचाई}$$

$$\text{क्षेत्रफल} = 7 \times 3.2 \text{ वर्ग सेमी}$$

$$= 22.4 \text{ वर्ग सेमी}$$

उदाहरण 7. एक समचतुर्भुज का एक विकर्ण 10 सेमी व दूसरा विकर्ण 12 सेमी है। उसका क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल: समचतुर्भुज का पहला विकर्ण = 10 सेमी, दूसरा विकर्ण = 12 सेमी

यदि विकर्ण दिये हों तो समचतुर्भुज का

$$\text{क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} \times (\text{एक विकर्ण}) \times (\text{दूसरा विकर्ण})$$

$$= \frac{1}{2} \times 10 \times 12$$

$$= 60 \text{ वर्ग सेमी}$$

उदाहरण 8. एक समलंब चतुर्भुज की समान्तर भुजाएँ 25 मीटर व 20 मीटर हैं व भुजाओं के बीच की दूरी 8 मीटर है। इसका क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल: प्रश्नानुसार $b_1 = 25$ मी, $b_2 = 20$ मी, $h = 8$ मी

$$\text{समलंब का क्षेत्रफल } A = \frac{1}{2} \times h \times (b_1 + b_2)$$

$$A = \frac{1}{2} \times 8 \times (25 + 20)$$

$$A = \frac{1}{2} \times 8 \times (45)$$

$$A = 180 \text{ वर्ग मी}$$

उत्तर

उदाहरण 9. एक समलंब चतुर्भुज का क्षेत्रफल 140 सेमी^2 है, यदि समांतर भुजाओं में से एक भुजा 25 सेमी तथा ऊँचाई 7 सेमी है तो दूसरी समान्तर भुजा ज्ञात कीजिए।

हल: प्रश्नानुसार $A = 140 \text{ सेमी}^2$, $b_1 = 25 \text{ सेमी}$

$$h = 7 \text{ सेमी}$$

समलंब चतुर्भुज का क्षेत्र A है तो

$$A = \frac{1}{2} \times h \times (b_1 + b_2)$$

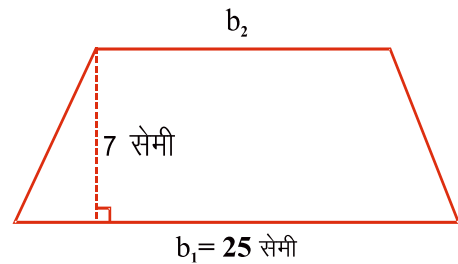
$$\text{अतः } 140 = \frac{1}{2} \times 7 \times (25 + b_2)$$

$$\frac{2 \times 140}{7} = 25 + b_2$$

$$40 = 25 + b_2$$

$$b_2 = 40 - 25$$

दूसरी भुजा $b_2 = 15 \text{ सेमी}$.



चित्र-14.9

प्रश्नावली-14.3

- प्र.1 एक समचतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके विकर्ण 24 सेमी व 10 सेमी हैं।
- प्र.2 एक समचतुर्भुज की एक भुजा 7.5 सेमी और शीर्ष लंब 4 सेमी है तो उसका क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
- प्र.3 एक समलंब चतुर्भुज की समांतर भुजाएं 20 मी व 8 मी है। इन भुजाओं के बीच की दूरी 12 सेमी है, इसका क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
- प्र.4 आधार 30 सेमी और 24.4 सेमी वाले समलंब चतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए यदि शीर्ष लंब 1.5 सेमी है।
- प्र.5 एक समलंब चतुर्भुज का क्षेत्रफल 105 वर्ग सेमी तथा ऊंचाई 7 सेमी है, समान्तर भुजाओं में से यदि एक दूसरी से 6 सेमी अधिक है तो दोनों समान्तर भुजाएं ज्ञात करो।

आयताकार पथ का क्षेत्रफल



चित्र-14.10

किसी विद्यालय के चारों ओर बना बरामदा, खेत के चारों ओर का रास्ता, खेल के मैदान का रास्ता आदि का क्षेत्रफल ज्ञात करने की आवश्यकता पड़ती है, इस स्थिति में हम क्या करते हैं। चित्र-14.10 एक आयताकार खेत है जिसके चारों ओर रास्ता बना हुआ है। यदि हमें इस रास्ते का क्षेत्रफल ज्ञात करना है तो क्या करेंगे?

स्पष्ट है कि इसमें हमें दो आयत मिल रहे हैं अतः बड़े आयत के क्षेत्रफल में छोटे आयत के क्षेत्रफल को घटा देंगे।

$$\text{आयताकार पथ का क्षेत्रफल} = \text{बड़े आयत का क्षेत्रफल} - \text{छोटे आयत का क्षेत्रफल}$$

उदाहरण 10. एक आयताकार खेत जिसकी लम्बाई 90 मीटर तथा चौड़ाई 65 मीटर है इसके बाहर चारों ओर 5 मीटर चौड़ा एक रास्ता बना हुआ है। रास्ते का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल: चित्र से स्पष्ट है कि रास्ते का क्षेत्रफल = आयत ABCD का क्षेत्रफल - आयत EFGH का क्षेत्रफल होगा।

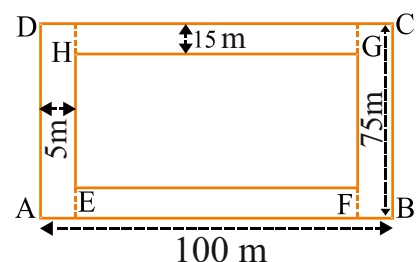
$$\text{अतः रास्ते का क्षेत्रफल} = (AB \times BC) - (EF \times FG)$$

यहाँ $AB = AE + EF + FB$

$$AB = 5 + 90 + 5$$

$$AB = 100 \text{ मीटर}$$

$$\text{इसी तरह } BC = 5 + 65 + 5$$



चित्र-14.11

$$= 75 \text{ मीटर}$$

$$\begin{aligned}\text{अतः रास्ते का क्षेत्रफल} &= (AB \times BC) - (EF \times FG) \\ &= 100 \times 75 - 90 \times 65 \\ &= 7500 - 5850 \\ &= 1650 \text{ वर्ग मीटर}\end{aligned}$$

उदाहरण 11. एक दीवार जिसकी लम्बाई 15.5 मीटर तथा चौड़ाई 9 मीटर है इसमें 3 मीटर $\times$ 1.5 मीटर माप के दो दरवाजे तथा 2 मीटर $\times$ 1 मीटर माप की दो खिड़कियाँ लगी हैं इसे 5 रु. प्रति वर्ग मीटर की दर से रंगवाने (पोताई) का खर्च ज्ञात कीजिए।

हल: हमें पहले पोताई योग्य दीवार का क्षेत्रफल ज्ञात करना है।

अतः पोताई योग्य दीवार का क्षेत्रफल = दीवार का संपूर्ण क्षेत्रफल - (2 दरवाजों + 2 खिड़कियों का क्षेत्रफल)

$$\begin{aligned}\text{दीवार का क्षेत्रफल} &= \text{लम्बाई} \times \text{चौड़ाई} \\ &= 15.5 \times 9 \\ &= 139.5 \text{ वर्ग मीटर}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}1 \text{ दरवाजे का क्षेत्रफल} &= \text{लम्बाई} \times \text{चौड़ाई} \\ &= 3 \times 1.5 \\ &= 4.5 \text{ वर्ग मीटर}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2 \text{ दरवाजों का क्षेत्रफल} &= 4.5 \times 2 \\ &= 9.0 \text{ वर्ग मीटर}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}1 \text{ खिड़की का क्षेत्रफल} &= \text{लम्बाई} \times \text{चौड़ाई} \\ &= 2 \times 1 \\ &= 2 \text{ वर्ग मीटर}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2 \text{ खिड़कियों का क्षेत्रफल} &= 2 \times 2 \\ &= 4 \text{ वर्ग मीटर}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{अतः पोताई योग्य दीवार का क्षेत्रफल} &= 139.5 - (9.0 + 4) \\ &= 139.5 - 13.0 \\ &= 126.5 \text{ वर्गमीटर}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}5 \text{ रु. प्रति वर्ग मीटर की दर से पोताई का खर्च} &= 126.5 \times 5 \\ &= 632.50 \text{ रु.}\end{aligned}$$

उदाहरण 12. एक आयताकार क्षेत्र की लम्बाई व चौड़ाई क्रमशः 35 मीटर व 24 मीटर है। इसके बीचों बीच इसकी लम्बाई के समान्तर 2 मीटर चौड़ा तथा चौड़ाई के समान्तर 1 मीटर चौड़ा रास्ता है। रास्ते का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

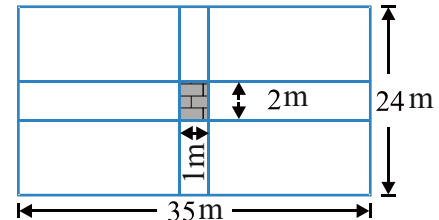
हल: लम्बाई के समान्तर रास्ते का क्षेत्रफल = $35 \times 2 = 70$ वर्ग मीटर

$$\begin{aligned} \text{चौड़ाई के समान्तर रास्ते का क्षेत्रफल} &= 24 \times 1 \\ &= 24 \text{ वर्ग मीटर} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{छायांकित भाग का क्षेत्रफल} &= 2 \times 1 \\ &= 2 \text{ वर्ग मीटर} \end{aligned}$$

(छायांकित भाग दोनों रास्तों में आया है अतः उसे एक बार घटायेंगे)

$$\begin{aligned} \text{रास्ते का क्षेत्रफल} &= 70 + 24 - 2 \\ &= 94 - 2 \\ &= 92 \text{ वर्ग मीटर} \end{aligned}$$



चित्र-14.12

प्रश्नावली-14.4

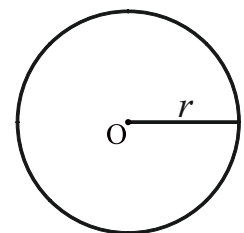
- प्र.1 एक 25 सेमी लंबी तथा 10 सेमी चौड़े चित्र के बाहर चारों ओर 2 सेमी चौड़ाई की पट्टी बनी है। पट्टी का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
- प्र.2 एक आयताकार खेल का मैदान 35 मी $\times$ 25 मी माप का है। इसके बीचों-बीच लम्बाई के समान्तर 3 मीटर चौड़ा तथा चौड़ाई के समान्तर 2 मीटर चौड़ा रास्ता है। रास्ते का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
- प्र.3 एक बास्केटबॉल का मैदान 28 मीटर लम्बा तथा 15 मीटर चौड़ा है। इसके बाहर चारों ओर 5 मीटर चौड़ी समतल दर्शक दीर्घा बनानी है। दीर्घा का क्षेत्रफल तथा दर्शक दीर्घा को बनाने का खर्च 5.25 रुपये प्रति वर्ग मीटर की दर से ज्ञात कीजिए।

वृत्ताकार मार्ग का क्षेत्रफल

पिछली कक्षाओं में हमने वृत्त के बारे में जाना है। यदि एक वृत्त जिसकी त्रिज्या r है तो परिधि $C = 2\pi r$

तथा क्षेत्रफल = πr^2 होता है।

जहां π एक नियतांक है जिसका मान लगभग $\frac{22}{7}$ या 3.14 होता है।



चित्र-14.13

उदाहरण 13. साईकिल के पहिए की परिधि तथा क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी त्रिज्या 21 सेमी है।

हल: साईकिल का पहिया वृत्ताकार होता है

अतः पहिए की परिधि $= 2\pi r$

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times 21 \text{ सेमी} = 132 \text{ सेमी}$$

पहिए का क्षेत्रफल $= \pi r^2$

$$= \frac{22}{7} \times (21)^2$$

$$= \frac{22}{7} \times 21 \times 21$$

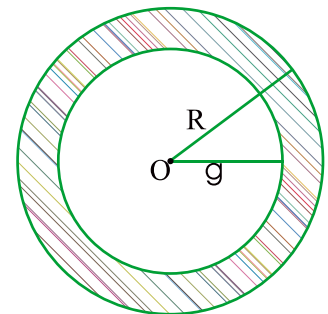
$$= \frac{22}{7} \times 21^3 \times 21$$

$$= 1386 \text{ वर्ग सेमी}$$

सकेन्द्री वृत्त

चित्र-14.14 में दो सकेन्द्री दिए गए हैं। यदि हमें छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात करना है तो क्या करेंगे। स्पष्ट है कि हम बड़े वृत्त के क्षेत्रफल से छोटे वृत्त के क्षेत्रफल को घटा देंगे।

अतः **वृत्ताकार मार्ग का क्षेत्रफल = बड़े वृत्त का क्षेत्रफल – छोटे वृत्त का क्षेत्रफल**



चित्र-14.14

उदाहरण 14. एक वृत्ताकार तालाब की त्रिज्या 200 मीटर है। इसके बाहर चारों ओर 7 मीटर चौड़ाई का तट (मार्ग) बना हुआ है। मार्ग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

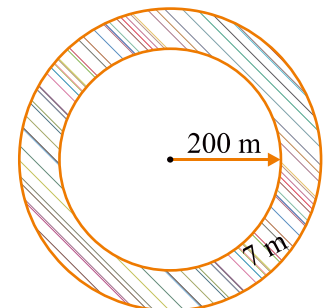
हल: वृत्ताकार मार्ग का क्षेत्रफल = बड़े वृत्त का क्षेत्रफल – छोटे वृत्त का क्षेत्रफल

छोटे वृत्त की त्रिज्या $r = 200$ मीटर

बड़े वृत्त की त्रिज्या $R = 200 + 7 = 207$ मीटर

वृत्ताकार तालाब का तट का क्षेत्रफल $= \pi R^2 - \pi r^2$

$$= \pi[(207)^2 - (200)^2]$$



चित्र-14.15

$$\begin{aligned}
 &= \frac{22}{7}(207+200)(207-200) & [\because (a^2 - b^2) = (a+b)(a - b)] \\
 &= \frac{22}{7}(407)(7) \\
 &= 22(407) \text{ वर्ग मीटर} \\
 &= 8954 \text{ वर्ग मीटर}
 \end{aligned}$$

प्रश्नावली 14.5

- प्र.1 दो सकेन्द्री वृत्तों की त्रिज्याएं क्रमशः 9 सेमी व 12 सेमी हैं दोनों वृत्तों के बीच बनने वाले वृत्ताकार मार्ग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
- प्र.2 एक वृत्त का क्षेत्रफल 616 वर्ग सेमी है। इस वृत्त के बाहर 2 मीटर चौड़ाई का मार्ग है। उस मार्ग का क्षेत्रफल कितना होगा।
- प्र.3 एक वृत्ताकार क्रिकेट मैदान की त्रिज्या 60 मीटर है। मैदान के बाहर चारों ओर 7 मीटर चौड़ी दर्शक दीर्घा बनानी है। उसका क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

ग्राफ पर बने समलम्ब चतुर्भुजों का वर्ग गिड की सहायता से अनुमानित क्षेत्रफल निकालना तथा सूत्र से क्षेत्रफल निकालकर उसका सत्यापन करना।

चित्र क्रमांक 14.16 के लिए—

वर्ग गिड द्वारा समलम्ब चतुर्भुज के अनुमानित क्षेत्रफल की गणना

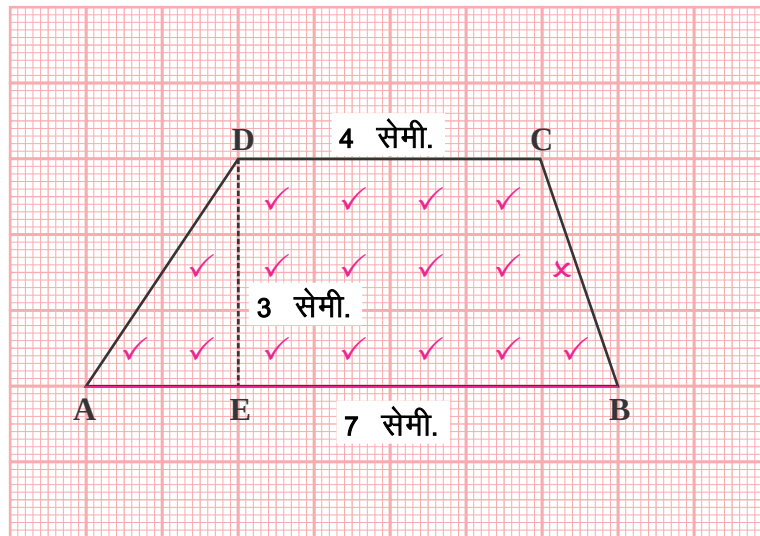
समलम्ब चतुर्भुज ABCD में

पूरे वर्ग तथा आधे से बड़े वर्गों की संख्या = 16

ठीक आधे वर्गों की संख्या = 1



$$\begin{aligned}
 \text{समलम्ब चतुर्भुज का क्षेत्रफल} &= \text{पूरे वर्गों की संख्या} + \frac{1}{2} \text{ आधे वर्गों की संख्या} \\
 &= 16 + \frac{1}{2} \times 1 \\
 &= 16 + \frac{1}{2} = 16 + .5 = 16.5 \text{ वर्ग सेमी.}
 \end{aligned}$$



चित्र-14.16

सूत्र द्वारा

समलम्ब चतुर्भुज ABCD में

समान्तर भुजाएँ AB = 7 सेमी.

व CD = 4 सेमी.

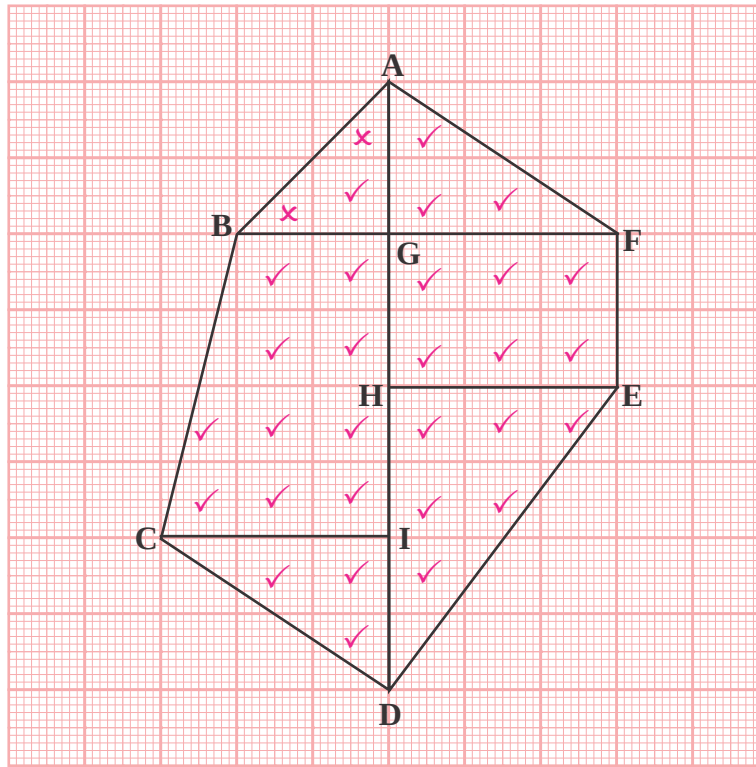
चतुर्भुज की ऊँचाई DE = 3 सेमी.

$$\begin{aligned}
 \therefore \text{समलम्ब चतुर्भुज का क्षेत्रफल} &= \frac{1}{2} (\text{समान्तर भुजाओं का योग}) \times \text{ऊँचाई} \\
 &= \frac{1}{2} (AB + CD) \times DE \\
 &= \frac{1}{2} (7 + 4) \times 3 \\
 &= \frac{1}{2} \times 11 \times 3 \\
 &= \frac{33}{2} \\
 &= 16.5 \text{ वर्ग सेमी.}
 \end{aligned}$$

स्पष्ट है कि

वर्ग ग्रिड द्वारा ज्ञात समलम्ब चतुर्भुज ABCD का अनुमानित क्षेत्रफल

$$= \text{सूत्र द्वारा ज्ञात समलम्ब चतुर्भुज का क्षेत्रफल}$$



चित्र-14.17

ग्राफ पर बने बहुभुज का वर्ग ग्रिड की सहायता से अनुमानित क्षेत्रफल निकालना तथा सूत्र से क्षेत्रफल निकालकर उसका सत्यापन करना

चित्र क्रमांक 14.17 के लिए

वर्ग ग्रिड द्वारा बहुभुज का अनुमानित क्षेत्रफल—

बहुभुज ABCDEFA में

$$\begin{aligned}
 \text{पूरे तथा आधे से बड़े वर्गों की संख्या} &= 29 \\
 \text{ठीक आधे वर्गों की संख्या} &= 2 \\
 \text{ठीक पूरे वर्गों की संख्या} &= 29 + \frac{1}{2} \times 2 \\
 &= 29 + 1 \\
 &= 30
 \end{aligned}$$

अतः बहुभुज ABCDEFA का क्षेत्रफल = 30 वर्ग सेमी.

सूत्र द्वारा बहुभुज के क्षेत्रफल की गणना—

$$\begin{aligned}
 \text{बहुभुज ABCDEFA का क्षेत्रफल} &= \Delta AGB \text{ का क्षेत्रफल} + \text{समलम्ब चतुर्भुज BGIC} \\
 &\text{का क्षेत्रफल} + \Delta CID \text{ का क्षेत्रफल} + \Delta DHE \text{ का} \\
 &\text{क्षेत्रफल} + \text{आयत HEFG का क्षेत्रफल} + \Delta GFA \\
 &\text{का क्षेत्रफल}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} BG \times GA + \frac{1}{2} (BG + CI) \times GI + \frac{1}{2} CI \times ID \\
&\quad + \frac{1}{2} HE \times HD + HE \times HG + \frac{1}{2} GF \times AG \\
&= \frac{1}{2} \times 2 \times 2 + \frac{1}{2} (2 + 3) \times 4 + \frac{1}{2} \times 3 \times 2 + \frac{1}{2} \times 3 \times 4 \\
&\quad + 3 \times 2 + \frac{1}{2} \times 3 \times 2 \\
&= 2 + (5 \times 2) + 3 + (3 \times 2) + 6 + 3 \\
&= 2 + 10 + 3 + 6 + 6 + 3 \\
&= 30 \text{ वर्ग सेमी.}
\end{aligned}$$



स्पष्ट है कि

वर्ग ग्रिड द्वारा ज्ञात बहुभुज का अनुमानित क्षेत्रफल = सूत्र द्वारा ज्ञात बहुभुज का क्षेत्रफल।

हमने सीखा

- समांतर चतुर्भुज का क्षेत्रफल = आधार $\times$ ऊँचाई
- समांतर चतुर्भुज के विकर्ण समांतर चतुर्भुज को दो समान त्रिभुजों में बाँटते हैं।
- त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ आधार $\times$ ऊँचाई
- समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल = $\frac{\sqrt{3}}{4}$ (भुजा)²
- समचतुर्भुज का क्षेत्रफल = आधार $\times$ ऊँचाई
या
समचतुर्भुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2} \times$ पहला विकर्ण $\times$ दूसरा विकर्ण
= $\frac{1}{2} \times d_1 \times d_2$
- समलंब चतुर्भुज का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2} \times$ ऊँचाई $\times$ (समांतर भुजाओं का योग)
= $\frac{1}{2} \times (b_1 + b_2) \times h$
- वृत्त का क्षेत्रफल = $\pi \times (\text{त्रिज्या})^2$
= πr^2 (जहाँ π = नियतांक = $\frac{22}{7}$ = 3.14 लगभग)
- वृत्त की परिधि = $2 \times \pi \times$ त्रिज्या
= $2\pi r$

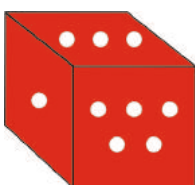
अध्याय-15

क्षेत्रमिति – 3

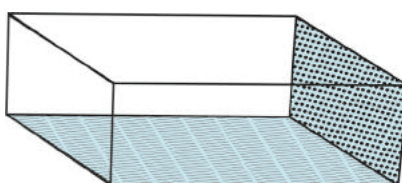
MENSURATION



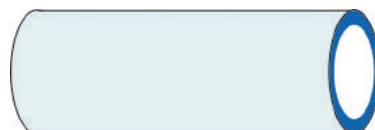
आप नल का पाइप, लकड़ी का रोलर, पेन का रिफिल, ट्यूब लाइट, टार्च की बैटरी, कुआँ जैसी चीज़ों को प्रतिदिन देखते हैं, इन आकृतियों के क्या नाम हैं? इनमें क्या-क्या समानताएँ हैं? निम्न आकृतियों को ध्यानपूर्वक देखिये एवं उनका एक समूह बनाइये –



लूडो



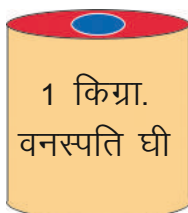
चॉक का डिब्बा



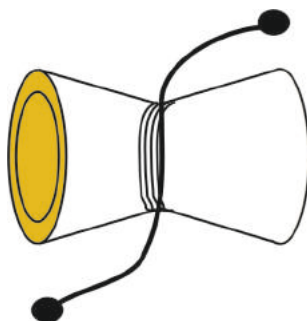
पुलिया का पाइप



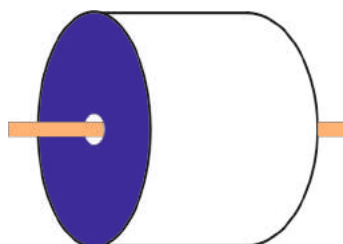
गेंद



लोहे का तार



डमरू



भूमि समतल करने वाला रोलर

चित्र 15.1

ऊपर दिये गये चित्रों में से समान आकृतियों को आपने किन-किन आधारों पर पहचाना? अपने साथियों से चर्चा कीजिए।

आप पाते हैं कि पाइप, रोलर जैसी आकृतियों में से प्रत्येक में दो वृत्ताकार सतहें हैं, जो

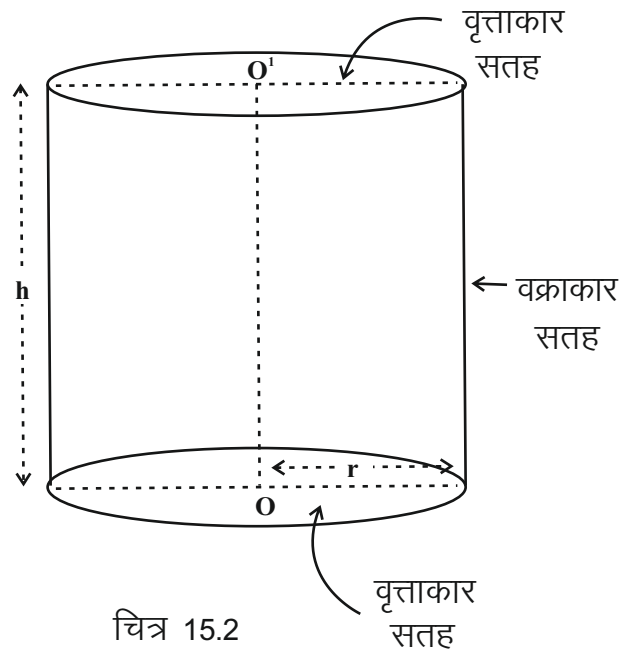
परस्पर समान्तर एवं बराबर हैं तथा तीसरी सतह वक्राकार है। ऐसी आकृतियों को बेलनाकार आकृतियाँ कहते हैं।

आइए, अब हम एक बेलन पर चर्चा करें —

दिये गये चित्र में एक बेलन की आकृति को दर्शाया गया है। बेलन में दो वृत्ताकार सिरे हैं, जो परस्पर समान्तर एवं सर्वांगसम हैं। ये वृत्ताकार सिरे बेलन का शीर्ष एवं आधार कहलाते हैं। बेलन का शेष पृष्ठीय भाग अर्थात् दोनों वृत्ताकार सिरों को मिलाने वाला बेलनाकार पृष्ठ बेलन का वक्राकार भाग या वक्र पृष्ठ कहलाता है।

बेलन के आधार या शीर्ष की त्रिज्या बेलन की त्रिज्या होती है जिसे अक्षर 'r' से व्यक्त करते हैं।

बेलन के आधार एवं शीर्ष के केन्द्रों को मिलाने वाल रेखाखण्ड OO' उनके बीच की लम्बवत् दूरी होती है। यही लम्बवत् दूरी बेलन की ऊँचाई होती है जिसे अक्षर 'h' द्वारा दर्शाते हैं।



चित्र 15.2

बेलन का आयतन

कक्षा-7 में आपने घनाभाकार आकृतियों का आयतन निकालना सीख लिया है। क्या आप बता सकते हैं कि घनाभ का आयतन कैसे ज्ञात करते हैं?

मोनिका : घनाभ का आयतन ज्ञात करने के लिए उसकी लम्बाई, चौड़ाई और ऊँचाई का आपस में गुणा करते हैं। अर्थात् **घनाभ का आयतन = लम्बाई × चौड़ाई × ऊँचाई**

सुनील : परन्तु लं.×चौ. घनाभ के आधार के क्षेत्रफल के बराबर है।

तो क्या हम कह सकते हैं कि **घनाभ का आयतन = आधार का क्षेत्रफल × ऊँचाई**

क्या बेलन के आयतन को भी इसी प्रकार ज्ञात किया जा सकता है? अपने साथियों एवं शिक्षक से चर्चा करें।

आप पायेंगे कि यह सूत्र बेलन के आयतन के लिए भी सत्य है।

अर्थात् बेलन का आयतन = बेलन के आधार का क्षेत्रफल × ऊँचाई

माना बेलन के आधार की त्रिज्या r है। तो बेलन के आधार का क्षेत्रफल कितना होगा?

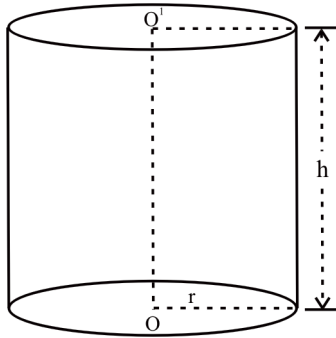
चूँकि बेलन का आधार वृत्ताकार है, इसलिए आधार का क्षेत्रफल = r^2

अब यदि बेलन की ऊँचाई h हो तो

बेलन का आयतन $(V) = \text{आधार का क्षेत्रफल} \times \text{ऊँचाई}$

$$= \pi r^2 \times h$$

$$= \pi r^2 h$$



बेलन का आयतन $(V) = \pi r^2 h$ घन इकाई

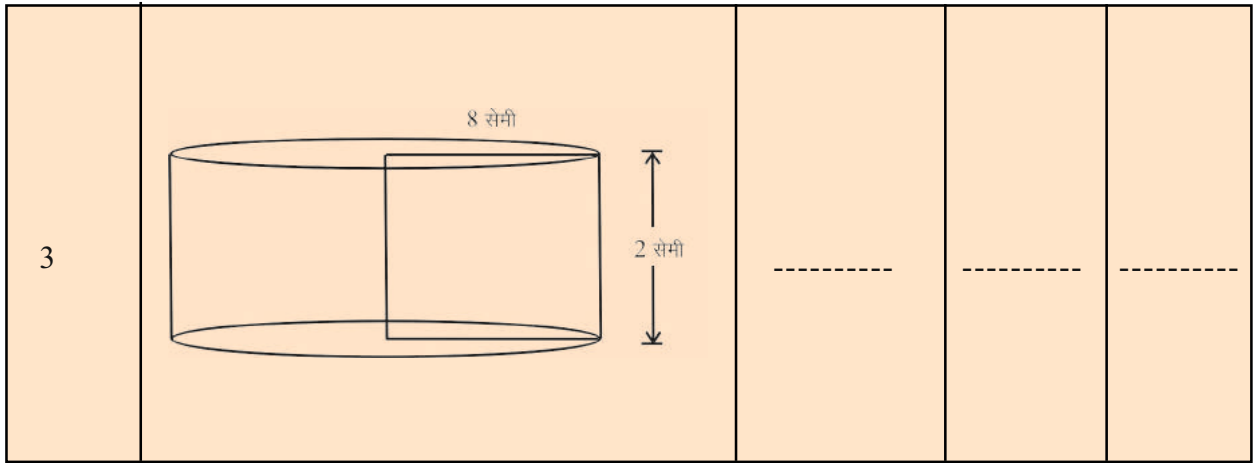
चित्र 15.3



क्रियाकलाप 1.

नीचे दी गई मापों के आधार पर ज्ञात करके तालिका पूर्ण कीजिए –

क्रमांक	बेलन की आकृति	ऊँचाई या लम्बाई (h)	त्रिज्या (r)	आयतन (v)
1		-----	-----	-----
2		-----	-----	-----

**उदाहरण 1.**

एक बेलन के आधार का व्यास 14 सेमी. तथा ऊँचाई 15 सेमी. है, तो उसका आयतन ज्ञात कीजिए।

हल : प्रश्नानुसार,

बेलन के आधार का व्यास = 14 सेमी.

बेलन के आधार की त्रिज्या (r) = $\frac{14}{2} = 7$ सेमी.

तथा बेलन की ऊँचाई (h) = 15 सेमी.

$\therefore$ बेलन का आयतन (V) = $\pi r^2 h$

$$= \frac{22}{7} \times (7)^2 \times 15$$

$$= \frac{22}{\cancel{7}^1} \times \cancel{7}^1 \times 7 \times 15$$

$$= 22 \times 7 \times 15$$

$$= 2310 \text{ सेमी}^3 \text{ या घन सेमी}$$

अतः उस बेलन का आयतन 2310 सेमी³ है।

उदाहरण 2.

3.5 मीटर त्रिज्या वाला एक वृत्ताकार कुआँ 20 मीटर गहराई तक खोदा गया है। खुदाई से प्राप्त मिट्टी का आयतन ज्ञात कीजिये।

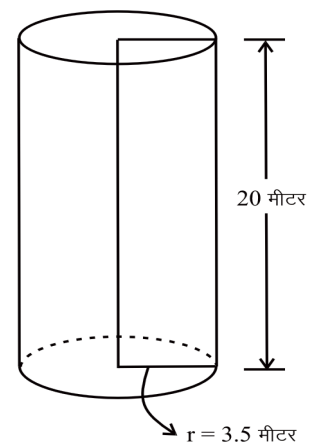
हल : प्रश्नानुसार,

बेलनाकार कुएँ की त्रिज्या $r = 3.5$ मीटर

कुएँ की ऊँचाई $h = 20$ मीटर

खुदाई से प्राप्त मिट्टी का आयतन = कुएँ का आयतन

$$= \pi r^2 h$$



चित्र 15.4

$$\begin{aligned}
 \text{मिट्टी का आयतन} &= \frac{22}{7} \times (3.5)^2 \times 20 \\
 &= \frac{22}{\cancel{7}_1} \times \frac{0.5}{\cancel{3.5}} \times 3.5 \times 20 \\
 &= 22 \times 0.5 \times 3.5 \times 20 \\
 &= 770 \text{ सेमी}^3
 \end{aligned}$$

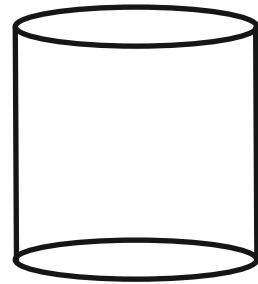
उदाहरण 3.

22 मीटर × 10 मीटर आयताकार लोहे की चादर को लम्बाई के अनुदिश मोड़कर (दोनों सिरों को एक दूसरे पर चढ़ाये बिना) एक बेलनाकार पाइप बनाया गया है। पाइप का आयतन ज्ञात कीजिए।



22 मीटर

10 मीटर



10 मीटर

चित्र 15.5

हल:

चूँकि लोहे की चादर को लम्बाई के अनुदिश मोड़ा गया है, अतः प्राप्त पाइप की ऊँचाई 10 मीटर होगी।

बेलनाकार पाइप की ऊँचाई $h = 10$ मीटर

यदि चादर को मोड़ने से बने पाइप की त्रिज्या r मीटर हो, तो

आयताकार चादर की लम्बाई = पाइप के आधार की परिधि

$$22 = 2\pi r$$

$$22 = 2 \times \frac{22}{7} \times r$$

$$\frac{22 \times 7}{2 \times 22} = r$$

$$r = \frac{7}{2} \text{ मीटर}$$

$$\text{अतः पाइप का आयतन} = \pi r^2 h$$

$$= \frac{22}{7} \times \left(\frac{7}{2}\right)^2 \times 10$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{11}{\cancel{22}} \times \frac{\cancel{7}}{\cancel{2}} \times \frac{7}{2} \times 10 \\
 &= 385 \text{ घन मीटर}
 \end{aligned}$$

उदाहरण 4.

एक बेलन के आधार का क्षेत्रफल 154 वर्ग सेमी और ऊँचाई 8 सेमी हो तो उसका आयतन कितना होगा?

हल: प्रश्नानुसार,

बेलन के आधार का क्षेत्रफल = 154 सेमी²

बेलन की ऊँचाई = 8 सेमी

बेलन का आयतन = आधार का क्षेत्रफल × ऊँचाई
 $= 154 \text{ सेमी}^2 \times 8 \text{ सेमी}$
 $= 1232 \text{ सेमी}^3$



प्रश्नावली 15.1

प्र.1. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए —

- (i) बेलन के आधार का आकार होता है।
- (ii) बेलन के आयतन का सूत्र है।
- (iii) बेलन की त्रिज्या व ऊँचाई प्रत्येक 7 सेमी.की है तो बेलन का आयतन होगा।

प्र.2. एक बेलन के आधार का क्षेत्रफल 1386 सेमी² है। यदि उसकी ऊँचाई 15 सेमी हो तो उसका आयतन कितना होगा?

प्र.3. बेलन का आयतन ज्ञात कीजिए, जिसकी माप निम्नांकित हों —

- (i) त्रिज्या = 12 सेमी, ऊँचाई = 14 सेमी.
- (ii) त्रिज्या = 2.8 सेमी, ऊँचाई = 5 सेमी.
- (iii) व्यास = 20 मीटर, ऊँचाई = 21 मीटर

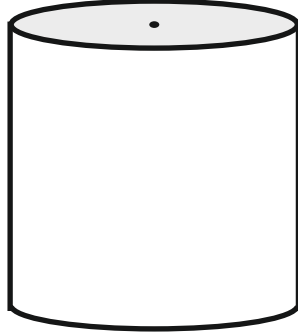
प्र.4. यदि एक बेलन का व्यास आधा कर दिया जाये तो प्राप्त नये बेलन का आयतन एवं पहले वाले बेलन के आयतन में क्या अनुपात होगा?

प्र.5. एक बेलनाकार टंकी की त्रिज्या 2.8 मीटर और ऊँचाई 3.5 मीटर है। उस टंकी की धारिता ज्ञात कीजिए।

प्र.6. 1.4 सेमी. व्यास वाली तथा 90 सेमी. लम्बी लोहे की एक ठोस छड़ बनवाने के लिए कितने लोहे की आवश्यकता पड़ेगी?

बेलन का पृष्ठीय क्षेत्रफल

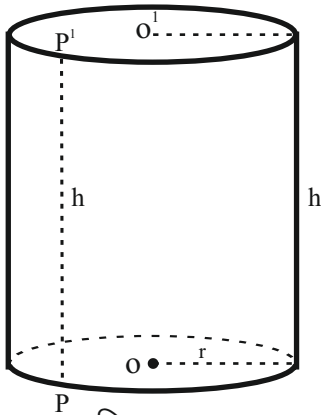
टिन का एक बन्द बेलनाकार डिब्बा लीजिए। बताइये कि इस डिब्बे का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए किन-किन भागों का क्षेत्रफल ज्ञात करना होगा?



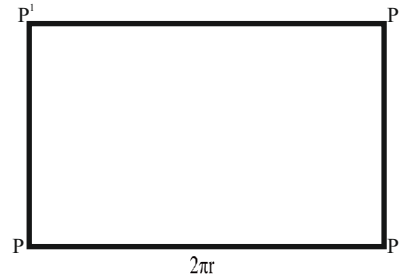
टिन का डिब्बा चित्र 15.6७

बेलनाकार डिब्बे में कुल तीन पृष्ठ हैं जिनमें से दो पृष्ठ वृत्ताकार (आधार व शीर्ष) तथा तीसरा पृष्ठ वक्राकार भाग है। आधार और शीर्ष दोनों वृत्तीय पृष्ठों का क्षेत्रफल बराबर होगा। यदि वृत्तीय पृष्ठों की त्रिज्या r हो तो प्रत्येक वृत्तीय पृष्ठ का क्षेत्रफल $= \pi r^2$ होगा।

अब प्रश्न उठता है कि तीसरे पृष्ठ अर्थात् वक्राकार भाग का क्षेत्रफल कैसे प्राप्त किया जाये? चर्चा कीजिए।



चित्र 15.7



चित्र 15.8

वक्राकार भाग का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए उसमें एक रेखाखण्ड PP' अंकित कर लेते हैं (चित्र 15.7)। अब डिब्बे के वक्राकार भाग को PP' (लम्बाई) के अनुदिश काटकर फैला देते हैं, जिससे हमें एक आयताकार पट्टी चित्र 15.8 की भाँति प्राप्त होती है। प्राप्त आयताकार पट्टी की लम्बाई, वक्राकार भाग की परिधि के बराबर होगी एवं चौड़ाई वक्राकार भाग की ऊँचाई के बराबर होगी। साथ ही आयताकार पट्टी एवं वक्राकार भाग के क्षेत्रफल भी बराबर होंगे।

चूँकि वक्राकार भाग की त्रिज्या r है, इसलिए उसकी परिधि $= 2\pi r$

अब यदि वक्राकार भाग की (डिब्बे की) ऊँचाई h हो, तो

वक्राकार भाग का क्षेत्रफल

$=$ आयताकार पट्टी का क्षेत्रफल

$=$ पट्टी की लम्बाई $\times$ चौड़ाई

= वक्राकार भाग की परिधि $\times$ ऊँचाई

$$= 2\pi r \times h = 2\pi rh$$

बेलन के वक्रपृष्ठ का क्षेत्रफल	$= 2\pi rh$
--------------------------------	-------------------------------

अतः बेलनाकार डिब्बे का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल

= वक्राकार भाग का क्षेत्रफल + आधार का क्षेत्रफल + शीर्ष का क्षेत्रफल

$$= 2\pi rh + \pi r^2 + \pi r^2$$

$$= 2\pi rh + 2\pi r^2$$

$$= 2\pi r(h+r)$$

बेलन का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल	$= 2\pi r (r+h)$
------------------------------------	------------------------------------

उदाहरण 5. टिन का बना एक बन्द बेलनाकार डिब्बे की त्रिज्या 7 सेमी. तथा ऊँचाई 15 सेमी. है। उस डिब्बे को बनाने में प्रयुक्त चादर का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल: प्रश्नानुसार,

बेलनाकार डिब्बे की त्रिज्या $r = 7$ सेमी.

एवं ऊँचाई $h = 15$ सेमी.

प्रयुक्त चादर का क्षेत्रफल = डिब्बे का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल

= बेलन का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल

$$= 2\pi r(h + r)$$

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times 7 \times (15 + 7)$$

$$= 2 \times \frac{22}{\cancel{7}_1} \times \cancel{7}^1 \times 22$$

$$= 968 \text{ सेमी}^2$$

उदाहरण 6. किसी टोस बेलन के आधार की त्रिज्या 5 सेमी. और ऊँचाई 21 सेमी. है। बेलन का वक्र पृष्ठ और सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल: प्रश्नानुसार,

बेलन के आधार की त्रिज्या $(r) = 5$ सेमी.

ऊँचाई $(h) = 21$ सेमी.

बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2\pi rh$

$$= 2 \times \frac{22}{\cancel{7}_1} \times 5 \times \cancel{21}^3$$

$$= 2 \times 22 \times 5 \times 3$$

$$= 660 \text{ सेमी}^2$$

$$\begin{aligned}
\text{तथा बेलन का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल} &= 2\pi r(h + r) \\
&= 2 \times \frac{22}{7} \times 5 \times (21 + 5) \\
&= 2 \times \frac{22}{7} \times 5 \times 26 \\
&= 817.14 \text{ सेमी}^2
\end{aligned}$$

उदाहरण 7. एक बेलन का आयतन 36π सेमी³ और आधार का क्षेत्रफल 9π सेमी² है। बेलन का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल: माना कि बेलन के आधार की त्रिज्या r सेमी. एवं उसकी ऊँचाई h सेमी. है।

$$\begin{aligned}
\text{तो बेलन के आधार का क्षेत्रफल} &= \pi r^2 \\
9\pi &= \pi r^2 \\
\frac{9\pi}{\pi} &= r^2 \\
r &= \sqrt{9} \\
r &= 3 \text{ सेमी}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{तथा बेलन का आयतन} &= \pi r^2 h \\
36\pi &= \pi(3)^2 \times h \\
36 &= 9h \\
36/9 &= h \\
h &= 4 \text{ सेमी}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{अतः बेलन का सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल} &= 2\pi r(r + h) \\
&= 2 \times \pi \times 3(3 + 4) \\
&= 6\pi \times 7 \\
&= 42\pi \text{ सेमी}^2
\end{aligned}$$

उदाहरण 8. एक बेलनाकार पाइप जिसका व्यास 14 सेमी. तथा ऊँचाई 20 सेमी. है, के वक्रिय पृष्ठ पर 2 रु. प्रति 100 सेमी² की दर से रंगाई कराने का व्यय ज्ञात कीजिए।

हल : प्रश्नानुसार,

$$\text{पाइप का व्यास} = 14 \text{ सेमी.}$$

$$\text{त्रिज्या } r = \frac{14}{2} = 7 \text{ सेमी.}$$

$$\text{तथा पाइप की ऊँचाई (h)} = 20 \text{ सेमी.}$$

$$\text{पाइप का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल} = 2\pi rh$$

$$= 2 \times \frac{22}{7} \times 7 \times 20 = 880 \text{ सेमी}^2$$

दिया है कि प्रति 100 वर्ग सेमी का रंगाई व्यय = 2 रु.

$$\text{पाइप को रंगाने का कुल व्यय} = \frac{880 \cancel{\cancel{0}} \times 2}{100 \cancel{\cancel{0}}} = 17.60 \text{ रु.}$$

उदाहरण 9.

एक बेलन के आधार की परिधि 132 सेमी है तथा उसकी ऊँचाई 2 मीटर है। उसके वक्र पृष्ठ का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : प्रश्नानुसार,

आधार की परिधि = 132 सेमी

बेलन की ऊँचाई (h) = 2 मीटर = 200 सेमी.

वक्र पृष्ठ का क्षेत्रफल = ?

$$\begin{aligned} \text{बेलन का वक्र पृष्ठ का क्षेत्रफल} &= \text{आधार की परिधि} \times \text{ऊँचाई} \\ &= 132 \times 200 \\ &= 26400 \text{ सेमी}^2 \end{aligned}$$

अतः उस बेलन के वक्रपृष्ठ का क्षेत्रफल 26400 सेमी² है।

प्रश्नावली 15.2

प्र.1. बेलन का वक्र पृष्ठ एवं सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिये जिनके माप निम्नानुसार हों—

- (i) त्रिज्या = 7 सेमी, ऊँचाई = 24 सेमी
- (ii) व्यास = 20 मीटर, ऊँचाई = 21 मीटर
- (iii) त्रिज्या = 10.5 सेमी, ऊँचाई = 35 सेमी
- (iv) त्रिज्या = 14 सेमी, ऊँचाई = 1 मीटर



- प्र.2. एक बेलनाकार टैंक के आधार की परिधि 176 सेमी तथा ऊँचाई 30 सेमी हो तो उसके वक्र पृष्ठ का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
- प्र.3. एक बेलन का आयतन 44 घन सेमी तथा त्रिज्या 2 सेमी हैं। उसका सम्पूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
- प्र.4. 14 मीटर व्यास के 25 मीटर गहरे कुएँ को खोदने पर कितने घन मीटर मिट्टी निकलेगी? इस कुएँ को अन्दर की ओर से प्लास्टर करवाने में 3 रुपये प्रति वर्ग मीटर की दर से कितना खर्च आयेगा?
- प्र.5. एक बेलन के आधार की परिधि 6 मीटर है एवं ऊँचाई 44 मीटर है। उसका वक्र पृष्ठ ज्ञात कीजिए।
- प्र.6. एक बेलन के वक्राकार भाग का क्षेत्रफल 1000π वर्ग सेमी और उसका व्यास 20 सेमी है। उस बेलन की ऊँचाई कितनी होगी?

हमने सीखा

1. बेलन का आयतन $=$ आधार का क्षेत्रफल $\times$ ऊँचाई
 $= \pi r^2 h$
2. बेलन का वक्र पृष्ठ $=$ आधार की परिधि $\times$ ऊँचाई
 $= 2\pi r h$
3. बेलन का सम्पूर्ण पृष्ठ $= 2 \times$ आधार का क्षेत्रफल $+ \text{वक्र पृष्ठ}$
 $= 2\pi r^2 + 2\pi r h$
 $= 2\pi r(r + h)$
4. क्षेत्रफल की इकाई हमेशा वर्ग इकाई होती है जैसे वर्ग सेमी, वर्ग मीटर आदि तथा आयतन की इकाई घन इकाई होती है जैसे घन सेमी, घन मीटर आदि।
5. एक ठोस बेलन में कुल तीन पृष्ठ होते हैं जिनमें से दो पृष्ठ वृत्ताकार (आधार एवं शीर्ष) एवं एक पृष्ठ वक्राकार होता है।



अध्याय-16

आकृतियाँ (द्विविमीय एवं त्रिविमीय)

FIGURES (TWO & THREE DIMENSIONAL)

हमने बहुत सी आकृतियों के बारे में जाना है और उनके गुणों को समझा है। इनमें से बहुत सी आकृतियों को हमने अपने आस-पास की वस्तुओं में छिपे हुए अथवा स्पष्ट रूप से देखते हुए पाया है। हमने रेखा, रेखाखण्ड, त्रिभुज, चतुर्भुज व उनके विशेष प्रकार (सम चतुर्भुज, आयत, वर्ग, समलम्ब चतुर्भुज आदि) एवं उससे ज्यादा भुजाओं वाली आकृतियों के बारे में अध्ययन किया है।

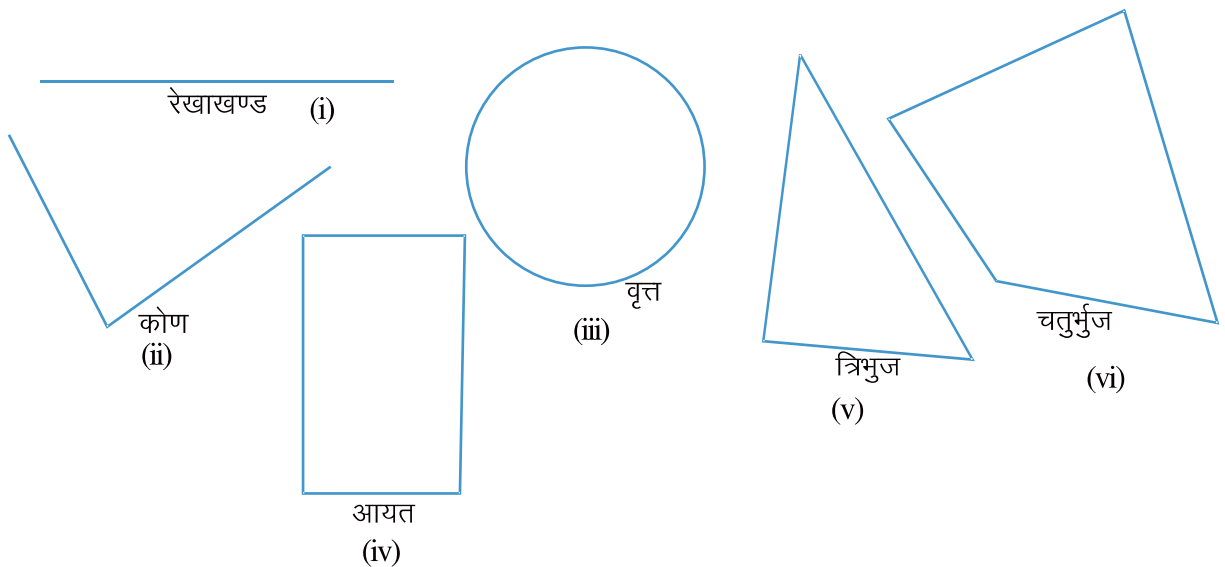
पूर्व की कक्षाओं में आपने अपने आस-पास पाए जाने वाले विभिन्न आकृतियों की पहचान की थी। क्या आप बता सकते हैं कि आयत की आकृति आपको कहां-कहां दिखती है?

और त्रिभुज कहां-कहां दिखता है?

त्रिभुज, सभी प्रकार के चतुर्भुज, बहुभुज, वृत्त आदि सभी किसी तल या दो आयाम में बनते हैं। अर्थात् इनमें लम्बाई है, चौड़ाई है किन्तु ऊँचाई नहीं है। लेकिन वास्तविक वस्तुओं में तो ऊँचाई होती है फिर कैसे इस ऊँचाई को भी चित्रों में प्रदर्शित करें।

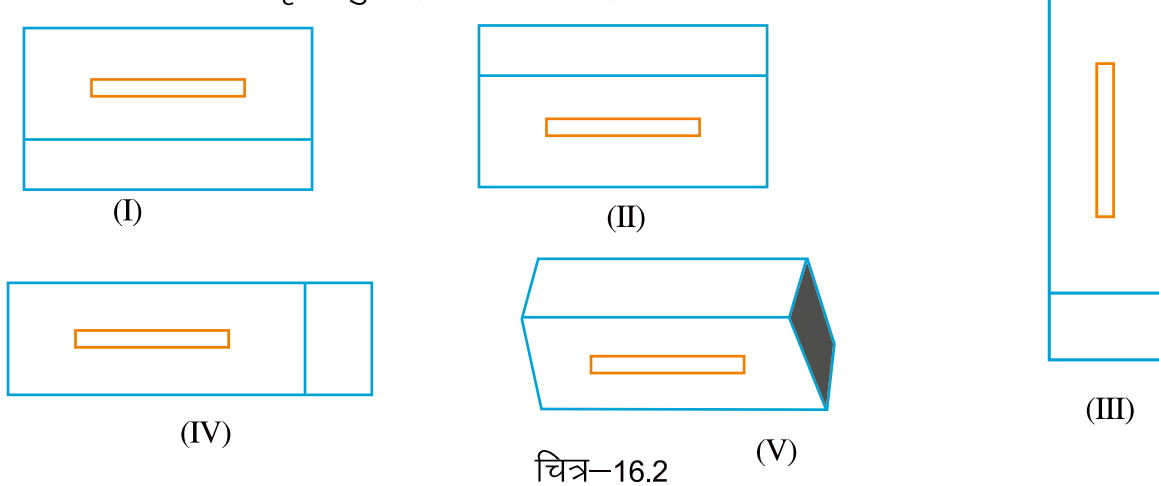
आइए करके देखें

आप निम्न आकृतियों से पूर्व परिचित हैं। आप इनकी रचना करना भी जानते हैं—



चित्र-16.1

क्या आप ईंट, डिब्बा, गोला जैसी वस्तुओं को कागज पर बना सकते हैं? कुछ छात्र/छात्राओं ने ईंट की आकृति कुछ इस प्रकार बनाई—



चित्र-16.2

क्या यह सब ठीक दिखते हैं? ये सभी वैसे दिख रही हैं जैसी ईंटें दिखती हैं?

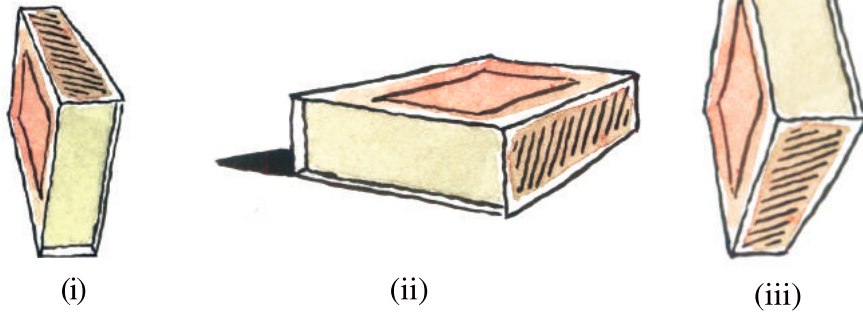
यह सभी आकृतियाँ एक दूसरे से भिन्न हैं।

क्या आप बता सकते हैं कि यह अलग-अलग क्यों हैं?

क्रियाकलाप 1.

इस बात को समझने के लिए माचिस का खाली डिब्बी लेकर माचिस को जलाने वाली (बारूद) सतह पर खड़ा करिए। माचिस कैसी दिखती है?

अब इसे इसकी बड़ी सतह पर रखिए।



चित्र-16.3

यह स्पष्ट है कि माचिस अब कुछ अलग तरह की दिख रही है। चित्र 16.3 (iii) को भी देखिए। इसमें छोटी सतह पर डिब्बी को खड़ा किया गया है। तीनों चित्र माचिस के हैं किन्तु अलग-अलग स्थिति के हैं।

ईंट के चित्र भी अलग-अलग स्थिति के हैं। ईंटें लेकर उन्हें विभिन्न चित्रों के आधार पर रख कर देखिए। क्या आप ऊपर के चित्रों के समान ईंटों को रख पाएँ?

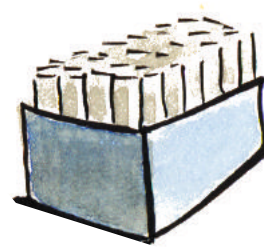


क्रियाकलाप 2.

आपने चॉक का डिब्बा देखा होगा। उसमें चॉक सीधे खड़े रखे जाते हैं। चॉक का एक भरा डिब्बा लीजिए और ठीक ऊपर से देखिए। आपको चॉक का वृत्तीय सिरा तो दिखेगा किन्तु उसकी लम्बाई नहीं।

अगर आप उसका चित्र बनाएँ तो कैसा दिखेगा? अनीता ने उसका चित्र कुछ इस प्रकार बनाया (चित्र 16.4) चॉक के खुले डिब्बे को सामने से बनाएँ तो वह कैसा दिखेगा?

इसमें अब चॉक का ऊपरी हिस्सा नहीं दिखेगा।



चित्र 16.4

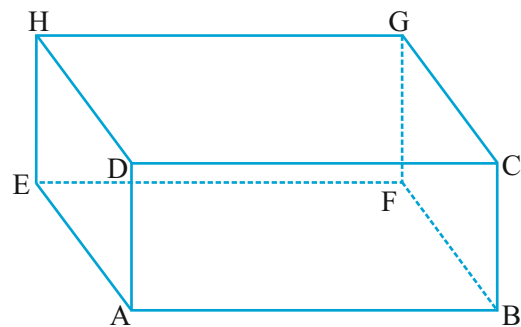
अभ्यास 1

ऐसी 5 वस्तुएं लेकर उनको विभिन्न स्थितियों से देखकर उन वस्तुओं का चित्र बनाइये।

वस्तु की अलग-अलग स्थितियों का चित्र

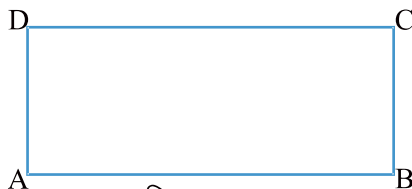
आइए, इस घनाभ की आकृति 16.5 को ध्यान से देखें—

इस आकृति को विभिन्न दिशाओं से देखने पर कुछ इस प्रकार दिखाई देता है—



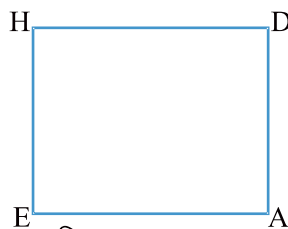
चित्र 16.5

ठीक सामने से देखने पर



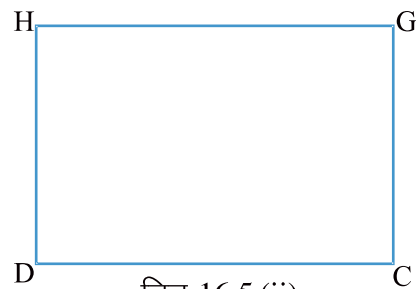
चित्र 16.5 (i)

ठीक ऊपर से देखने पर



चित्र 16.5 (iii)

बाँये (बगल) से देखने पर

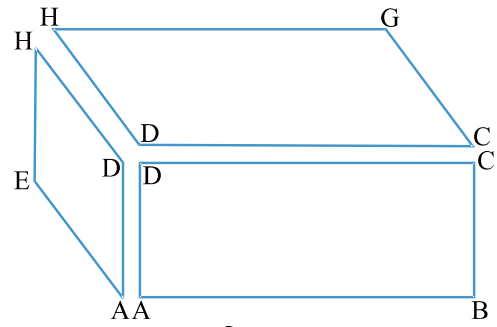


चित्र 16.5 (ii)

उपरोक्त तीनों आकृतियों को मिलाकर यदि एक आकृति बनाये तो पहले की आकृति बननी चाहिए। जिस प्रकार पहले की आकृति में एक विशेष झुकाव (कोण) के साथ इसकी फलकें आपस में जुड़ी हुई हैं उसी प्रकार इन तीनों आकृतियों को भी उसी विशेष झुकाव (कोण) के साथ जोड़ा जाये

तो पुनः वही आकृति प्राप्त होगी। यहाँ पर घनाभ की तीन ओर की फलकों को आपस में जोड़ा गया है। चित्र 16.5(iv)

अब यदि घनाभ की सभी छह फलकों को लेकर आपस में जोड़ें तो आकृति 16.5 प्राप्त होगी।

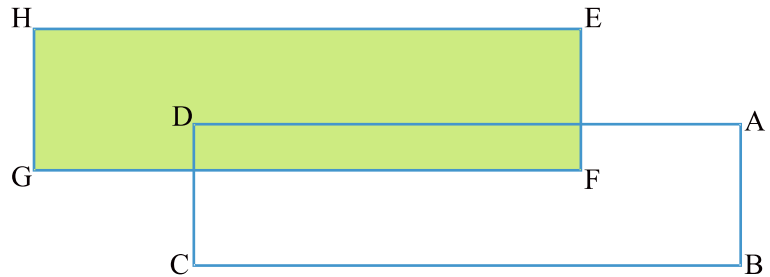


चित्र 16.5 (iv)

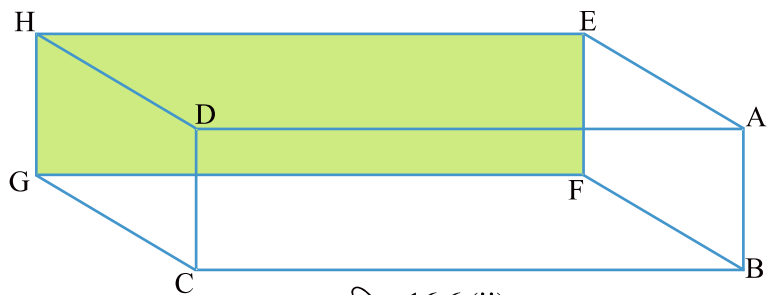
क्रियाकलाप-3.

घनाभ की आकृति बनाना

रचना – एक गत्ते का आयताकार टुकड़ा लेते हैं। कागज पर आयताकार गत्ते के टुकड़े को रखकर उसके चारों तरफ पेंसिल चलाते हैं। इसे चित्र में ABCD से दर्शाया गया है। अब गत्ते के टुकड़े के चित्रानुसार बाँयी ओर खिसका कर रखते हैं और पुनः उसके चारों ओर पेंसिल चलाते हैं। चित्र में इसे EFGH से दर्शाया गया है। इस EFGH को छायांकित किया गया है।



चित्र 16.6 (i)



चित्र 16.6 (ii)

आकृति-16.6(ii) के अनुसार क्रमशः AE, BF, CG तथा DH को मिलाया गया है जो अभीष्ट घनाभ की आकृति है।

इसमें 6 आयताकार फलक— ABCD, ABFE, BCGF, CDHG, DAEH, EFGH हैं तथा 12 कोर— AB, BC, CD, DA, AE, BF, CG, DH, EF, FG, GH, HE हैं एवं आठ शीर्ष— A, B, C, D, E, F, G, H हैं।

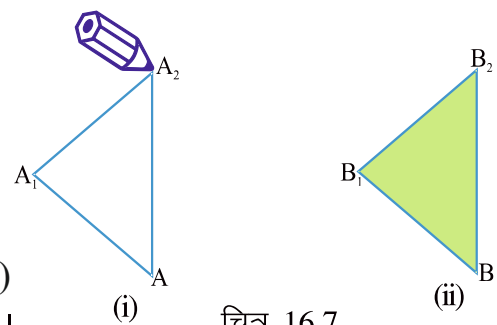
क्रियाकलाप-4.

त्रिभुजीय प्रिज्म की आकृति बनाना –

रचना एक त्रिभुजाकार गत्ते का टुकड़ा लीजिए और एक कागज पर उसके चारों ओर पेंसिल चलाकर आकृति (i) तथा उससे कुछ दूरी पर इसी प्रकार आकृति (ii) बनाइए।

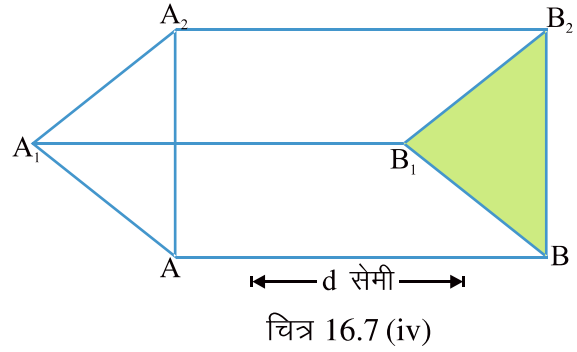
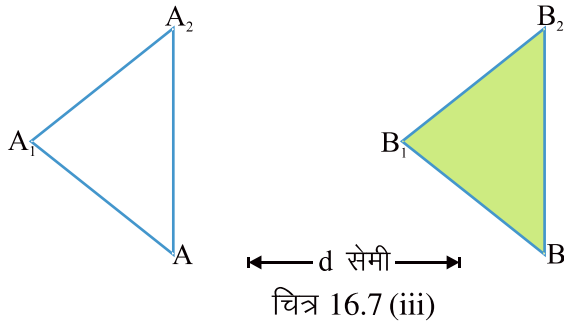
अब चित्र 16.7 (iii) की भाँति नामांकित कीजिए तथा AB,

A_1B_1 एवं A_2B_2 को मिलाइए और अब आपके सामने जो आकृति बनेगी वह चित्र 16.7 (iv) की भाँति



चित्र 16.7

होगी, जो कि अभीष्ट त्रिभुजीय प्रिज्म है।



इसमें तीन आयताकार फलक ABB_2A_2 , $A_1A_2B_2B_1$ तथा AA_1B_1B और दो त्रिभुजाकार फलक AA_1A_2 तथा BB_1B_2 हैं। इसमें 9 कोरें AB , A_1B_1 , A_2B_2 , AA_1 , A_1A_2 , A_2A , BB_1 , B_1B_2 तथा B_2B हैं और छह शीर्ष A , A_1 , A_2 , B , B_1 तथा B_2 हैं।

अभ्यास-2

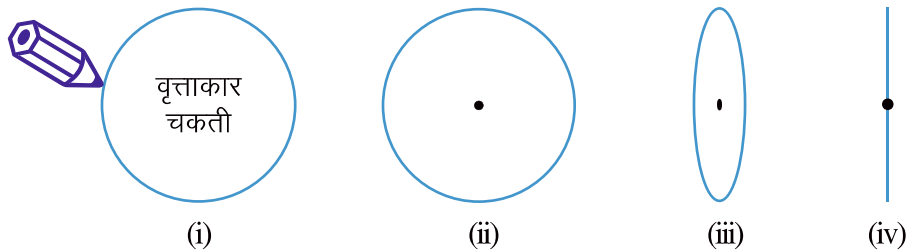
- वर्गाकार गत्ते की सहायता से घन की रचना कीजिए।
- एक त्रिभुजीय गत्ते की सहायता से 4 सेमी लम्बे प्रिज्म की रचना कीजिए।

क्रियाकलाप-5.

बेलन की आकृति बनाना

रचना — एक वृत्ताकार चकती लेकर उसके चारों ओर पेंसिल से परिधि खींचिए एवं केन्द्र बिन्दु भी निर्धारित कीजिए चित्र 16.8 (i) & (ii) अब आपके पास चित्र 16.8 (ii) जैसी वृत्ताकार आकृति है, जो कि चकती को ठीक सामने से देखने पर दिखाई देती है। अब चकती को थोड़ा घुमाकर उसकी तिरछी स्थिति को देखिये और जैसे दिखाई देता है लगभग वैसी आकृति बनाइये। चित्र 16.8 (iii)

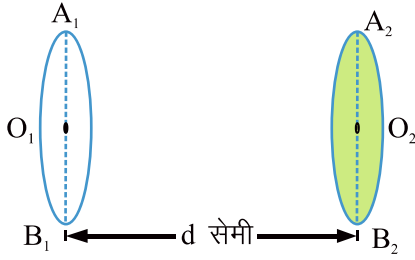
इसके बाद थोड़ा ओर घुमाकर चकती के एक किनारे से देखें तो यह चित्र 16.8 (iv) जैसी दिखाई देगी।



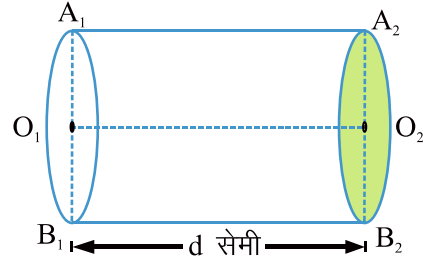
चित्र 16.8

अब चित्र 16.8 (iii) की आकृति के समान कुछ दूरी पर दो आकृतियाँ बनाइये। चित्र 16.8 (v) के अनुसार व्यास A_1B_1 और व्यास A_2B_2 को मिलाइये। उसके बाद A_1A_2 और B_1B_2 को मिलाइये। इस प्रकार एक बेलन की आकृति बन जाती है।

इसमें दोनों सिरों पर दो वृत्तीय फलक हैं एवं मध्य भाग वक्रिय है।



चित्र 16.8 (v)



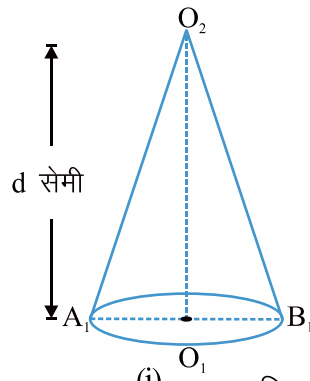
चित्र 16.8 (vi)



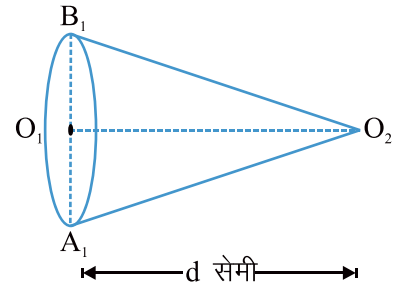
क्रियाकलाप 6

शंकु की आकृति बनाना –

चित्र 16.8 (iii) के समान एक आकृति बनाइये तथा कुछ दूरी पर लगभग मध्य में एक बिन्दु O_2 ले लें तथा $O_2 A_1$ और $O_2 B_1$ मिला दें तो प्राप्त आकृति शंकु की आकृति होती है। चित्र 16.9 (i & ii) इस आकृति में एक वृत्ताकार फलक तथा एक शीर्ष और वक्रिय पृष्ठीय भाग होता है।



(i)



(ii)

चित्र 16.9

अभ्यास-3

1. 5 सेमी लम्बाई के एक बेलन की रचना कीजिए।
2. 3 सेमी ऊँचाई के एक शंकु की रचना कीजिए।
3. कागज मोड़कर बेलन एवं शंकु के मॉडल बनाइये।

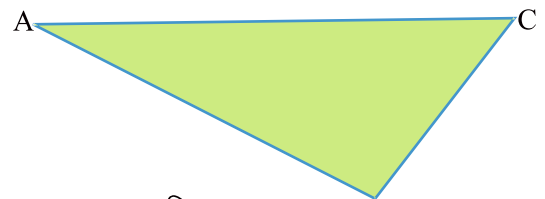


क्रियाकलाप 7.

चतुष्फलक की आकृति बनाना –

रचना

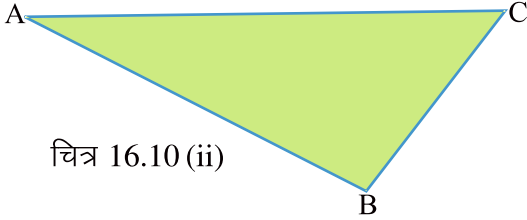
1. चित्र 16.10 (i) के अनुसार एक त्रिभुज बनाइये और छायांकित कीजिए।
2. अब उस त्रिभुज के ऊपर चित्र 16.10 (ii) के अनुसार कुछ दूरी पर एक बिन्दु P लीजिए।
3. अब उस त्रिभुज के शीर्षों A, B, C को क्रमशः बिन्दु P से मिलाइये। प्राप्त आकृति चित्र 16.10 (iii) की भांति होगी। यह अभीष्ट चतुष्फलक है।



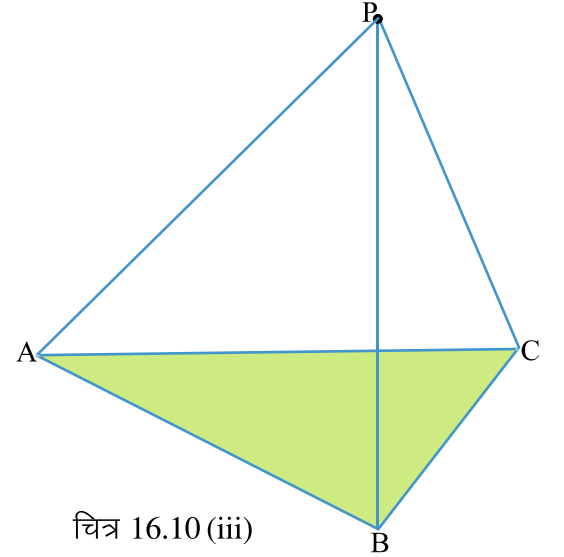
चित्र 16.10 (i) B

इसमें चार त्रिभुजीय फलक ABC, BCP, CAP तथा ABP हैं। ये त्रिकोणीय फलक भी कहलाते हैं। इसमें छः कोर AB, BC, CA, AP, BP तथा CP हैं और शीर्ष A, B, C तथा P हैं। इसमें प्रत्येक शीर्ष पर तीन कोरें मिलती हैं।

P.



चित्र 16.10 (ii)



चित्र 16.10 (iii)

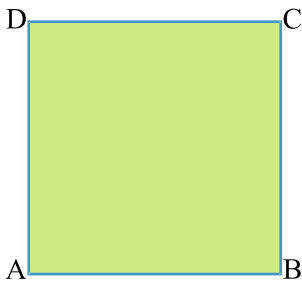


क्रियाकलाप 8.

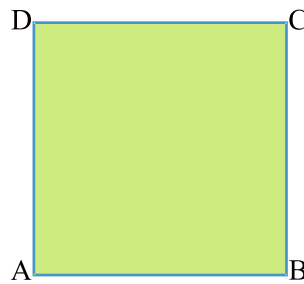
पिरामिड की आकृति बनाना

रचना

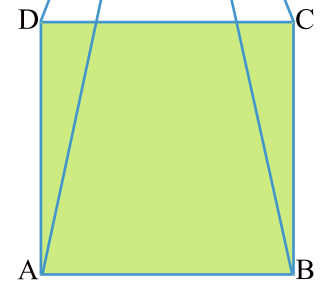
- चित्र 16.11(i) के अनुसार एक वर्ग



चित्र 16.11 (i)



चित्र 16.11 (ii)



चित्र 16.11 (iii)

की आकृति बनाइये और उसे छायांकित कीजिए।

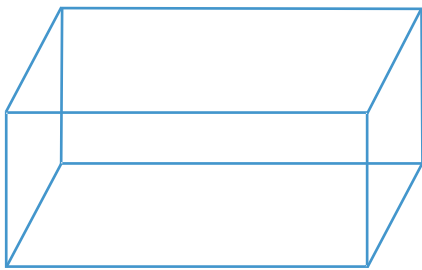
- अब चित्र 16.11 (ii) के अनुसार वर्ग के उपर लगभग बीच में कुछ दूरी पर एक बिन्दु P लीजिए।
- अब बिन्दु P को वर्ग के प्रत्येक शीर्ष से मिलाइये। आपको चित्र 16.11 (iii) की भांति एक आकृति प्राप्त होगी, यह आकृति पिरामिड है।

इसमें एक वर्गाकार फलक $ABCD$ एवं चार त्रिकोणीय फलक ABP, BCP, CDP एवं

DAP हैं। इसकी 8 कोरें AB, BC, CD, DA, AP, BP, CP तथा DP है और पांच शीर्ष A, B, C, D तथा P है।

छिपे पृष्ठों का बिन्दुकित रेखा द्वारा प्रदर्शन

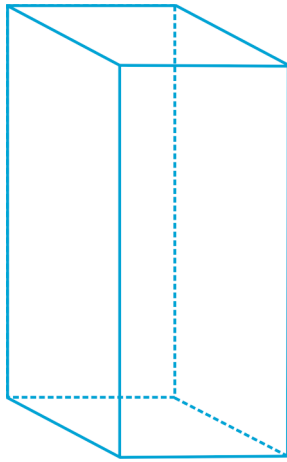
नीचे घनाभ की कुछ आकृतियाँ दी गई हैं। चित्र 16.12 (a) घनाभ की मूल आकृति है तथा अन्य आकृतियां घनाभ को विभिन्न स्थितियों में देखने पर बनती हैं। इन स्थितियों में घनाभ के कुछ भाग (शीर्ष, कोर एवं फलक) दिखाई नहीं देते। इनमें से शीर्ष एवं कोर को बिन्दुकित रेखा द्वारा दर्शाया गया है।



(a)



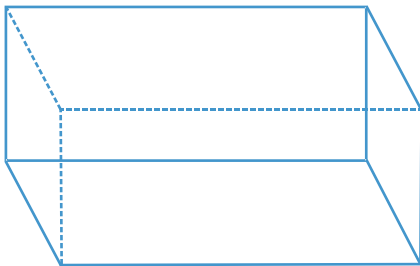
(b)



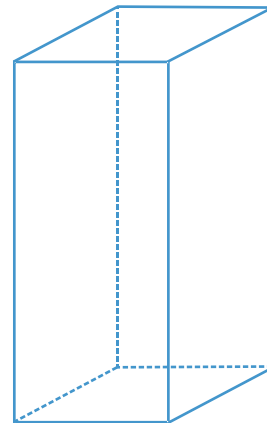
(c)



(d)



(e)



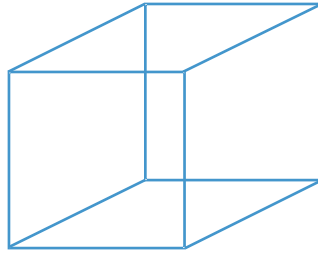
(f)

चित्र 16.12

अभ्यास-4

अब आप दिये गये आकृतियों के सामने से देखने पर छिपे हुए कोर एवं शीर्ष को बिन्दुकिता रेखा द्वारा प्रदर्शित करते हुए पुनः चित्र बनाइये। (काई दो स्थिति)

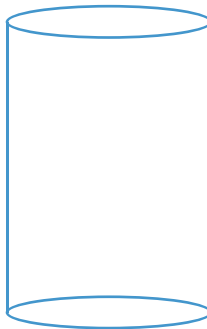
(A) घन



(B) त्रिभुजीय प्रिज्म



(C) बेलन



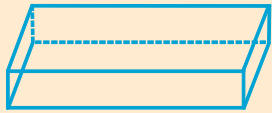
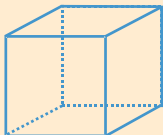
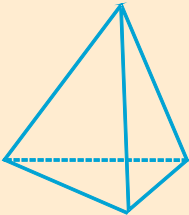
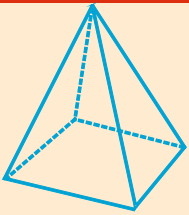
दी गई आकृतियों के शीर्ष, कोर और फलकों की पहचान एवं गणना करना।



क्रियाकलाप 9.

दिये गये आकृतियों में शीर्षों को नाम देकर शीर्षों, कोरों एवं फलकों को पहचानिए और सारणी में उनकी संख्या लिखिए। यहाँ घनाभ के शीर्ष, कोर एवं फलकों की संख्या को लिखकर एक संबंध बनाया गया है, शेष आकृतियों के संबंधित भागों की संख्या लिखकर उनमें संबंध स्थापित कीजिए।

सारणी 16.1

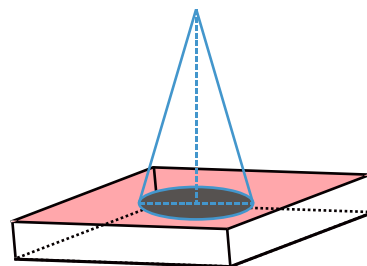
क्र.	आकृति नाम एवं आकृति	शीर्ष(V)	कोर(E)	फलक(F)	V-E+F
1.	घनाभ 	8	12	6	$8-12+6=2$
2.	घन 				
3.	चतुष्फलक 				
4.	पिरामिड 				
5.	प्रिज्म 				

इस सारणी को पूर्ण करने के पश्चात आप पायेंगे कि प्रत्येक बहुफलक (चार या चार से अधिक फलकों से बनी आकृति) के लिए $V-E+F$ का मान सदैव 2 प्राप्त होता है। इस संबंध को यूलर ने स्थापित किया था। अतः उन्हीं के नाम पर इसे **यूलर संबंध** कहते हैं।



क्रियाकलाप 10.

किसी माप का एक घनाभ बनाइये और उसके ऊपरी फलक पर घनाभ के चौड़ाई के आकार से कम त्रिज्या का शंकु बनाइये। आपका चित्र, चित्र 16.13 के अनुसार है जिसमें एक घनाभ तथा शंकु दिखाई देता है।

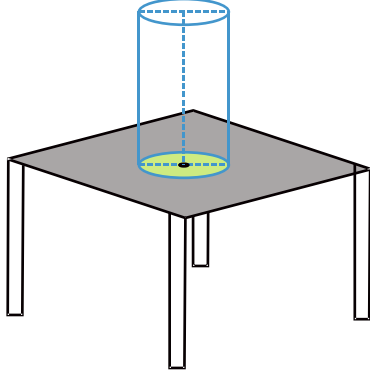


चित्र 16.13

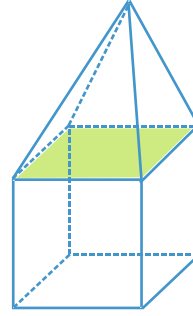


क्रियाकलाप 11.

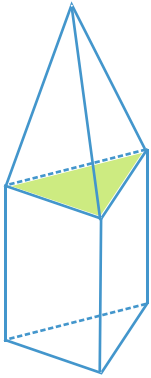
नीचे दिए गये प्रत्येक चित्र में एक से अधिक आकृतियाँ सम्मिलित हैं। प्रत्येक चित्र की आकृतियों को पहचान कर उनके नाम लिखिए।



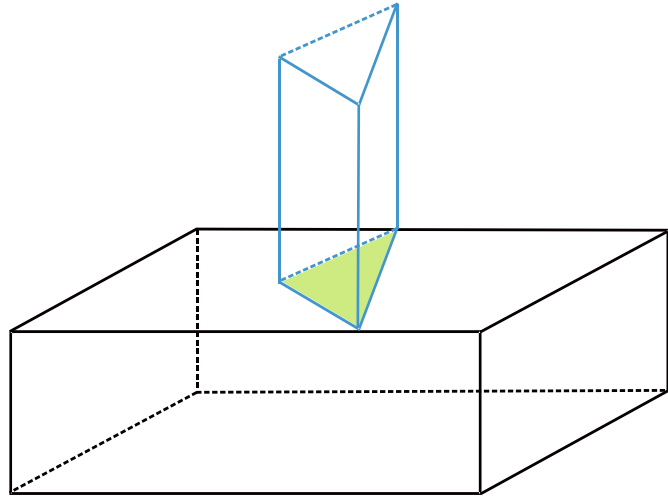
(a) बेलन एवं टेबल



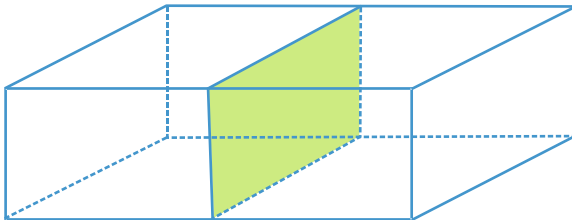
(b) -----



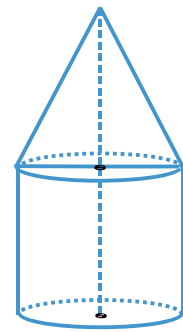
(c) -----



(d) -----



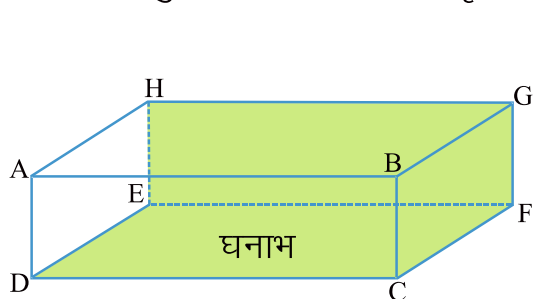
(e) -----



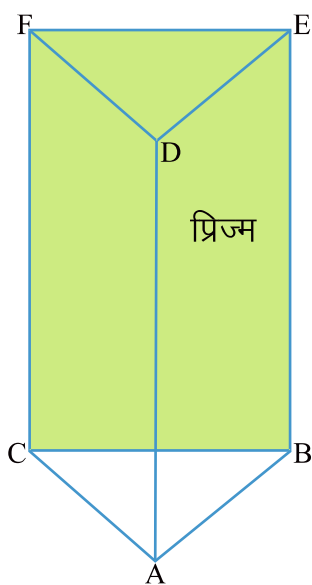
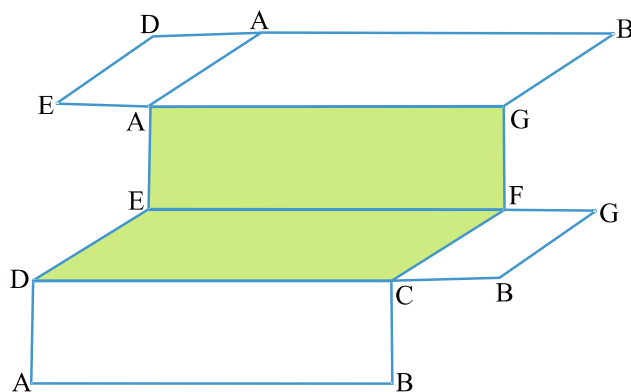
(f) -----

मॉडल बनाने हेतु सहायक आकृतियाँ

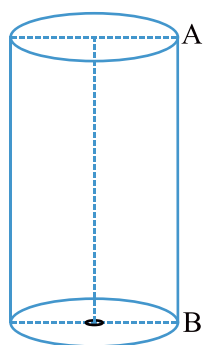
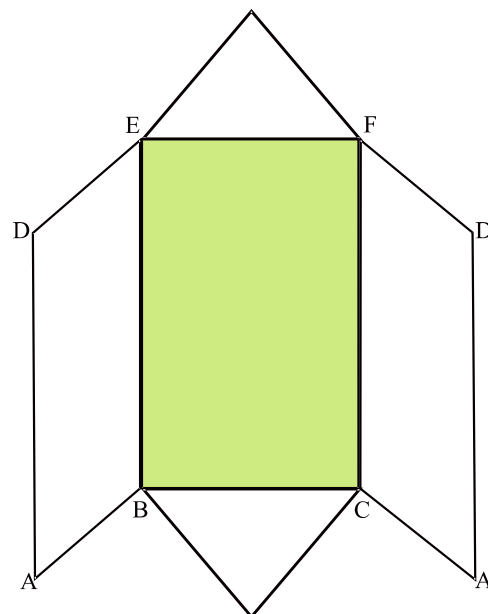
निम्न आकृतियों के फलकों को अलग करके दिखाया गया है। इनकी सहायता से आप कागज के टुकड़े काटकर उस आकृति का मॉडल बना सकते हैं।



चित्र 16.15

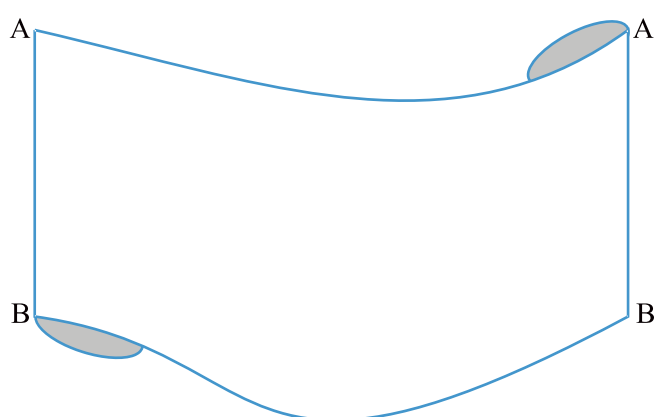


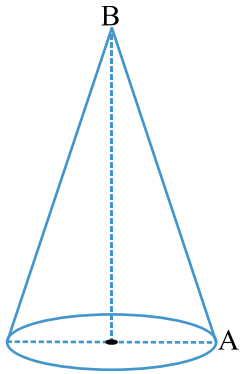
चित्र 16.16



बेलन

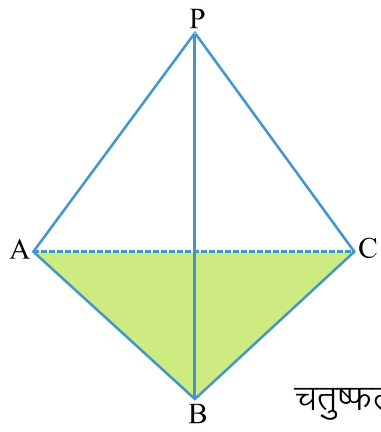
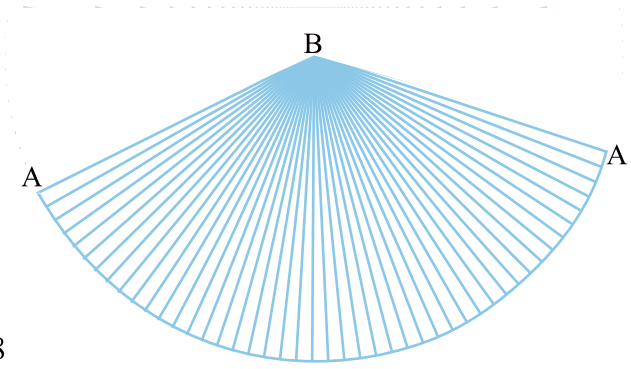
चित्र 16.17





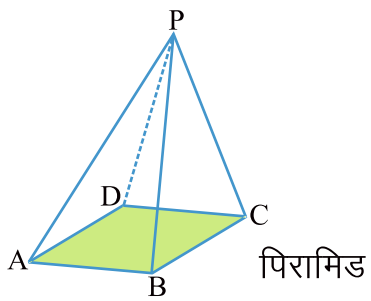
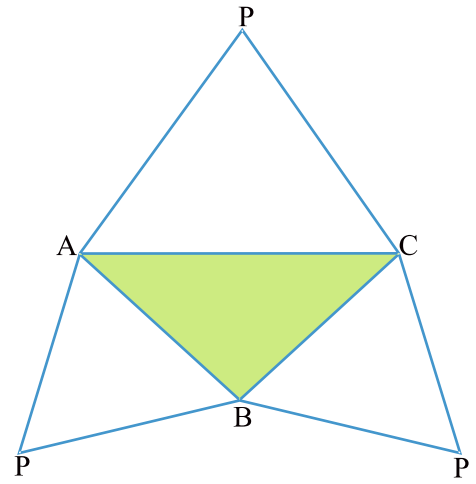
चित्र 16.18

शंकु



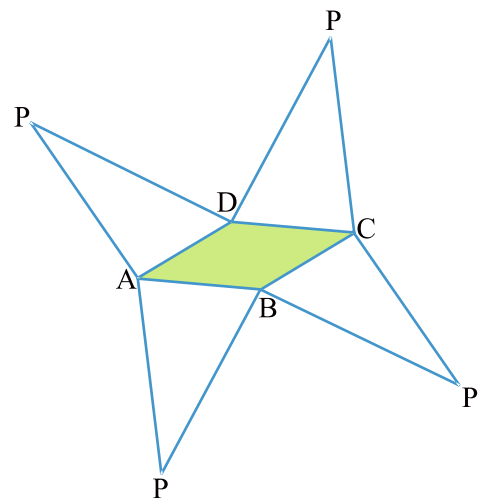
चित्र 16.19

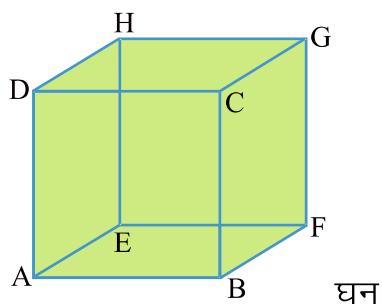
चतुष्फलक



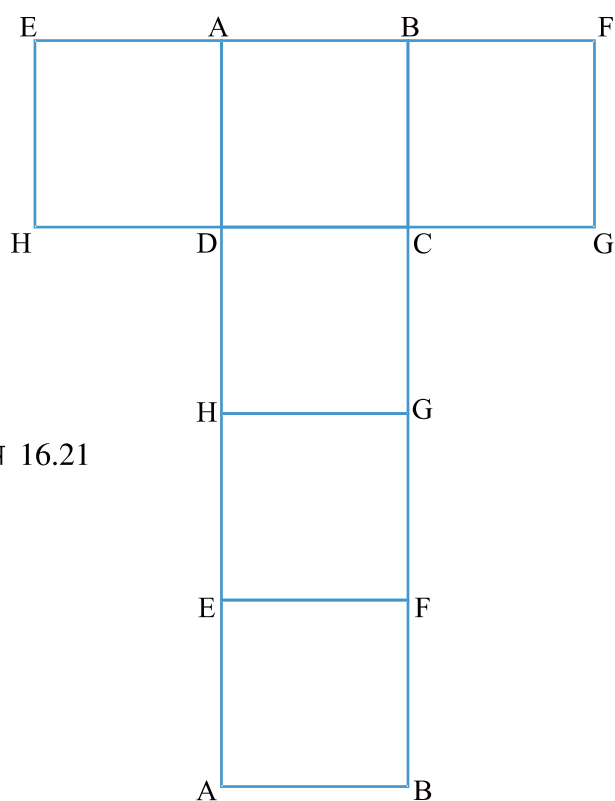
चित्र 16.20

पिरामिड





चित्र 16.21



टीप – घन को घनाभ के फलकों की भांति तथा घनाभ को घन के फलकों की भांति अलग किया जा सकता है।

प्रश्नावली 16

1. 3 सेमी वर्ग की सहायता से एक घन बनाइये।
2. 5 सेमी लम्बाई के एक बेलन की रचना कीजिए।
3. अपनी कॉपी में 5 सेमी दूरी पर दो त्रिभुज एक त्रिभुजाकार गत्ते के टुकड़े की सहायता से बनाइए और इनकी सहायता से त्रिभुजीय प्रिज्म की रचना कीजिए।
4. अपनी कॉपी में चतुष्फलक की रचना कीजिए।
5. एक बहुफलक में चार फलक तथा चार शीर्ष हों तो क्या आप बता सकते हैं कि उसमें कितनी कोर होंगी?



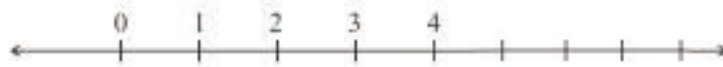


अध्याय—17

संख्याओं का खेल

PLAYING WITH NUMBERS

हमने संख्याओं के बारे में काफी कुछ सीखा है। हमने बड़ी से बड़ी संख्याओं को लिखना सीखा है, हमने यह भी सीखा कि गिनने के लिए जिन संख्याओं का उपयोग किया जाता है उन्हें प्राकृत संख्या कहते हैं। प्राकृत संख्या के समूह में अगर हम शून्य जोड़ दें तो पूर्ण संख्याओं का समूह प्राप्त होता है। पूर्ण संख्याओं में प्राकृत संख्याओं के सभी गुण मौजूद होते हैं। शून्य सबसे छोटी पूर्ण संख्या है। पूर्ण संख्याओं को 0, 1, 2, 3..... से लिखते हैं तथा पूर्ण संख्याओं (Whole Number) के समूह को W संकेत द्वारा बताते हैं। पूर्ण संख्याओं को समूह में इस प्रकार प्रदर्शित करते हैं – $W = \{0, 1, 2, 3 \dots\}$ पूर्ण संख्याओं का संख्या रेखा पर प्रदर्शन इस प्रकार किया जा सकता है।



चित्र 17.1

आईए पूर्ण संख्याओं पर आधारित कुछ प्रश्नों को हल करें –

- प्र.1. क्या आप सबसे बड़ी पूर्ण संख्या को बता सकते हैं?
- प्र.2. सबसे छोटी पूर्ण वर्ग विषम संख्या कौनसी है?.....
- प्र.3. 2, 5, 7 व 9 अंकों से चार अंकों की कितनी संख्याएँ बनाई जा सकती हैं?

- प्र.4. 2, 4, 6, 8 अंकों का उपयोग करके सबसे बड़ी व सबसे छोटी संख्याएँ बनाइए।
- प्र.5. पाँच अंकों की सबसे छोटी व चार अंकों की सबसे बड़ी संख्या का अन्तर बताइये।
- प्र.6. 3, 7, 9 को अंकों के रूप में उपयोग करके सबसे बड़ी तीन अंकों की संख्या कौनसी बन सकती है और सबसे छोटी कौनसी।
- (i) लता कहती है कि ऊपर प्राप्त, सबसे छोटी और सबसे बड़ी संख्या को जोड़ दें तो योगफल 11 से भाज्य होगा। क्या आप इससे सहमत हैं? जाँच करके देखिए।
- (ii) फातिमा ने कहा यह तो सिर्फ दो अंकों की संख्या के लिए ही सही है? फातिमा की बात की भी जाँच कीजिए।
- (iii) रमेश ने कहा जोड़ का तो पता नहीं किन्तु कोई भी 3 अंकों की संख्या तथा उसको उलट कर लिखने से प्राप्त संख्या में यदि बड़ी संख्या से छोटी संख्या घटा दें तो शेषफल 9 से भाज्य होगा और 11 से भी होगा। क्या यह बात सही है?
- (iv) ज्योति ने कहा तीन अंकों वाली संख्या ही नहीं, तुम कुछ अंक सोचो तथा उनसे बनने वाली

सबसे बड़ी संख्या से सबसे छोटी संख्या को घटाओ। यह हमेशा 9 से भाज्य होगी।

आइए एक खेल खेलें –

आप एक संख्या सोच लीजिए और उसके अंकों के योगफल को संख्या में से घटा दीजिए।

क्या यह 9 से विभाजित होगा? ऐसा क्यों होता है? कारण पता लगाइए।

माना कि आपने 7324 सोचा है, तब

$$\text{कथनानुसार } 7324 - (7 + 3 + 2 + 4)$$

$$= 7324 - 16$$

$$= 7308$$

जो कि 9 से विभाज्य है (क्योंकि इस संख्या के अंकों का योगफल 9 से विभाजित होता है)।

इसी प्रकार से आप भी अपने दोस्तों के साथ गणितीय खेल, खेल सकते हैं।

पूर्ण संख्याओं का योग

1. आइए, दो पूर्ण संख्याओं को जोड़कर देखें –

$$18 + 12 = 30 \text{ (पूर्ण संख्या)}$$

$$22 + 19 = 41 \text{ (पूर्ण संख्या)}$$

$$24 + 68 = 92 \text{ (पूर्ण संख्या)}$$

यहाँ 30, 41, 92 भी पूर्ण संख्याएँ हैं।

हम देखते हैं कि दो पूर्ण संख्याओं का योगफल भी पूर्ण संख्या है। क्या ऐसा हमेशा होगा?

आप भी कुछ और पूर्ण संख्याओं का जोड़ करके देखिए।

सोचिए, क्या कभी ऐसा होगा कि जोड़ पूर्ण संख्या न हो?

आप देखेंगे कि दो पूर्ण संख्याओं का योगफल सदैव एक पूर्ण संख्या होती है।

यदि **a** व **b** दो पूर्ण संख्याएँ हैं तो उनका योग **c** भी एक पूर्ण संख्या ही प्राप्त होती है। अर्थात् $a + b = c$, इस नियम को संवरक नियम कहते हैं।

2. आइए, फिर से दो पूर्ण संख्याओं को जोड़ते हैं

$$25 + 43 = 68 \text{ (पूर्ण संख्या)}$$

अब इन संख्याओं का क्रम बदल कर जोड़िये –

$$43 + 25 = 68 \text{ (पूर्ण संख्या)}$$

क्या दोनों योगफल समान हैं?

एक बार फिर दो संख्याओं को जोड़ें

$$10487 + 368 = 10855 \text{ (पूर्ण संख्या)}$$

अब इनका क्रम बदलकर फिर जोड़ें

$$368 + 10487 = 10855 \text{ (पूर्ण संख्या)}$$

क्या इनके योगफल में अन्तर है?

$$\text{इस प्रकार } 25 + 43 = 43 + 25 = 68$$

एवं $10487 + 368 = 368 + 10487 = 10855$

अतः दो पूर्ण संख्याओं का योग एवं उनका क्रम बदलकर जोड़ने पर योगफल समान होता है।

यदि a व b दो पूर्ण संख्याएँ हो तो उनका योग $(a + b)$ व उनका क्रम बदलकर योग $(b + a)$ करने पर योगफल समान होता है।

अर्थात् $a + b = b + a$ इसे हम योग का **क्रम विनिमेय नियम** कहते हैं।

3. आइये 0 में किसी पूर्ण संख्या को जोड़ें—

क्या संख्या के मान में परिवर्तन आता है? किसी पूर्ण संख्या a में 0 जोड़ने या 0 में कोई पूर्ण संख्या a जोड़ने पर दोनों स्थितियों में मान समान रहता है।

अर्थात् $a + 0 = 0 + a = a$ शून्य के इस विशेष गुण के कारण ही **शून्य को योग का तत्समक** कहते हैं।

4. अब हम तीन पूर्ण संख्याओं का योग करके देखते हैं। जैसे $17 + 29 + 44$ इस योगफल को दो तरीके से ज्ञात कर सकते हैं। हम पहली दो संख्याओं 17 व 29 का योग करके उनमें तीसरी संख्या 44 को जोड़ते हैं।

$$(17 + 29) + 44 = 46 + 44 = 90$$

अब हम अन्तिम दो पूर्ण संख्याएँ 29 व 44 का योग करके उसमें पहली संख्या को जोड़ते हैं।

$$17 + (29 + 44) = 17 + 73 = 90$$

दोनों स्थितियों में क्या योग समान है?

अतः $(17 + 29) + 44 = 17 + (29 + 44)$

अतः यदि a, b, c तीन पूर्ण संख्याएँ हैं, तो

$a + b + c = (a + b) + c = a + (b + c)$ यह योग का **साहचर्य नियम** कहलाता है।

यही क्रिया चार या चार से अधिक संख्याएँ लेकर कीजिए और बताइये कि क्या उनका योग भी समान आयेगा?

पूर्ण संख्याओं के घटाने के नियम

1. दो संख्याओं के घटाने के नियम

$$15 - 8 = 7 \text{ (पूर्ण संख्या)}$$

$$25 - 14 = 11 \text{ (पूर्ण संख्या)}$$

$$18 - 18 = 0 \text{ (पूर्ण संख्या)}$$

$$16 - 23 = \text{ क्या यह पूर्ण संख्या होगी?}$$

क्या दो पूर्ण संख्याओं को घटाने से सदैव पूर्ण संख्या प्राप्त हुई? यदि नहीं तो क्यों?

हाँ, यदि बड़ी पूर्ण संख्या में से छोटी पूर्ण संख्या को घटाते हैं या दो समान संख्याओं को आपस में घटाते हैं तो हमें पूर्ण संख्या प्राप्त होती है लेकिन छोटी पूर्ण संख्या में से बड़ी पूर्ण संख्या घटाते समय पूर्ण संख्या प्राप्त नहीं होती है।