क्षेत्रमिति
MENSURATION

इकाई – 6

आओ क्षेत्रमिति का इतिहास जानें

प्रायः गणितीय विचार दैनिक जीवन के अनुभवों से ही उजागर होते हैं। प्राचीन काल में लोग भूमि, दीवारों की ऊँचाई, कुएँ की गहराई आदि के मापन के लिए 'बित्ता' 'हाथ' इत्यादि के माप का प्रयोग करते थे। इन्हीं मापकों की सहायता से बड़े–बड़े राजप्रासादों, भवनों, किलों, तालाबों, सड़कों, नहरों, नालियों इत्यादि का निर्माण किया जाता था।

खेती के क्षेत्र का माप उसमें बोए बीजों की मात्रा के आधार पर, वजन का माप पत्थर व अन्य प्राकृतिक वस्तुओं को इकाई मान कर, आयतन का माप लोटे, गिलास आदि के रूप में होता था। इन मापों में घट–बढ़ के चलते इन मापों को एक ही इकाई से मापने की प्रथा बनी। भारत की सिंधु घाटी में ईसा से 5 शताब्दी पूर्व लंबाई मापने व वजन करने की मानकीकृत व्यवस्था थी। अलग–अलग माप के मानक/बाट थे, महँगी वस्तुओं के लिए छोटे और ज्यादा मात्रा में दी जाने वाली वस्तुओं के लिए बड़े बाट। ज्यादातर बाट घनाकार थे। यहाँ दो पलड़े वाली तराजू भी बनती थी, इस तरह लंबाई मापने के लिए भी मानक पैमाने थे, जो 1/16 इंच तक माप सकते थे। भारत से इनमें से कई, मापन के ढंग ईरान व मध्य एशिया में भी गए। आज की क्षेत्रमिति इन सबके आधार पर विकसित हुई। इसमें अनेक तरह के संदर्भ आते हैं। इनमें से कुछ हैंः–

1. किसी खेत के चारों ओर काँटेदार तार लगाने की लागत।
2. किसी कुएँ के जगत के निर्माण में लगने वाली ईंटों या पत्थरों की लागत।
3. किसी कमरे का क्षेत्रफल।
4. किसी टंकी का आयतन।
5. फर्श पर लगाए जाने वाले टाइल्स की संख्या व लागत।
6. खेत की जुताई या फसल कटाई का व्यय आदि का अनुमान लगाने में।

इनके लिए हमें बंद द्विआयामी आकृतियों के परिमाप, क्षेत्रफल तथा ठोस आकृतियों के पृष्ठीय क्षेत्रफल और आयतन ज्ञात करने पड़ते हैं। क्षेत्रमिति में हम त्रिभुज, चतुर्भुज, वृत्त, घन, घनाभ, बेलन, शंकु, गोला जैसे रेखागणितीय आकारों व आकृतियों के परिमाप, क्षेत्रफल, पृष्ठीय क्षेत्रफल, आयतन ज्ञात करना सीखते हैं।

भारतीय गणितज्ञों ने रेखागणितीय आकारों व आकृतियों के लिए कई सूत्र दिए जो वर्तमान में प्रचलित सूत्रों जैसे हैं। उदाहरण के लिए वृत्त के क्षेत्रफल के लिए आर्यभट्ट ने निम्नलिखित सूत्र दिया –

'समपरिणाहस्यार्थं विष्कंभार्धहतमेव वृत्तफलम्'

अर्थात्– वृत्त का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}$ (परिधि) $\times \frac{1}{2}$ (व्यास)

$= \pi r^2$

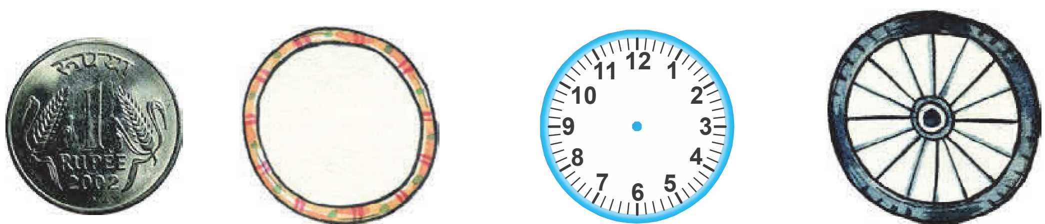
जहाँ r वृत्त की त्रिज्या है।

ये जानकारियाँ अलग–अलग ग्रंथों से संकलित कर प्रस्तुत की गई हैं। शिक्षक एवं विद्यार्थी अन्य स्रोतों से क्षेत्रमिति के संबंध में और भी जानकारियाँ प्राप्त कर सकते हैं।

वृत्त का त्रिज्याखण्ड एवं चाप की लम्बाई

[Sector of a Circle and Length of Arc] 14

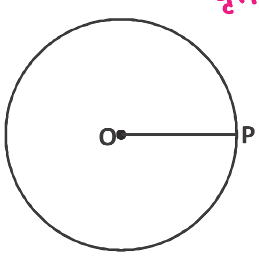
C1GHUT



चित्र–1

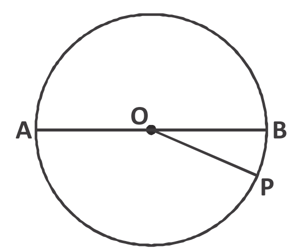
सिक्का, साइकिल का पहिया, घड़ी का डायल सभी वृत्ताकार हैं। इनके अलावा बहुत सी और चीजों के तल भी वृत्ताकार होते हैं। कुछ और ऐसी चीजों के नाम सोचें? इस अध्याय में हम वृत्त व उसके गुणों का अध्ययन करेंगे।

वृत्त का व्यास (Diameter of Circle)



चित्र–2

वृत्त से आप परिचित हैं। चित्र–2 में O वृत्त का केंद्र तथा OP वृत्त की त्रिज्या हैं। वृत्त का व्यास वह रेखाखण्ड है जिसके अंत बिंदु वृत्त की परिधि पर हों तथा वह वृत्त के केंद्र से होकर गुजरती हो। वृत्त का व्यास त्रिज्या का दुगुना होता है। चित्र–3 में AOB व्यास है।



चित्र–3

वृत्त का व्यास = 2 $\times$ त्रिज्या

वृत्त की परिधि (Circumference of Circle)

अलग–अलग त्रिज्याओं वाले वृत्तों की परिधि और उनके संगत व्यास का अनुपात निश्चित होता है। इस अनुपात को ग्रीक अक्षर π (पाई) से व्यक्त करते हैं।

अतः $\dfrac{\text{वृत्त की परिधि}}{\text{व्यास}} = \pi$

वृत्त की परिधि $= \pi \times$ व्यास

$= \pi \times$ (2 $\times$ त्रिज्या) ($\because$ व्यास = 2 $\times$ त्रिज्या)

यदि वृत्त की त्रिज्या r हो, तो

वृत्त की परिधि $= \pi \times (2 \times r)$

वृत्त की परिधि $= 2\pi r$

करके देखें

अपने आस–पास अलग–अलग आकार की वृत्ताकार वस्तुएँ खोजकर उनकी परिधि व व्यास का अनुपात निकालिए। क्या यह अनुपात निश्चित है? यदि हाँ तो कितना है?

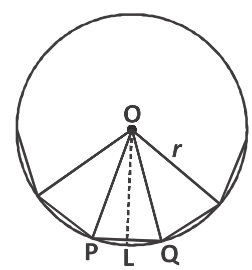
वृत्त का क्षेत्रफल (Area of Circle)

C1QIHG

माना कि O वृत्त का केंद्र है, जिसकी त्रिज्या r है। वृत्त के अंतर्गत n भुजा वाला समबहुभुज बनाइए। इस समबहुभुज के शीर्षों को केंद्र से मिलाकर त्रिभुजों की रचना कीजिए।

ऐसे एक त्रिभुज OPQ का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}$ PQ $\times$ OL

$= \frac{1}{2}$ भुजा $\times$ केंद्र से भुजा पर डाला गया लंब



चित्र–4

चूँकि केंद्र O से प्रत्येक भुजा पर डाला गया लंब बराबर है। अतः प्रत्येक त्रिभुज का क्षेत्रफल समान होगा।

$\therefore$ n त्रिभुजों का क्षेत्रफल

$= n \times \frac{1}{2}$ भुजा $\times$ केंद्र से भुजा पर डाला गया लंब

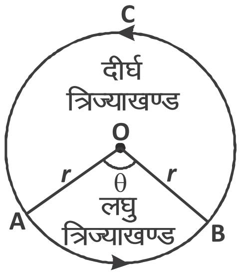
यदि भुजाओं की संख्या अनंत कर दी जाए तो बहुभुज का परिमाप वृत्त की परिधि के बराबर होगा तथा बहुभुज का क्षेत्रफल वृत्त के क्षेत्रफल के बराबर होगा। इस स्थिति में केंद्र से भुजा पर डाला गया लंब त्रिज्या के बराबर होगा।

$\therefore$ वृत्त का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times$ परिधि $\times$ त्रिज्या

$= \frac{1}{2} \times 2\pi r \times r$

$= \pi r^2$

वृत्त का त्रिज्याखण्ड (Sector of Circle)



चित्र–5

किसी वृत्त का त्रिज्याखण्ड वह क्षेत्र है, जो दो त्रिज्याओं तथा दोनों के अंतरस्थ चाप (परिधि का टुकड़ा) द्वारा घिरा होता है। चित्र में एक वृत्त है जिसका केंद्र O तथा त्रिज्या r है इस वृत्त की परिधि पर तीन बिंदु A, B व C हैं। A और B को वृत्त के केंद्र O से मिलाने पर त्रिज्याओं OA और OB के द्वारा वृत्त दो क्षेत्रों OAB और OBCA में विभक्त हो जाता है। इन क्षेत्रों को त्रिज्याखण्ड कहते हैं।

इन दोनों त्रिज्याखण्डों की परिसीमाएँ वृत्त का चाप होती है। यहाँ, त्रिज्याखण्ड OAB की परिसीमा $\overset{\frown}{AB}$ तथा त्रिज्याखण्ड OBCA की परिसीमा $\overset{\frown}{BCA}$ है।

माना चाप $\overset{\frown}{AB}$ केंद्र पर θ कोण अंतरित करती है तब ज्यामिति से चाप की लम्बाई उसके द्वारा केंद्र पर अन्तरित कोण के समानुपाती होती है।

$$\frac{\text{चाप की लम्बाई}}{\text{वृत्त की परिधि}} = \frac{\text{चाप द्वारा केंद्र पर अंतरित कोण}}{\text{वृत्त द्वारा केंद्र पर अंतरित कोण}}$$

$$\frac{\text{चाप की लम्बाई}}{\text{वृत्त की परिधि}} = \frac{\theta}{360^o}$$

$$\text{चाप की लम्बाई} = \frac{\theta}{360^o} \times \text{वृत्त की परिधि}$$

$$\boxed{\text{त्रिज्याखण्ड के चाप की लम्बाई} = \frac{\theta}{360^o} \times 2\pi r}$$

इसी प्रकार त्रिज्याखण्ड का क्षेत्रफल त्रिज्याओं के मध्य अंतरस्थ चाप द्वारा केंद्र पर अंतरित कोण के समानुपाती होता है।

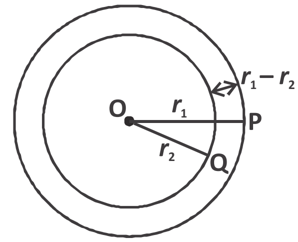
$$\therefore \frac{\text{त्रिज्याखण्ड का क्षेत्रफल}}{\text{वृत्त का क्षेत्रफल}} = \frac{\text{चाप द्वारा केंद्र पर अंतरित कोण}}{\text{वृत्त द्वारा केंद्र पर अंतरित कोण}}$$

$$\frac{\text{त्रिज्याखण्ड का क्षेत्रफल}}{\text{वृत्त का क्षेत्रफल}} = \frac{\theta}{360^o}$$

$$\text{त्रिज्याखण्ड का क्षेत्रफल} = \frac{\theta}{360^o} \times \text{वृत्त का क्षेत्रफल}$$

$$\boxed{\text{त्रिज्याखण्ड का क्षेत्रफल} = \frac{\theta}{360^o} \times \pi r^2}$$

वृत्ताकार मार्ग का क्षेत्रफल (Area of Circular Path)



चित्र–6

वृत्ताकार मार्ग दो संकेन्द्री वृत्तों से बना होता है। यदि इन दोनों बाह्य एवं आंतरिक oÙkksad h f=T; k ¡Øe' k% r_1 और r_2 हों तब

वृत्ताकार मार्ग की चौड़ाई = बाह्य त्रिज्या − आंतरिक त्रिज्या

$= r_1 - r_2$

वृत्ताकार मार्ग का क्षेत्रफल = बाह्य वृत्त का क्षेत्रफल − आंतरिक वृत्त का क्षेत्रफल

$= \pi r_1^2 - \pi r_2^2$

$= \pi(r_1^2 - r_2^2)$

वृत्ताकार मार्ग का क्षेत्रफल $= \pi(r_1^2 - r_2^2)$

उदाहरण–1. एक वृत्त का व्यास 14 सेमी. है वृत्त की परिधि एवं क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : वृत्त का व्यास $2r = 14$ सेमी.

$\therefore$ वृत्त की त्रिज्या $r = \frac{14}{2} = 7$ सेमी.

अतः वृत्त की परिधि $= 2\pi r$

$= 2 \times \frac{22}{7} \times 7 = 44$ सेमी.

और वृत्त का क्षेत्रफल $= \pi r^2$

$= \frac{22}{7} \times 7^2 = 154$ वर्ग सेमी.

उदाहरण–2. उस वृत्त का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जिसकी परिधि 176 सेमी. है।

हल : यहाँ वृत्त की परिधि = 176 सेमी.

$\therefore 2\pi r = 176$

$2 \times \frac{22}{7} \times r = 176$

$r = \frac{176 \times 7}{2 \times 22} = 28$ सेमी.

अतः वृत्त का क्षेत्रफल $= \pi r^2$

$= \frac{22}{7} \times (28)^2 = 2464$ वर्ग सेमी.

उदाहरण–3. दो वृत्तों की त्रिज्याएँ क्रमशः 8 सेमी. और 6 सेमी. हैं। उस वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए जिसका क्षेत्रफल इन दोनों वृत्तों के क्षेत्रफलों के योग के बराबर है।

हल : यहाँ यदि प्रथम वृत्त की त्रिज्या $r_1 = 8$ सेमी.

द्वितीय वृत्त की त्रिज्या $r_2 = 6$ सेमी.

तथा अभीष्ट वृत्त की त्रिज्या $R = ?$

तब अभीष्ट वृत्त का क्षेत्रफल = प्रथम वृत्त का क्षेत्रफल + द्वितीय वृत्त का क्षेत्रफल

$$\pi R^2 = \pi r_1^2 + \pi r_2^2$$
$$\pi R^2 = \pi(r_1^2 + r_2^2)$$
$$R^2 = r_1^2 + r_2^2$$
$$R^2 = 8^2 + 6^2$$
$$R^2 = 64 + 36$$
$$R^2 = 100$$
$$R = 10 \text{ सेमी.}$$

उदाहरण–4. एक वृत्तीय मैदान की त्रिज्या 35 मीटर है। एक लड़का उसके चारों ओर 5 किमी. प्रति घंटा की चाल से 10 चक्कर कितनी देर में लगा सकेगा?

हल : वृत्तीय मैदान की त्रिज्या $r = 35$ मीटर

एक चक्कर में लड़के द्वारा तय की गयी दूरी (परिधि) $= 2\pi r$

$\therefore$ 10 चक्कर में तय की गयी दूरी $= 10 \times 2\pi r$

$$= 10 \times 2 \times \frac{22}{7} \times 35$$

$= 2200$ मीटर = 2.2 कि.मी.

5 किमी. तय करने में लड़के को लगा समय = 60 मिनट

$\therefore$ 2.2 किमी. तय करने में लगा समय $= \dfrac{60 \times 2.2}{5}$ = 26.4 मिनट

या 26 मिनट 24 सैकण्ड

उदाहरण–5. उस वृत्ताकार मार्ग की चौड़ाई ज्ञात कीजिए जिसकी बाह्य और अंतः परिधियों की मापें क्रमशः 110 मीटर और 88 मीटर हैं।

हल : माना वृत्ताकार मार्ग की बाह्य त्रिज्या $= r_1$ मीटर

और वृत्ताकार मार्ग की आंतरिक त्रिज्या $= r_2$ मीटर

वृत्ताकार मार्ग की बाह्य परिधि = 110 मीटर

अतः $2\pi r_1 = 110$

$$2 \times \frac{22}{7} \times r_1 = 110$$

$$r_1 = \frac{110 \times 7}{2 \times 22} = 17.5 \text{ मीटर}$$

और वृत्ताकार मार्ग की अंतः परिधि = 88 मीटर

$$2\pi r_2 = 88$$

$$2 \times \frac{22}{7} \times r_2 = 88$$

$$r_2 = \frac{88 \times 7}{2 \times 22} = 14 \text{ मीटर}$$

अतः वृत्ताकार मार्ग की चौड़ाई $= r_1 - r_2$

$= 17.5 - 14 = 3.5$ मीटर

उदाहरण–6. एक 7 मीटर चौड़ी सड़क एक वृत्ताकार बगीचे को घेरती है। बगीचे की परिधि 352 मीटर है। मार्ग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : माना वृत्ताकार मार्ग की बाह्य त्रिज्या $= r_1$

और वृत्ताकार मार्ग की आंतरिक (बगीचे) की त्रिज्या $= r_2$

बगीचे की परिधि = 352 मीटर

अतः $2\pi r_2 = 352$

$$2 \times \frac{22}{7} \times r_2 = 352$$

$$r_2 = \frac{352 \times 7}{2 \times 22} = 56 \text{ मीटर}$$

अतः वृत्ताकार मार्ग की बाह्य त्रिज्या $r_1 = 56 + 7 = 63$ मीटर

$\therefore$ वृत्ताकार मार्ग का क्षेत्रफल $= \pi(r_1^2 - r_2^2)$

$$= \frac{22}{7} \times \left[(63)^2 - (56)^2\right]$$

$$= \frac{22}{7} \times (63 + 56)\,(63 - 56)$$

$$= \frac{22}{7} \times 119 \times 7 = 2618 \text{ वर्ग मीटर}$$

उदाहरण–7. एक 21 सेमी. के त्रिज्या वाले वृत्त से एक त्रिज्याखण्ड काटा गया है, जो केंद्र पर 120^o का कोण अंतरित करता है। त्रिज्याखण्ड के चाप की लम्बाई तथा क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ वृत्त की त्रिज्या $r = 21$ सेमी.

त्रिज्याखण्ड द्वारा केंद्र पर अंतरित कोण $\theta = 120^o$

अतः त्रिज्याखण्ड के चाप की लम्बाई $= \dfrac{\theta}{360^o} \times 2\pi r$

$$= \frac{120^o}{360^o} \times 2 \times \frac{22}{7} \times 21$$

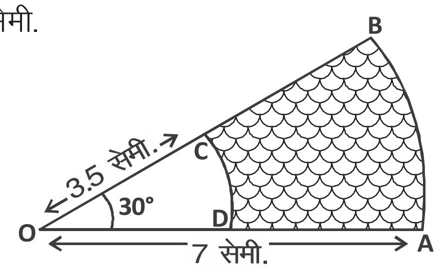
= 44 सेमी.

और त्रिज्याखण्ड का क्षेत्रफल $= \dfrac{\theta}{360^o} \times \pi r^2$

$$= \frac{120^o}{360^o} \times \frac{22}{7} \times (21)^2$$

= 462 वर्ग सेमी.

उदाहरण–8. दी गई आकृति के छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



चित्र–7

हल : छायांकित भाग ABCD का क्षेत्रफल

= त्रिज्याखण्ड OAB का क्षेत्रफल – त्रिज्याखण्ड OCD का क्षेत्रफल

$$= \frac{\theta}{360^o} \times \pi(OA)^2 - \frac{\theta}{360^o} \times \pi(OD)^2$$

$$= \frac{\theta}{360^o} \times \pi\left[(OA)^2 - (OD)^2\right]$$

$$= \frac{30^o}{360^o} \times \frac{22}{7} \times \left[(7)^2 - (3.5)^2\right]$$

$$= \frac{1}{12} \times \frac{22}{7} \times (7 + 3.5) \times (7 - 3.5)$$

$$= \frac{11}{6\times 7}\times 10.5\times 3.5$$

$= 9.625$ वर्ग सेमी.

प्रश्नावली – 14.1

1. उस वृत्त की परिधि ज्ञात कीजिए, जिसकी त्रिज्या 17.5 सेमी. है।
2. उस वृत्त का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जिसकी त्रिज्या 4.2 सेमी. है।
3. घास के मैदान में एक घोड़ा 14 मीटर लम्बी रस्सी से बँधा हुआ है। बताइए वह मैदान के कितने क्षेत्रफल की घास चर सकता है?
4. एक साइकिल के पहिये की त्रिज्या 35 सेमी. है, 500 पूरे चक्कर लगाने में यह कितनी दूरी तय करेगा?
5. एक वृत्त की त्रिज्या 3 मीटर है, दूसरे वृत्त की त्रिज्या क्या होगी जिसका क्षेत्रफल पहले वृत्त के क्षेत्रफल से 9 गुना है?
6. एक वृत्ताकार मार्ग की आंतरिक परिधि 440 मीटर है। मार्ग की चौड़ाई 14 मीटर है। मार्ग के बहिर्गत वृत्त का व्यास ज्ञात कीजिए।
7. एक वृत्ताकार घास के मैदान की त्रिज्या 50 मीटर है इसके अंदर की ओर चारों तरफ 5 मीटर चौड़ा रास्ता है। 30 रुपये प्रति वर्ग मीटर की दर से रास्ते में टाईल्स लगाने का खर्च बताइये?
8. उस त्रिज्याखण्ड के चाप की लम्बाई और क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जो उस वृत्त के केंद्र पर 70° का कोण बनाता है एवं जिसकी त्रिज्या 21 सेमी. है।
9. वृत्त के एक त्रिज्याखण्ड का क्षेत्रफल, वृत्त के क्षेत्रफल का $\frac{1}{6}$ है, तो त्रिज्याखण्ड का कोण ज्ञात कीजिए।
10. किसी त्रिज्याखण्ड का क्षेत्रफल 1540 वर्ग सेमी. है। वह केंद्र पर 50° का कोण अंतरित करता है, तो वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

C1ZEY4

हमने सीखा

1. वृत्त का व्यास (2×त्रिज्या), वृत्त की परिधि ($2\pi r$), वृत्त का क्षेत्रफल (πr^2), वृत्त के त्रिज्याखण्ड के बारे में जाना।
2. वृत्ताकार मार्ग का क्षेत्रफल $= \pi(r_1^2 - r_2^2)$; जहाँ r_1 व r_2 क्रमशः बाह्य एवं आंतरिक त्रिज्याएँ हैं।