परिशिष्ट 2

गणितीय निदर्शन (Mathematical Modelling)

A.2.1 भूमिका (Introduction)

पिछली कुछ शताब्दियों में की गई हमारी प्रगति ने, हमें विभिन्न क्षेत्रों जिसमें चाहे विज्ञान हो, या वित्त या प्रबंधन इत्यादि, में उत्पन्न होने वाली वास्तविक जीवन से जुड़ी समस्याओं में, गणितीय विधियों का इस्तेमाल करना आवश्यक कर दिया है। वास्तविक सांसारिक समस्याओं को हल करने में, गणित का प्रयोग, विशेष तौर पर कंप्यूटर की अभिकलन क्षमता एवं अभिकलनीय विधियाँ अत्यंत प्रचलित हैं तथा इनका प्रयोग लंबी एवं जटिल समस्याओं को हल करना सुगम बनाया है। वास्तविक जीवन की किसी समस्या को गणितीय रूप में अनुवादित करने की प्रक्रिया हमें एक बेहतर निरूपण एवं कुछ विशेष समस्याओं का हल प्रदान करती है। रूपांतरण की यह प्रक्रिया गणितीय **निदर्शन (प्रतिरूपण) कहलाती है।**

यहाँ हम इस प्रक्रिया से जुड़े चरणों का परिचय उदाहरणों द्वारा कराएँगे। सबसे पहले चर्चा करेंगे कि गणितीय निदर्शन क्या है? तत्पश्चात् निदर्शन की प्रक्रिया से जुड़े चरणों की चर्चा करेंगे।

A.2.2 प्रारंभिक प्रबंध (Preliminaries)

गणितीय निदर्शन, विश्व को समझने के लिए एक आवश्यक औज़ार है। पुराने समय में चीन, मिस्र, भारत, बेबीलोन और ग्रीक के लोगों ने प्राकृतिक घटनाओं को समझने और भविष्यवाणी करने के लिए अपने गणित के ज्ञान द्वारा अनुग्रह किया। वास्तुकला शास्त्रियों, शिल्पकारों और कारीगरों ने, अपनी बहुत सी कलाकृतियों को ज्यामितीय सिद्धांतों पर आधारित किया।

मान लीजिए एक सर्वेक्षक, एक मीनार की ऊँचाई मापना चाहता है। मापने वाले फीते का प्रयोग करके, इसकी ऊँचाई को मापना बहुत कठिन है। इसलिए दूसरा विकल्प होगा कि ऐसे घटकों को प्राप्त किया जाए जो कि ऊँचाई प्राप्त करने के लिए लाभदायक हैं। अपने त्रिकोणमिति के ज्ञान से, वह जानता है कि यदि उसे उन्नयन कोण और मीनार के पाद से, उस बिंदु तक की दूरी जहाँ वह खड़ा है, प्राप्त है तो वह मीनार की ऊँचाई की गणना कर सकता है।

इसलिए उसका काम मीनार की चोटी के उन्नयन कोण को, और मीनार के पाद बिंदु से, उस बिंदु तक की दूरी को, जहाँ वह खड़ा है, प्राप्त करना, अब सरल हो गया है। इन दोनों को आसानी से मापा जा सकता है। इस प्रकार यदि वह उन्नयन कोण को $40°$ और दूरी को 450 मी मापता है, तब इस समस्या, को उदाहरण 1 में वर्णित किया गया है।

© NCERT not to be republished

उदाहरण 1 एक मीनार की चोटी का उन्नयन कोण, भूमि पर बिंदु O से, जोकि, मीनार के पाद से 450 मी की दूरी पर है, 40° है। मीनार की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

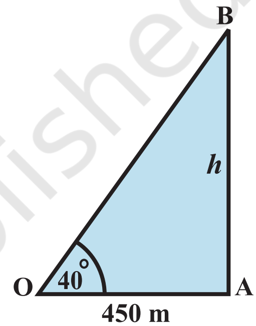
हल हम, इसे विभिन्न चरणों में हल करेंगे।

चरण 1 सबसे पहले हम वास्तविक समस्या को समझने का प्रयास करते हैं। समस्या में, एक मीनार दी हुई है और इसकी ऊँचाई मापी जानी है। माना h, ऊँचाई को निर्दिष्ट करता है। यह दिया है कि, भूमि पर बिंदु O से, मीनार के पाद की क्षैतिज दूरी, 450 मी है। माना d इस दूरी को निर्दिष्ट करता है। तब $d = 450$ मी । हम यह भी जानते हैं कि θ द्वारा निर्दिष्ट किया गया उन्नयन कोण, 40° है।

दी हुई दूरी d और उन्नयन कोण θ का प्रयोग करके, मीनार की ऊँचाई h निकालना, वास्तविक समस्या है।

चरण 2 समस्या में उल्लेखित तीन राशियाँ, ऊँचाई, दूरी और उन्नयन कोण हैं।

इसलिए हमें, इन तीन राशियों को जोड़ते हुए, एक संबंध प्राप्त करना है। यह इसे, ज्यामितीय रूप में व्यक्त करते हुए निम्नलिखित प्रकार, प्राप्त किया जाता है (आकृति 1)।



आकृति 1

AB मीनार को निर्दिष्ट करता है। OA, बिंदु O से, मीनार के पाद तक की क्षैतिज दूरी देता है। ∠AOB उन्नयन कोण है। तब हमें

$$\tan\theta = \frac{h}{d} \text{ or } h = d\tan\theta \text{ प्राप्त होता है।} \quad \ldots (1)$$

यह θ, h और d में संबंध स्थापित करने वाला एक समीकरण है।

चरण 3 हम, h का मान निकालने के लिए समीकरण (1) का प्रयोग करते हैं। $\theta = 40°$ और $d = 450$ मी दिया गया है, तब हमें, $h = \tan 40° \times 450 = 450 \times 0.839 = 377.6$ मी प्राप्त होता है।

चरण 4 अतः यह प्राप्त हुआ कि मीनार की ऊँचाई लगभग 378 मी है।

आइए अब हम, इस समस्या को हल करने में प्रयोग किए गए विभिन्न चरणों पर ध्यान दें, प्रथम चरण में हमने वास्तविक समस्या का अध्ययन किया और पाया कि समस्या में तीन प्राचल–ऊँचाई, दूरी और उन्नयन कोण हैं। इसका अर्थ है कि इस पद में हमने वास्तविक जीवन से जुड़ी समस्या का अध्ययन किया है और उसमें तीन प्राचलों–ऊँचाई, दूरी और उन्नयन कोण को पहचाना है।

चरण 2 में, हमने कुछ ज्यामिति का प्रयोग किया और पाया कि समस्या को ज्यामितीय ढंग से निरूपित किया जा सकता है जैसा कि आकृति 1 में दिया गया है। तब हमने स्पर्शज्या (tangent) फलन के लिए त्रिकोणमितीय अनुपात का प्रयोग किया और संबंध $h = d\tan\theta$ प्राप्त किया।

इसलिए इस चरण में हमने समस्या को गणितीय रूप से सूत्रित किया। इसका अर्थ है कि हमने वास्तविक समस्या का निरूपण करने वाला एक समीकरण प्राप्त किया।

© NCERT not to be republished

चरण 3 में, हमने गणितीय समस्या को हल किया और प्राप्त किया कि $h = 377.6$ मी०। अर्थात् हमें समस्या का हल प्राप्त हुआ।

अंतिम चरण में, हमनें समस्या के हल का निर्वचन किया और निर्दिष्ट किया कि, मीनार की ऊँचाई, लगभग 378 मी है। हम, इसे, इस प्रकार कहते हैं

वास्तविक स्थिति के संदर्भ में गणितीय हल का निर्वचन करना।

वास्तव में, ये, वो पद हैं, जिनका गणितज्ञों और दूसरे लोगों ने वास्तविक-जीवन से जुड़ी विभिन्न समस्याओं का अध्ययन करने के लिए प्रयोग किया। हम इस प्रश्न पर विचार करेंगे, ''विभिन्न समस्याओं को हल करने के लिए गणित का प्रयोग क्यों आवश्यक है?''

यहाँ कुछ उदाहरण हैं, जिनमें विभिन्न परिस्थितियों का अध्ययन करने के लिए गणित का सुचारू रूप से इस्तेमाल किया जाता है।

1. मनुष्यों और साथ-साथ पशुओं के शरीर के विभिन्न भागों में ऑक्सीजन और बल वर्द्धकों को पहुँचाने के लिए उपयुक्त रक्त प्रवाह आवश्यक है, रक्त का संकुचन अथवा रक्तवाहिनी नलियों के गुणों में किसी प्रकार का परिवर्तन, रक्त के बहाव को बदल सकता है और थोड़ी पीड़ा से अचानक मृत्यु तक, किसी भी प्रकार की हानि पहुँचा सकता है। यह समस्या, रक्त बहाव और शरीर विज्ञान से संबंधित रक्तवाहिनी नलियों की विशेषताओं के बीच, संबंध प्राप्त करने के लिए है।
2. क्रिकेट में तीसरा अम्पायर एक गेंद के प्रक्षेप पथ के निरूपण को देखकर और यह मानते हुए कि बल्लेबाज वहाँ नहीं है, पगबाधा का निर्णय लेता है। गेंद के बल्लेबाज के पाँव पर लगने से पहले, गेंद के वास्तविक पथों पर आधारित होने से, गणितीय समीकरणों की प्राप्ति होती है। पग-बाधा का निर्णय लेने के लिए, इस अनुकरण करने वाले निदर्श का प्रयोग किया जाता है।
3. अंतरिक्ष विद्या विभाग, गणितीय निदर्शों पर आधारित मौसम की भविष्यवाणियाँ करता है। कुछ प्राचल जो मौसम की स्थितियों में परिवर्तन को प्रभावित करते हैं, वो ताप, हवा का दबाव, आर्द्रता, हवा की गति आदि हैं। इन प्राचलों को मापने के लिए जिन संयत्रों का प्रयोग होता है, उनमें तापमान को मापनें के लिए थर्मामीटर, हवा के दबाव को मापने के लिए बैरोमीटर, आर्द्रता को मापने के लिए हाइड्रोमीटर और हवा की गति को मापने के लिए एनीमोमीटर शामिल हैं। एक बार जैसे ही देश के चारों ओर के बहुत से स्टेशनों से, स्वीकृत आँकडे प्राप्त होते हैं और कंप्यूटरों में आगे के विश्लेषण और अर्थनिर्वचन के लिए डाल दिए जाते हैं।
4. कृषि विभाग खड़ी फसलों से, भारत में चावल के उत्पादन का आंकलन करना चाहता है। वैज्ञानिक चावल की पैदावार के क्षेत्रों को पहचानते हैं और कुछ प्रतिरूप खेतों से फसलों को काटकर और तोलकर, प्रति एकड़ औसत उत्पाद प्राप्त करते हैं। कुछ साँख्यिकीय यंत्रकलाओं के आधार पर, चावल के औसत उत्पादन पर निर्णय लिये जाते हैं।

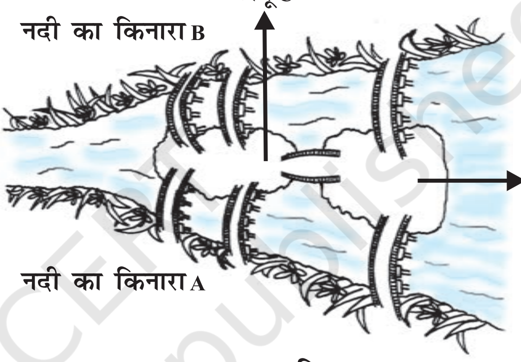
ऐसी समस्याओं को हल करने में गणितज्ञ कैसे सहायता करते हैं? वे क्षेत्र में विशेषज्ञों के साथ बैठते हैं, उदाहरण के लिए, पहली समस्या में शरीर विज्ञान-शास्त्री की सहायता से समस्या

© NCERT not to be republished

का गणितीय अनुरूप निकालते हैं। यह अनुरूप एक अथवा अधिक समीकरणों अथवा असमिकरणों इत्यादि से, जोकि गणितीय निदर्श कहलाते हैं, मिलता है। तब निदर्श को हल करते हैं और 'मौलिक समस्या के संदर्भ में हल की व्याख्या करते हैं। इस प्रक्रिया को समझने से पहले हम चर्चा करेंगे कि एक गणितीय निदर्श क्या है?

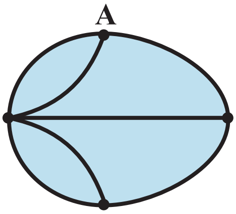
एक गणितीय निदर्श एक निरूपण है जोकि, एक परिस्थिति को समझाता है। निम्नलिखित उदाहरण द्वारा एक रुचिकर ज्यामितीय निदर्श को उल्लेखित किया गया है।

उदाहरण 2 (सेतु समस्या) कोनिग्सवर्ग प्रेगेल नदी पर बसा एक नगर है जोकि 18वीं शताब्दी में जर्मनी का एक नगर था, परंतु अब यह रूस में है। नगर के भीतर दो टापू हैं जिन्हें सात सेतुओं द्वारा नदी के किनारों से जोड़ा गया है (आकृति 2)



आकृति 2

प्रश्न था कि नगर के चारों ओर इस प्रकार चलना कि व्यक्ति, प्रत्येक सेतु से केवल एक बार गुजरे।, लेकिन यह एक कठिन समस्या सिद्ध हुई। Leonhard Euler, एक स्विस गणितज्ञ ने, जो रूसी साम्राज्य 'केथरींन दी ग्रेट' की सेवा में रत थे, इस समस्या के बारे में सुना। 1736 में आयलर ने सिद्ध किया कि ऐसे चलना संभव नहीं है। उन्होंने एक प्रकार की आकृति का, जो जाल क्रम कहलाती है, आविष्कार करते हुए इसे सिद्ध किया। यह जाल क्रम शीर्ष (सूक्ष्म चिह्न, जहाँ रेखाएँ मिलती हैं) तथा चापों (रेखाओं) का बना हुआ है (आकृति 3)। उन्होंने नदी के दोनों किनारों के लिए और दोनों टापूओं के लिए चार सूक्ष्म चिह्नों (शीर्षों) का प्रयोग किया। इनको A, B, C और D द्वारा चिह्नित किया गया है तथा सात चापों द्वारा सात सेतुओं को चिह्नित किया गया है। आप देख सकते हैं कि 3, सेतु (चाप) नदी के किनारे A को जोड़ते हैं और 3, नदी के किनारे B को जोड़ते हैं, 5 सेतु (चाप), टापू C को जोड़ते हैं और 3 टापू D को जोड़ते हैं। इसका तात्पर्य यह है कि सारे शीर्षों में चापों की संख्या विषम हैं इसलिए ये **विषम शीर्ष** कहलाते हैं (एक सम शीर्ष में, इसे जोड़ते हुए, एक सम संख्या वाले चाप होते हैं) (आकृति 3)।



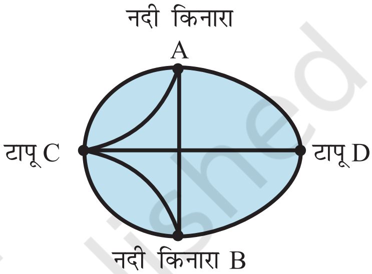
आकृति 3

याद रहे कि यह समस्या, नगर के इर्द-गिर्द यात्रा करने की थी जबकि एक सेतु से केवल एक बार ही गुजरा जा सकता है। Euler के जालक्रम से इसका अभिप्राय यह हुआ कि, सारे शीर्षों पर चलते हुए, प्रत्येक

© NCERT not to be republished

चाप पर केवल एक बार ही पैरों के चिह्न होंगे। Euler ने सिद्ध किया कि यह नहीं किया जा सकता, क्योंकि उन्होनें पता लगाया कि, विषम शीर्ष होने पर, आपको यात्रा उसी शीर्ष पर आरंभ और समाप्त करनी होगी (इसके बारे में सोचिए)। ऐसी स्थिति में जहाँ आरंभिक एवम् अंतिम स्थिति एक हो तथा, यदि पैरों के चिह्न हर चाप पर केवल एक बार पड़े, तब वहाँ केवल दो विषम शीर्ष हो सकते हैं। चूँकि इस सेतु समस्या में 4 विषम शीर्ष हैं, अत:, ऐसा करना संभव नहीं होगा।

आयलर द्वारा इस प्रमेय को सिद्ध करने के बाद में बहुत समय बीत गया, 1875 में, भूमि क्षेत्र A और D को जोड़ते हुए, एक अतिरिक्त सेतु का निर्माण किया गया (आकृति 4)। क्या अब कोनिग्सबर्ग के लोगों के लिए, एक सेतु का केवल एक बार प्रयोग करके, नगर के चारों ओर जाना संभव है?



आकृति 4

यहाँ स्थिति वैसी होगी, जैसा कि आकृति. 4 में दिखाया गया है। एक नए सेतु के जुड़ जाने के बाद, A और D दोनों शीर्ष, समघात के शीर्ष बन गए हैं। लेकिन B तथा C अभी भी विषम घात के हैं। इसलिए, कोनिग्सबर्ग वासियों के लिए एक सेतु का केवल एक बार प्रयोग करके, नगर के चारों ओर जाना संभव है।

परिपथ के आविष्कार से, एक नए सिद्धांत का आरंभ हुआ, जो आलेख सिद्धांत कहलाता है जिसे अब रेलवे परिपथ की योजना सहित विभिन्न रूपों में उपयोग किया जाता है (आकृति 4)।

A.2.3 गणितीय निदर्शन क्या है? (What is Mathematical Modelling?)

यहाँ हम परिभाषित करेंगे कि गणितीय निदर्शन क्या है और इसमें संबद्ध विभिन्न प्रक्रियाओं को उदाहरणों द्वारा स्पष्ट करेंगे।

परिभाषा गणितीय पदों में वास्तविक जीवन की समस्या के कुछ भाग (अथवा रूप) के अध्ययन के लिए गणितीय निदर्शन, एक प्रयास है।

भौतिकी स्थिति का कुछ उपयुक्त परिस्थितियों के साथ गणित में परिवर्तन करना **गणितीय निदर्शन** कहलाता है। गणितीय निदर्शन एक तकनीक है जिसे सूक्ष्म कलाओं से लिया गया है न कि मूल विज्ञान से। अब हम गणितीय निदर्शन से जुड़ी विभिन्न प्रक्रियाओं को समझते हैं। इस प्रक्रिया में चार पद सम्मिलित हैं। एक दृष्टांत युक्त उदाहरण के रूप में हम, एक सरल, लोलक की गति का अध्ययन करने के लिए, किए गए निदर्शन पर विचार करते हैं।

समस्या को समझना

उदाहरण के लिए, इसमें सम्मिलित है, सरल लोलक की गति से जुड़ी प्रक्रिया को समझना। हम सब, सरल लोलक से परिचित हैं। एक लोलक साधारण रूप से एक द्रव्यमान (जो बाब के रूप में जाना

जाता है) जो एक धागे के एक सिरे से जुड़ा है जिसका दूसरा सिरा एक बिंदु पर स्थिर है। हमने अध्ययन किया है कि सरल लोलक की गति सामयिक होती है। दोलन काल धागे की लंबाई और गुरुत्वीय त्वरण पर निर्भर करता है।

इसलिए, हमें इस समय सबसे बड़ी आवश्यकता दोलन काल प्राप्त करने की है। इस पर आधारित, समस्या का निश्चित कथन हम निम्नलिखित प्रकार से देते हैं:

कथन हम सरल लोलक का दोलन काल, केसे प्राप्त करते हैं?

अगला चरण सूत्रण होता है।

सूत्रण दो मुख्य चरणों से मिलता है।

1. प्रासंगिक घटकों को पहचानना इसमें, हम उन प्राचलों को ज्ञात करते हैं, जो समस्या में सम्मिलित हैं। उदाहरण के लिए, लोलक के मामले में, ये घटक हैं, दोलन काल (T) बाब का द्रव्यमान (m), लोलक की प्रभावशाली लंबाई जो कि स्थिर बिंदु से बाब के द्रव्यमान से केंद्र के बीच की दूरी है। यहाँ, हम धागे की लंबाई को, लोलक की प्रभावशाली लंबाई के रूप में लेते हैं और गुरुत्वीय त्वरण (g) को उस स्थान पर, एक स्थिर मान लेते हैं।

इसलिए, हमने समस्या का अध्ययन करने के लिए चार प्राचलों की पहचान की है। अब हमारा उद्देश्य T को प्राप्त करना है। इसके लिए हमें ये समझने की आवश्यकता है, कि वे कौन-कौन से प्राचल हैं, जो दोलन-काल को प्रभावित करते हैं, जिसको एक साधारण प्रयोग द्वारा किया जा सकता है।

हम, दो विभिन्न द्रव्यमानों की दो धातु की गेंद लेते हैं और उनमें से प्रत्येक को समान लंबाई वाले दो धागों से जोड़ते हुए, प्रयोग करते हैं। हम दोलन काल मापते हैं। हम निरिक्षण करते हैं कि द्रव्यमान के कारण, दोलन काल में किसी प्रकार का अवगम्य परिवर्तन नहीं होता है। अब, हम, इसी प्रयोग को, समान द्रव्यमान की गेंदों परंतु विभिन्न लंबाई के धागे लेकर करते हैं और निरीक्षण करते हैं कि दोलन काल, लोलक की लंबाई पर साफ तौर पर निर्भर करता है।

यह सूचित करता है कि दोलन-काल के मान ज्ञात करने के लिए द्रव्यमान m एक आवश्यक प्राचल नहीं हैं, जब कि लंबाई l, एक आवश्यक प्राचल है।

अगले चरण पर जाने से पहले, आवश्यक प्राचलों को ढूँढने की यह प्रक्रिया अनिवार्य है।

2. गणितीय वर्णन इसमें, पहले से पहचाने हुए प्राचलों का प्रयोग करके, एक समीकरण असमिका, अथवा ज्यामितीय आकृति, प्राप्त करना, सम्मिलित है।

सरल लोलक के मामले में, प्रयोग किए गए थे जिसमें, दोलन-काल T के मान, l के विभिन्न मानों के लिए मापे गए थे। इन मानों को एक आलेख पर दर्शाया गया जो कि एक वक्र के रूप में परिणमित हुआ जो कि एक परबलय से मिलता-जुलता था। यह संकेत करता है कि T और l के बीच का संबंध निम्नलिखित रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

$$T^2 = kl \qquad \dots (1)$$

यह पाया गया कि $k = \frac{2\pi^2}{g}$, इससे निम्नलिखित समीकरण प्राप्त होता है।

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \quad \ldots (2)$$

समीकरण (2) समस्या का गणितीय सूत्रण देता है।

हल प्राप्त करना गणितीय सूत्रण कदाचित ही, सीधा उत्तर देता है। सामान्य रूप से, हम कुछ क्रिया करते हैं, जिसमें एक समीकरण को हल करना, गणना अथवा एक प्रमेय का प्रयोग करना इत्यादि, शामिल है। सरल लोलकों की स्थिति में, समीकरण (2) में दिए गए सूत्र के अनुप्रयोग से हल मिलता है। विभिन्न लंबाई वाले, दो विभिन्न लोलकों के दोलन काल सारणी 1 में दर्शाया है।

सारणी 1

l	225 सेमी	275 सेमी
T	3.04 से.	3.36 से.

सारणी में दिखाया गया है कि l = 225 सेमी, T = 3.04 से. और l = 275 सेमी, T = 3.36 से.

मान्यकरण/अर्थ निर्वचन

गणितीय निदर्श एक वास्तविक जीवन की समस्या के आवश्यक गुणों को अध्ययन करने का एक प्रयास है। कई बार, निदर्श समीकरण, एक आदर्शीय संदर्भ में, परिस्थिति की परिकल्पना करके, प्राप्त किए जाते हैं। निदर्श, केवल, तभी लाभदायक होगा यदि यह उन सारे दृढ़ कथनों की व्याख्या करता है जिनकी कि हम वास्तव में व्याख्या करना चाहते थे। अन्यथा, हम इसे अस्वीकार करेंगे अथवा फिर से इसमें सुधार करेंगे और इसका फिर से परीक्षण करेंगे। दूसरे शब्दों में हम निदर्श, की प्रभावशीलता वास्तविक समस्या के बारे में उपलब्ध तथ्यों के साथ गणितीय निदर्श से प्राप्त परिणामों की तुलना करके, मापते हैं। यह प्रक्रिया, **निदर्श की मान्यकरण** कहलाती है। सरल लोलक के मामले में, हम लोलक पर कुछ प्रयोग करते हैं और दोलन काल प्राप्त करते हैं। प्रयोग के परिणाम सारणी 2 में दिए गए हैं।

सारणी 2

चार विभिन्न लोलकों के लिए प्रयोगिक रूप से प्राप्त किए गए दोलन काल

द्रव्यमान (किग्रा)	लंबाई (सेमी)	समय (से.)
385	275	3.371
	225	3.056
230	275	3.352
	225	3.042

© NCERT not to be republished

अब हम, सारणी 2 में मापे गए मानों की सारणी 1 में दिए गए, गणना किए गए मानों से तुलना करते हैं।

निरीक्षण मानों और गणना किए गए मानों के अंतर से त्रुटि प्राप्त होती है। उदाहरण के लिए $l = 275$ सेमी और द्रव्यमान = 385 ग्रा के लिए,

त्रुटि $= 3.371 - 3.36 = 0.011$, है

जो कि बहुत छोटी है और निदर्श स्वीकार किया जाता है। एक बार जब हम निदर्श को स्वीकार कर लेते है, तब हमें निदर्श का अर्थ निर्वचन करना है। वास्तविक परिस्थिति के संदर्भ में, हल वर्णन करने की प्रक्रिया, निदर्श का **अर्थ निर्वचन** कहलाता है। इस मामलें में, हम हल का अर्थ निर्वचन निम्नलिखित तरीके से कर सकते हैं:

(a) दोलन-काल, लोलक की लंबाई के वर्गमूल के अनुक्रमानुपाती होता है।

(b) यह, गुरुत्वीय त्वरण के वर्गमूल के व्युत्क्रमानुपाती होता है।

इस निदर्श का, हमारा मान्यकरण एवं अर्थ निर्वचन दिखाता है कि निदर्श से हमें समस्या का बहुत ही अच्छा उत्तर प्राप्त होता है। परंतु हमने पाया कि गणना किए गए परिणाम एवं मापे गए परिणाम में कुछ त्रुटि है। यह इसलिए है कि हमने, धागे का द्रव्यमान और माध्यम के प्रतिरोध की अवहेलना की है इसलिए ऐसी परिस्थिति में, हम एक बेहतर निदर्श को ढूँढते हैं और यह प्रक्रिया जारी रहता है।

यह, हमें एक आवश्यक निरीक्षण की ओर मार्ग दर्शित करता है। वास्तविक जीवन को समझना एवं उसका पूर्णरूप से वर्णन करना बहुत जटिल है। हम ऐसे एक अथवा दो पूर्ण रूप से अचूक घटकों को चुनते हैं जो परिस्थिति को प्रभावित करते हों। तब हम एक ऐसा सरल किया हुआ निदर्श प्राप्त करने का प्रयास करते हैं जोकि परिस्थिति के बारे में कुछ जानकारी देता है। हम, इस निदर्श के द्वारा, यह आशा करते हुए सरल परिस्थिति का अध्ययन करते हैं कि हम परिस्थिति का एक बेहतर निदर्श प्राप्त कर सकें।

अब हम, निदर्शन से जुड़ी मुख्य प्रक्रिया को इस प्रकार संक्षेपित करते हैं।

(a) सूत्रण (b) हल (c) मान्यकरण/अर्थ निर्वचन

अगला उदाहरण दिखाता है कि असमिका का आलेखीय हल प्राप्त करने की तकनीक का प्रयोग करके, निदर्शन कैसे किया जा सकता है।

उदाहरण 3 एक फार्म हाऊस में, प्रतिदिन, कम से कम 800 किग्रा विशेष आहार का प्रयोग होता है। विशेष आहार मक्का और सोयाबीन के निम्नलिखित संयोजन के अनुसार बना हुआ एक मिश्रण है।

सारणी 3

पदार्थ	उपस्थित बलवर्धक प्रति किग्रा प्रोटीन	उपस्थित बलवर्धक प्रति किग्रा रेशा	मूल्य प्रति किग्रा
मक्का	.09	.02	Rs 10
सोयाबीन	.60	.06	Rs 20

© NCERT not to be republished

विशेष आहार की, आहार संबंधी आवश्यकताएँ, कम से कम 30% प्रोटीन और अधिक से अधिक 5% रेशों की माँग करती हैं। प्रतिदिन, आहार-मिश्रण का न्यूनतम मूल्य निकालिए।

हल चरण 1 यहाँ, हमारा उद्देश्य मक्का और सोयाबीन से बने भोजन के प्रतिदिन के मूल्य को न्यूनतम करना है। इसलिए, वो चर (घटक), जिन पर विचार किया जाना है, निम्नलिखित हैं:

x = मक्का की राशि

y = सोयाबीन की राशि

z = पूरा मूल्य

चरण 2 सारणी 3 में अंतिम स्तंभ अंकित करता है कि z, x, y समीकरण से संबंध रखते हैं समस्या है, कि z, को निम्नलिखित व्यवरोधों के साथ, न्यूनतम बनाना: $z = 10x + 20y$ ... (1)

(a) फार्म में, मक्का और सोयाबीन का मिला हुआ, कम से कम 800 किग्रा आहार प्रयोग किया गया।

अर्थात् $x + y \geq 800$ ... (2)

(b) आहार में कम से कम 30% प्रोटीन आहार सम्बंधी आवश्यकता के अनुपात में होनी चाहिए जैसा कि सारणी 3 के प्रथम स्तंभ में दिया गया है। इससे

$0.09x + 0.6y \geq 0.3\ (x + y)$ प्राप्त होता है। ... (3)

(c) इसी प्रकार रेशा अधिक से अधिक 5% अनुपात में होना चाहिए जो कि तालिका 3 के दूसरे पृष्ठ स्तंभ में दिया गया है। इससे

$0.02x + 0.06\ y \leq 0.05\ (x + y)$ प्राप्त होता है। ... (4)

हम, x, y के सभी गुणकों को एकत्रित करते हुए, (2), (3) और (4) में दीए गए व्यवरोधों को सरल करते हैं तब समस्या निम्नलिखित गणितीय रूप में पुनः निर्दिष्ट की जा सकती है

कथन z को न्यूनतम बनायें, शर्त हैं

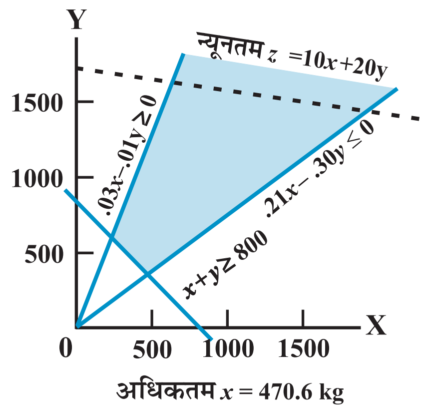
$$x + y \geq 800$$
$$0.21x - .30y \leq 0$$
$$0.03x - .01y \geq 0$$

यह निदर्श का सूत्रण प्रदान करता है।

चरण 3 यह आलेखीय ढंग से हल किया जा सकता है। आकृति 5 में, छायांकित क्षेत्र, समीकरणों का संभव हल देता है। लेखाचित्र से, यह स्पष्ट है कि इनका न्यूनतम मान बिंदु (470.6, 329.4) पर मिलता है अर्थात् $x = 470.6$ और $y = 329.4$

यह, z का निम्नलिखित मान देता है।

$$z = 10 \times 470.6 + 20 \times 329.4$$
$$= 11294 \text{ यह गणितीय हल है।}$$



अधिकतम x = 470.6 kg

y = 329.4 kg

z = Rs 11294

आकृति 5

© NCERT not to be republished

चरण 4 हल के विषय में यह कहते हुए अर्थ निर्वचित किया जा सकता है, कि "मक्का और सोयाबीन वाले विशेष आहार, जिसमें बल वर्धक अंश प्रोटीन तथा रेशा के इच्छित आवश्यक भाग है, का न्यूनतम मूल्य ₹11294 है और हम यह न्यूनतम मूल्य प्राप्त करते हैं यदि हम 470.6 किग्रा मक्का और 329.4 किग्रा सोयाबीन का प्रयोग करते हैं"।

अगले उदाहरण में, हम चर्चा करेंगे कि निदर्शन, किसी देश में एक विशिष्ट समय पर, जनसंख्या का अध्ययन करने के लिए, कैसे प्रयोग में लाया जाता है।

उदाहरण 4 मान लीजिए कि एक जनसंख्या नियंत्रक इकाई यह जानना चाहती है कि किसी देश में दस वर्ष बाद जनसंख्या क्या होगी?

चरण 1 सूत्रण हम निरीक्षण करते हैं कि जनसंख्या समय के साथ बदलती है और यह जन्म के साथ बढ़ती है और मृत्यु के साथ घटती है।

हम एक विशिष्ट वर्ष में जनसंख्या प्राप्त करना चाहते हैं। मान लीजिए t समय को वर्षों में निर्दिष्ट करता है। तब t के मान 0, 1, 2, ..., होते हैं। $t = 0$ वर्तमान समय को दर्शाता है, $t = 1$ अगले वर्ष को दर्शाता है, इत्यादि। किसी समय t के लिए मान लीजिए $p(t)$ उसी विशिष्ट वर्ष में जनसंख्या को निर्दिष्ट करता है।

मान लीजिए कि हम किसी विशिष्ट वर्ष में जनसंख्या प्राप्त करना चाहते हैं, उदाहरण के लिए $t_0 = 2006$ में हम यह कैसे करेंगे? हम एक जनवरी, 2005 को जनसंख्या प्राप्त करते हैं। उस वर्ष में हुए जन्मों की संख्या को उस वर्ष की जनसंख्या में जोड़ देते हैं और उस वर्ष मे हुई मृत्यु की संख्या को उस वर्ष की जनसंख्या से घटा देते हैं। मान लीजिए कि $B(t)$, t और $t+1$ के बीच एक वर्ष में जन्मों की संख्या को निर्दिष्ट करता है और $D(t)$, t और $t+1$ के बीच मृत्यु की संख्या को निर्दिष्ट करता है। तब हमें संबंध $P(t+1) = P(t) + B(t) - D(t)$ प्राप्त होता है।

अब हम कुछ परिभाषायें तथा अभिधारणाएँ करते हैं।

1. $\dfrac{B(t)}{P(t)}$ समय अंतराल t से $t+1$ के लिए **जन्म दर** कहलाती है।

2. $\dfrac{D(t)}{P(t)}$ समय अंतराल t से $t+1$ के लिए **मृत्यु दर** कहलाती है।

अभिधारणाएँ

1. जन्म दर सभी अंतरालों के लिए समान है। इसी प्रकार मृत्यु दर, सभी अंतरालों के लिए समान हैं। इसका अर्थ है कि एक अचर b है, जोकि जन्म दर कहलाती है, और एक अचर d है, जोकि मृत्यु दर कहलाती है, जिससे कि सभी $t \geq 0$ के लिए।

© NCERT not to be republished

$$b = \frac{B(t)}{P(t)} \text{ और } d = \frac{D(t)}{P(t)} \text{ हैं।} \quad \dots (1)$$

2. जनसमुदाय में अथवा जनसमुदाय से कोई आवास या प्रवास नहीं हुआ है अर्थात् जनसंख्या परिवर्तन के स्रोत केवल जन्म और मृत्यु हैं।

अभिधारणाओं 1 और 2 के परिणामस्वरूप, हम तर्क द्वारा निर्णय करते हैं कि, $t \geq 0$ के लिए,

$$\begin{aligned} P(t+1) &= P(t) + B(t) - D(t) \\ &= P(t) + bP(t) - dP(t) \\ &= (1 + b - d)\, P(t) \quad \dots(2) \end{aligned}$$

(2) में $t = 0$ रखते हुए, प्राप्त होता है,

$$P(1) = (1 + b - d)P(0) \quad \dots (3)$$

समीकरण (2) में $t = 1$ रखते हुए, प्राप्त होता है,

$$\begin{aligned} P(2) &= (1 + b - d)\, P(1) \\ &= (1 + b - d)(1 + b - d)\, P(0) \quad \text{(समीकरण (3) प्रयोग करके)} \\ &= (1 + b - d)^2\, P(0) \end{aligned}$$

इस प्रकार हमें

$$P(t) = (1 + b - d)^t\, P(0) \text{ प्राप्त होता है।} \quad \dots (4)$$

$t = 0, 1, 2, \dots$ के लिए, अचर $1 + b - d$ को अकसर संक्षिप्त रूप में r कहते हैं और **विकास दर** कहलाता है सामान्य रूप में Robert Malthus के सम्मान में, जिसने, इस निदर्श को सबसे पहले प्रस्तुत किया, यह Malthusian स्थिर राशि कहलाती है। r के संबंध में, समीकरण (4) से

$$P(t) = P(0)r^t,\ t = 0, 1, 2, \text{ प्राप्त होता है।} \quad \dots (5)$$

यहाँ $P(t)$, एक चरघातांकी फलन का एक उदाहरण है। cr^t रूप का कोई फलन, जहाँ c और r अचल हैं, एक चरघातांकी फलन होता है।

समीकरण (5), समस्या का, गणितीय सूत्रण देता है।

चरण 2–हल

मान लीजिए कि वर्तमान जनसंख्या 250,000,000 है और जन्म दर एवं मृत्यु क्रमशः $b = 0.02$ और $d = 0.01$ है। दस वर्षों में जनसंख्या कितनी होगी? सूत्र का प्रयोग करके, हम P(10) की गणना करते हैं।

$$\begin{aligned} P(10) &= (1.01)^{10}\,(250,000,000) \\ &= (1.104622125)\,(250,000,000) \\ &= 276,155,531.25 \end{aligned}$$

© NCERT not to be republished

चरण 3 मान्यकरण और अर्थ निर्वचन

स्वाभाविक रूप से, यह परिणाम निरर्थक है क्योंकि एक व्यक्ति का 0.25 नहीं हो सकता। इसलिए, हम कुछ सन्निकटन करते हैं और इस निष्कर्ष पर पहुँचते हैं कि जनसंख्या 276,155,531 है (सन्निकटतः) । यहाँ, गणितीय निदर्श में हमारी मानी गई अभिधारणाओं के कारण, हमें यथार्थ उत्तर नहीं मिलता।

ऊपर वाले उदाहरण दिखाते हैं कि विभिन्न गणितीय तकनीकों का प्रयोग करके, कई प्रकार की परिस्थितियों में, निदर्शन कैसे किया जाता है।

क्योंकि एक निदर्श, किसी वास्तविक समस्या का, सरल किया हुआ निरूपण है, इसके विशेष गुण के कारण, इसमें बनायी गई कई अभिधारणाएँ और सन्निकटन हैं। स्पष्ट रूप से, सबसे आवश्यक प्रश्न, यह निर्णय लेने का है कि क्या हमारा निदर्श अच्छा है या नहीं, इसका तात्पर्य यह है कि जब प्राप्त किए गए परिणामों को भौतिक रूप से अर्थ निर्वाचित किया जाता है कि क्या निदर्श, तर्क करने योग्य उत्तर देता है या नहीं। यदि एक निदर्श पर्याप्त यथार्थ नहीं है, हम कमियों के स्रोतों को पहचानने का प्रयास करते हैं। यह संयोगवश हो सकता है कि हमें एक नए सूत्रण, नई गणितीय दक्षता को लेने पड़े। इसलिए एक नए मूल्यांकन की आवश्यकता होती है। इस प्रकार गणितीय निदर्शन, निदर्शन प्रक्रिया का एक चक्र हो सकता है, जैसाकि निम्नलिखित प्रवाह-सचित्र में दिखाया गया है: